วิชาสามัญ คณิตศาสตร์ 1 (ธ.ค. 58)

วันอาทิตย์ที่ 27 ธันวาคม 2558 เวลา 8.30 - 10.00 น.

ตอนที่ 1 แบบระบายตัวเลขที่เป็นคำตอบ จำนวน 10 ข้อ ข้อละ 2 คะแนน รวม 20 คะแนน

1. ให้ $S = \left\{ x \;\middle|\; x \text{ เป็นจำนวนเต็มที่สอดคล้องกับอสมการ } 6|x-3| < 5x \right\}$
จำนวนสมาชิกของ S เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
   1. 14
   2. 15
   3. 16
   4. 17
   5. 18

2. กำหนดให้ $P(x) = ax^5 + bx^3 + cx + d$ เมื่อ a, b, c, d เป็นค่าคงตัว ถ้า $x - 1$ หาร $P(x)$ เหลือเศษ 10 และ x หาร $P(x)$ เหลือเศษ 6 แล้ว $x + 1$ หาร $P(x)$ เหลือเศษเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
   1. -10
   2. -6
   3. 2
   4. 4
   5. 6

3. ถ้า $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก 3 มิติ โดยที่ $|\bar{u}| = \sqrt{5}$ และ $|\bar{v}| = \sqrt{3}$ แล้ว $|\bar{u} \cdot \bar{v}|^2 + |\bar{u} \times \bar{v}|^2$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
   1. $\sqrt{15}$
   2. $\sqrt{5} + \sqrt{3}$
   3. 8
   4. $5\sqrt{3} + 3\sqrt{5}$
   5. 15

4. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงบวก ถ้า $\log_{a^2} b = 5$ แล้ว $\log_{b^2} a$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{20}$
2. $\frac{1}{10}$
3. $\frac{1}{5}$
4. 10
5. 20

5. ถ้า S เป็นเซตของจำนวนจริง a ซึ่งทำให้ระบบสมการ
$$\begin{aligned} ax + 2y - 2z &= -1 \\ x + y - z &= 0 \\ 2x + y + 2z &= 2 \end{aligned}$$
มีคำตอบเพียงคำตอบเดียว แล้ว S คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$
2. $(-\infty, -1) \cup (0, \infty)$
3. $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$
4. $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$
5. $\{-2, -1, 1, 2\}$

6. $\tan\left[\frac{\pi}{4} + \arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right]$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-\frac{1}{7}$
2. $-\frac{1}{9}$
3. $\frac{1}{9}$
4. $\frac{1}{7}$
5. 9

7. ตารางแจกแจงความถี่สัมพัทธ์ของคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มหนึ่งเป็นดังนี้

คะแนนสอบ	ความถี่สัมพัทธ์
0 – 19	0.1
20 – 39	0.1
40 – 59	0.3
60 – 79	0.3
80 – 99	0.2

ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบของนักเรียนกลุ่มนี้ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 57.5 คะแนน
2. 58.5 คะแนน
3. 60.5 คะแนน
4. 62.5 คะแนน
5. 63.5 คะแนน

8. พิจารณา $\lim_{x\to 2}\left(\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x+2}-\frac{8}{x^2-4}\right)$ ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. หาค่าไม่ได้
2. มีค่าเท่ากับ $-\frac{3}{4}$
3. มีค่าเท่ากับ $-\frac{1}{4}$
4. มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{4}$
5. มีค่าเท่ากับ $\frac{3}{4}$

9. ถ้า $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ เป็นลำดับเรขาคณิต โดยที่ $a_1 = 96$ และ $a_4 = 12$

แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 120
2. 128
3. 144
4. 192
5. 288

10. ถ้า $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 - 5 & \text{เมื่อ} \quad x < -1 \\ -5 & \text{เมื่อ} \quad -1 \le x \le 1 \\ (x-1)^2 - 5 & \text{เมื่อ} \quad x > 1 \end{cases}$

แล้ว $(f \circ f)'(2)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -12
2. -8
3. 0
4. 8
5. 12

ตอนที่ 2 แบบปรนัย 5 ตัวเลือก เลือก 1 คำตอบที่ถูกที่สุด จำนวน 20 ข้อ ข้อละ 4 คะแนน รวม 80 คะแนน

11. กำหนดให้ z_1, z_2 และ z_3 เป็นรากที่ 3 ของจำนวนเชิงซ้อนจำนวนหนึ่ง

ถ้า z_1 อยู่ในควอดรันต์ที่ 1 โดยที่ $|z_1| = 2$ และ $z_3 = \overline{z_1}$ แล้ว $z_2 + z_3$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$
2. $-1 - \sqrt{3}\mathrm{i}$
3. $-1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$
4. $-\sqrt{2} + \sqrt{2}\mathrm{i}$
5. $\sqrt{2} - \sqrt{2}\mathrm{i}$

12. เศษเหลือที่ได้จากการหาร 11^{111} ด้วย $1{,}210$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1
2. 11
3. 111
4. 121
5. 211

13. ถ้า a และ b เป็นค่าคงตัว ซึ่งอสมการ $\frac{x+a}{(x+b)^2} \geq 0$ มีเซตคำตอบคือช่วง $(1, \infty)$ แล้ว $a+b$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -2
2. -1
3. 0
4. 1
5. 2

14. กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วซึ่งมีด้าน $\mathrm{AB} = \mathrm{AC}$ ถ้ามุม $\mathrm{A} = 150°$ และด้าน BC ยาวเท่ากับ 16 หน่วย แล้ว พื้นที่สามเหลี่ยม ABC เท่ากับข้อไปต่อไปนี้

1. $\frac{64}{3}$ ตารางหน่วย
2. $64(2-\sqrt{3})$ ตารางหน่วย
3. $32(3-\sqrt{2})$ ตารางหน่วย
4. 64 ตารางหน่วย
5. $64(2+\sqrt{3})$ ตารางหน่วย

15. ให้ $\bar{u}, \bar{v}$ และ $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในระบบพิกัดฉากสามมิติ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $(\bar{u} \times \bar{v}) \cdot \bar{w} = \bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w})$

ข. $(\bar{u} \times \bar{v}) \times \bar{w} = \bar{u} \times (\bar{v} \times \bar{w})$

ค. $(\bar{u} - \bar{v}) \cdot (\bar{u} + \bar{v}) = |\bar{u}|^2 - |\bar{v}|^2$

ง. $(\bar{u} - \bar{v}) \times (\bar{u} + \bar{v}) = 2(\bar{u} \times \bar{v})$

จำนวนข้อความที่ถูกต้อง เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 (ไม่มีข้อความใดถูก)
2. 1
3. 2
4. 3
5. 4

