

## บทที่ 8 การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย

### 8.1 ลักษณะการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple harmonic motion, SHM) เป็นการเคลื่อนที่ของวัตถุกลับไปกลับมาซ้ำรอยเดิมผ่านตำแหน่งสมดุล โดยไม่มีการสูญเสียพลังงาน มีขนาดของการกระจัดสูงสุดคงตัวเรียกว่า *แอมพลิจูด* (Amplitude,  $A$ ) และช่วงเวลาที่วัตถุเคลื่อนที่ครบหนึ่งรอบคงตัวที่เรียกว่า *คาบ* (Period,  $T$ ) โดยสัมพันธ์กับความถี่ (Frequency,  $f$ ) ซึ่งเป็นจำนวนรอบที่เคลื่อนที่ได้ใน 1 วินาที ดังสมการที่ (1)

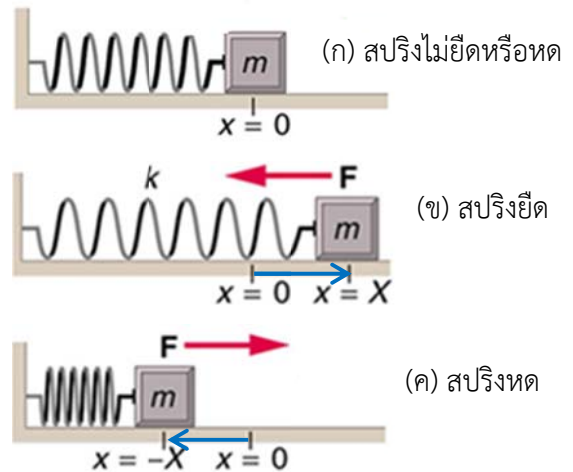
$$T = \frac{1}{f} \quad (1)$$

การเคลื่อนที่แบบกลับไปกลับมาเป็นการเคลื่อนที่แบบสั่นหรือแกว่งกวัด (Oscillatory motion) หรือการเคลื่อนที่แบบมีคาบ (Periodic motion) วัตถุซึ่งเคลื่อนที่แบบมีคาบเป็นวัตถุที่มีตำแหน่งสมดุลเสถียรเสมอ เมื่อย้ายวัตถุจากตำแหน่งสมดุลแล้วปล่อยจะมีแรงดึงวัตถุเข้าสู่สมดุล เรียกแรงนี้ว่า *แรงดึงกลับ* (Restoring force) แต่ระหว่างที่วัตถุเคลื่อนที่ไปยังตำแหน่งสมดุล วัตถุได้พลังงานจลน์มาจำนวนหนึ่งซึ่งทำให้วัตถุเคลื่อนที่เลยไปหยุดที่ตำแหน่งอีกฝั่งหนึ่ง แล้ววัตถุก็ถูกดึงกลับสู่ตำแหน่งสมดุลอีกที และพร้อมที่จะเริ่มกระบวนการทั้งหมดซ้ำอีก ถ้าไม่มีแรงเสียดทานหรือแรงอื่นที่เอาพลังงานกลออกจากระบบ การเคลื่อนที่นี้จะซ้ำตัวเองไปเรื่อยๆ แรงดึงกลับจะดึงวัตถุเข้าหาตำแหน่งสมดุลแต่ถ้าวัตถุจะเคลื่อนที่เลยไปครั้งแล้วครั้งเล่า การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย ได้แก่ การสั่นของวัตถุที่ติดปลายสปริง การแกว่งของชิงช้า การแกว่งของลูกตุ้มนาฬิกา เป็นต้น

#### ลักษณะการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายของวัตถุติดปลายสปริง

ในการศึกษาการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายของวัตถุติดปลายสปริงเราจะพิจารณาจากการนำวัตถุมาติดกับด้านหนึ่งของปลายสปริง โดยมีวัตถุวางอยู่บนพื้นราบซึ่งไม่มีแรงเสียดทาน จัดให้ลวดสปริงขนานกันดังรูปที่ 1 ตำแหน่งเริ่มต้นที่สปริงยังไม่ยืดหรือหด ( $x = 0$ ) เรียกว่า *ตำแหน่งสมดุล* (Equilibrium) การกระจัดของสปริงที่ตำแหน่งใดๆ จะวัดจากจุดสมดุลไปยังตำแหน่งนั้นโดยมีการกระจัดเท่ากับ  $x$  ดังรูปที่ 1 (ข) โดยกำหนดให้ทิศที่ชี้ไปทางขวามือเป็นบวก เมื่อสปริงยืดออกทำให้การกระจัดเป็นบวกเนื่องจากมีทิศชี้ไปทางขวามือ ส่วนกรณีที่สปริงหดเข้าดังรูปที่ 1 (ค) การกระจัดมีค่าเป็นลบเนื่องจากมีทิศชี้ไปทางซ้ายมือ

เมื่อขยับวัตถุให้สปริงให้ยืดหรือหด จะพบว่าสปริงจะมีแรงดึงกลับ ( $F$ ) ที่ดึงวัตถุเข้าสู่ตำแหน่งสมดุล



รูปที่ 1 การยืดหดของสปริง

ดังนั้นทิศทางของแรงดึงกลับจะมีทิศเข้าหาตำแหน่งสมดุลเสมอ ดังรูปที่ 1 (ข)-(ค) โดยขนาดของแรงดึงกลับนี้จะแปรผันตรงกับขนาดของการกระจัดของสปริง จึงเขียนสมการแรงดึงกลับของสปริงได้ดังสมการที่ (2)

$$F = -kx \quad (2)$$

โดยที่  $F$  คือ แรงดึงกลับของสปริง มีหน่วยเป็น นิวตัน (N)  
 $k$  คือ ค่าคงที่หรือค่าคงตัวของสปริง มีหน่วยเป็น นิวตันต่อเมตร (N/m)  
 $x$  คือ การกระจัดซึ่งวัดจากตำแหน่งสมดุล มีหน่วยเป็น เมตร (m)

จากสมการที่ (2) เครื่องหมายลบแสดงให้เห็นว่าแรงดึงกลับมีทิศทางตรงข้ามกับการกระจัดเสมอโดยมีทิศชี้เข้าสู่ตำแหน่งสมดุล และมีขนาดแปรผันตรงกับค่าคงตัวของสปริงและขนาดของการกระจัด ในความเป็นจริงแล้วแรงที่กระทำต่อมวล  $m$  ยังมีน้ำหนัก  $mg$  ในทิศชี้ลงและแรงตั้งฉากจากพื้นในทิศชี้ขึ้นด้วย แต่เนื่องจากแรงทั้งสองอยู่ในแนวตั้งจึงไม่มีผลต่อการเคลื่อนที่ในแนวราบของวัตถุติดปลายสปริงและไม่ต้องนำมาพิจารณา

จากกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตัน

$$F = ma \quad (3)$$

ทำให้ได้เขียนสมการที่ (2) ใหม่ได้ว่า

$$ma = -kx$$

และได้ความสัมพันธ์  $a = -\frac{k}{m}x \quad (4)$

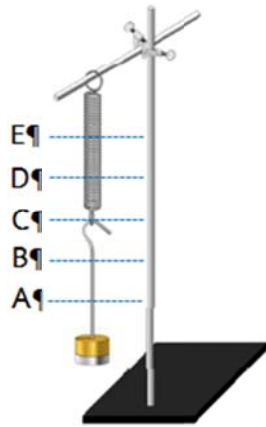
โดยที่  $F$  คือ แรงดึงกลับ มีหน่วยเป็น นิวตัน (N)  
 $m$  คือ มวลของวัตถุ มีหน่วยเป็น กิโลกรัม (kg)  
 $a$  คือ ความเร่งของวัตถุ มีหน่วยเป็น เมตร (m/s<sup>2</sup>)  
 $x$  คือ การกระจัดซึ่งวัดจากตำแหน่งสมดุล มีหน่วยเป็น เมตร (m)  
 $k$  คือ ค่าคงที่ของสปริง มีหน่วยเป็น นิวตันต่อเมตร (N/m)

จากสมการที่ (4) จะเห็นว่าความเร่งมีขนาดแปรผันตรงกับค่าคงตัวของสปริงและขนาดของการกระจัด แต่มีทิศทางตรงข้ามกันกับการกระจัดดังจะเห็นได้จากเครื่องหมายลบ ดังนั้นทิศทางของความเร่งจะชี้เข้าหาตำแหน่งสมดุลเสมอเหมือนกันกับทิศทางของแรงดึงกลับ

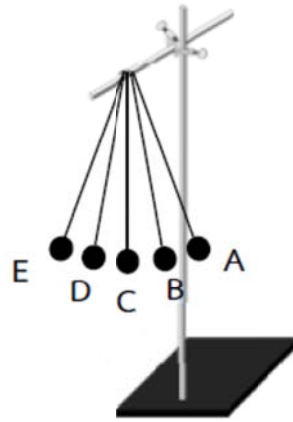
### แบบฝึกทบทวนครั้งที่ 1

1. การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายมีลักษณะอย่างไร
2. จงอธิบายตำแหน่งสมดุล
3. การเคลื่อนที่แบบวงกลมของลูกยาง การแกว่งของลูกตุ้ม อย่างง่าย เป็นการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายหรือไม่ เพราะเหตุใด

4. การสั้นของวัตถุติดปลายสปริงและการแกว่งของลูกตุ้มอย่างง่ายเป็นดังรูปด้านล่าง ตำแหน่งสมดุลของการเคลื่อนที่ทั้งสองแบบนี้อยู่ที่ตำแหน่งใด



ตำแหน่งสมดุล คือ.....



ตำแหน่งสมดุล คือ.....

5. ถ้าอนุภาคสั้นครบ 20 รอบ ในเวลา 40 วินาที จงหาความถี่และคาบของอนุภาค

6. จงหาคาบของการเคลื่อนที่ต่อไปนี้ (ในหน่วยวินาที)

- ก. ซีพจรเต้น 29 ครั้ง ใน 20 วินาที
- ข. เครื่องยนต์หมุน 3200 รอบต่อนาที

7. จงหาความถี่ของเหตุการณ์ต่อไปนี้ (ในหน่วยต่อวินาทีหรือเฮิรตซ์)

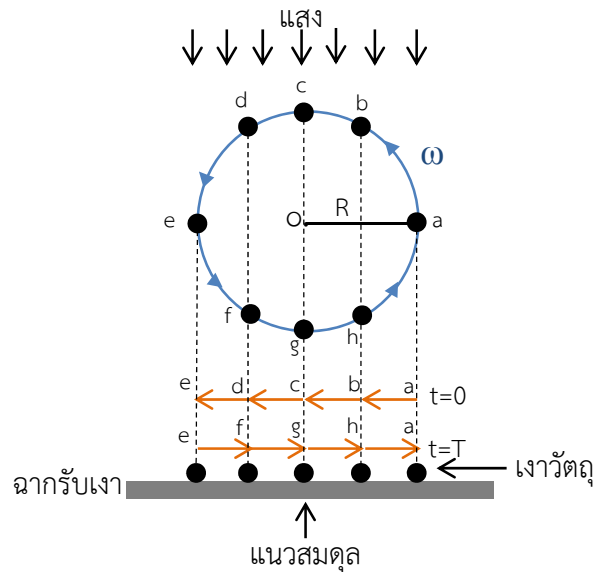
- ก. สายซอสั้น 43 รอบ ใน 0.1 วินาที
- ข. ใบพัดเครื่องปั่นอาหารหมุน 13 000 รอบ ใน 1 นาที

