ฉบับคู่มือครู

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม

คณิตศาสตร์ เล่ม ๑

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๑

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑

กระทรวงศึกษาธิการ

๔๕.-

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม

คณิตศาสตร์ เล่ม ๑

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๑

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑

จัดทำโดย

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

กระทรวงศึกษาธิการ

ISBN 978 - 974 - 01 - 6231 - 5

พิมพ์ครั้งที่หนึ่ง ๘๐๐,๐๐๐ เล่ม

พ.ศ. ๒๕๕๒

องค์การค้าของ สกสค. จัดพิมพ์จำหน่าย

พิมพ์ที่โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว

๒๒๔๙ ถนนลาดพร้าว วังทองหลาง กรุงเทพมหานคร

ประกาศกระทรวงศึกษาธิการ
เรื่อง อนุญาตให้ใช้หนังสือในสถานศึกษา

ด้วยสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน กระทรวงศึกษาธิการได้มอบหมายให้สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี จัดทำหนังสือเรียน รายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม ๑ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๑ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช ๒๕๕๑ สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐานได้พิจารณาแล้ว อนุญาตให้ใช้หนังสือเล่มนี้ในสถานศึกษาได้

ประกาศ ณ วันที่ ๑๑ ธันวาคม พ.ศ. ๒๕๕๒

(นายชินภัทร ภูมิรัตน)
เลขาธิการคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน

คำนำ

หนังสือเรียน รายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม ๑ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๑ นี้ จัดทำขึ้นตามตัวชี้วัดและมาตรฐานการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ สำหรับให้สถานศึกษาเลือกใช้ประกอบการเรียนการสอนและใช้เป็นแนวทางในการออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้ ให้ความรู้ความเข้าใจผู้เรียนนำไปสู่ทักษะการคิดวิเคราะห์ สังเคราะห์ ตามความสามารถและความแตกต่างระหว่างบุคคลของผู้เรียนได้ ในการจัดทำหนังสือเล่มนี้ ได้รับความช่วยเหลือจากคณาจารย์ ผู้ทรงคุณวุฒิ ผู้เชี่ยวชาญด้านคณิตศาสตร์จากสถาบันต่างๆ ทั้งภาครัฐและเอกชนเป็นอย่างดี

สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน หวังเป็นอย่างยิ่งว่าหนังสือเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการจัดการเรียนรู้ เพื่อประยุกต์ใช้พัฒนาการเรียนรู้ของผู้เรียนได้อย่างเหมาะสม ขอขอบคุณสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ตลอดจนบุคคลและหน่วยงานที่มีส่วนเกี่ยวข้องในการจัดทำหนังสือไว้ ณ โอกาสนี้

(นายชินภัทร ภูมิรัตน)
เลขาธิการคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน
๑๑ ธันวาคม ๒๕๕๒

คำชี้แจง

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้รับมอบหมายจากกระทรวงศึกษาธิการ ให้พัฒนาหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ กลุ่มสาระการเรียนรู้วิทยาศาสตร์ รวมทั้งสาระการออกแบบและ เทคโนโลยีและสาระเทคโนโลยีสารสนเทศในกลุ่มสาระการเรียนรู้การงานอาชีพและเทคโนโลยี ตลอดจนจัดทำสื่อการเรียนรู้ตามหลักสูตรดังกล่าว

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ สำหรับระดับมัธยมศึกษาตอนต้น มีด้วยกันทั้งหมด 6 เล่ม จัดทำขึ้นเพื่อให้ผู้เรียนสามารถเรียนรู้และพัฒนาตนเอง นำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปพัฒนาชีวิต และเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตลอดจนศาสตร์อื่นๆ ในระดับที่สูงขึ้น ทั้งนี้สถานศึกษาสามารถปรับใช้เนื้อหาจากหนังสือเรียนทั้ง 6 เล่มนี้ เพื่อจัดการเรียนการสอนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ได้ตามความเหมาะสม

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ประกอบด้วยเรื่อง จำนวนและตัวเลข การประยุกต์ของจำนวนเต็มและเลขยกกำลัง และการสร้าง ซึ่งเป็นเนื้อหาสาระตามมาตรฐานการเรียนรู้ตามที่กำหนดไว้ในหลักสูตร อย่างไรก็ตามผู้สอนสามารถปรับบทเรียนให้เหมาะสมกับศักยภาพของผู้เรียนแต่ละกลุ่ม

การจัดทำหนังสือเรียนคณิตศาสตร์เล่มนี้ สสวท. ได้รับความร่วมมืออย่างดียิ่งจากคณาจารย์ ผู้ทรงคุณวุฒิ นักวิชาการ และครูผู้สอน จากหลายหน่วยงาน ทั้งภาครัฐและเอกชน สสวท. จึงขอขอบคุณทุกท่านไว้ ณ ที่นี้ และหวังเป็นอย่างยิ่งว่าหนังสือเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการศึกษาคณิตศาสตร์ อันเป็นรากฐานสำคัญของการพัฒนาทรัพยากรมนุษย์ของชาติต่อไป หากมีข้อเสนอแนะใดที่จะทำให้หนังสือเรียนเล่มนี้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น โปรดแจ้งให้สาขาคณิตศาสตร์มัธยมศึกษา สสวท. ทราบด้วย จักขอบคุณยิ่ง

(นางสาวนารี วงศ์สิโรจน์กุล)
รองผู้อำนวยการ รักษาการแทน
ผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

สารบัญ

สารบัญ

หน้า

บทที่ 1

การประยุกต์ 1

1.1 รูปเรขาคณิต

รูปเรขาคณิตเป็นรูปที่ประกอบด้วย จุด เส้นตรง เส้นโค้ง ระนาบ ฯลฯ อย่างน้อยหนึ่งอย่าง รูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยม ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก และทรงกระบอก เป็นตัวอย่างของรูปเรขาคณิต

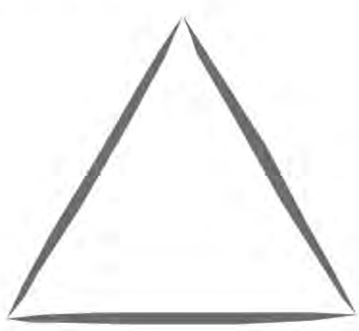
ความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยม

รูปสามเหลี่ยม เป็นรูปปิดที่ประกอบด้วยด้านสามด้าน

ความยาวรอบรูปของรูปสามเหลี่ยม คือ ผลบวกของความยาวของด้านทุกด้านของรูปสามเหลี่ยม

กิจกรรมต่อไปนี้ จะชี้นำให้นักเรียนได้เรียนรู้สมบัติของรูปสามเหลี่ยมที่เกี่ยวกับความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยม

1. เตรียมไม้จิ้มฟัน 8 อัน ให้ถือว่าไม้จิ้มฟันแต่ละอันยาว 1 หน่วยเท่ากัน
2. ใช้ไม้จิ้มฟัน 3 อันต่อกันเป็นรูปสามเหลี่ยมดังนี้



ใช้ไม้จิ้มฟัน 4 อันถึง 8 อันเพื่อต่อกันเป็นรูปสามเหลี่ยมหนึ่งรูป บันทึกผลที่ได้ลงในตารางให้ครบทุกกรณี ไม่ว่าจะต่อเป็นรูปสามเหลี่ยมได้หรือไม่ก็ตาม

จำนวนไม้จิ้มฟันทั้งหมด (อัน)	ต่อกันเป็นรูปสามเหลี่ยม		จำนวนไม้จิ้มฟันที่ต่อเป็นด้าน (อัน) *		
	ได้	ไม่ได้	ด้านที่หนึ่ง	ด้านที่สอง	ด้านที่สาม
3	✓		1	1	1
4					
5		✓	1	1	3
	✓		1	2	2
6					
7					
8					

* ในการกำหนดจำนวนไม้จิ้มฟันของด้านที่หนึ่ง ด้านที่สองและด้านที่สาม ไม่ถือลำดับเป็นสำคัญ เช่น รูปที่มีด้านที่หนึ่ง ด้านที่สองและด้านที่สามเป็น 1, 2 และ 2 ตามลำดับ จะถือว่าเป็นรูปเดียวกับรูปที่มีด้านที่หนึ่ง ด้านที่สองและด้านที่สามเป็น 2, 1 และ 2 ตามลำดับ

3. จากตารางในข้อ 2 ข้างต้น จงสำรวจกรณีที่ต่อไม้จิ้มฟันเป็นรูปสามเหลี่ยมได้ แล้วเติมจำนวนลงในตารางให้ครบทุกกรณี

ความยาวรอบรูป (หน่วย)	**ความยาวของด้าน (หน่วย)**		
	ด้านที่หนึ่ง	**ด้านที่สอง**	**ด้านที่สาม**
3	1	1	1

4. จากตารางในข้อ 3 หาผลบวกของความยาวของด้านสองด้านใด ๆ ของรูปสามเหลี่ยมเปรียบเทียบกับความยาวของด้านที่เหลือ แล้วตอบคำถามต่อไปนี้
    1) มีกรณีใดบ้างที่ผลบวกของความยาวของด้านสองด้านใด ๆ **เท่ากับ**ความยาวของด้านที่เหลือ
    2) มีกรณีใดบ้างที่ผลบวกของความยาวของด้านสองด้านใด ๆ **น้อยกว่า**ความยาวของด้านที่เหลือ
    3) มีกรณีใดบ้างที่ผลบวกของความยาวของด้านสองด้านใด ๆ **มากกว่า**ความยาวของด้านที่เหลือ
    4) ในกรณีทั่วไปนักเรียนคิดว่าผลบวกของความยาวของด้านสองด้านใด ๆ ของรูปสามเหลี่ยมสัมพันธ์กับความยาวของด้านที่เหลืออย่างไร
5. จากตารางในข้อ 2 จงสำรวจกรณีที่ต่อไม้จิ้มฟันเป็นรูปสามเหลี่ยมไม่ได้ แล้วเปรียบเทียบผลบวกของความยาวของด้านสองด้านใด ๆ ทุกคู่กับความยาวของด้านที่เหลือ ว่ามีผลบวกของความยาวของด้านสองด้านอย่างน้อยหนึ่งคู่ที่**น้อยกว่า**หรือ**เท่ากับ**ความยาวของด้านที่เหลือใช่หรือไม่

ทำได้ไหม

ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดต่อไปนี้

1. กำหนดส่วนของเส้นตรงซึ่งมีความยาวต่อไปนี้ (หน่วยเป็นเซนติเมตร)

    1) 3, 4, 5　　　　2) 4, 5, 9

    3) 5, 6, 12　　　　4) 3.5, 4.5, 7

    5) 4, 5, 8.5　　　　6) 5.2, 7.5, 10.4

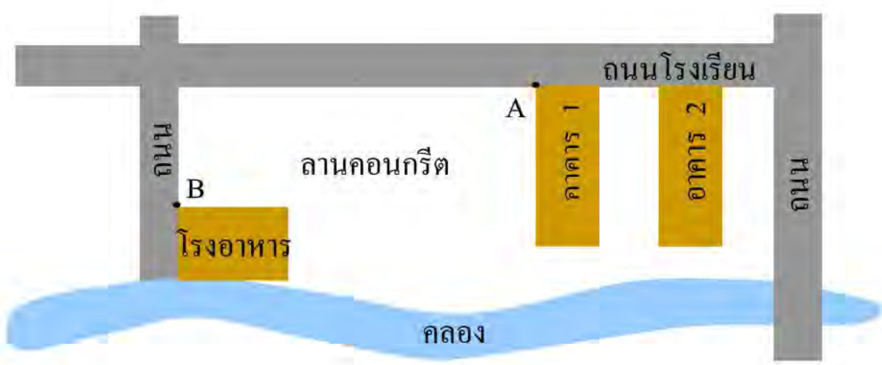
    (1) จงหาว่าส่วนของเส้นตรงในข้อใดบ้างที่ประกอบเป็นรูปสามเหลี่ยมได้ เพราะเหตุใด