16. ให้ s เป็นวงกลมที่อยู่ในควอดรันต์ที่ 1 ซึ่งสัมผัสแกน X และ แกน Y และเส้นตรง ℓ ซึ่งมีสมการเป็น $3x-4y+24=0$ ถ้า C เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม s และ P เป็นจุดที่วงกลม s สัมผัสเส้นตรง ℓ แล้วสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด C และจุด P คือข้อใดต่อไปนี้

1. $4x+3y-28=0$
2. $4x+3y-32=0$
3. $4x+3y-40=0$
4. $3x+4y-28=0$
5. $3x+4y-32=0$

17. กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์มิติ 3×3 ซึ่ง $[A:I]\sim[I:P]$ โดยที่ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์มิติ 3×3 และ $P=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&-1&2\\1&0&-1\end{bmatrix}$ ถ้า $A\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$ แล้ว a มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -17
2. -5
3. $-\frac{17}{5}$
4. $\frac{5}{17}$
5. $\frac{17}{5}$

18. ผลบวกของคำตอบของสมการ $9^{\log x}-10(3^{\log x})+9=0$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 11
2. 99
3. 101
4. 111
5. 1001

19. กำหนดให้ $S = \{\, x \mid 0 < x < 2\pi$ และ $125(5^{4\cos 2x}) = 4(5^{4\cos^2 x}) + 25 \,\}$

S เป็นสับเซตของเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $\left\{\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{10\pi}{8}, \frac{12\pi}{8}, \frac{14\pi}{8}\right\}$
2. $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}, \frac{4\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{8\pi}{6}, \frac{9\pi}{6}\right\}$
3. $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{6\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$
4. $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}, \frac{8\pi}{6}, \frac{7\pi}{4}\right\}$
5. $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

20. ความสูง (เซนติเมตร) ของเด็กกลุ่มหนึ่งจำนวน 9 คน

$152\ ,\ \ 153\ ,\ \ 155\ ,\ \ 158\ ,\ \ 159\ ,\ \ 160\ ,\ \ 162\ ,\ \ 166\ ,\ \ 175$

ถ้าสุ่มเลือกเด็กกลุ่มนี้มา 3 คน ความน่าจะเป็นที่เด็กทั้งสามคนเตี้ยกว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิตของความสูงของเด็กกลุ่มนี้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{3}{84}$
2. $\frac{5}{42}$
3. $\frac{5}{28}$
4. $\frac{5}{15}$
5. $\frac{25}{42}$

21. มีเลขโดด 9 จำนวน คือ $-7\ ,\ -5\ ,\ -3\ ,\ -1\ ,\ 0\ ,\ 2\ ,\ 4\ ,\ 6\ ,\ 10$ ถ้าสุ่มเลขโดดนี้มา 4 จำนวน แล้วความน่าจะเป็นที่ผลคูณของเลขโดด 4 จำนวนนี้ไม่เป็นจำนวนลบเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{47}{126}$
2. $\frac{70}{126}$
3. $\frac{41}{63}$
4. $\frac{47}{63}$
5. $\frac{56}{63}$

22. คะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนห้องหนึ่งมีการแจกแจงปกติ ถ้าผลต่างของคะแนนที่เปอร์เซนไทล์ 67 และเปอร์เซนไทล์ที่ 33 เท่ากับ 11 คะแนน แล้วส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานคือข้อใดต่อไปนี้
เมื่อกำหนดตารางแสดงพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติ

z	0.17	0.33	0.44	0.67
พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติ	0.066	0.13	0.17	0.25

1. 9.5 คะแนน
2. 11 คะแนน
3. 12.5 คะแนน
4. 14 คะแนน
5. 15.5 คะแนน

23. ให้ x_1 , x_2 , x_3 , … , x_{11} เป็นข้อมูล 11 จำนวน ซึ่งเรียงกันเป็นลำดับเรขาคณิต
ถ้าผลคูณ $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_{11} = 2^{33} \cdot 3^{22}$ แล้วมัธยฐานของข้อมูลชุดนี้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 36
2. 72
3. 144
4. 216
5. 426

24. ถ้าลำดับ $a_n = \int_n^{\frac{n(n+2)}{2}} \frac{1}{x^2}\,dx$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{4}$
2. $\frac{1}{2}$
3. $\frac{3}{4}$
4. 1
5. $\frac{5}{4}$

25. กำหนดให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม ซึ่ง $f'(x) = 3x^2 - 6x$ และ $G(x) = \begin{cases} x+5 & \text{เมื่อ } x < -1 \\ f(x) & \text{เมื่อ } x \geq -1 \end{cases}$

ถ้า $G(x)$ ต่อเนื่องที่ $x = -1$ แล้ว f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -2
2. -1
3. 2
4. 3
5. 4

26. ผลการสอบวิชาประวัติศาสตร์ซึ่งมีคะแนนเต็ม 20 คะแนนของนักเรียน 10 คน เป็นดังนี้

x , 16 , 8 , 12 , 13 , 7 , 9 , 11 , 18 , y

ถ้าค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบเท่ากับ 12.7 คะแนน แล้วมัธยฐานของคะแนนสอบเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 10 คะแนน
2. 11 คะแนน
3. 11.5 คะแนน
4. 12 คะแนน
5. 12.5 คะแนน

27. ถ้า $f(x) = \sum_{k=1}^{100} k \cdot x^{2k-1}$ แล้ว $\frac{1}{\sqrt{2}} f(\sqrt{2})$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $1 + 99 \cdot 2^{99}$
2. $1 + 100 \cdot 2^{99}$
3. $\sqrt{2} + 99 \cdot 2^{99}$
4. $1 + 99 \cdot 2^{100}$
5. $1 + 100 \cdot 2^{100}$

28. กำหนดให้ $A = \{ 1, 2, 3, \dots , 155 \}$ และ i เป็นจำนวนเชิงซ้อน ซึ่ง $\mathrm{i}^2 = -1$

ถ้า $B = \left\{ x \in A \;\middle|\; \left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^{2x-5} = \mathrm{i}^{x-2} \right\}$ แล้วจำนวนสมาชิกของ B เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 19
2. 20
3. 35
4. 38
5. 39

29. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{bmatrix}$ และ $S = \{ 1, 2, 3, \dots , 100 \}$ ถ้าสุ่มสมาชิก 1 ตัวจาก S แล้วความน่าจะเป็นที่จะได้จำนวนนับ k ซึ่ง $A^k = I$ โดยที่ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{9}{100}$
2. $\frac{16}{100}$
3. $\frac{18}{100}$
4. $\frac{24}{100}$
5. $\frac{29}{100}$