## 8.2 ปริมาณที่เกี่ยวข้องกับการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย

### 8.2.1 ความสัมพันธ์ของการกระจัด ความเร็ว

#### และความเร่ง

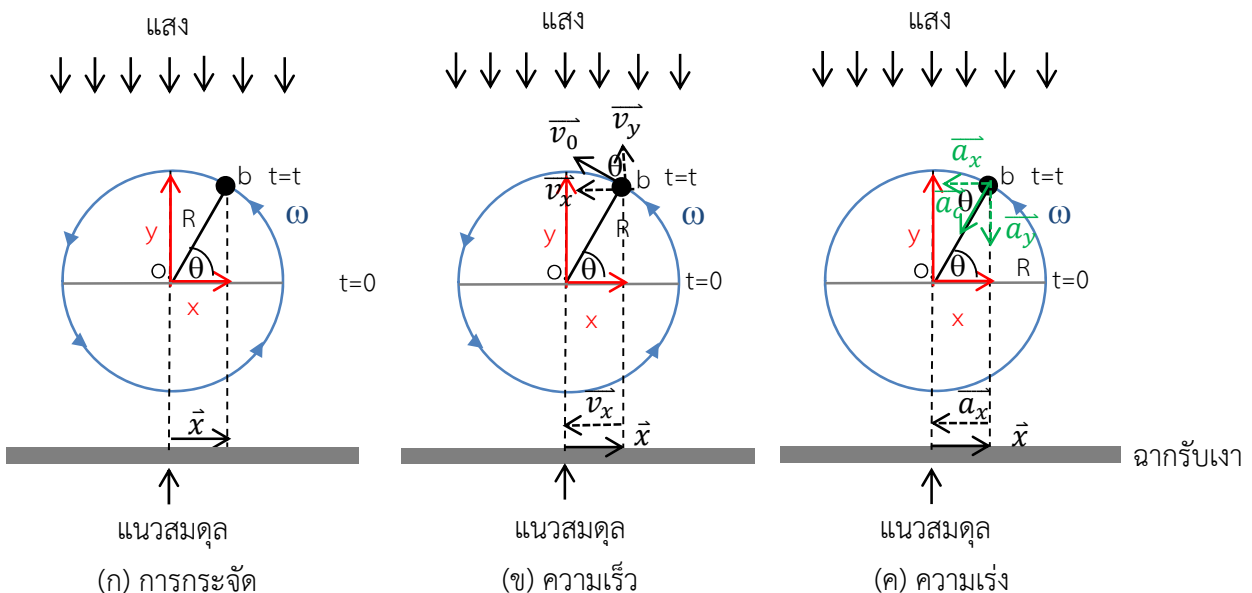
เนื่องจากการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายกับการเคลื่อนที่แบบวงกลมมีลักษณะคล้ายกันคือเคลื่อนที่ช้าลงเมื่อเคลื่อนที่ครบรอบ การมองวัตถุที่กำลังเคลื่อนที่แบบวงกลมทางด้านข้างหรือฉายแสงเพื่อให้เกิดเงาของวัตถุบนฉากรับจะเห็นวัตถุเคลื่อนที่กลับไปกลับมาช้าลงเหมือนเดียวกับการเคลื่อนที่ของวัตถุติดปลายสปริง ดังนั้นในการพิจารณาหาปริมาณต่างๆ ของการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายจะพิจารณาจากเงาของวัตถุที่เคลื่อนที่เป็นวงกลมในระนาบตั้งด้วยอัตราเร็วเชิงมุมคงตัว เมื่อพิจารณาการเคลื่อนที่ของเงาวัตถุที่เคลื่อนที่เป็นวงกลมรัศมี  $R$  รอบจุดศูนย์กลาง  $O$  โดยเคลื่อนที่ทวนเข็มนาฬิกาจาก  $a$  ไป  $b$  ไป  $c$ ...จนกลับมาที่  $a$  อีกครั้ง ด้วยอัตราเร็วเชิงมุมคงตัว  $\omega$  จะเห็นว่าเงาของวัตถุบนฉากซึ่งวางในแนวนอนจะเคลื่อนที่กลับไปกลับมาในแนวตรงตามแนวระดับ ดังรูปที่ 1



รูปที่ 1 เงาวัตถุที่เคลื่อนที่เป็นวงกลมบนฉากรับ

เมื่อพิจารณาการกระจัดของเงาวัตถุที่เคลื่อนที่เป็นวงกลมจากจุด  $a$  ไปยังจุด  $b$  เราจะพิจารณาการกระจัดในแนวระดับเนื่องจากเงาตกมาที่ฉากในแนวระดับ (แกน  $x$ ) ดังรูปที่ 2 (ก) เมื่อทำการแยกเวกเตอร์จะพบว่า

$$\text{ขนาดของการกระจัดในแนวระดับคือ} \quad x = R \cos \theta \quad (1)$$



รูปที่ 2 (ก) การกระจัด (ข) ความเร็ว (ค) ความเร่ง ของเงาวัตถุที่เคลื่อนที่เป็นวงกลมบนฉากรับเงา ณ ตำแหน่ง  $b$

เมื่อพิจารณาความเร็วของเงาวัตถุที่เคลื่อนที่เป็นวงกลมจากจุด a ไปยังจุด b ความเร็วของวัตถุมีทิศทางไปตามเส้นทางการเคลื่อนที่หรือสัมผัสกับวงกลมดังรูปที่ 2 (ข) ขนาดของความเร็ว  $v$  ของเงาวัตถุจะเท่ากับขนาดขององค์ประกอบของความเร็ว  $v_0$  ในทิศทางตามแนวแกน x เนื่องจากเรากำหนดทิศทางของแกน x มีทิศไปทางขวามือ แต่ทิศทางของความเร็ว  $v_x$  มีทิศทางไปทางซ้ายมือ ดังนั้น

$$\text{ขนาดความเร็วของวัตถุคือ} \quad v_x = -v_0 \sin \theta \quad (2)$$

เมื่อพิจารณาความเร่งของเงาวัตถุที่เคลื่อนที่เป็นวงกลมจากจุด a ไปยังจุด b ความเร่งของวัตถุจะเป็นความเร่งสู่ศูนย์กลางซึ่งมีทิศทางเข้าหาตำแหน่งสมดุลงรูปที่ 2 (ค) ขนาดของความเร่ง  $a$  ของเงาวัตถุจะเท่ากับขนาดขององค์ประกอบของความเร่ง  $a_0$  ในทิศทางตามแนวแกน x เนื่องจากเรากำหนดทิศทางของแกน x มีทิศไปทางขวามือ แต่ทิศทางของความเร่ง  $a_x$  มีทิศทางไปทางซ้ายมือ ดังนั้น

$$\text{ขนาดความเร่งของวัตถุคือ} \quad a_x = -a_c \cos \theta \quad (3)$$

$$\text{จากการเคลื่อนที่แบบวงกลมเราทราบว่าอัตราเร็วเชิงมุมของวัตถุคือ} \quad \omega = \frac{\theta}{t} \quad \text{จะได้} \quad \theta = \omega t \quad (4)$$