    (2) จงหาว่าส่วนของเส้นตรงในข้อใดบ้างที่ประกอบเป็นรูปสามเหลี่ยมไม่ได้ เพราะเหตุใด

2. ถ้า A, B และ C เป็นจุดสามจุดใด ๆ ที่เรียงต่อกันตามลำดับในแนวเส้นตรงเดียวกัน AB + BC เกี่ยวข้องกับ AC อย่างไร

3. ถ้า A, B และ C เป็นจุดสามจุดใด ๆ ที่ AB + BC มากกว่า AC แล้ว $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ และ $\overline{AC}$ จะเป็นด้านของรูปสามเหลี่ยมได้หรือไม่ จงอธิบาย

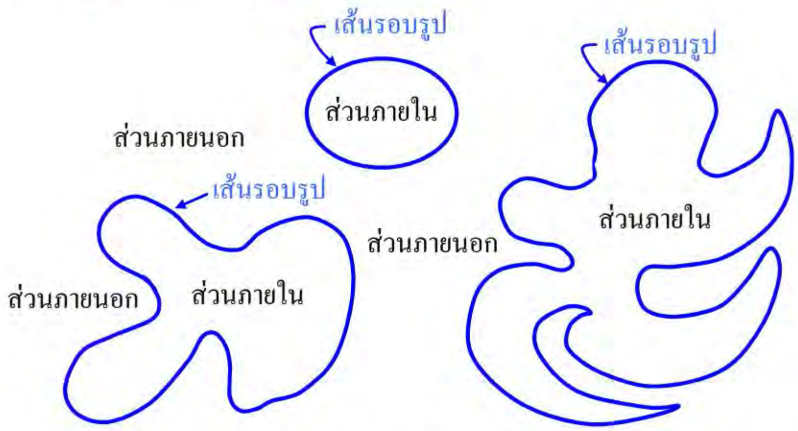
4. ลานคอนกรีตข้างอาคารเรียนเป็นดังแผนภาพ



    ถ้านักเรียนต้องการเดินจากมุมถนนของอาคาร 1 (จุด A) ไปโรงอาหาร (จุด B) นักเรียนจะเดินไปทางใดจึงจะใกล้ที่สุด เพราะเหตุใด

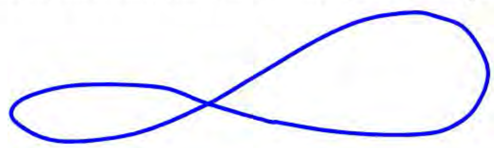
5. ถ้านักเรียนมีเชือกเส้นหนึ่งยาว 4 เมตร นักเรียนจะสามารถนำมาขึงเป็นรูปสามเหลี่ยมได้หรือไม่ ถ้าได้ ทำอย่างไร และถ้าไม่ได้ เพราะเหตุใด

จุดภายในและจุดภายนอก

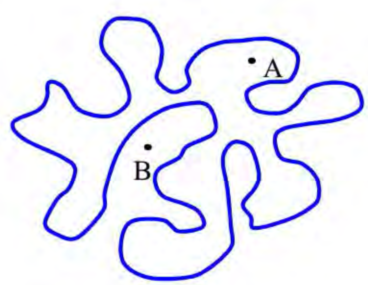


รูปแต่ละรูปที่ปรากฏข้างต้นเป็นตัวอย่างของ**เส้นโค้งปิดเชิงเดียว** จะสังเกตเห็นว่าแต่ละรูปเป็นรูปปิดที่เส้นรอบรูปไม่ตัดกัน

รูปต่อไปนี้ไม่ใช่เส้นโค้งปิดเชิงเดียว เพราะเส้นรอบรูปตัดกัน

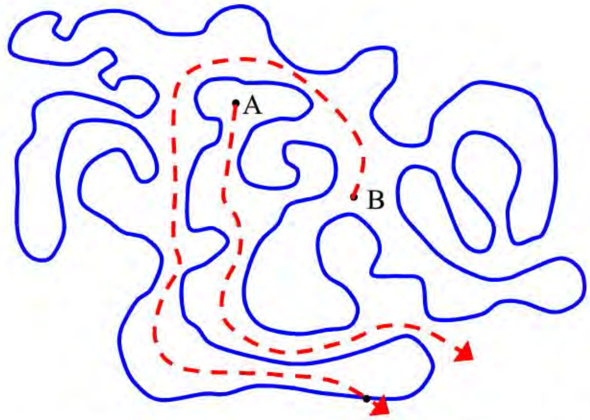


เส้นโค้งปิดเชิงเดียว มีเส้นรอบรูปเป็นเส้นแบ่งเขตระหว่างส่วนที่อยู่ข้างในและส่วนที่อยู่ข้างนอก เรียกจุดที่อยู่ภายในรูปปิดว่า **จุดภายใน** เรียกจุดที่อยู่ภายนอกรูปปิดว่า **จุดภายนอก** ดังตัวอย่างต่อไปนี้



A เป็นจุดภายในและ B เป็นจุดภายนอก

เมื่อกำหนดเส้นโค้งปิดเชิงเดียวที่ซับซ้อนขึ้น และมีจุด A และจุด B ดังรูปต่อไปนี้ จะบอกได้หรือไม่ว่าจุด A และจุด B เป็นจุดภายในหรือจุดภายนอก



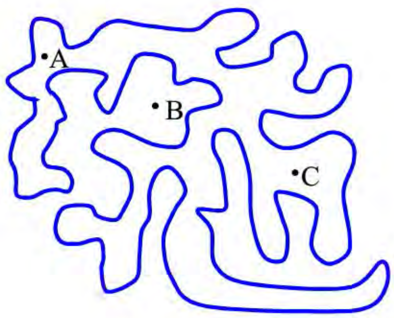
นักเรียนจะเห็นว่าเราไม่สามารถบอกได้ทันที แต่ถ้าลากเส้นซึ่งเป็นส่วนของเส้นตรงหรือส่วนของเส้นโค้งจากจุดที่ต้องการพิจารณาออกมาข้างนอก โดยไม่ต้องตัดเส้นรอบรูป ก็แสดงว่าจุดนั้นเป็นจุดภายนอก แต่ถ้าเส้นที่ลากนั้นต้องตัดผ่านเส้นรอบรูป จึงจะออกมาข้างนอกได้ ก็แสดงว่าจุดนั้นเป็นจุดภายใน เช่น จากรูปข้างต้น สามารถลากเส้นจากจุด A ออกมาข้างนอกได้โดยไม่ต้องตัดเส้นรอบรูป ดังนั้นจุด A เป็นจุดภายนอก และเมื่อลากเส้นใด ๆ จากจุด B ออกมาข้างนอก เส้นนั้นต้องตัดผ่านเส้นรอบรูป ดังนั้นจุด B เป็นจุดภายใน

สำรวจจุด

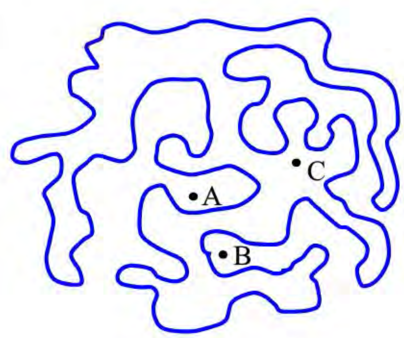
ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้

1. ในแต่ละข้อต่อไปนี้ จงสำรวจโดยลากเส้นเพื่อหาว่าจุด A, B และ C จุดใดเป็นจุดภายในและจุดใดเป็นจุดภายนอก แล้วจดบันทึกคำตอบไว้

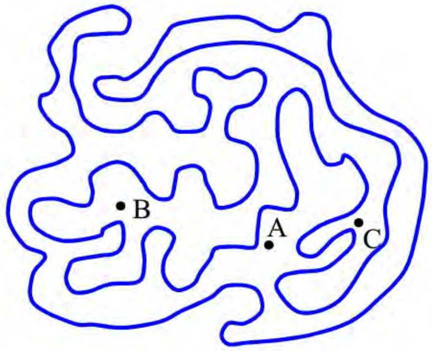
1)



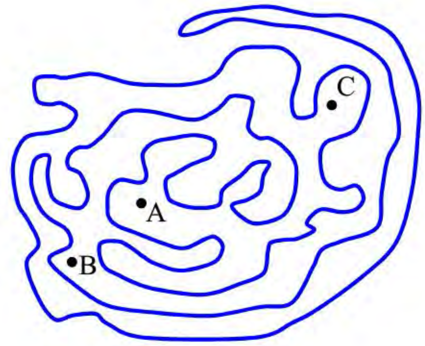
2)



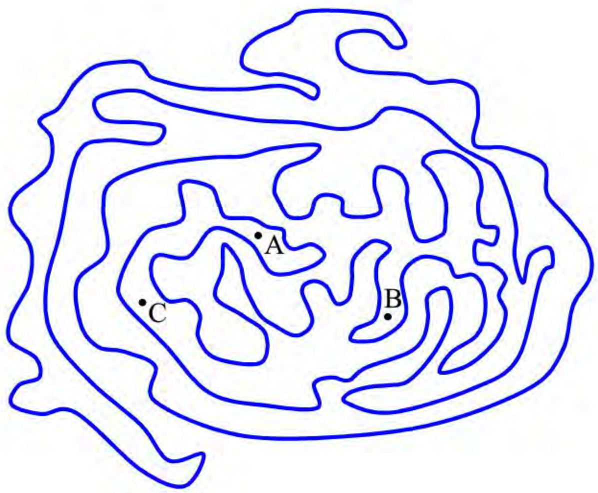
3)



4)



5)

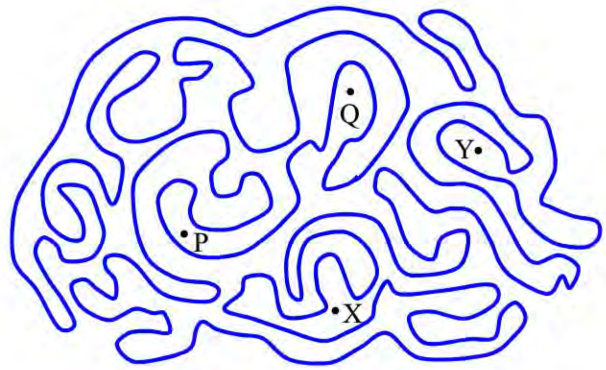


2. นักเรียนคิดว่าวิธีหาคำตอบโดยลากเส้นจากจุดที่กำหนดให้ออกมาข้างนอกรูป เพื่อหาว่าจุดใดเป็นจุดภายในและจุดใดเป็นจุดภายนอก ยังเป็นวิธีที่ใช้ได้สะดวกดีหรือไม่เมื่อใช้กับรูปในข้อ 5) ของข้อ 1 นักเรียนคิดว่าน่าจะมีวิธีหาคำตอบที่ดีกว่าการลากเส้นออกมาข้างนอกรูปหรือไม่
3. จากรูปของเส้นโค้งปิดเชิงเดียวในข้อ 1 ให้นักเรียนลากส่วนของเส้นตรงจากจุดแต่ละจุดออกมานอกรูปทางใดทางหนึ่ง และสังเกตดูว่าส่วนของเส้นตรงแต่ละเส้นตัดผ่านเส้นรอบรูปของเส้นโค้งปิดเชิงเดียวกี่จุดบ้าง แล้วเขียนจำนวนจุดตัดพร้อมทั้งคำตอบที่ได้จากข้อ 1 ลงในตาราง ข้างล่างนี้