30. กำหนดให้ $P(x)$ เป็นพหุนามซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า $P(1) = 10$ และ $P(10) = 2{,}116$ แล้ว $P(-1)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 4
2. 10
3. 51
4. 106
5. 1,053

<u>เฉลย</u>

1. 3	7. 1	13. 1	19. 3	25. 5
2. 3	8. 5	14. 2	20. 2	26. 5
3. 5	9. 4	15. 4	21. 4	27. 4
4. 1	10. 1	16. 1	22. 3	28. 5
5. 3	11. 2	17. 5	23. 2	29. 2
6. 4	12. 4	18. 3	24. 3	30. 1

<u>แนวคิด</u>

1. 3

จากสมบัติของค่าสัมบูรณ์ จะได้ $-5x < 6(x-3) < 5x$ และ $5x > 0$

$x > 0$ ...(3)

$-5x < 6x - 18$ และ $6x - 18 < 5x$

$18 < 11x$ $\qquad x < 18$ ...(2)

$\frac{18}{11} < x$ ...(1)

จาก (1), (2), (3) จะได้ $\frac{18}{11} < x < 18$

ดังนั้น x ที่เป็นจำนวนเต็ม จะมีค่าตั้งแต่ $2, 3, \ldots, 17$ ซึ่งมีจำนวน $17 - 2 + 1 = 16$ ตัว

2. 3

จากทฤษฎีเศษ $x - 1$ หาร $P(x)$ เหลือเศษ 10 จะได้ $a(1^5) + b(1^3) + c(1) + d = 10$

$a + b + c + d = 10$ ...(1)

x หาร $P(x)$ เหลือเศษ 6 จะได้ $a(0^5) + b(0^3) + c(0) + d = 6$

$d = 6$ ...(2)

แทน $d = 6$ ใน (1) จะได้ $a + b + c = 4$ ...(3)

ดังนั้น $x + 1$ หาร $P(x)$ จะเหลือเศษ

$$\begin{aligned} &= a(-1)^5 + b(-1)^3 + c(-1) + d \\ &= -a - b - c + d \\ &= -(a + b + c) + d \quad \text{จาก (2) และ (3)} \\ &= -(4) + 6 \\ &= 2 \end{aligned}$$

3. 5

$$\begin{aligned} &|\bar{u}\cdot\bar{v}|^2 + |\bar{u}\times\bar{v}|^2 \\ &= \big||\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta\big|^2 + (|\bar{u}||\bar{v}|\sin\theta)^2 \\ &= \left|\sqrt{5}\sqrt{3}\cos\theta\right|^2 + \left(\sqrt{5}\sqrt{3}\sin\theta\right)^2 \\ &= 15\cos^2\theta + 15\sin^2\theta \\ &= 15(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \\ &= 15 \end{aligned}$$

$\bar{u}\cdot\bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta$

$|\bar{u}\times\bar{v}| = |\bar{u}||\bar{v}|\sin\theta$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

4. 1

จาก $\log_{a^2} b = 5$

$\frac{1}{2}\log_a b = 5$

$\log_a b = 10$

ดังนั้น $\log_{b^2} a = \frac{1}{2}\log_b a = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{20}$

$\log_b a$ กับ $\log_a b$ เป็นส่วนกลับกัน

5. 3

ระบบสมการจะมีคำตอบเดียว เมื่อ det [สปส] $\neq 0$ $\rightarrow$ $\begin{vmatrix} a & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$

$$(2a-4-2)-(-4-a+4) \neq 0$$
$$3a \neq 6$$
$$a \neq 2$$

$\rightarrow$ เขียนเป็นช่วงได้เป็น $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$

6. 4

$$\tan\left[\frac{\pi}{4}+\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right] = \frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan\left(\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right)}{1 - \tan\frac{\pi}{4}\tan\left(\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right)}$$

$$= \frac{1 + \tan\left(\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right)}{1 - \tan\left(\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right)} \quad \ldots (*)$$

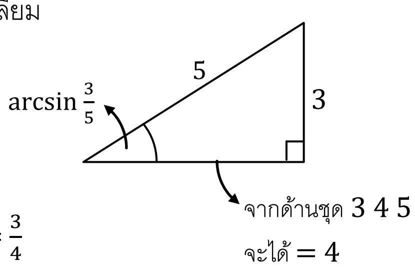
$\rightarrow$ ต้องหา $\tan\left(\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$ มาแทน

1. คิดเครื่องหมายตามจตุภาค : $\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)$ คือมุมที่ sin แล้วเป็นลบ $\rightarrow$ Q_3 หรือ Q_4

แต่เรนจ์ของ arcsin คือ Q_1 หรือ Q_4 ดังนั้น $\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)$ เป็นมุมใน Q_4

ดังนั้น $\tan\left(\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right) = \tan$ (มุมใน Q_4) $\rightarrow$ เป็นลบ

2. หาค่า $\tan\left(\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$ แบบไม่สนเครื่องหมาย $\rightarrow$ ใช้สามเหลี่ยม



$\rightarrow$ ได้ $\tan = \frac{3}{4}$

รวมสองขั้นตอน จะได้ $\tan\left(\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right) = -\frac{3}{4}$

แทนใน $(*)$ จะได้ $= \dfrac{1+\left(-\frac{3}{4}\right)}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{4}} = \dfrac{1}{7}$

7. 1

ตัวเลขที่เป็นสัดส่วนกับความถี่ (เช่น ความถี่สัมพัทธ์ $= \frac{\text{ความถี่}}{N}$) สามารถใช้หา $\bar{x}$ ได้ในลักษณะเดียวกับความถี่เลย

(เพราะ เศษ และ ส่วน ของ $\frac{\sum x_i}{N}$ จะถูกทอนเท่าๆกัน ทำให้มีค่าเท่าเดิม)

ตารางอันตรภาคชั้นเป็นช่วง $\rightarrow$ ประมาณแต่ละชั้นด้วยจุดกึ่งกลางชั้น

คะแนนสอบ	จุดกึ่งกลางชั้น	ความถี่สัมพัทธ์	ผลคูณ
0 – 19	9.5	0.1	0.95
20 – 39	29.5	0.1	2.95
40 – 59	49.5	0.3	14.85
60 – 79	69.5	0.3	20.85
80 – 99	89.5	0.2	17.90
		1.0	57.50