โดย  $\omega t$  เป็นมุมเฟส (Phase angle) ณ เวลา  $t$  ซึ่งเป็นค่าที่ใช้บอกตำแหน่งขณะหนึ่งของสิ่งที่เคลื่อนที่ในลักษณะเป็นรอบ จากความสัมพันธ์ของความเร็วเชิงเส้น ความเร่งสู่ศูนย์กลาง อัตราเร็วเชิงมุมของการเคลื่อนที่แบบวงกลม ดังสมการ (2)-(4)

$$v_0 = \omega R \quad (5)$$

$$a_0 = \omega^2 R \quad (6)$$

เมื่อแทนสมการที่ (4) (5) และ (6) ในสมการที่ (1) (2) และ (3) และ  $R$  คือระยะการกระจัดสูงสุดซึ่งก็คือแอมพลิจูด ( $A$ ) นั้นเอง จะได้ว่าขนาดของการกระจัด ความเร็ว และความเร่งเท่ากับ

$$x = A \cos \omega t \quad (7)$$

$$v_x = -\omega A \sin \omega t \quad (8)$$

$$a_x = -\omega^2 A \cos \omega t = -\omega^2 x \quad (9)$$

เมื่อพิจารณาสมการที่ (7) และสมการที่ (9) เราจะได้ว่า การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายนี้ ขนาดของความเร่งของวัตถุจะแปรผันตรงขนาดของการกระจัดแต่มีทิศทางตรงกันข้าม โดยขนาดของความเร่งมีความสัมพันธ์กับการกระจัด ดังสมการที่ (10)

$$a_x = -\omega^2 x \quad (10)$$

โดยความเร็วและความเร่งสูงสุดมีค่าเท่ากับ  $v_{max} = \omega A$  และ  $a_{max} = \omega^2 A$

เมื่อเขียนกราฟจะได้กราฟความสัมพันธ์ระหว่างการกระจัดกับเวลา ความเร็วกับเวลา และความเร่งกับเวลาของการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายมีลักษณะเป็นคลื่นรูปไซน์ดังรูปที่ 3 หากพิจารณาการเคลื่อนที่ของสปริงสามารถอธิบายได้ดังนี้

จากกราฟการกระจัดกับเวลา แสดงให้เห็นว่าวัตถุมีการเคลื่อนที่โดยมีการกระจัดมากที่สุดเรียกว่าแอมพลิจูด ( $A$ ) โดยวัตถุติดปลายสปริงมีการกระจัด  $+A$  เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ไปทางขวาทำให้สปริงยืดออก หลังจากนั้นการกระจัดจะค่อยๆ ลดลงจนเป็นศูนย์ที่เวลา  $\frac{T}{4}$  แล้ววัตถุจะเคลื่อนที่ไปทางซ้ายจนมีการกระจัดมากที่สุด  $-A$  เมื่อเคลื่อนที่ครบครึ่งรอบ หลังจากนั้นวัตถุจะเคลื่อนที่กลับไปยังตำแหน่งสมดุลงทำให้มีการกระจัดเป็นศูนย์ แล้วเคลื่อนที่

ต่อไปทางขวาจนสปริงยืดสุดทำให้การกระจัดเป็น  $+A$  ซึ่งเป็นการเคลื่อนที่ครบ 1 รอบพอดี โดยใช้เวลาในการเคลื่อนที่ครบ 1 รอบ คือ  $T$

จากกราฟความเร็วกับเวลาเริ่มต้นตั้งวัตถุให้สปริงยืดออกสุดแล้วจับไว้ วัตถุจะหยุดนิ่งทำให้ความเร็วเป็นศูนย์ เมื่อปล่อยวัตถุความเร็วจะค่อยๆ เพิ่มขึ้นแต่มีทิศทางไปทางซ้ายทำให้กราฟมีขนาดเพิ่มขึ้นแต่ทิศทางเป็นลบ หลังจากนั้นวัตถุจะมีความเร็วมากที่สุดที่การกระจัดเท่ากับศูนย์ แล้วมีความเร็วเพิ่มขึ้นจนเป็นศูนย์อีกครั้งเมื่อสปริงหดสุด และความเร็วจะเพิ่มขึ้นจนมีค่าสูงสุดเมื่อการกระจัดเท่ากับศูนย์แล้วความเร็วจะลดลงเมื่อสปริงยืดออกสุดอีกครั้ง จะเห็นว่าความเร็วจะมีทิศเดียวกันกับทิศการเคลื่อนที่ของวัตถุติดปลายสปริงและมีขนาดแปรผกผันกับการกระจัด

จากกราฟความเร่งกับเวลาจะเห็นว่าขนาดของความเร่งแปรผันตรงกับขนาดของการกระจัด แต่มีทิศตรงกันข้ามกัน กล่าวคือ เมื่อขนาดการกระจัดสูงสุด  $+A$  ขนาดของความเร่งจะมากที่สุด  $-\omega^2 A$  ซึ่งมีทิศสวนทางกันกับการกระจัด และเมื่อการกระจัดเป็นศูนย์ความเร่งจะเป็นศูนย์เช่นเดียวกัน

จากความสัมพันธ์ระหว่างความเร่งกับการกระจัดของการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายดังสมการที่ (10)

$$a = -\omega^2 x \quad (10)$$

เมื่อเปรียบเทียบสมการความเร่งของวัตถุติดปลายสปริงในสมการที่ (11)

$$a = -\frac{k}{m} x \quad (11)$$

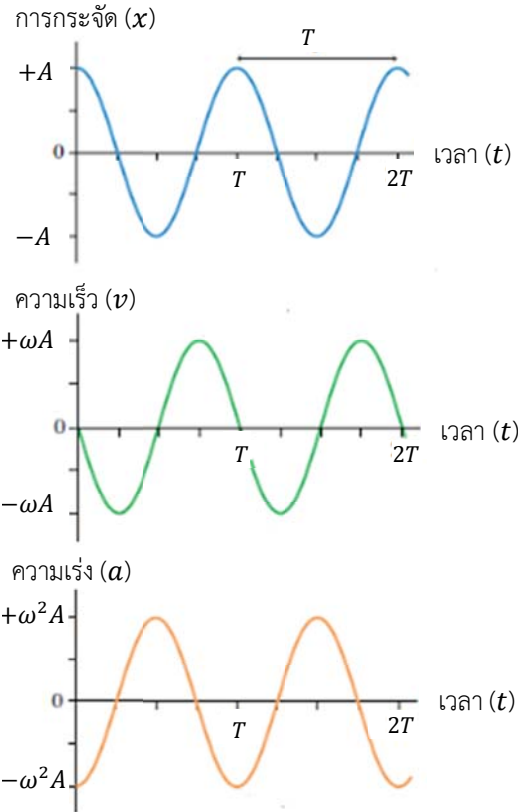
และสมการความเร่งของการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายในสมการที่ (10) จะได้ว่าอัตราเร็วเชิงมุมในการเคลื่อนที่ของวัตถุติดปลายสปริง คือ  $\omega^2 = \frac{k}{m}$  หรือ  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