ข้อ	จุด	จุดภายใน	จุดภายนอก	จำนวนจุดตัดเส้นรอบรูปของเส้นโค้งปิดเชิงเดียว (จุด)
1)	A			
	B			
	C			
2)	A			
	B			
	C			
3)	A			
	B			
	C			
4)	A			
	B			
	C			
5)	A			
	B			
	C			

4. ให้นักเรียนสำรวจข้อมูลที่บันทึกไว้ในตารางในข้อ 3 แล้วตอบคำถามต่อไปนี้
    1) ถ้าลากส่วนของเส้นตรงจากจุดที่กำหนดให้ออกมาข้างนอกรูปและได้จำนวนจุดตัดเป็น *จำนวนคู่* จุดนั้นเป็นจุดภายในหรือจุดภายนอก
    2) ถ้าลากส่วนของเส้นตรงจากจุดที่กำหนดให้ออกมาข้างนอกรูปและได้จำนวนจุดตัดเป็น *จำนวนคี่* จุดนั้นเป็นจุดภายในหรือจุดภายนอก
    3) จำนวนจุดตัดซึ่งเป็นจำนวนคู่หรือจำนวนคี่สัมพันธ์อย่างไรกับจุดภายในหรือจุดภายนอก

5. ให้นักเรียนใช้ความสัมพันธ์ที่คาดไว้ในข้อ 3) ของข้อ 4 หาดูว่าจุด P, Q, X และ Y เป็นจุดภายในหรือจุดภายนอก แล้วตรวจสอบโดยลากเส้นจากจุดที่กำหนดให้ออกมาข้างนอกรูป ดังที่ทำในข้อ 1

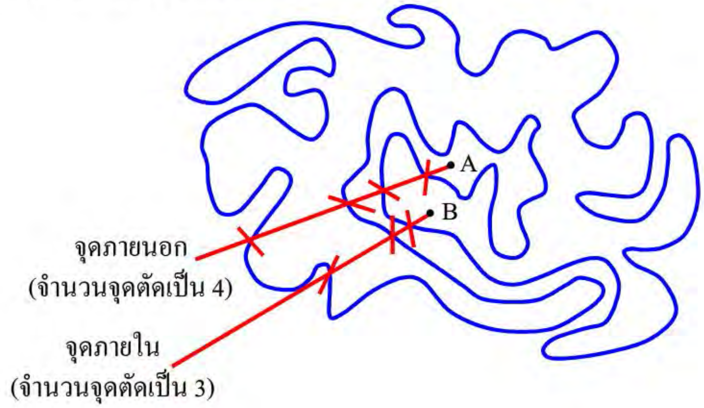


ในกิจกรรมข้างต้นนักเรียนจะเห็นกระบวนการแก้ปัญหาที่เริ่มต้นจากเส้นโค้งปิดเชิงเดียวที่ไม่ซับซ้อนและหาคำตอบโดยลากเส้นออกมาข้างนอกรูป แต่เมื่อเป็นเส้นโค้งปิดเชิงเดียวที่ซับซ้อน ถ้าใช้วิธีลากเส้นออกมาข้างนอกรูปแบบเดิมจะต้องใช้เวลาและอาจเกิดความสับสน จึงต้องพยายามหาวิธีการใหม่

จากกิจกรรมข้างต้นจะพบว่า เมื่อลองใช้วิธีลากส่วนของเส้นตรงจากจุดที่ต้องการตรวจสอบออกมาข้างนอกรูปทางใดทางหนึ่งให้ตัดเส้นรอบรูปของเส้นโค้งปิดเชิงเดียว และสังเกตจำนวนจุดตัดเส้นรอบรูปจะเห็นแบบรูปแสดงความเกี่ยวข้องระหว่างจำนวนจุดตัดที่เป็นจำนวนคี่และจำนวนคู่กับจุดภายในและจุดภายนอกทำให้สรุปเป็นข้อความคาดการณ์ได้ว่า ถ้าได้จำนวนจุดตัดเป็นจำนวนคี่ จุดนั้นจะเป็นจุดภายใน และถ้าได้จำนวนจุดตัดเป็นจำนวนคู่ จุดนั้นจะเป็นจุดภายนอก ข้อความคาดการณ์นี้เป็นไปตามทฤษฎีบทของชอร์ดอง (Jordan's Theorem) ที่กล่าวว่า

ถ้าต้องการหาว่าจุดใดเป็นจุดภายในและจุดใดเป็นจุดภายนอกของเส้นโค้งปิดเชิงเดียว **ให้ลากส่วนของเส้นตรงเส้นหนึ่งจากจุดนั้นออกมาข้างนอกรูปทางใดทางหนึ่ง ถ้าส่วนของเส้นตรงนั้นตัดเส้นรอบรูปได้จำนวนจุดตัดเป็นจำนวนคี่ จุดนั้นจะเป็นจุดภายใน ถ้าได้จำนวนจุดตัดเป็นจำนวนคู่ จุดนั้นจะเป็นจุดภายนอก**

ตัวอย่าง เมื่อใช้ทฤษฎีบทของชอร์ดองกับเส้นโค้งปิดเชิงเดียวข้างล่างนี้จะได้ว่าจุด A เป็นจุดภายนอก และจุด B เป็นจุดภายในดังนี้

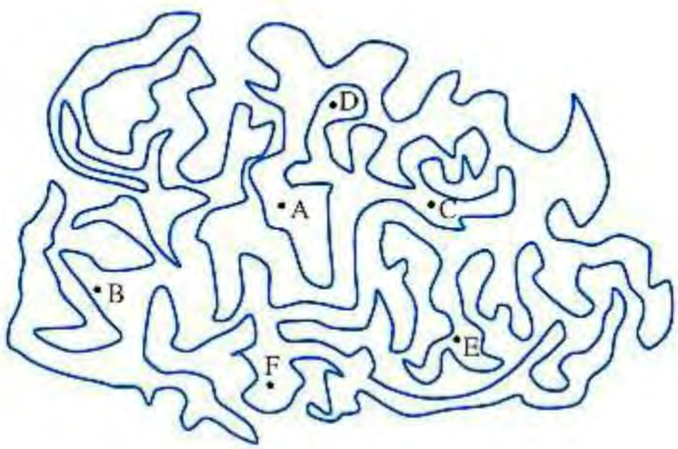


ให้นักเรียนเปรียบเทียบวิธีหาคำตอบโดยใช้ทฤษฎีบทของชอร์ดองกับวิธีที่นักเรียนใช้ใน ข้อ 1 ในตอนเริ่มต้นทำกิจกรรม นักเรียนคิดว่าวิธีใดสะดวกและรวดเร็วกว่ากัน

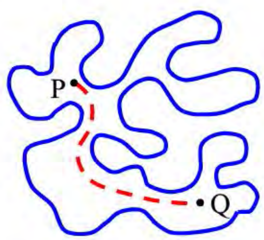
ลองทำดู

ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้

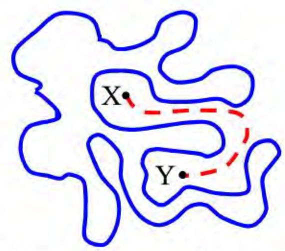
1. จงเขียนเส้นโค้งปิดเชิงเดียวที่มีจุด A และจุด B เป็นจุดภายในจุด X และจุด Y เป็นจุดภายนอกมาหนึ่งรูป
2. จงเขียนเส้นโค้งปิดเชิงเดียวหนึ่งรูป กำหนดจุดอย่างน้อยสี่จุด ส่งต่อให้เพื่อน ๆ พิจารณาจุดที่นักเรียนกำหนดว่าเป็นจุดภายในหรือจุดภายนอก
3. ให้นักเรียนตรวจสอบดูว่าจุด A, B, C, D, E และ F จุดใดบ้างเป็นจุดภายในและจุดใดบ้างเป็นจุดภายนอก



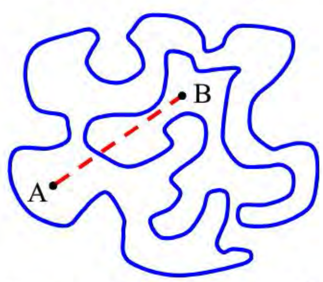
เส้นโค้งปิดเชิงเดียวมีสมบัติข้อหนึ่งว่า เมื่อลากเส้นเชื่อมระหว่างจุดภายในด้วยกันหรือระหว่างจุดภายนอกด้วยกัน เส้นนั้นไม่จำเป็นต้องตัดผ่านเส้นรอบรูป แต่ถ้าลากเส้นจากจุดภายในไปยังจุดภายนอกหรือจากจุดภายนอกไปยังจุดภายใน เส้นนั้นจะต้องตัดผ่านเส้นรอบรูปเสมอ ดังตัวอย่าง



จุด P และจุด Q เป็นจุดภายใน



จุด X และจุด Y เป็นจุดภายนอก

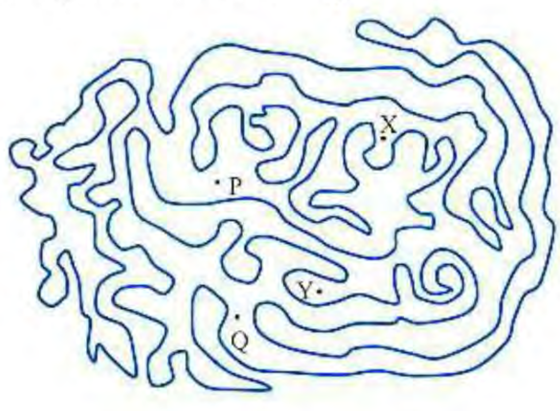


จุด A เป็นจุดภายใน และจุด B เป็นจุดภายนอก

พวกเดียวกันหรือไม่

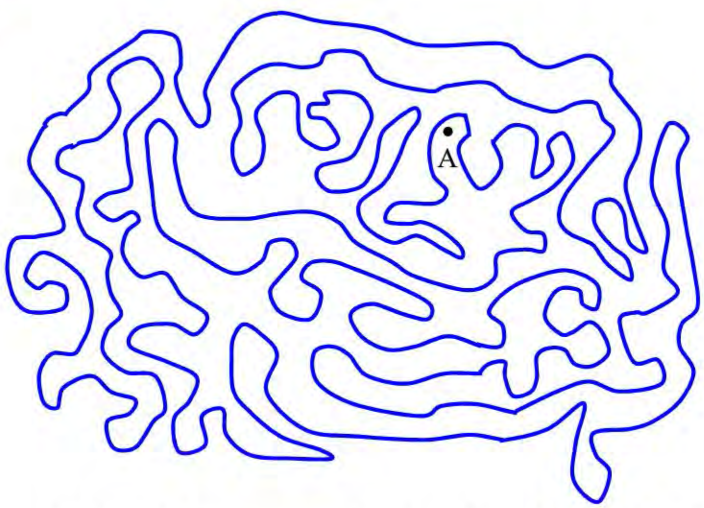
ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

กำหนด P, Q, X และ Y เป็นจุดในตำแหน่งต่าง ๆ ดังรูป



1. จงหาว่าจะสามารถลากเส้นเชื่อมจุด P กับจุดอื่น ๆ จุดใดบ้าง โดยไม่ตัดผ่านเส้นรอบรูป
2. จงหาว่าจะสามารถลากเส้นเชื่อมจุด X กับจุดอื่น ๆ จุดใดบ้าง โดยไม่ตัดผ่านเส้นรอบรูป

ชวนคิด

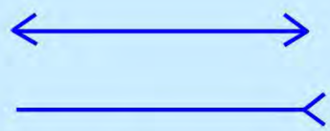


ขุนแผนหลงเข้าไปอยู่ในค่ายกลของขุนช้าง ถ้าเขายืนอยู่ที่จุด A นักเรียนคิดว่าขุนแผนสามารถหาทางเดินออกมานอกค่ายกลได้หรือไม่ ถ้าไม่ได้ขุนแผนจะต้อง “สะเดาะกลอน” ผ่านกำแพงอย่างน้อยกี่ชั้นจึงจะออกมาได้ จงอธิบาย

เชื่อสายตาหรือไม่

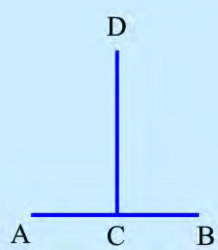
ให้นักเรียนมองภาพในแต่ละข้อและตอบคำถามที่กำหนดให้

1.