จะได้ $\bar{x} = \frac{57.5}{1} = 57.5$

8. 5

แทน $x = 2$ จะเห็นว่ามีสองตัวที่ส่วน $= 0$ ลบกันอยู่ ดังนั้น ต้องจัดรูปให้ $x - 2$ ตัดกันก่อน

$$\begin{aligned}
\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x+2}-\frac{8}{x^2-4} &= \frac{1}{x+2}+\frac{2}{x-2}-\frac{8}{(x-2)(x+2)} \\
&= \frac{1}{x+2}+\frac{2(x+2)\ -\ 8}{(x-2)(x+2)} \\
&= \frac{1}{x+2}+\frac{2x-4}{(x-2)(x+2)} \\
&= \frac{1}{x+2}+\frac{2(x-2)}{(x-2)(x+2)} \\
&= \frac{1}{x+2}+\frac{2}{x+2} \\
&= \frac{3}{x+2}
\end{aligned}$$

$\frac{1}{x+2}$ ไม่ต้องเอาไปรวมก็ได้ เพราะหา $\lim\limits_{x\to 2}$ ได้

แทน $x = 2$ ใหม่ จะได้ ลิมิต $= \frac{3}{2+2} = \frac{3}{4}$

9. 4

จาก $a_n = a_1 r^{n-1}$ แทน $n = 4$ จะได้

$$\begin{aligned}
a_4 &= a_1 r^{4-1} \\
12 &= 96 r^3 \\
\frac{1}{8} &= r^3 \\
\frac{1}{2} &= r
\end{aligned}$$

$\rightarrow |r| < 1$ ดังนั้น จะใช้สูตร $S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$ ได้

จะได้ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{96}{1-\frac{1}{2}} = \frac{96}{\frac{1}{2}} = 192$

10. 1

จากสูตร ดิฟลูกโซ่ ในรูปแบบฟังก์ชันคอมโพสิท $(g\circ f)'(x) = g'\big(f(x)\big)\cdot f'(x)$

จะได้
$$\begin{aligned}
(f\circ f)'(2) &= f'(\,f(2)\,)\cdot f'(2) \\
&= f'((2-1)^2-5)\cdot f'(2) \\
&= f'(\quad -4 \quad)\cdot f'(2) \qquad \ldots(*)
\end{aligned}$$

หา $f(2)$ ใช้สูตรล่าง เพราะ $2 > 1$

หา $f'(-4)$: เมื่อ $x < -1$ จะได้
$$\begin{aligned}
f(x) &= (x+1)^2-5 \\
f'(x) &= 2(x+1)(1) \\
f'(-4) &= 2(-4+1) = -6
\end{aligned}$$

หา $f'(2)$: เมื่อ $x > 1$ จะได้
$$\begin{aligned}
f(x) &= (x-1)^2-5 \\
f'(x) &= 2(x-1)(1) \\
f'(2) &= 2(2-1) = 2
\end{aligned}$$

แทนใน $(*)$

จะได้ $(f\circ f)'(2) = (-6)(2) = -12$

11. 2

ให้ $z_1 = r\operatorname{cis}\theta$ เมื่อ $0 < \theta < 90^\circ$ (โจทย์ให้ z_1 อยู่ใน Q_1)

เนื่องจาก $|z_1| = 2$ จะได้ $r = 2$ ดังนั้น $z_1 = 2\operatorname{cis}\theta$

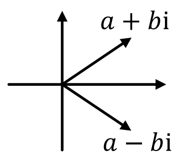
เนื่องจาก รากที่ 3 แต่ละรากจะมีมุมเพิ่มทีละ $\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$

ดังนั้น อีก 2 รากที่เหลือคือ $2\operatorname{cis}(\theta+120^\circ)$ กับ $2\operatorname{cis}(\theta+240^\circ)$ (ยังไม่รู้ว่าตัวไหนคือ z_2 ตัวไหนคือ z_3)

โจทย์ให้ $z_3 = \overline{z_1}$ $\rightarrow$ ดังนั้น z_3 อยู่ใน Q_4

$\rightarrow$ แต่ $2\operatorname{cis}(\theta+120^\circ)$ ไม่มีทางอยู่ใน Q_4 ได้ (เพราะ $0 < \theta < 90^\circ$)

$\rightarrow$ ดังนั้น $z_3 = 2\operatorname{cis}(\theta+240^\circ)$



จากสมบัติของคอนจูเกต และขนาดของมุม จะได้ว่ามุมของ z_1 กับ z_3 จะต้องรวมกันได้ $360°$

$$\begin{aligned} \theta + (\theta + 240°) &= 360° \\ 2\theta &= 120° \\ \theta &= 60° \end{aligned}$$

แทนค่า θ จะได้

$$\begin{aligned} z_2 + z_3 &= 2\operatorname{cis}(60° + 120°) + 2\operatorname{cis}(60° + 240°) \\ &= 2\operatorname{cis}(180°) + 2\operatorname{cis}(300°) \\ &= -2 + 2(\cos 300° + i \sin 300°) \\ &= -2 + 2\left(\frac{1}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \\ &= -2 + 1 - \sqrt{3}i = -1 - \sqrt{3}i \end{aligned}$$

12. 4

จะเห็นว่า $\frac{11^{111}}{1210}$ ตัด 11 ได้สองตัว เหลือ $\frac{11^{109}}{10}$ ดังนั้น จะหาว่า 11^{109} หารด้วยด้วย 10 เหลือเศษเท่าไหร่ ก่อน แล้วตอนจบ ค่อยเอา 11 สองตัวที่ตัดไป คูณกลับเข้าไป ให้ตัวหารกลายเป็น 1210 เท่าเดิม

"เศษเหลือจากการหารด้วย 10" จะเท่ากับ "หลักหน่วย"

เนื่องจาก 11 มีหลักหน่วยคือ 1 ดังนั้น ถ้าเอา 11 มาคูณกันเอง ไม่ว่าจะคูณกี่ตัว หลักหน่วยก็ยังเป็น 1 เหมือนเดิม (เพราะ $1 \times 1 = 1$) ดังนั้น 11^{109} จะมีหลักหน่วยคือ 1

ดังนั้น 11^{109} หารด้วย 10 จะเหลือเศษ 1 $\rightarrow 11^{109} = 10q + 1$

คูณ 11×11 ตลอด

$\rightarrow 11^{111} = 1210q + 121$

$\rightarrow 11^{111}$ หารด้วย 1210 จะเหลือเศษ 121

13. 1

เนื่องจาก $x + b$ เป็นตัวหาร ดังนั้น $x \neq -b$:

$$\begin{aligned} \frac{x+a}{(x+b)^2} &\geq 0 \\ x + a &\geq 0 \\ x &\geq -a \end{aligned}$$