จากความสัมพันธ์ระหว่างคาบ ความถี่ในการสั่นและอัตราเร็วเชิงมุมพบว่า  $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$  จะได้ว่า

$$\text{ความถี่ในการเคลื่อนที่ของวัตถุติดปลายสปริง คือ } f = \frac{\omega}{2\pi} = 2\pi \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (12)$$

$$\text{คาบในการเคลื่อนที่ของวัตถุติดปลายสปริง คือ } T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (13)$$

จากสมการความถี่และคาบการเคลื่อนที่ของวัตถุติดปลายสปริงในสมการที่ (12)-(13) จะเห็นว่าความถี่และคาบการแกว่งขึ้นอยู่กับค่าคงที่ของสปริงและมวลของวัตถุติดปลายสปริง โดยมวลมากกว่าจะมีความถี่น้อยกว่าเคลื่อนที่ช้ากว่า และใช้เวลานานกว่า ในทางตรงข้ามสปริงที่แข็งมากกว่า (ค่า  $k$  สูงกว่า) ต้องออกแรงมากกว่า



จัดกับเวลา  
เวลา

เพื่อให้ได้ระยะการกระจัดเดียวกันทำให้มีความเร่งมากกว่า อัตราเร็วสูงกว่า และมีเวลา  $T$  ต่อรอบสั้นกว่า ในการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายคาบและความถี่ไม่ขึ้นกับแอมพลิจูด  $A$  สำหรับ  $m$  และ  $k$  เดียวกันเวลาในการสั่นหนึ่งรอบมีค่าเท่ากันหมดไม่ว่าแอมพลิจูดจะใหญ่หรือเล็ก เนื่องจากค่าแอมพลิจูดสูงหมายความว่าวัตถุไปถึงการกระจัดที่สูงกว่าและมีแรงดึงกลับที่สูงกว่า สิ่งนี้เพิ่มอัตราเร็วเฉลี่ยของวัตถุในหนึ่งรอบและไปชดเชยการเคลื่อนที่ระยะไกลกว่า ทำให้ได้เวลาทั้งหมดเท่ากัน ดังนั้นแอมพลิจูดจึงไม่มีผลกับความถี่และคาบการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย

## แบบฝึกหทบทวนครั้งที่ 2

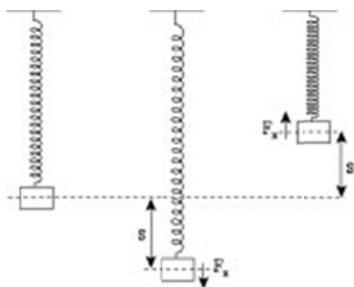
1. กราฟระหว่างการกระจัดกับเวลาของวัตถุชิ้นหนึ่งที่มีการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายให้ข้อมูลอะไรบ้าง
2. ขณะที่วัตถุสั่นแบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย ปริมาณใดที่มีทิศทางตรงข้ามกันเสมอ
3. มุมเฟสและเฟสเริ่มต้น ต่างกันอย่างไร และมีความสำคัญอย่างไร
4. วัตถุเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย มีแอมพลิจูด 30 เซนติเมตร มีคาบการเคลื่อนที่ 4 วินาที อัตราเร็วสูงสุดของการเคลื่อนที่มีค่าเท่าใด
5. วัตถุเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย ด้วยความถี่ 30 รอบต่อวินาที มีขนาดการกระจัดสูงสุด 20 เซนติเมตร ความเร่งสูงสุดของวัตถุนี้มีค่าเท่าใด
6. จงเขียนสมการการกระจัดที่ขึ้นกับเวลาของวัตถุติดปลายสปริงที่เคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย มีตำแหน่งเริ่มต้นต่างกันในตาราง กำหนดให้ ความถี่เชิงมุมเท่ากับ  $\omega$  แอมพลิจูด เท่ากับ  $A$

7. วัตถุเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย ด้วยความถี่ 5 รอบต่อวินาที
- ก. เมื่อเวลาผ่านไป 2 วินาที วัตถุอยู่ในมุมเฟสต่างจากเดิมเท่าใด
  - ข. เมื่อวัตถุอยู่ในเฟสต่างจากเดิม  $\pi$  เรเดียน วัตถุเคลื่อนที่ได้กี่รอบ
  - ค. วัตถุใช้เวลาเท่าใด จึงจะอยู่ในเฟสต่างไปจากเดิม  $4\pi$  เรเดียน
8. วัตถุหนึ่งเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายรอบจุดสมดุล O โดยมีอัตราเร็วสูงสุด 5.0 เซนติเมตรต่อวินาที และมีความถี่เท่ากับ 4\_ วินาที ขณะที่วัตถุมีอัตราเร็ว 3.0 เซนติเมตรต่อวินาที วัตถุอยู่ห่างจากจุดสมดุล O เป็นระยะกี่เซนติเมตร

### 8.3 แรงกับการสั่นของมวลการสั่นของมวลติดปลายสปริงและลูกตุ้มอย่างง่าย

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายของวัตถุจะมีแรงดึงวัตถุให้กลับมาที่ตำแหน่งสมดุล เรียกแรงนี้ว่า **แรงดึงกลับ** (restoring force) การสั่นของมวลติดปลายสปริงและการแกว่งของลูกตุ้มอย่างง่าย เป็นตัวอย่างของการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย

#### 8.3.1 การสั่นของมวลติดปลายสปริง





เมื่อดึงมวล  $m$  ที่ติดสปริงออกมาจากแนวสมดุลจะเกิดแรงดึงกลับ  $F = ks$  ทำให้วัตถุเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย พบว่า

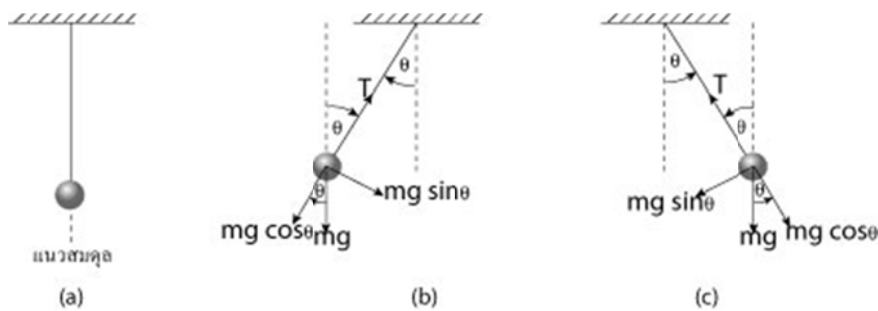
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad , \quad \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{m_2 \cdot k_1}{m_1 \cdot k_2}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad \frac{f_2}{f_1} = \sqrt{\frac{m_1 \cdot k_2}{m_2 \cdot k_1}}$$