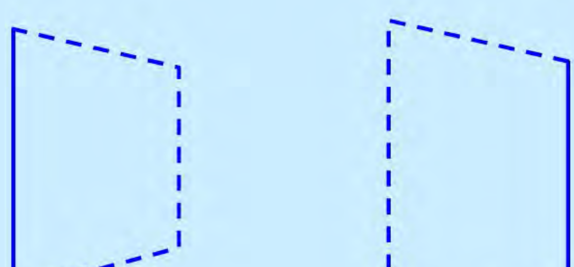
ส่วนของเส้นตรงทั้งสองยาวเท่ากันหรือไม่

2.



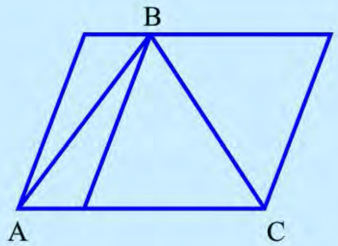
$\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ ยาวเท่ากันหรือไม่

3.



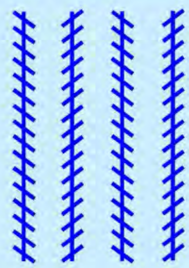
ส่วนของเส้นทึบทั้งสองยาวเท่ากันหรือไม่

4.



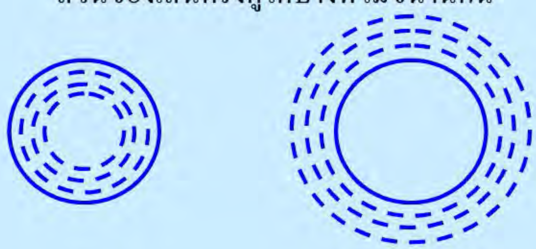
$\overline{AB}$ กับ $\overline{BC}$ เส้นใดยาวกว่ากัน

5.



ส่วนของเส้นตรงคู่ใดบ้างที่ไม่ขนานกัน

6.



พื้นที่ของรูปวงกลมเท่ากันหรือไม่

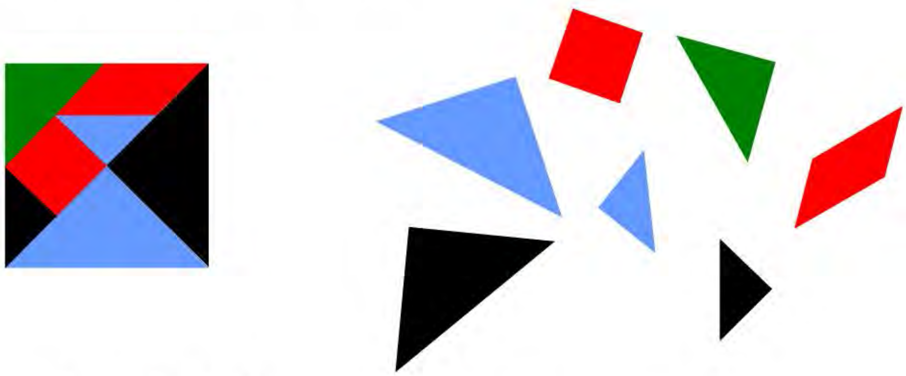
ลองตรวจสอบดูซิว่าสายตาของตัวเองใช้ได้หรือไม่ โดยการวัด

นักเรียนจะพบว่าการบอกขนาดหรือสมบัติของรูปเรขาคณิตโดยใช้คาดคะเนด้วยสายตาอาจไม่ถูกต้องเสมอไป ถ้านักเรียนต้องการให้ได้คำตอบที่ถูกต้อง ควรใช้เครื่องมือวัด เช่น ไม้บรรทัดหรือวงเวียน

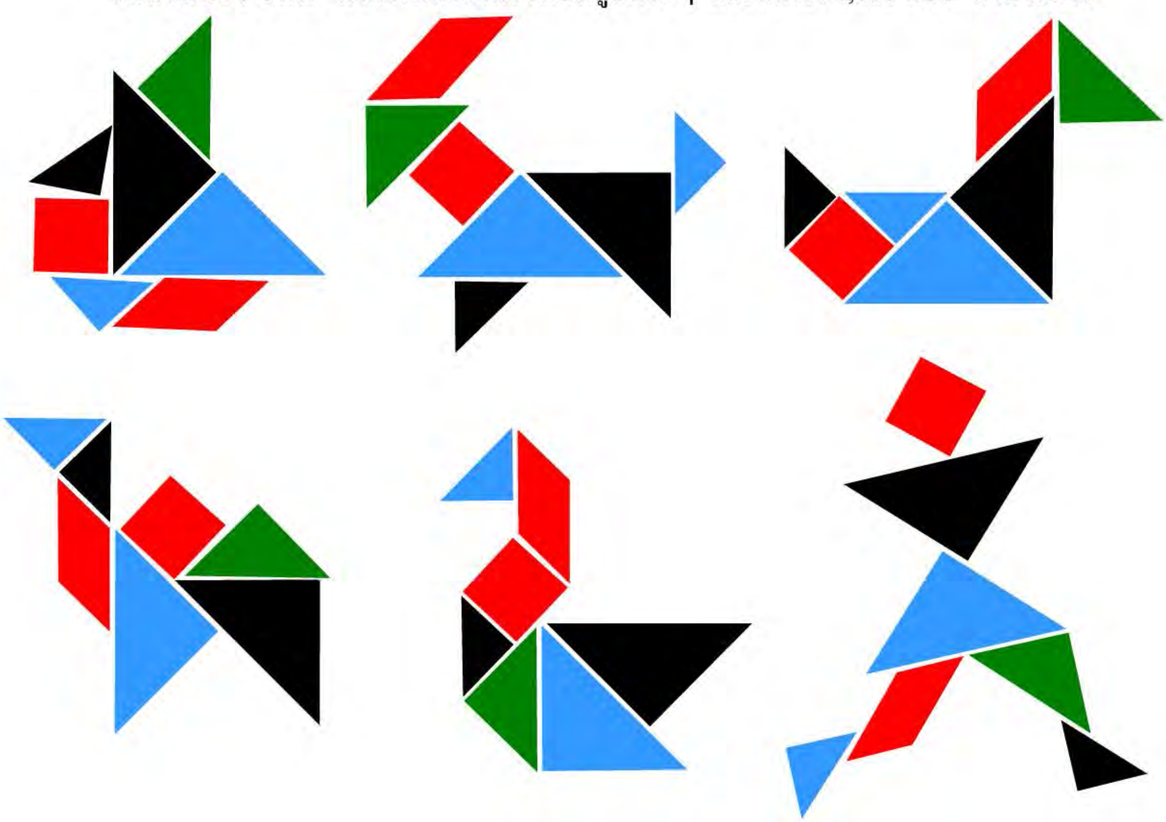
ในกรณีที่มีข้อมูลเกี่ยวกับรูปมาให้ ควรใช้ข้อมูลนั้นมาอธิบายประกอบการให้เหตุผลเพิ่มเติมเพื่อจะได้คำตอบที่ถูกต้อง

แทนแกรม

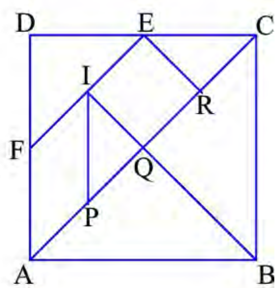
แทนแกรมเป็นภาพต่อที่เก่าแก่ของจีนโบราณ ใช้เล่นเป็นเกมซึ่งได้รับความนิยมในช่วงศตวรรษที่ 19 เรียกว่า **ฉีเฉียวตู** ซึ่งหมายความว่า **แบบแผนกลอันแยบยล** ประกอบด้วยรูปเรขาคณิต 7 ชิ้น 5 ใน 7 ชิ้นเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก อีก 2 ชิ้น ชิ้นหนึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และอีกชิ้นหนึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ดังนี้



ชิ้นส่วนทั้ง 7 ชิ้นนี้ สามารถนำมาสร้างเป็นรูปต่าง ๆ ได้มากกว่า 1,600 แบบ ดังตัวอย่าง



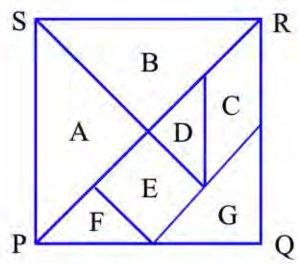
สร้างแทนแกรม



1. ให้นักเรียนสร้างแทนแกรมตามขั้นตอนต่อไปนี้
    1) เขียนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ABCD ให้แต่ละด้านยาวพอสมควร เช่น 8 เซนติเมตร
    2) ลากเส้นทแยงมุม AC แล้วแบ่ง $\overline{AC}$ ออกเป็นสี่ส่วนเพื่อให้ได้ AP = PQ = QR = RC
    3) หาจุด E และ F ที่เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{CD}$ และ $\overline{AD}$ ตามลำดับ แล้วลาก $\overline{EF}$
    4) ลาก $\overline{BQ}$ และต่อ $\overline{BQ}$ ให้พบกับ $\overline{EF}$ ที่จุด I
    5) ลาก $\overline{IP}$ และ $\overline{ER}$ จะได้รูปเรขาคณิต 7 รูป
2. ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้
    1) มีรูปใดบ้างเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
    2) มีรูปใดบ้างเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
    3) IERQ เป็นรูปสี่เหลี่ยมชนิดใด
    4) IFAP เป็นรูปสี่เหลี่ยมชนิดใด
3. ให้นักเรียนตัดกระดาษตามรูปแทนแกรมทั้ง 7 ชิ้น แล้วสำรวจดูว่าแต่ละชิ้นมีความสัมพันธ์กันอย่างไรบ้าง พร้อมทั้งบันทึกข้อมูลที่พบ

คิดเป็นเศษส่วนเท่าไร

ให้นักเรียนพิจารณาแทนแกรมข้างล่างและตอบคำถามต่อไปนี้



1. รูปใดบ้างที่มีพื้นที่เท่ากัน
2. พื้นที่ของรูป A คิดเป็นเศษส่วนเท่าไรของพื้นที่ของ PQRS
3. พื้นที่ของรูป F คิดเป็นเศษส่วนเท่าไรของพื้นที่ของรูป E
4. พื้นที่ของรูป E คิดเป็นเศษส่วนเท่าไรของพื้นที่ของรูป A
5. พื้นที่ของรูป E คิดเป็นเศษส่วนเท่าไรของพื้นที่ของ Δ PQR
6. พื้นที่ของรูป C คิดเป็นเศษส่วนเท่าไรของพื้นที่ของ PQRS
7. พื้นที่ของรูป D คิดเป็นเศษส่วนเท่าไรของพื้นที่ของ PQRS
8. ถ้าพื้นที่ของรูป E เท่ากับ 2 ตารางหน่วย พื้นที่ของ PQRS จะเท่ากับกี่ตารางหน่วย