เนื่องจาก $(x+b)^2 > 0$ ดังนั้น จะย้าย $(x+b)^2$ มาคูณทางขวาได้ โดยไม่ต้องเปลี่ยน $\geq$ เป็น $\leq$

ดังนั้น คำตอบของอสมการคือ $x \geq -a$ และ $x \neq -b$ ...(*)

แต่โจทย์ให้คำตอบคือ $(1, \infty)$ ซึ่งเขียนในรูปอสมการได้เป็น $x > 1$

ซึ่งเขียนในรูปแบบเดียวกับ (*) ได้เป็น $x \geq 1$ และ $x \neq 1$

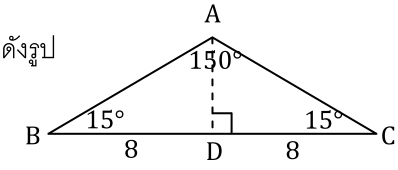
เทียบกับ (*) จะได้ $a = -1$ และ $b = -1$

ดังนั้น $a + b = (-1) + (-1) = -2$

14. 2

จะได้มุมที่ฐาน $= \frac{180° - 150°}{2} = 15°$

ลากส่วนสูง AD จาก Δ หน้าจั่ว จะได้ AD แบ่งครึ่งฐาน เป็นฝั่งละ 8 ดังรูป



จาก $\tan \mathrm{C} = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{CD}}$ จะได้

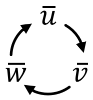
$$\begin{aligned} \tan 15° &= \frac{\mathrm{AD}}{8} \\ \tan(60° - 45°) &= \frac{\mathrm{AD}}{8} \\ \frac{\tan 60° - \tan 45°}{1 + \tan 60° \tan 45°} &= \frac{\mathrm{AD}}{8} \\ \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} &= \frac{\mathrm{AD}}{8} \end{aligned}$$

จะได้ $\mathrm{AD} = \frac{8(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = \frac{8(3-2\sqrt{3}+1)}{2} = 8(2-\sqrt{3})$

ดังนั้น $\Delta\mathrm{ABC} = \frac{1}{2} \times \mathrm{BC} \times \mathrm{AD} = \frac{1}{2} \times 16 \times 8(2-\sqrt{3}) = 64(2-\sqrt{3})$

15. 4

ก. การ ดอท&ครอส จะได้ผลเท่าเดิมเสมอ ตราบใดที่ตำแหน่ง $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ ยังคงเรียงเป็นวงกลมแบบเดียวกัน



$$\bar{u}\cdot(\bar{v}\times\bar{w}) = \bar{v}\cdot(\bar{w}\times\bar{u}) = \bar{w}\cdot(\bar{u}\times\bar{v})$$
$$= (\bar{u}\times\bar{v})\cdot\bar{w} = (\bar{v}\times\bar{w})\cdot\bar{u} = (\bar{w}\times\bar{u})\cdot\bar{v} \quad \rightarrow \text{ ก. ถูก}$$

ข. เนื่องจาก ผลครอส จะมีทิศตั้งฉากกับระนาบของตัวตั้ง ดังนั้น การเปลี่ยนกลุ่มอาจทำให้ผลลัพธ์มีทิศผิดไปจากเดิมได้

หรือ จะลองแทนด้วยเวกเตอร์ง่ายๆดู เช่น $(\bar{\imath}\times\bar{\imath})\times\bar{\jmath} = \bar{0}\times\bar{\jmath} = \bar{0}$

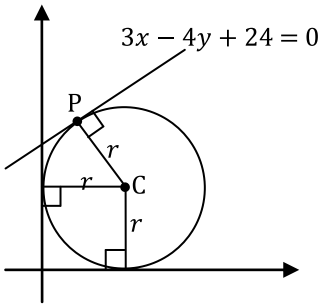
แต่ $\bar{\imath}\times(\bar{\imath}\times\bar{\jmath}) = \bar{\imath}\times\bar{k} \neq \bar{0}$ $\rightarrow$ ข. ผิด

ค. $$(\bar{u}-\bar{v})\cdot(\bar{u}+\bar{v}) = \bar{u}\cdot\bar{u} + \cancel{\bar{u}\cdot\bar{v}} - \cancel{\bar{v}\cdot\bar{u}} - \bar{v}\cdot\bar{v}$$
$$= |\bar{u}|^2 - |\bar{v}|^2 \quad \rightarrow \text{ ค. ถูก}$$

ง. $$(\bar{u}-\bar{v})\times(\bar{u}+\bar{v}) = \bar{u}\times\bar{u} + \bar{u}\times\bar{v} - \bar{v}\times\bar{u} - \bar{v}\times\bar{v}$$
$$= \bar{0} + \bar{u}\times\bar{v} + \bar{u}\times\bar{v} - \bar{0}$$
$$= 2(\bar{u}\times\bar{v}) \quad \rightarrow \text{ ง. ถูก}$$

$\boxed{\bar{u}\times\bar{v} = -\bar{v}\times\bar{u}}$

16. 1



จากข้อมูลที่โจทย์ให้ จะวาดได้ดังรูป $\rightarrow$ จะได้พิกัดของ C คือ (r, r)

และจาก
$$\text{CP} = r$$
$$\frac{|3r-4r+24|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = r$$
$$|-r+24| = 5r$$

ระยะจากจุด (a, b) ถึง เส้นตรง $Ax+By+C=0$ คือ $\frac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

$$-r+24 = 5r \qquad\qquad -r+24 = -5r$$
$$4 = r \qquad\qquad -6 = r$$

เนื่องจากรัศมีเป็นลบไม่ได้ จะได้ $r=4$ เท่านั้น ดังนั้นจะได้ พิกัด C คือ $(4, 4)$

หาความชัน CP : เนื่องจาก $\text{CP}\perp\ell$ ดังนั้น ความชันต้องคูณกันได้ -1

หาความชัน ℓ : $3x-4y+24=0$ $\rightarrow$ ความชัน $\ell=\frac{3}{4}$

$\frac{3}{4}x + 6 = y$ $\rightarrow$ ดังนั้น ความชัน $\text{CP}=-\frac{4}{3}$

ดังนั้น เส้นตรงที่ผ่าน CP จะมีความชัน $-\frac{4}{3}$ และผ่าน $\text{C}(4, 4)$ ซึ่งจะมีสมการคือ
$$\frac{y-4}{x-4} = -\frac{4}{3}$$
$$3y-12 = -4x+16$$
$$4x+3y-28 = 0$$