### เพิ่มเติม

- แต่ถ้าเปลี่ยนสปริง
  - สปริงแข็ง  $k$  มาก  $\rightarrow$  คาบน้อย แกว่งเร็ว
  - สปริงอ่อน  $k$  น้อย  $\rightarrow$  คาบมาก แกว่งช้า
- ถ้ามีสปริงหลาย ๆ ตัว มาเรียงต่อกันจะทำให้ผลลัพธ์ของค่านิสสปริงเปลี่ยนไป

### 8.3.2 การแกว่งของลูกตุ้มอย่างง่าย



เมื่อดึงวัตถุมวล  $m$  ผูกเชือกยาว  $L$  ให้เบนจากเดิมเป็นมุมเล็ก ๆ แล้วปล่อยจะเกิดแรง  $mg \sin$  ดึงให้วัตถุเคลื่อนที่แบบ S.H.M. จะได้

$$T \propto \sqrt{L}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad , \quad \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{L_2 \cdot g_1}{L_1 \cdot g_2}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}} \quad , \quad \frac{f_2}{f_1} = \sqrt{\frac{L_1 \cdot g_2}{L_2 \cdot g_1}}$$

### เพิ่มเติม

- การแกว่งไม่ขึ้นกับมวลถ้าเอาไปแกว่งในที่ไร้น้ำหนักไม่แกว่ง
- ถ้า  $g$  คงที่ ถ้าเชือกยาว  $L$  มาก  $\rightarrow$  แกว่งช้า  
ถ้าเชือกสั้น  $L$  น้อย  $\rightarrow$  แกว่งเร็ว

### **แบบฝึกทบทวนครั้งที่ 3**

1. ถ้าต้องการเพิ่มคาบการสั่นของวัตถุติดปลายสปริงสามารถทำได้ด้วยวิธีใดบ้าง
2. ถ้าต้องการเพิ่มความถี่เชิงมุมของลูกตุ้มอย่างง่าย ทำได้ด้วยวิธีใดบ้าง
3. ถ้าความยาวเชือกเท่ากับ 60 เซนติเมตร คาบของลูกตุ้มอย่างง่าย มวล  $m$  และ  $2m$  มีค่าเท่ากันหรือไม่ อย่างไร
4. แขนงมวล 10 กิโลกรัมกับสปริง แล้วปล่อยให้สั่นขึ้นลง วัดคาบของการสั่นได้ 0.5 วินาที ถ้าเอามวล 10 กิโลกรัม ออก สปริงจะสั้นกว่าตอนที่แขนงมวลอยู่เท่าใด
5. เมื่อนำมวล 5 กิโลกรัม แขนงกับปลายสปริงในแนวดิ่ง ทำให้สปริงมีความยาวเพิ่มขึ้น 5 เซนติเมตร ถ้าทำให้มวลติดสปริงสั้นในแนวดิ่งจะสั้นได้กี่รอบในเวลา 1 วินาที (ให้คำตอบติดค่า  $\pi$ )
6. รถทดสอบมวล 2 กิโลกรัม ติดอยู่กับปลายสปริง เมื่อดึงมวลแรง 10 นิวตันให้ทิศขนานกับพื้นจะทำให้สปริงยืดออก 20 เซนติเมตร เมื่อปล่อยรถจะเคลื่อนที่กลับไปมาบนพื้นเกลี้ยงแบบซิมเปิลฮาร์มอนิก ด้วยคาบเท่าไร
7. (ข้อสอบ ENTRANCE) รถทดสอบมวล 500 กรัม ติดอยู่กับปลายสปริง เมื่อดึงมวลแรง 5 นิวตันให้ทิศขนานกับพื้นจะทำให้สปริงยืดออก 10 เซนติเมตร เมื่อปล่อยรถจะเคลื่อนที่กลับไปมาบนพื้นเกลี้ยงแบบซิมเปิลฮาร์มอนิก ด้วยคาบเท่าไร

8. แขนงมวล 30 กรัม ที่ปลายล่างของสปริงซึ่งแขวนในแนวตั้ง โดยที่ปลายบนถูกยึดไว้ ถ้า ดึงมวลลงเล็กน้อย เพื่อให้สปริงสั้นขึ้นลง วัตเวลาในการสั้นครบ 6 รอบให้เป็น 3 วินาที หากเปลี่ยนมวลที่แขวน เป็น 120 กรัม จะวัดคาบการสั้นได้เท่าใด
  
9. (ข้อสอบ ENTRANCE) แขนงมวล 50 กรัม ที่ปลายล่างของสปริงซึ่งแขวนในแนวตั้ง โดยที่ปลายบนถูกยึดไว้ ถ้า ดึงมวลลงเล็กน้อย เพื่อให้สปริงสั้นขึ้นลง วัตเวลาในการสั้นครบ 10 รอบให้เป็น 5 วินาที หากเปลี่ยนมวลที่แขวน เป็น 200 กรัม จะวัดคาบการสั้นได้เท่าใด
  
10. มวล  $m$  กิโลกรัมแขวนอยู่ที่ปลายสปริงซึ่งห้อยในแนวตั้ง ถูกดึงแล้วปล่อยให้สั้นขึ้นลงในแนวตั้ง พบว่ามีการสั้น 5 รอบ/วินาที ถ้าเปลี่ยนมวลที่แขวนเป็นสองเท่าของมวลเดิม แล้วปล่อยให้สั้นเช่นเดิม จะมีการสั้นเป็นเท่าใด ในหน่วยรอบ/วินาที
  
11. (ข้อสอบ ENTRANCE) มวล  $m$  กิโลกรัมแขวนอยู่ที่ปลายสปริงซึ่งห้อยในแนวตั้ง ถูกดึงแล้วปล่อยให้สั้นขึ้นลงในแนวตั้ง พบว่ามีการสั้น  $n$  รอบ/วินาที ถ้าเปลี่ยนมวลที่แขวนเป็นครึ่งหนึ่งของมวลเดิม แล้วปล่อยให้สั้นเช่นเดิม จะมีการสั้นเป็นเท่าใดในหน่วยรอบ/วินาที
  