ให้นักเรียนนำแทนแกรมทั้ง 7 ชิ้นที่สร้างไว้มาเรียงต่อกันเป็นรูปตามจินตนาการของนักเรียน พร้อมทั้งเขียนชื่อและบรรยายเกี่ยวกับรูปที่ได้

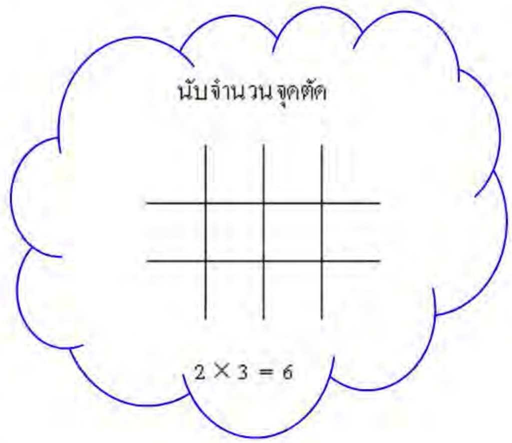
1.2 จำนวนนับ

นักเรียนรู้จักจำนวนนับและสมบัติเบื้องต้นของจำนวนนับมาบ้างแล้ว แต่ยังมีสมบัติอีกบางประการที่น่ารู้จัก เพื่อให้นักเรียนมีความรู้และเข้าใจในเรื่องของจำนวนนับมากขึ้น ให้นักเรียนศึกษาและทำกิจกรรมต่อไปนี้

สูตรคูณ

นักเรียนทุกคนเคยท่องสูตรคูณกันมาแล้วอย่างน้อยแม่ 2 ถึงแม่ 12 และคงสังเกตเห็นการเปลี่ยนแปลงของผลคูณในแต่ละแม่ว่ามีการเพิ่มขึ้นครั้งละเท่า ๆ กันโดยนำจำนวนนับที่เป็นแม่สูตรคูณมาบวกซ้ำ ๆ กัน ทำให้ได้ผลคูณอย่างเป็นระบบและง่ายต่อการจดจำ เช่น สูตรคูณแม่ 3 ดังนี้

1×3	=	3
2×3	=	6
3×3	=	9
4×3	=	12
5×3	=	15
6×3	=	18
7×3	=	21
8×3	=	24
9×3	=	27
10×3	=	30
11×3	=	33
12×3	=	36



จะเห็นว่าผลคูณเพิ่มขึ้นครั้งละ 3 เท่า ๆ กัน ในทำนองเดียวกันสูตรคูณแม่อื่น ๆ เช่นแม่ 4 แม่ 5 ไปเรื่อย ๆ จนถึงแม่ 12 จะมีการเพิ่มขึ้นครั้งละ 4, 5, … , 12 เท่า ๆ กันตามลำดับ ดังนั้น ถ้านักเรียนท่องสูตรคูณแม่ใดไม่ได้ นักเรียนอาจใช้ข้อสังเกตนี้หาผลคูณที่ต้องการ โดยบวกจำนวนที่เป็นตัวแม่ซ้ำกันต่อไปเรื่อย ๆ

การท่องสูตรคูณได้อย่างคล่องแคล่วเป็นสิ่งสำคัญมาก เพราะจะเอื้อต่อการคูณและการหารให้เป็นไปอย่างรวดเร็ว

สูตรคูณแต่ละแม่จะมีแบบรูปที่น่าสนใจบางอย่าง ดังเช่นกิจกรรมต่อไปนี้

สูตรคูณแสนสนุก

ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้

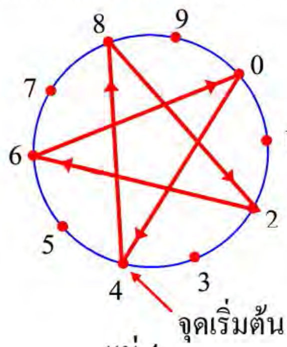
1. เขียนผลคูณของสูตรคูณแม่ 3 ถึงแม่ 12 ลงในตาราง

	แม่ 2	แม่ 3	แม่ 4	แม่ 5	แม่ 6	แม่ 7	แม่ 8	แม่ 9	แม่ 10	แม่ 11	แม่ 12
×	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2										
2	4										
3	6										
4	8										
5	10										
6	12										
7	14										
8	16										
9	18										
10	20										
11	22										
12	24										

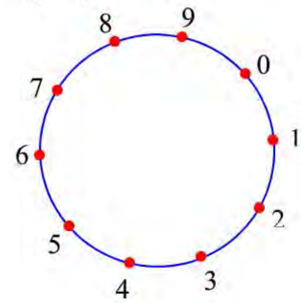
2. สังเกตจำนวนในตารางและตอบคำถามต่อไปนี้

   1) สูตรคูณแม่ใดบ้างที่มีผลคูณเป็นจำนวนคู่เท่านั้น เพราะเหตุใด
   2) สูตรคูณแม่ใดบ้างที่มีผลคูณเป็นจำนวนคี่เท่านั้น เพราะเหตุใด
   3) สูตรคูณแม่ใดบ้างที่มีผลคูณเป็นจำนวนคู่และจำนวนคี่ เพราะเหตุใด
   4) สูตรคูณแม่ใดบ้างที่มีเลขโดดในหลักหน่วยของผลคูณครบทั้งสิบตัว
   5) จากผลคูณของสูตรคูณตามตาราง นักเรียนหาความสัมพันธ์อื่น ๆ ได้อีก หรือไม่ จงยกตัวอย่าง

3. ลากส่วนของเส้นตรงโยงตำแหน่งเลขโดดบนวงกลม เขียนลูกศรแสดงการเรียงตามลำดับเลขโดดในหลักหน่วยของผลคูณในสูตรคูณแม่ 6 ดังตัวอย่างในสูตรคูณแม่ 4



แม่ 4

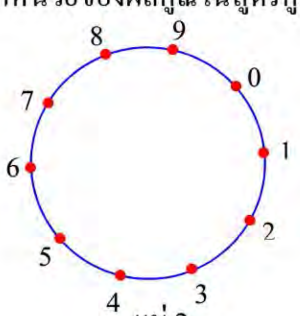


แม่ 6

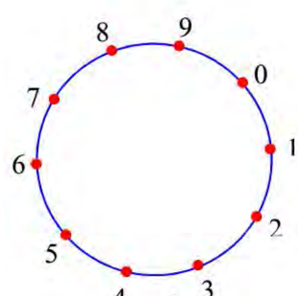
จงตอบคำถามต่อไปนี้

1) ภาพที่ได้เหมือนกันหรือต่างกัน เพราะเหตุใด
2) สูตรคูณแม่ 4 และสูตรคูณแม่ 6 มีเลขโดดในหลักหน่วยของผลคูณเป็นชุดเดียวกันหรือไม่
3) นักเรียนคิดว่าภาพที่ได้จากการโยงเส้นของสูตรคูณทั้งสองแม่เป็นภาพอะไร ให้ตั้งชื่อภาพนั้น

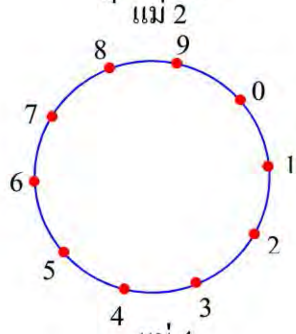
4. ลากส่วนของเส้นตรงโยงตำแหน่งเลขโดดบนวงกลม เขียนลูกศรแสดงการเรียงตามลำดับเลขโดดในหลักหน่วยของผลคูณในสูตรคูณแม่ต่าง ๆ ต่อไปนี้



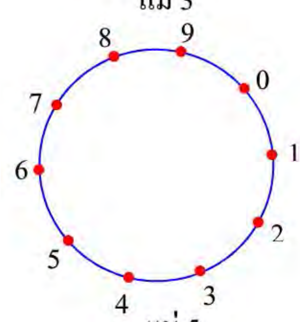
แม่ 2



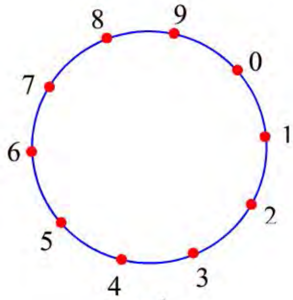
แม่ 3



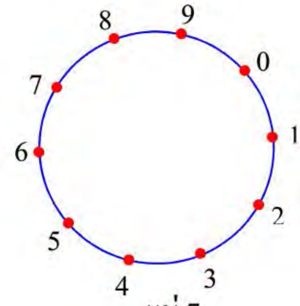
แม่ 4



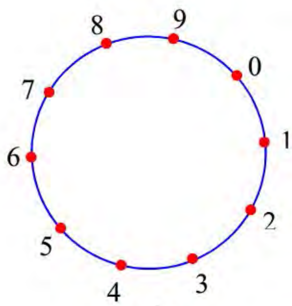
แม่ 5



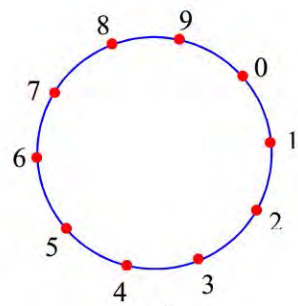
แม่ 6



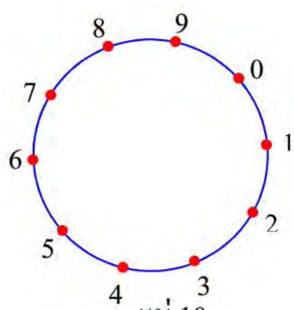
แม่ 7



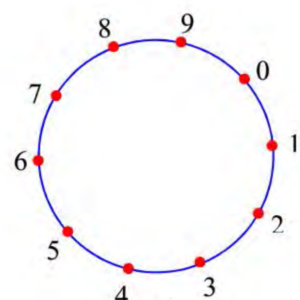
แม่ 8



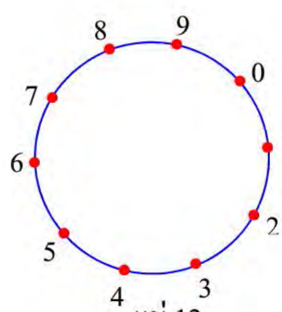
แม่ 9



แม่ 10



แม่ 11



แม่ 12

5. จากผลที่ได้ในข้อ 4 จงตรวจดูว่า
    1) สูตรคูณแม่ใดบ้างที่ให้ภาพเหมือนกันแต่มีทิศทางของเส้นตรงข้ามกัน เพราะเหตุใด
    2) สูตรคูณแม่ใดบ้างที่ให้ภาพเหมือนกันและมีทิศทางของเส้นไปทางเดียวกัน เพราะเหตุใด
6. นักเรียนมีข้อสังเกตอย่างไรบ้างเกี่ยวกับสูตรคูณแม่ต่าง ๆ ที่ให้ภาพเหมือนกัน
7. ถ้ามีสูตรคูณแม่ 2 ถึงแม่ 24 นักเรียนคาดว่า
    1) สูตรคูณแม่ใดบ้างที่ให้ภาพเหมือนกันและทิศทางของเส้นไปทางเดียวกัน
    2) สูตรคูณแม่ใดบ้างที่ให้ภาพเหมือนกันแต่ทิศทางของเส้นตรงข้ามกัน