17. 5

จาก $[A:I]\sim[I:P]$ จะได้ $AP=I$ นั่นคือ $P=A^{-1}$

จาก $A\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$ ย้ายข้าง A ทางซ้าย จะได้
$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = P\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&2&0\\0&-1&2\\1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$$

จะแปลงเป็นระบบสมการ แล้วแก้หา a ก็ได้ แต่ข้อนี้โจทย์ถาม a ค่าเดียว $\rightarrow$ ใช้กฎของเครเมอร์ จะง่ายกว่า

จากกฎของเครเมอร์ จะได้ $a = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}} = \dfrac{(1+12+0)-(0+0-4)}{(1+4+0)-(0+0+0)} = \dfrac{17}{5}$

18. 3

$$9^{\log x} - 10\left(3^{\log x}\right) + 9 = 0$$
$$3^{2\log x} - 10\left(3^{\log x}\right) + 9 = 0$$
$$\left(3^{\log x} - 1\right)\left(3^{\log x} - 9\right) = 0$$
$$3^{\log x} = 1 \ , \ 9$$
$$3^{\log x} = 3^0 \ , \ 3^2$$
$$\log x = 0 \ , \ 2$$
$$x = 10^0, \ 10^2 = 1 \ , 100$$

$\rightarrow$ จะได้ผลบวกคำตอบ $= 1 + 100 = 101$

19. 3

$$125\left(5^{4\cos 2x}\right) = 4\left(5^{4\cos^2 x}\right) + 25$$
$$125\left(5^{4\left(2\cos^2 x - 1\right)}\right) = 4\left(5^{4\cos^2 x}\right) + 25$$
$$125\left(5^{8\cos^2 x - 4}\right) = 4\left(5^{4\cos^2 x}\right) + 25$$
$$\frac{125\left(5^{8\cos^2 x}\right)}{5^4} = 4\left(5^{4\cos^2 x}\right) + 25$$
$$\frac{5^{8\cos^2 x}}{5} = 4\left(5^{4\cos^2 x}\right) + 25$$
$$5^{8\cos^2 x} = 20\left(5^{4\cos^2 x}\right) + 125$$
$$5^{8\cos^2 x} - 20\left(5^{4\cos^2 x}\right) - 125 = 0$$
$$\left(5^{4\cos^2 x} - 25\right)\left(5^{4\cos^2 x} + 5\right) = 0$$

เลขยกกำลังฐาน 5
เป็นลบไม่ได้

$$5^{4\cos^2 x} = 25 \ , \ \cancel{-5}$$
$$5^{4\cos^2 x} = 5^2$$
$$4\cos^2 x = 2$$
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}$$
$$\cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

$\rightarrow$ เป็นสับเซตของข้อ 3.

20. 2

หา $n(S)$: จำนวนแบบทั้งหมด $\rightarrow$ เลือก 3 คน จาก 9 คน ได้ $\binom{9}{3}$ แบบ

หา $n(E)$: จะลุยหา $\bar{x}$ เลยก็ได้ แต่ต้องคิดเลขเยอะหน่อย

หรือจะเอาข้อมูลทุกตัวมาหัก 150 ก่อน เพื่อให้คิดเลขน้อยลงก็ได้

152	153	155	158	159	160	162	166	175
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
2	3	5	8	9	10	12	16	25

หาค่าเฉลี่ยได้ $\frac{2+3+5+8+9+10+12+16+25}{9} = \frac{90}{9} = 10 \rightarrow$ บวก 150 กลับ จะได้ $\bar{x} = 10 + 150 = 160$

จะเห็นว่ามีเด็ก 5 คน ที่เตี้ยกว่า 160 $\rightarrow$ เลือก 3 คน จาก 5 คน ได้ $\binom{5}{3}$ แบบ

ดังนั้น ความน่าจะเป็น $= \dfrac{\binom{5}{3}}{\binom{9}{3}} = \dfrac{\frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1}}{\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}} = \dfrac{5\cdot4\cdot3}{9\cdot8\cdot7} = \dfrac{5}{42}$

21. 4

ไม่เป็นลบ จะมีหลายกรณี (ศูนย์ หรือ บวก) $\rightarrow$ จะคำนวณแบบตรงข้าม (คือแบบที่เป็นลบ) แล้วเอา 1 ตั้งลบ

หา $n(S)$: จำนวนแบบทั้งหมด $\rightarrow$ เลือก 4 จำนวน จาก 9 จำนวน ได้ $\binom{9}{4} = \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = 3\cdot7\cdot6$ แบบ

หา $n(E)$: เป็นจำนวนลบ $\rightarrow$ จะมี 2 กรณีดังนี้

กรณี เป็นบวก 3 ตัว ลบ 1 ตัว เลือก 3 ตัว จากเลขบวก 4 ตัว ได้ $\binom{4}{3}$ แบบ

เลือก 1 ตัว จากเลขลบ 4 ตัว ได้ $\binom{4}{1}$ แบบ

$\rightarrow$ ได้จำนวนแบบ $= \binom{4}{3}\binom{4}{1} = (4)(4) = 16$ แบบ

กรณี เป็นบวก 1 ตัว ลบ 3 ตัว เลือก 1 ตัว จากเลขบวก 4 ตัว ได้ $\binom{4}{1}$ แบบ

เลือก 3 ตัว จากเลขลบ 4 ตัว ได้ $\binom{4}{3}$ แบบ

$\rightarrow$ ได้จำนวนแบบ $= \binom{4}{1}\binom{4}{3} = (4)(4) = 16$ แบบ

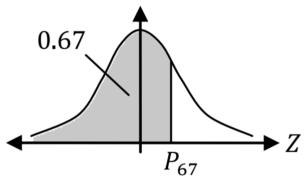
รวมได้ $n(E) = 16 + 16 = 32$ แบบ

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ ผลคูณของเลข 4 ตัวเป็นลบ $= \frac{32}{3\cdot7\cdot6} = \frac{16}{63}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ ผลคูณของเลข 4 ตัวไม่เป็นลบ $= 1 - \frac{16}{63} = \frac{47}{63}$

22. 3

P_{67} คือ มีพื้นที่ 0.67 อยู่ทางซ้าย $\rightarrow$ จะวาดได้ดังรูป



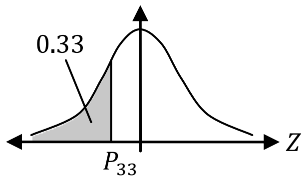
แต่พื้นที่ที่ใช้เปิดตาราง ต้องวัดจากแกนกลาง

ครึ่งซ้าย พื้นที่ $= 0.5$ $\rightarrow$ จะได้พื้นที่ที่ล้นไปทางขวา $= 0.67 - 0.5 = 0.17$