12. แก้วลูกตุ้มนาฬิกาที่แขวนด้วยเชือกยาว 0.1 เมตร จงหา
  - ก. คาบเวลาของลูกตุ้ม
  
  - ข. ความถี่ของลูกตุ้ม

13. ลูกตุ้มแขวนด้วยเชือกยาว 1 เมตร แกว่งไปมาด้วยคาบ 2 วินาที ถ้าลูกตุ้มแขวนด้วยเชือกยาว 16 เมตร จะแกว่งด้วยคาบเท่าไร
  
14. ลูกตุ้มแขวนด้วยเชือกยาว 1 เมตร แกว่งไปมาด้วยคาบ 3 วินาที ถ้าลูกตุ้มแขวนด้วยเชือกยาว 9 เมตร จะแกว่งด้วยคาบเท่าไร
  
15. ลูกตุ้มแขวนด้วยเชือกยาว 4 เมตร แกว่งไปมาวัดได้ 5 รอบต่อวินาที ถ้าลูกตุ้มแขวนด้วยเชือกยาว 1 เมตร จะแกว่งด้วยความถี่เท่าไร
  
16. ลูกตุ้มแขวนด้วยเชือกยาว 8 เมตร แกว่งไปมาวัดได้ 9 รอบต่อวินาที ถ้าลูกตุ้มแขวนด้วยเชือกยาว 2 เมตร จะแกว่งด้วยความถี่เท่าไร

#### 8.4 ความถี่ธรรมชาติและการสั่นพ้อง

เมื่อให้วัตถุสั่นหรือแกว่งอย่างอิสระ เช่น การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย ในวัตถุติดสปริงหรือลูกตุ้มอย่างง่าย วัตถุจะสั่นด้วยความถี่เฉพาะตัวค่าหนึ่ง เรียกว่า **ความถี่ธรรมชาติ** (natural frequency) เมื่อวัตถุถูกกระตุ้นต่อเนื่องให้สั่นอย่างอิสระด้วยแรงหรือพลังงานที่มีความถี่เท่ากับหรือใกล้เคียงกับความถี่ธรรมชาติของวัตถุ วัตถุนั้นจะสั่นด้วยความถี่ธรรมชาติของวัตถุนั้นและสั่นด้วยแอมพลิจูดที่มีค่ามาก เรียกปรากฏการณ์นี้ว่า **การสั่นพ้อง** (resonance)

ความรู้เรื่องการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย ความถี่ธรรมชาติ และการสั่นพ้องนำมาประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวัน เช่น ระบบต้านแผ่นดินไหวของตึกสูง การออกแบบสะพาน อาคาร และสิ่งก่อสร้างต่าง ๆ

#### แบบฝึกทบทวนครั้งที่ 4

1. ในการกระตุ้นให้วัตถุสั่นอย่างอิสระพบว่าทุกครั้งที่ วัตถุสั่นด้วยความถี่ค่าเดิมเสมอ ความถี่นี้เรียกว่าอะไร
2. จากกิจกรรม 8.3 การที่ลูกตุ้ม ที่มีความยาวเชือกเท่ากับลูกตุ้มลูกใหญ่แกว่งด้วยการกระจัดมากที่สุด เพราะเกิดปรากฏการณ์ใด
3. จงหาความถี่ธรรมชาติของการแกว่งของลูกตุ้มอย่างง่ายที่ผูกติดกับเชือกเบาที่มีความยาว 50 เซนติเมตร
4. จงหาความถี่ธรรมชาติของวัตถุติดปลายสปริง เมื่อวัตถุมีมวล 0.1 กิโลกรัม และสปริงมีค่าคงตัวของสปริง 1000 นิวตันต่อเมตร

#### แบบทดสอบ(O-NET) บทที่ 8 การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย

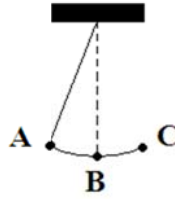
1. (O-NET49) นอตขนาดเล็กผูกด้วยสายเอ็นแขวนไว้ให้สายยาว  $L$  ซึ่งสามารถเปลี่ยนให้มีค่าต่าง ๆ ได้ คาบของการแกว่ง  $T$  ของนอตจะขึ้นกับความยาว  $L$  อย่างไร

1.  $T^2$  เป็นปฏิภาคโดยตรงกับ  $L$
2.  $T$  เป็นปฏิภาคโดยตรงกับ  $L$
3.  $T^2$  เป็นปฏิภาคโดยตรงกับ  $L^2$
4.  $\sqrt{T}$  เป็นปฏิภาคโดยตรงกับ  $L$



2. (O-NET51) การทดลองเรื่องการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย ถ้าให้ลูกตุ้มเคลื่อนที่จาก A ไป B ไป C แล้วไป B ดังรูปใช้เวลา 3 วินาทีคาบของการเคลื่อนที่มีค่าเท่าใด

1. 2 s
2. 3 s
3. 4 s
4. 5 s



3. (O-NET51) ข้อความใดถูกต้องเกี่ยวกับคาบของลูกตุ้มอย่างง่าย

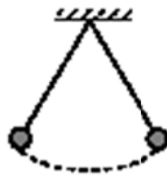
1. ไม่ขึ้นกับความยาวเชือก
2. ไม่ขึ้นกับมวลของลูกตุ้ม
3. ไม่ขึ้นกับแรงโน้มถ่วงของโลก
4. มีค่าเท่าเดิมถ้าไปแกว่งบนดวงจันทร์

4. (O-NET52) ข้อใดต่อไปนี้เป็นได้ทำให้วัตถุมีการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย

1. แขนงลูกตุ้มด้วยเชือกในแนวตั้ง ผลักลูกตุ้มให้แกว่งเป็นวงกลม โดยเส้นเชือกทำมุมคงตัวกับแนวตั้ง
2. แขนงลูกตุ้มด้วยเชือกในแนวตั้งดึงลูกตุ้มออกมาจนเชือกทำมุมกับแนวตั้งเล็กน้อยแล้วปล่อยมือ
3. ผูกวัตถุกับปลายสปริงในแนวระดับ ตรึงอีกด้านของปลายสปริงไว้ ดึงวัตถุให้สปริงยืดออกเล็กน้อยแล้วปล่อยมือ
4. ผูกวัตถุกับปลายสปริงในแนวตั้ง ตรึงอีกด้านของปลายสปริงไว้ ดึงวัตถุให้สปริงยืดออกเล็กน้อยแล้วปล่อยมือ