ร่อนหาจำนวนเฉพาะ

จำนวนนับที่มากกว่า 1 และมีตัวประกอบเพียงสองตัวได้แก่ 1 และตัวเองเท่านั้น เรียกว่า **จำนวนเฉพาะ**

เอราทอสเทนีส แห่งไซรีนี (Eratosthenes of Cyrene) นักคณิตศาสตร์ชาวกรีกซึ่งมีชีวิตอยู่ประมาณ 276 – 194 ปีก่อนคริสต์ศักราช ได้คิดวิธีหาจำนวนเฉพาะที่อยู่ระหว่าง 1 กับจำนวนนับที่กำหนดให้โดยตัดจำนวนที่ไม่ใช่จำนวนเฉพาะทิ้ง วิธีการนี้เรียกว่า **ตะแกรงเอราทอสเทนีส**

ให้นักเรียนศึกษาวิธีหาจำนวนเฉพาะระหว่าง 1 ถึง 40 โดยใช้ตะแกรงเอราทอสเทนีส

เขียนจำนวนนับตามลำดับตั้งแต่ 1 ถึง 40 แล้วดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้

1. 1 ไม่ใช่จำนวนเฉพาะตัดทิ้ง
2. 2 เป็นจำนวนเฉพาะ วงไว้ ต่อจากนั้นนับไปครั้งละสองจำนวนแล้วขีดฆ่าทุก ๆ จำนวนที่สอง
3. 3 เป็นจำนวนเฉพาะ วงไว้ ต่อจากนั้นนับไปครั้งละสามจำนวนแล้วขีดฆ่าทุก ๆ จำนวนที่สาม
4. 5 เป็นจำนวนเฉพาะ วงไว้ ต่อจากนั้นนับไปครั้งละห้าจำนวนแล้วขีดฆ่าทุก ๆ จำนวนที่ห้า
5. จากตารางจะพบจำนวนที่ไม่ถูกขีดฆ่าดังต่อไปนี้
    2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 และ 37 ซึ่งเป็นจำนวนเฉพาะระหว่าง 1 ถึง 40

~~1~~	2	3	~~4~~	5
~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~
~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~
~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~
~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~

จากขั้นตอนการใช้ตะแกรงเอราทอสเทนีสร่อนหาจำนวนเฉพาะระหว่าง 1 ถึง 40 ข้างต้น นักเรียนจะสังเกตเห็นว่า ในขั้นตอนที่ 2 เป็นการขีดฆ่าทุก ๆ จำนวนที่มี 2 เป็นตัวประกอบ ในขั้นตอนที่ 3 เป็นการขีดฆ่าทุก ๆ จำนวนที่มี 3 เป็นตัวประกอบ และในขั้นตอนที่ 4 เป็นการขีดฆ่าทุก ๆ จำนวนที่มี 5 เป็นตัวประกอบ ซึ่งเป็นการสิ้นสุดของขั้นตอนวิธี ทั้งนี้เป็นไปตามหลักการที่กล่าวว่า *ในการหาจำนวนเฉพาะระหว่าง* 1 ถึง n *ให้ใช้จำนวนเฉพาะทุกจำนวนที่เมื่อคูณตัวเอง แล้วผลคูณที่ได้ไม่เกิน* n *มาเป็นตัวดำเนินการขีดฆ่าจำนวนอื่น ๆ* ในที่นี้ $n = 40$ จึงใช้เพียง 2, 3 และ 5 ในขั้นตอนที่ 2 ขั้นตอนที่ 3 และขั้นตอนที่ 4 ตามลำดับ แต่จะไม่ใช้ 7 หรือจำนวนเฉพาะที่มากกว่า 7 มาเป็นตัวดำเนินการขีดฆ่าจำนวนอื่น ๆ ทั้งนี้เพราะว่า $7 \times 7 = 49$ ซึ่งเกิน 40

ให้นักเรียนใช้ตะแกรงเอราทอสเทนีสหาจำนวนเฉพาะระหว่าง 1 ถึง 102

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102

ถ้านักเรียนอยากทราบว่า 79 เป็นจำนวนเฉพาะหรือไม่ จากความรู้เดิมนักเรียนก็ตรวจสอบจำนวนนับตั้งแต่ 1 ถึง 79 ว่ามีจำนวนใดบ้างที่หาร 79 ลงตัว ถ้ามีเพียง 1 และ 79 เท่านั้นจะได้ว่า 79 เป็นจำนวนเฉพาะ แต่ถ้ามีจำนวนอื่นนอกจาก 1 และ 79 จะได้ว่า 79 ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ การตรวจสอบดังกล่าวจะเสียเวลามาก เราอาจนำแนวคิดทางคณิตศาสตร์เดียวกันกับที่ใช้ในตะแกรงเอราทอสเทนีสมาเป็นวิธีการตรวจสอบ ดังแสดงในตัวอย่างทั้งสองต่อไปนี้

ตัวอย่าง 79 เป็นจำนวนเฉพาะหรือไม่

แนวคิด **ขั้นที่ 1** หาจำนวนเฉพาะทุกจำนวนที่เมื่อคูณตัวเองแล้ว ผลคูณที่ได้ไม่เกิน 79 จำนวนเฉพาะเหล่านั้นคือ 2, 3, 5 และ 7

ขั้นที่ 2 ให้นักเรียนนำจำนวนเฉพาะที่ได้ในขั้นที่ 1 คือ 2, 3, 5 และ 7 ไปหาร 79 เพื่อดูว่าหารลงตัวหรือไม่

ถ้าจำนวนหนึ่งจำนวนใดในสี่จำนวนนี้หาร 79 ลงตัว 79 จะไม่เป็นจำนวนเฉพาะ แต่ถ้าทั้งสี่จำนวนนี้หาร 79 ไม่ลงตัว 79 จะเป็นจำนวนเฉพาะ

เนื่องจาก 2, 3, 5 และ 7 หาร 79 ไม่ลงตัว ดังนั้น 79 จึงเป็นจำนวนเฉพาะ

ตัวอย่าง 161 เป็นจำนวนเฉพาะหรือไม่

แนวคิด **ขั้นที่ 1** หาจำนวนเฉพาะทุกจำนวนที่เมื่อคูณตัวเองแล้ว ผลคูณที่ได้ไม่เกิน 161 จำนวนเฉพาะเหล่านั้นคือ 2, 3, 5, 7 และ 11

ขั้นที่ 2 ให้นักเรียนนำจำนวนเฉพาะที่ได้ในขั้นที่ 1 คือ 2, 3, 5, 7 และ 11 ไปหาร 161 เพื่อดูว่าหารลงตัวหรือไม่

เนื่องจาก 7 หาร 161 ลงตัว ดังนั้น 161 ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ

วิธีการในตัวอย่างทั้งสองข้างต้นเป็นไปตามหลักการตรวจสอบว่าจำนวนนับใดเป็นจำนวนเฉพาะหรือไม่ดังต่อไปนี้

ให้ n แทนจำนวนนับที่ต้องการตรวจสอบ

ขั้นที่ 1 *หาจำนวนเฉพาะทุกจำนวนที่เมื่อคูณตัวเองแล้ว ผลคูณที่ ได้ไม่เกิน n*

ขั้นที่ 2 *นำจำนวนเฉพาะที่ได้ในขั้นที่ 1 ไปหาร n เพื่อดูว่าหาร ลงตัวหรือไม่*

ถ้าไม่มีจำนวนเฉพาะจำนวนใดที่ได้ในขั้นที่ 1 หาร n ลงตัว จะได้ว่า n เป็นจำนวนเฉพาะ แต่ถ้ามีจำนวนเฉพาะจำนวนหนึ่งจำนวนใดที่ได้ในขั้นที่ 1 หาร n ลงตัว จะได้ว่า n ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ

ให้นักเรียนใช้วิธีการข้างต้นตรวจสอบว่าจำนวนใดต่อไปนี้เป็นจำนวนเฉพาะ

89, 149, 179, 221, 413, 779 และ 893

ปัญหาชวนคิด

กวีและดลเป็นเพื่อนบ้านกัน เรียนอยู่ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 เหมือนกันแต่อยู่คนละห้อง ทั้งสองคนชอบเรียนคณิตศาสตร์และชอบคิดค้นเสาะหาแนวคิดด้วยตัวเอง เมื่อได้เรียนเรื่องจำนวนเฉพาะ กวีสังเกตเห็นแบบรูปของจำนวนชุดหนึ่งแต่ยังไม่แน่ใจข้อสรุปของตนเอง จึงไปปรึกษาดล

ให้นักเรียนพิจารณาข้อความที่ทั้งสองคนสนทนากันแล้วตอบคำถามข้างล่าง

กวี : เรามีปัญหาจะถามนะ $(2 \times 2) + 1 = 5$ เป็นจำนวนเฉพาะใช่ไหม

ดล : ใช่เลย

กวี : แล้ว $(2 \times 3) + 1 = 7$ ก็เป็นจำนวนเฉพาะใช่ไหม

ดล : ก็ใช่อีกนั่นแหละ

กวี : น่าแปลกนะ $(2 \times 5) + 1 = 11$ ก็เป็นจำนวนเฉพาะอีกใช่ไหม

ดล : อือ ! ก็จริงอีก

กวี : ทีนี้ ถ้าเราจะสรุปว่า “ผลคูณของจำนวนเฉพาะสองจำนวนบวกด้วย 1 จะเป็นจำนวนเฉพาะ” ได้ไหมล่ะ

ดล : น่าคิดนะ สรุปอย่างนี้ได้หรือเปล่าเอ่ย

ถ้านักเรียนเป็นดล นักเรียนจะตอบคำถามนี้อย่างไร จงอธิบาย

ขั้นตอนวิธีแบบยุคลิด

ยุคลิดแห่งอะเล็กซานเดรีย (Euclid of Alexandria) นักคณิตศาสตร์ชาวกรีกซึ่งมีชีวิตอยู่ประมาณ 450 – 380 ปีก่อนคริสต์ศักราช ได้กล่าวถึงการหา **ตัวหารร่วมมาก** หรือ **ห.ร.ม.** ของจำนวนนับสองจำนวนที่มีค่ามากได้อย่างรวดเร็วด้วยวิธีที่

เรียกกันในปัจจุบันว่า **ขั้นตอนวิธีแบบยุคลิด**

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างการหา ห.ร.ม. ของจำนวนนับสองจำนวนโดยใช้ขั้นตอนวิธีแบบยุคลิด

ให้นักเรียนพิจารณาการหา ห.ร.ม. ของ 258 และ 504 ด้วยวิธีต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 หารจำนวนมาก 504 ด้วยจำนวนน้อย 258

$$\begin{array}{r} 1 \\ 258\,\overline{)\,504} \\ \underline{258} \\ 246 \end{array}$$

เขียนเป็น

	258	504	1
		258	
		246	

258 เป็นตัวหารตัวแรก เศษที่ได้คือ 246

ขั้นที่ 2 หารตัวหารตัวแรก 258 ด้วยเศษ 246

$$\begin{array}{r} 1 \\ 246\,\overline{)\,258} \\ \underline{246} \\ 12 \end{array}$$

เขียนเป็น

1	258	504	1
	246	258	
	12	246	

246 เป็นตัวหารตัวที่สอง เศษที่ได้คือ 12

ขั้นที่ 3 หารตัวหารตัวที่สอง 246 ด้วยเศษ 12

$$\begin{array}{r} 20 \\ 12\,\overline{)\,246} \\ \underline{24} \\ 6 \\ \underline{0} \\ 6 \end{array}$$