เปิดตารางตรงพื้นที่ $= 0.17$ จะได้ $z = 0.44$ ดังนั้น $\frac{P_{67}-\bar{x}}{s} = 0.44$

$P_{67} - \bar{x} = 0.44s$ ...(1)

ทำนองเดียวกัน P_{33} คือ มีพื้นที่ 0.33 อยู่ทางซ้าย $\rightarrow$ จะวาดได้ดังรูป



แต่พื้นที่ที่ใช้เปิดตาราง ต้องวัดจากแกนกลาง

ครึ่งซ้าย พื้นที่ $= 0.5$ $\rightarrow$ เหลือพื้นที่จากแกนกลาง $= 0.5 - 0.33 = 0.17$

เปิดตารางตรงพื้นที่ $= 0.17$ จะได้ $z = 0.44$ แต่ฝั่งซ้ายของโค้ง จะมี z เป็นลบ

จะได้ $z = -0.44$ ดังนั้น $\frac{P_{33}-\bar{x}}{s} = -0.44$

$P_{33} - \bar{x} = -0.44s$ ...(2)

$$(1)-(2): \quad (P_{67} - \cancel{\bar{x}}) - (P_{33} - \cancel{\bar{x}}) = 0.44s - (-0.44s)$$
$$11 = 0.88s$$

จากโจทย์ จะได้ $P_{67} - P_{33} = 11$

จะได้ $s = \frac{11}{0.88} = \frac{1100}{88} = \frac{100}{8} = 12.5$

23. 2

ให้ $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{11}$ มี $a_1 = x_1$ และ อัตราส่วนร่วม $= r$

จากสูตร $a_n = a_1 r^{n-1}$ จะได้

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_{11} = 2^{33} \cdot 3^{22}$$
$$x_1 \cdot x_1 r \cdot x_1 r^2 \cdot \ldots \cdot x_1 r^{10} = 2^{33} \cdot 3^{22}$$
$$(x_1)^{11}(r^{1+2+3+\ldots+10}) = 2^{33} \cdot 3^{22}$$
$$(x_1)^{11}\left(r^{\frac{10(10+1)}{2}}\right) = 2^{33} \cdot 3^{22}$$

$\boxed{1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}}$

ยกกำลัง $\frac{1}{11}$ ทั้งสองฝั่ง $\quad (x_1)^{11}\,(\;r^{55}\;) = 2^{33}\cdot 3^{22}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x_1 \quad r^5 = 2^3 \cdot 3^2 \quad ...(*)$

มัธยฐาน $=$ ตัวตรงกลาง $= x_{\frac{11+1}{2}} = x_6$

ซึ่งจากสูตร $a_n = a_1 r^{n-1}$ จะได้ $x_6 = x_1 r^5$ ซึ่งจาก $(*)$ จะได้เท่ากับ $2^3 \cdot 3^2 = 72$

24. 3

อินทิเกรต จะได้ $a_n = \int_n^{\frac{n(n+2)}{2}} x^{-2}\,dx = \left.\frac{x^{-1}}{-1}\right|_n^{\frac{n(n+2)}{2}}$

$$
\begin{aligned}
&= -\left(\left(\frac{n(n+2)}{2}\right)^{-1} - (n)^{-1}\right) \\
&= -\left(\frac{2}{n(n+2)} - \frac{1}{n}\right) \\
&= -\left(\frac{2 - (n+2)}{n(n+2)}\right) \\
&= -\left(\frac{-n}{n(n+2)}\right) \\
&= \frac{1}{n+2}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{5}} + \cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{6}} + \cancel{\frac{1}{5}} - \frac{1}{7} + \cancel{\frac{1}{6}} - \frac{1}{8} + \ldots\right)$$

จะเห็นว่า ตัวลบ จะตัดกับตัวบวกของพจน์ถัดไปสองพจน์ได้

เหลือตัวบวกสองตัวแรก (คือ $\frac{1}{1}$ และ $\frac{1}{2}$) กับ ตัวลบสองตัวสุดท้าย (ซึ่งเข้าใกล้ 0 เมื่อ $n \to \infty$)

ดังนั้น จะได้คำตอบ $= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4}$

25. 5

อินทิเกรต $f'(x) = 3x^2 - 6x$ จะได้ $f(x) = \frac{3x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} + c$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = x^3 - 3x^2 + c \quad ...(*)$

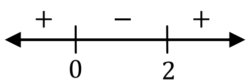
$G(x)$ ต่อเนื่องที่ $x = -1$ ดังนั้น บริเวณรอยต่อที่ $x = -1$ ต้องได้

$$
\begin{aligned}
x + 5 &= f(x) \\
-1 + 5 &= f(-1) \\
4 &= (-1)^3 - 3(-1)^2 + c \\
8 &= c
\end{aligned}
$$

แทนใน $(*)$ จะได้ $f(x) = x^3 - 3x^2 + 8$

ค่า สูงสุด/ต่ำสุด สัมพัทธ์ จะเกิดที่ $f'(x) = 0 \to 3x^2 - 6x = 0$

$$
\begin{aligned}
3x(x-2) &= 0 \\
x &= 0,\ 2
\end{aligned}
$$



ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ จะเกิด ณ จุดที่ $f'(x)$ เปลี่ยนจาก $-$ เป็น $+$ นั่นคือ ที่ $x = 2$

จะได้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ $= f(2) = 2^3 - 3(2^2) + 8 = 4$

26. 5

ค่าเฉลี่ย $= 12.7$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \frac{x+16+8+12+13+7+9+11+18+y}{10} &= 12.7 \\ x + 94 + y &= 127 \\ x + y &= 33 \end{aligned}$$

หามัธยฐาน $\rightarrow$ มัธยฐานจะอยู่ตำแหน่งที่ $\frac{10+1}{2} = 5.5 =$ ระหว่างตัวที่ 5 กับ 6

เรียงข้อมูลจากมากไปน้อย จะได้ $7\ ,\ 8\ ,\ 9\ ,\ 11\ ,\ 12\ ,\ 13\ ,\ 16\ ,\ 18$ เหลือ x กับ y ที่ยังไม่รู้ค่า

เนื่องจาก x, y มากสุดคือ 20 (คะแนนเต็ม 20) และ $x + y = 33$ ดังนั้น x หรือ y จะน้อยกว่า 13 ไม่ได้ (ถ้ามีตัวไหนน้อยกว่า 13 อีกตัวต้องมากกว่า 20 ถึงจะบวกกันเป็น 33 ได้) $\rightarrow\ x, y \ \geq\ 13$