5. (O-NET53) ลูกตุ้มนาฬิกาแกว่งแบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย พบว่าผ่านจุดต่ำสุด ทุก ๆ 2.1 วินาทีความถี่ของการแกว่งของลูกตุ้มนี้เป็นไปตามข้อใด

1. 0.24 เฮิรตซ์
2. 0.48 เฮิรตซ์
3. 2.1 เฮิรตซ์
4. 4.2 เฮิรตซ์



6. (O-NET54) ลูกตุ้มนาฬิกาแกว่งกลับไปกลับมาฮาร์มอนิกอย่างง่าย ที่ตำแหน่งต่ำสุดของการแกว่ง ลูกตุ้มนาฬิกาที่มีสภาพการเคลื่อนที่เป็นอย่างไร

1. ความเร็วสูงสุด ความเร่งสูงสุด
2. ความเร็วต่ำสุด ความเร่งสูงสุด
3. ความเร็วสูงสุด ความเร่งต่ำสุด
4. ความเร็วต่ำสุด ความเร่งต่ำสุด

7. สปริงยาว 10 เซนติเมตร ถูกแขวนไว้ในแนวตั้ง นำมวลก้อนหนึ่งมาถ่วงไว้ที่ปลายด้านล่างทำให้สปริงยาวขึ้นอีก 1 เซนติเมตร หลังจากนั้นดึงมวลก้อนดังกล่าวลงมาอีก 2 เซนติเมตร แล้วปล่อยมือ แอมพลิจูดการสั่นจะมีค่าเท่าใด(O-Net 57)

1. 1 เซนติเมตร
2. 2 เซนติเมตร
3. 3 เซนติเมตร
4. 4 เซนติเมตร
5. 13 เซนติเมตร

8. O-Net 58 ลักษณะใดที่ใกล้เคียงการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายน้อยที่สุด

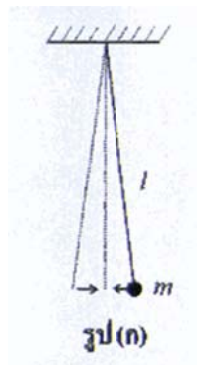
1. การเต้นของหัวใจ
2. การแกว่งลูกตุ้มนาฬิกา
3. การแกว่งมวลติดสปริง
4. การสั่นของโมเลกุลอากาศ เนื่องจากเสียงตัวโน้ตดนตรีที่มีความถี่เดียว
5. การไหลของกระแสไฟฟ้าชนิดกระแสสลับ

9. ในขณะที่มวลติดปลายสปริงกำลังสั่นและระบบมีพลังงานรวมลดลง เราจะสังเกตเห็นการเปลี่ยนแปลงอย่างไร (O-Net 59)

1. แอมพลิจูดคงที่ ความถี่ลดลง
2. แอมพลิจูดคงที่ ความถี่เพิ่มขึ้น
3. แอมพลิจูดลดลง ความถี่ลดลง
4. แอมพลิจูดลดลง ความถี่คงที่
5. แอมพลิจูดและความถี่ไม่เปลี่ยนแปลง แต่มีปริมาณอื่นที่เปลี่ยนแปลง

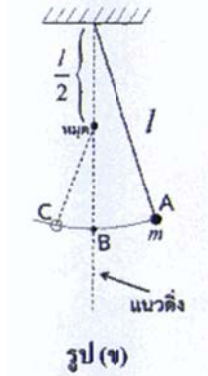
10. พิจารณารูป (ก) ถ้าต้องการให้ลูกตุ้มมีคาบของการแกว่งยาวขึ้น จะต้องทำอย่างไร (O-Net 60)

1. ลดมวล  $m$
2. ลดความยาว  $l$
3. เพิ่มความยาว  $l$
4. เพิ่มมวล  $m$  ลดความยาว  $l$
5. ลดแอมพลิจูดของการแกว่ง



11. พิจารณารูป (ข) สายลูกตุ้มแกว่งไปได้ครึ่งทางก็ชนหยุดแล้วแกว่งต่อ เวลาที่ใช้แกว่งจากตำแหน่ง A ไป B เป็นกี่เท่าของเวลา B ไป C (O-Net 60)

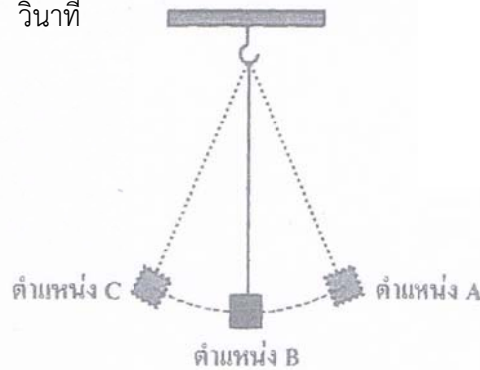
1.  $\frac{1}{2}$
2.  $\frac{1}{\sqrt{2}}$
3. 1
4.  $\sqrt{2}$
5. 2



12. ศึกษาการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย โดยปล่อยลูกตุ้มจากจุด A พบว่า ลูกตุ้มแกว่งจากจุด A ผ่านจุด B ไปถึงจุด C แล้วจึงแกว่งกลับมาถึงจุด B อีกครั้ง ใช้เวลารวมทั้งสิ้น 3.0 วินาที ความถี่ของการแกว่งเป็นเท่าใด (O-Net 61)

1. 4.0 เฮิรตซ์
2. 1.0 เฮิรตซ์
3. 0.50 เฮิรตซ์
4. 0.33 เฮิรตซ์
5. 0.25 เฮิรตซ์

13. ปล่อยวัตถุจากตำแหน่ง A ให้เคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย ดังภาพ เมื่อสังเกตการเคลื่อนที่ของวัตถุ จากแนวสมดูล (ตำแหน่ง B) ไปตำแหน่งสูงสุด (ตำแหน่ง C) แล้วกลับมาที่แนวสมดูล (ตำแหน่ง B) อีกครั้ง พบว่าใช้เวลา 0.4 วินาที



การแกว่งนี้มีค่าความถี่เท่าใด และถ้าเพิ่มมวลของวัตถุ ความถี่จะเปลี่ยนแปลงหรือไม่ อย่างไร (O-Net 62)

	ความถี่ ( $s^{-1}$ )	ความถี่หลังจากเพิ่มมวล
1.	0.4	ไม่เปลี่ยนแปลง
2.	1.25	ลดลง
3.	1.25	ไม่เปลี่ยนแปลง
4.	2.50	ลดลง
5.	2.50	ไม่เปลี่ยนแปลง