เขียนเป็น

1	258	504	1
	246	258	
	12	246	20
		240	
		6	

12 เป็นตัวหารตัวที่สาม เศษที่ได้คือ 6

ขั้นที่ 4 หารตัวหารตัวที่สาม 12 ด้วยเศษ 6

$$\begin{array}{r} 2 \\ 6\,\overline{)\,12} \\ \underline{\underline{12}} \end{array}$$

เขียนเป็น

1	258	504	1
	246	258	
2	12	246	20
	12	240	
		6	

การหารครั้งนี้ลงตัว จึงยุติการหารและจะได้ตัวหารตัวสุดท้าย คือ 6 เป็น ห.ร.ม. ของ 258 และ 504

ในทางปฏิบัติ การหา ห.ร.ม. ของจำนวนนับสองจำนวนตามวิธีการข้างต้น รวมทุกขั้นตอนเขียนดังนี้

1	258	504	1
	246	258	
2	12	246	20
	12	240	
		6	

ดังนั้น ห.ร.ม. ของ 258 และ 504 คือ 6

ตัวอย่างที่ 1 จงหา ห.ร.ม. ของ 325 และ 702

วิธีทำ

6	325	702	2
	312	650	
	13	52	4
		52	

ดังนั้น ห.ร.ม. ของ 325 และ 702 คือ 13

ตอบ 13

นักเรียนเคยหา ห.ร.ม. ของจำนวนนับสามจำนวนโดยวิธีอื่น เช่น การแยกตัวประกอบมาแล้ว เราอาจหาได้อีกวิธีหนึ่งดังนี้

1. หา ห.ร.ม. ของสองจำนวน
2. หา ห.ร.ม. ของจำนวนที่เหลือกับ ห.ร.ม. ที่หาได้ในข้อ 1

ห.ร.ม. ที่หาได้ในข้อ 2 เป็น ห.ร.ม. ของทั้งสามจำนวนนั้น

ตัวอย่างที่ 2 จงหา ห.ร.ม. ของ 130, 546 และ 702

วิธีทำ เริ่มจากหา ห.ร.ม. ของ 546 และ 702 ก่อน เนื่องจากจำนวนทั้งสองมีค่ามากเราอาจใช้ขั้นตอนวิธีแบบยุคลิดมาช่วยหา ห.ร.ม. ดังนี้

3	546	702	1
	468	546	
	78	156	2
		156	

ดังนั้น ห.ร.ม. ของ 546 และ 702 คือ 78

ต่อไปหา ห.ร.ม. ของ 78 และ 130 เนื่องจากจำนวนทั้งสองมีค่าไม่มากจึงใช้วิธีแยกตัวประกอบ หา ห.ร.ม. ดังนี้

$$78 = \boxed{2} \times 3 \times \boxed{13}$$
$$130 = \boxed{2} \times 5 \times \boxed{13}$$

ดังนั้น ห.ร.ม. ของ 78 และ 130 คือ $2 \times 13 = 26$

นั่นคือ ห.ร.ม. ของ 130, 546 และ 702 คือ 26

ตอบ 26

ตัวอย่างที่ 3 จงหา ห.ร.ม. ของ 517, 705 และ 987

วิธีทำ หา ห.ร.ม. ของ 705 และ 987 โดยใช้ขั้นตอนวิธีแบบยุคลิดดังนี้

2	705	987	1
	564	705	
	141	282	2
		282	

ดังนั้น ห.ร.ม. ของ 705 และ 987 คือ 141

ต่อไปหา ห.ร.ม. ของ 141 และ 517 โดยใช้ขั้นตอนวิธีแบบยุคลิดดังนี้

1	141	517	3
	94	423	
	47	94	2
		94	

ดังนั้น ห.ร.ม. ของ 141 และ 517 คือ 47

นั่นคือ ห.ร.ม. ของ 517, 705 และ 987 คือ 47

ตอบ 47

นักเรียนทราบแล้วว่าเมื่อกำหนด a และ b เป็นจำนวนนับสองจำนวน ห.ร.ม. ของ a และ b คูณ ค.ร.น. ของ a และ b จะเท่ากับ a คูณ b ดังนั้นนักเรียนอาจหา ค.ร.น. ของ a และ b โดยใช้สูตรต่อไปนี้

$$\text{ค.ร.น. ของ } a \text{ และ } b = \frac{a \times b}{\text{ห.ร.ม. ของ } a \text{ และ } b}$$

สูตรนี้เหมาะสำหรับกรณีที่ a และ b เป็นจำนวนนับที่มีค่ามาก

ตัวอย่างที่ 4 จงหา ค.ร.น. ของ 255 และ 561

วิธีทำ หา ห.ร.ม. ของ 255 และ 561 โดยใช้ขั้นตอนวิธีแบบยุคลิดดังนี้

5	255	561	2
	255	510	
		51	

ดังนั้น ห.ร.ม. ของ 255 และ 561 คือ 51

นั่นคือ ค.ร.น. ของ 255 และ 561 เท่ากับ $\frac{255 \times 561}{51} = 2,805$

ตอบ 2,805

สำหรับการหา ค.ร.น. ของจำนวนนับสามจำนวนอาจทำได้ในทำนองเดียวกันกับวิธีหา ห.ร.ม. ของจำนวนนับสามจำนวนที่กล่าวมาแล้วคือ

1. หา ค.ร.น. ของสองจำนวน
2. หา ค.ร.น. ของจำนวนที่เหลือกับ ค.ร.น. ที่หาได้ในข้อ 1

ค.ร.น. ที่หาได้ในข้อ 2 เป็น ค.ร.น. ของทั้งสามจำนวนนั้น

ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดต่อไปนี้

1. จงหา ห.ร.ม. ของจำนวนต่อไปนี้
   1) 312 และ 975 2) 708 และ 813
   3) 372, 638 และ 994 4) 492, 744 และ 1,044
2. จงหา ค.ร.น. ของจำนวนต่อไปนี้
   1) 508 และ 889 2) 472 และ 672
   3) 91, 280 และ 455 4) 60, 132 และ 168
3. จงหาจำนวนที่น้อยที่สุดที่หารด้วย 518 และ 805 แล้วเหลือเศษ 11 เท่ากัน
4. จำนวนสองจำนวนมี ค.ร.น. เป็น 504 และ ห.ร.ม. เป็น 24 ถ้าจำนวนหนึ่ง คือ 72 จงหาอีกจำนวนหนึ่ง
5. จงหาจำนวนที่อยู่ระหว่าง 1,000 และ 2,000 ที่หารด้วย 19 และ 23 ได้ลงตัว

1.3 ร้อยละในชีวิตประจำวัน

นักเรียนคงเคยเห็นการใช้ร้อยละในชีวิตประจำวันอยู่บ่อย ๆ อาจพบข้อความที่ปรากฏในหน้าหนังสือพิมพ์เกี่ยวกับการลดราคาสินค้า การบอกจำนวนเงินดาวน์ในการผ่อนซื้อรถหรือซื้อบ้าน หรือบริษัทแจ้งผลประกอบการประจำปี เป็นต้น และบ่อยครั้งที่มีข้อความปรากฏให้เห็นการนำร้อยละมาใช้ที่ทำให้เกิดความเข้าใจไม่ตรงกัน

เพื่อให้นักเรียนมีความเข้าใจและนำความรู้เกี่ยวกับร้อยละไปใช้ได้ถูกต้อง ให้นักเรียนศึกษาและทำกิจกรรมต่อไปนี้

ร้อยละของจำนวนใด

นักเรียนเคยเรียนเกี่ยวกับร้อยละมาแล้วเช่น ร้อยละ 8 หรือ 8% แต่ในการนำไปใช้เราจะต้องทราบว่าจำนวนนั้นเป็นร้อยละ 8 ของจำนวนใด หรือ 8% ของจำนวนใด

ถ้าต้องการทราบว่าร้อยละ 8 ของ 50 เท่ากับเท่าใด นักเรียนสามารถทำได้ดังนี้

ร้อยละ 8 ของ 50 หรือ 8% ของ 50 หมายถึง $\frac{8}{100}$ ของ 50

และ $\frac{8}{100}$ ของ 50 เท่ากับ $\frac{8}{100} \times 50 = 4$

นั่นคือ ร้อยละ 8 ของ 50 เท่ากับ 4

ในทำนองเดียวกัน

ร้อยละ 8 ของ 40 หมายถึง $\frac{8}{100}$ ของ 40 เท่ากับ $\frac{8}{100} \times 40 = 3.2$

ร้อยละ 8 ของ 200 หมายถึง $\frac{8}{100}$ ของ 200 เท่ากับ $\frac{8}{100} \times 200 = 16$

ตัวอย่างข้างต้นชี้ให้เห็นว่าร้อยละเดียวกันของจำนวนที่ต่างกันจะไม่เท่ากัน

การกล่าวถึงร้อยละโดยไม่บอกว่าเป็นร้อยละของจำนวนใด อาจมีความหมายคลุมเครือและทำให้เข้าใจไม่ตรงกัน

ลองเปรียบเทียบดู

ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้พร้อมแสดงเหตุผล

1. 5% ของ 60 เท่ากับ 5% ของ 80 หรือไม่
2. เนื่องจาก 9% ของ 500 เท่ากับ 45 นักเรียนคิดว่า 12% ของ 500 จะมากกว่าหรือน้อยกว่า 45
3. เนื่องจาก 12% ของ 300 เท่ากับ 36 นักเรียนคิดว่า 12% ของ 270 จะมากกว่าหรือน้อยกว่า 36
4. 1% ของ 250,000 กับ 10% ของ 3,800 จำนวนใดมากกว่ากัน

ให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีด้านยาวด้านละ 20 เซนติเมตร ถ้าเพิ่มความยาวแต่ละด้านอีก 10% ของความยาวเดิม รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปใหม่จะมีด้านยาวด้านละกี่เซนติเมตรและมีพื้นที่เพิ่มขึ้นกี่เปอร์เซ็นต์

คิดความยาวของด้านที่เพิ่มขึ้น 10% ของความยาวเดิม ได้สองวิธีดังนี้

วิธีที่ 1 คิดเฉพาะความยาวที่เพิ่มขึ้น

ความยาวเพิ่มขึ้นด้านละ $\frac{10}{100} \times 20 = 2$ เซนติเมตร

จะได้ความยาวของด้านที่เพิ่มแล้วเป็นด้านละ $20 + 2 = 22$ เซนติเมตร

วิธีที่ 2 คิดความยาวของด้านที่เพิ่มแล้ว

จะได้ความยาวของด้านที่เพิ่มแล้วเป็นด้านละ $\frac{110}{100} \times 20 = 22$ เซนติเมตร

ในที่นี้จะเลือกใช้วิธีที่ 2 ซึ่งหาได้รวดเร็วกว่า

วิธีทำ ถ้าเพิ่มความยาวของแต่ละด้านอีก 10% ของความยาวเดิม

ความยาวของด้านของรูปใหม่จะเป็น $\frac{110}{100} \times 20 = 22$ เซนติเมตร

พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปใหม่เป็น $22 \times 22 = 484$ ตารางเซนติเมตร

พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปเดิมเป็น $20 \times 20 = 400$ ตารางเซนติเมตร