ดังนั้น ตัวที่ 5.5 จะอยู่ระหว่าง 12 กับ 13 ดังรูป

$x, y \geq 13$

$7\ ,\ 8\ ,\ 9\ ,\ 11\ ,\ 12\ ,\ 13\ ,\ 16\ ,\ 18$

ตัวที่ 5 ตัวที่ 6

จะได้ ตัวที่ 5.5 $= \frac{12+13}{2} = 12.5$

27. 4

จาก $f(x) = \sum_{k=1}^{100} k \cdot x^{2k-1}$ จะได้ $f(\sqrt{2}) = \sum_{k=1}^{100} k \cdot \sqrt{2}^{2k-1}$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} f(\sqrt{2}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{100} k \cdot \sqrt{2}^{2k-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{100} k \cdot \frac{\left(\sqrt{2}^2\right)^k}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{100} k \cdot 2^k \\ &= \frac{1}{2} (1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \ \dots\ + 100 \cdot 2^{100}) \\ &= 1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \ \dots\ + 100 \cdot 2^{99} \end{aligned}$$

เป็นอนุกรมผสมเรขาคณิต $\rightarrow$ ต้องใช้วิธีคูณ r ให้ตำแหน่งเลื่อน แล้วหักด้วยตัวมันเอง

คูณ 2 ให้พจน์เลื่อน

$$1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \ \dots\ + 100 \cdot 2^{99} = x \quad \dots(1)$$

$$1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \ \dots\ + 99 \cdot 2^{99} + 100 \cdot 2^{100} = 2x \quad \dots(2)$$

$$(1) - (2):\ \underbrace{1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + \ \dots\ + 1 \cdot 2^{99}} - 100 \cdot 2^{100} = -x$$

อนุกรมเรขา ($a_1 = 1\ ,\ r = 2$) ใช้สูตร $S_n = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$ ได้

$$\begin{aligned} \frac{1(2^{100}-1)}{2-1} - 100 \cdot 2^{100} &= -x \\ 2^{100} - 1 - 100 \cdot 2^{100} &= -x \\ -1 - 99 \cdot 2^{100} &= -x \\ 1 + 99 \cdot 2^{100} &= x \end{aligned}$$

28. 5

จัดรูปโดยคูณคอนจูเกตให้ตัวส่วนเป็นจำนวนจริงก่อน จะได้ $\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i} = \frac{1^2+2i+i^2}{1^2-i^2} = \frac{2i}{2} = i$

ดังนั้น จะได้สมการคือ

$$\begin{aligned} i^{2x-5} &= i^{x-2} \\ \frac{i^{2x-5}}{i^{x-2}} &= 1 \\ i^{(2x-5)-(x-2)} &= 1 \\ i^{x-3} &= 1 \quad \rightarrow \quad x-3 \text{ ต้องหารด้วย 4 ลงตัว} \end{aligned}$$

นั่นคือ x ต้องหารด้วย 4 เหลือเศษ 3

เนื่องจาก $x \in \{1, 2, 3, \dots, 155\}$ จะได้ $x = 3, 7, 11, \dots, 155$ $\rightarrow$ มีทั้งหมด $\frac{155-3}{4} + 1 = 39$ จำนวน

29. 2

เมทริกซ์ในรูป $\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ที่นิยมนำมาออกข้อสอบ เนื่องจาก มันมีสมบัติพิเศษ คือ หากนำเมทริกซ์ในรูปนี้มาคูณกัน จะสามารถนำมุมมาบวกกันได้เลย ดังนี้

$$\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{bmatrix}$$

ซึ่งจะทำให้ได้ด้วยว่า $\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{bmatrix}$

ดังนั้น $A^k = \begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix}\cos\frac{k\pi}{3} & -\sin\frac{k\pi}{3} \\ \sin\frac{k\pi}{3} & \cos\frac{k\pi}{3}\end{bmatrix}$ ซึ่งจะเท่ากับ $\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$ เมื่อ $\cos\frac{k\pi}{3} = 1$, $\sin\frac{k\pi}{3} = 0$

นั่นคือ เมื่อ $\frac{k\pi}{3} = 2n\pi$

$k = 6n$

ใน $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ จะมีจำนวนที่หารด้วย 6 ลงตัวอยู่ $\frac{100}{6} = 16.6\ldots$ $\rightarrow$ ปัดลง $\rightarrow$ 16 จำนวน

ดังนั้น จะได้ความน่าจะเป็น $= \frac{16}{100}$

30. 1

เนื่องจาก $P(x)$ มี สปส เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น ถ้า x เป็นบวก จะได้ว่า แต่ละพจน์ของ $P(x)$ เป็นบวกทุกพจน์

จาก $P(10) = 2{,}116$ จะสรุปได้ว่า $P(x)$ มีดีกรีไม่เกิน 3 (เพราะทุกพจน์เป็นบวก และ 10^4 เกิน 2116)

ให้ $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ เมื่อ $a, b, c, d \in \{1, 2, 3, \dots\}$

จาก $P(1) = 10$ จะได้

$$\begin{aligned} a(1^3) + b(1^2) + c(1) + d &= 10 \\ a + b + c + d &= 10 \quad \ldots(1) \end{aligned}$$

จาก $P(10) = 2{,}116$ จะได้

$$\begin{aligned} a(10^3) + b(10^2) + c(10) + d &= 2116 \\ 1000a + 100b + 10c + d &= 2116 \quad \ldots(2) \end{aligned}$$

จาก (1) จะได้ $1 \le a, b, c, d \le 7$ (เนื่องจาก a, b, c, d เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้ามีตัวไหนใน a, b, c, d เกิน 7 จะทำให้ผลบวก $a + b + c + d$ เกิน 10)

เนื่องจาก 2116 เขียนกระจายในฐานสิบได้แบบเดียวคือ $2(1000) + 1(100) + 1(10) + 6$

และจาก $1 \le a, b, c, d \le 7$ ดังนั้น จะสรุปได้ว่า $a = 2$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 6$ (ซึ่งจะทำให้ (1) จริงด้วย)

ดังนั้น $P(-1) = 2(-1)^3 + 1(-1)^2 + 1(-1) + 6 = 4$

เครดิต

ขอบคุณ ข้อสอบ จาก คุณ สนธยา เสนามนตรี และ อ.ปิง GTRmath

ขอบคุณเฉลยวิธีทำ จาก อ.ปิง GTRmath

ขอบคุณ คุณ Hutch LK

และ คุณครูเบิร์ด จาก กวดวิชาคณิตศาสตร์ครูเบิร์ด ย่านบางแค 081-8285490

ที่ช่วยตรวจสอบความถูกต้องของเอกสาร