จะได้พื้นที่เพิ่มขึ้น $484 - 400 = 84$ ตารางเซนติเมตร

พื้นที่รูปเดิม 400 ตารางเซนติเมตร เพิ่มขึ้น 84 ตารางเซนติเมตร

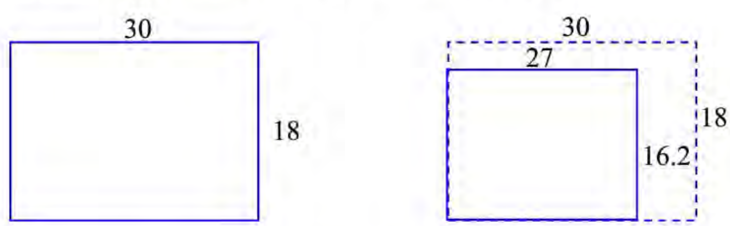
ถ้าพื้นที่รูปเดิม 100 ตารางเซนติเมตร จะเพิ่มขึ้น

$\frac{84 \times 100}{400} = 21$ ตารางเซนติเมตร

ดังนั้น พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเพิ่มขึ้น 21 เปอร์เซ็นต์

ตอบ { แต่ละด้านยาว 22 เซนติเมตร
พื้นที่เพิ่มขึ้น 21%

ตัวอย่างที่ 2 รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปหนึ่งกว้าง 18 เซนติเมตร ยาว 30 เซนติเมตร ถ้าลดความยาวของแต่ละด้านลง 10% รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าใหม่จะมีความกว้างและความยาวกี่เซนติเมตร และพื้นที่ลดลงกี่เปอร์เซ็นต์



วิธีทำ เมื่อลดความยาวและความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าลงด้านละ 10% ของความยาวและความกว้างเดิม อาจคิดความยาวและความกว้างของรูปใหม่เป็น 90% ของความยาว และความกว้างเดิม

จะได้ความกว้างของรูปใหม่เป็น $\frac{90}{100} \times 18 = 16.2$ เซนติเมตร

จะได้ความยาวของรูปใหม่เป็น $\frac{90}{100} \times 30 = 27$ เซนติเมตร

พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปใหม่เป็น $16.2 \times 27 = 437.4$ ตารางเซนติเมตร

พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปเดิมเป็น $18 \times 30 = 540$ ตารางเซนติเมตร

จะได้พื้นที่ลดลง $540 - 437.4 = 102.6$ ตารางเซนติเมตร

พื้นที่รูปเดิม 540 ตารางเซนติเมตร ลดลง 102.6 ตารางเซนติเมตร

ถ้าพื้นที่รูปเดิม 100 ตารางเซนติเมตร จะลดลง

$\frac{102.6 \times 100}{540} = 19$ ตารางเซนติเมตร

ดังนั้น พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าลดลง 19 เปอร์เซ็นต์

ตอบ
- กว้าง 16.2 เซนติเมตร
- ยาว 27 เซนติเมตร
- พื้นที่ลดลง 19%

ตัวอย่างที่ 3 ลูกบาศก์ลูกหนึ่งมีความยาวด้านละ 10 เซนติเมตร ถ้าเพิ่มความยาวของแต่ละด้านอีก 10% ลูกบาศก์ลูกใหม่จะมีปริมาตรเพิ่มขึ้นกี่เปอร์เซ็นต์

วิธีทำ ลูกบาศก์มีด้านยาวด้านละ 10 เซนติเมตร

จะมีปริมาตรเท่ากับ $10 \times 10 \times 10 = 1{,}000$ ลูกบาศก์เซนติเมตร

ถ้าเพิ่มความยาวอีกด้านละ 10% แต่ละด้านจะยาวเป็น

$\frac{110}{100} \times 10 = 11$ เซนติเมตร

ลูกบาศก์ลูกใหม่มีปริมาตร $11 \times 11 \times 11 = 1{,}331$ ลูกบาศก์เซนติเมตร

ปริมาตรของลูกบาศก์ลูกใหม่ จะมากกว่าปริมาตรของลูกบาศก์เดิมอยู่

$1{,}331 - 1{,}000 = 331$ ลูกบาศก์เซนติเมตร

ปริมาตรของลูกบาศก์ลูกเดิม 1,000 ลูกบาศก์เซนติเมตร เพิ่มขึ้น

331 ลูกบาศก์เซนติเมตร

ถ้าปริมาตรของลูกบาศก์ลูกเดิมเป็น 100 ลูกบาศก์เซนติเมตร

จะเพิ่มขึ้น $\frac{331 \times 100}{1{,}000} = 33.1$ ลูกบาศก์เซนติเมตร

ดังนั้น ปริมาตรของลูกบาศก์เพิ่มขึ้น 33.1 เปอร์เซ็นต์

ตอบ 33.1%

ความคิดเห็นของฉัน

ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้ พร้อมแสดงเหตุผล

1. ถ้าบริษัทขายรถยนต์แห่งหนึ่งติดประกาศโฆษณาว่า "ซื้อรถวันนี้มีดอกเบี้ย 0%" นักเรียนมีความคิดเห็นอย่างไรกับข้อความนี้
2. โรงเรียนแห่งหนึ่งบอกสื่อมวลชนว่า นักเรียนของโรงเรียนนี้สอบเข้าเรียนต่อในมหาวิทยาลัยได้ 100% แต่อีกโรงเรียนหนึ่งบอกว่านักเรียนของโรงเรียนสอบเข้าเรียนต่อในมหาวิทยาลัยได้เพียง 60% นักเรียนทราบหรือไม่ว่าโรงเรียนใดมีจำนวนนักเรียนสอบเข้าเรียนต่อได้มากกว่ากัน
3. พีระและพรตได้รับเงินเดือนขึ้นคนละ 7% ถ้าพีระได้รับเงินเดือนเพิ่ม 630 บาท นักเรียนคิดว่าเงินเดือนส่วนที่พรตได้รับเพิ่มขึ้นจะเท่ากับพีระหรือไม่
4. จำนงมีกระดาษรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสอยู่หนึ่งแผ่น เขาบอกเพื่อน ๆ ว่า "ถ้าผมเพิ่มความยาวของกระดาษอีกด้านละ 20% ผมก็จะได้กระดาษแผ่นใหม่ที่มีพื้นที่เพิ่มขึ้นอีก 20% ด้วย" นักเรียนคิดว่าจำนงพูดถูกต้องหรือไม่
5. โรงเรียน ก รับนักเรียนสอบเข้าเรียน ม.1 ได้ 30% ของจำนวนผู้สมัครสอบ โรงเรียน ข รับนักเรียนสอบเข้าเรียน ม.1 ได้ 50% ของจำนวนผู้สมัครสอบ ปรากฏว่าโรงเรียน ก และโรงเรียน ข มีนักเรียนที่สอบเข้าเรียน ม.1 ได้เท่ากัน นักเรียนคิดว่าข้อความนี้เป็นไปได้หรือไม่
6. ถ้ามีคนเล่าให้นักเรียนฟังว่า มนัสขายของได้กำไร 5% ก็สามารถนำเงินส่วนที่เป็นกำไรไปซื้อรถยนต์ได้ 1 คัน แต่พีระขายของได้กำไรตั้ง 75% ยังไม่สามารถนำเงินกำไรนี้ไปซื้อตู้เย็นได้ นักเรียนคิดว่าข้อมูลนี้เป็นไปได้หรือไม่
7. สมใจเป็นพนักงานขายเครื่องสำอางที่ขายเก่งมากคนหนึ่ง จึงมีบริษัทขายเครื่องสำอางสองแห่งเสนอให้สมใจเป็นพนักงานขาย บริษัทสาวสยามเสนอให้ค่าตอบแทน 40% ของยอดขาย บริษัทแจ่มจรัสให้ 50% ของยอดขาย ถ้านักเรียนเป็นสมใจนักเรียนจะเลือกสมัครเป็นพนักงานของบริษัทใด
8. อัญชันและพุดซ้อนเข้าทำงานพร้อมกันและออมเงินเดือนที่ได้ฝากธนาคารไว้ทุกเดือน อัญชันฝากไว้ 20% ของเงินเดือน พุดซ้อนฝากไว้ 25% ของเงินเดือน เป็นไปได้หรือไม่ที่จำนวนเงินออมของอัญชันมากกว่าจำนวนเงินออมของพุดซ้อน

9. นับทองมีกระดาษรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด 26 × 21 ซม.^{2} เธอบอกว่า "ถ้าเพิ่มความยาวอีก 5% และเพิ่มความกว้างอีก 30% ฉันจะได้กระดาษแผ่นใหม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส" นักเรียนคิดว่าสิ่งที่นับทองพูดเป็นไปได้หรือไม่

ถ้านับทองพูดใหม่ว่า "ถ้าเพิ่มความยาวอีก 5% และเพิ่มความกว้างอีก 6% ฉันจะได้กระดาษแผ่นใหม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส" นักเรียนคิดว่าสิ่งที่นับทองพูดเป็นไปได้หรือไม่

ผู้ซื้อ – ผู้ขาย

ในการลงทุนทำกิจการใด ๆ เราต้องคิดต้นทุนของสินค้าที่จะขาย ราคาขายและกำไร สินค้าบางชนิดอาจเป็นสินค้าสำเร็จรูป สินค้าบางชนิดอาจเป็นสินค้าที่ผลิตขึ้นมาใหม่ ดังนั้นการคิดต้นทุนและราคาขายจึงแตกต่างกันดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง พงษ์ซื้อรองเท้ามาเพื่อจำหน่าย พงษ์มีฐานะเป็นทั้งผู้ซื้อและผู้ขาย ถ้าพงษ์ซื้อรองเท้ามาขายคู่ละ 300 บาท พงษ์มีฐานะเป็น **ผู้ซื้อ** เรียก**ราคารองเท้า**ที่พงษ์ซื้อมาว่า **ต้นทุน** หรือ**ราคาทุน** ถ้าพงษ์ขายรองเท้าคู่นี้ให้นักเรียน 450 บาท พงษ์มีฐานะเป็น **ผู้ขาย** เรียก**ราคารองเท้า**ที่พงษ์ขายไปว่า **ราคาขาย** และนักเรียนมีฐานะเป็นผู้ซื้อ เมื่อราคาขายมากกว่าต้นทุน เรียกส่วนต่างของราคาขายกับต้นทุนว่า **กำไร**

จากตัวอย่างนี้จะทราบว่า

ต้นทุนของรองเท้า 300 บาท ราคาขาย 450 บาท

การขายครั้งนี้จึงมีกำไร $450 - 300 = 150$ บาท

ถ้าเราต้องการทราบว่า พงษ์ขายรองเท้าคู่นี้ได้กำไรกี่เปอร์เซ็นต์ สามารถคำนวณได้ดังนี้

ต้นทุน 300 บาท ขายได้กำไร 150 บาท

ถ้าต้นทุน 100 บาท จะขายได้กำไร $\frac{150 \times 100}{300} = 50$ บาท

การคิดกำไรจากเงินต้นทุน 100 บาทเป็นการคิดกำไรร้อยละ

ดังนั้น พงษ์ขายรองเท้าคู่นี้ได้กำไรร้อยละ 50 หรือ 50 เปอร์เซ็นต์

ถ้าพงษ์ขายรองเท้าคู่นี้ต่ำกว่าราคาทุน เรียกส่วนต่างของต้นทุนกับราคาขายว่า **ขาดทุน** เช่น

ถ้าพงษ์ขายรองเท้าคู่นี้ไป 240 บาท

กล่าวว่า พงษ์ขายรองเท้าคู่นี้ขาดทุน $300 - 240 = 60$ บาท

ถ้าคิดเป็นร้อยละจะได้ว่า

ต้นทุน 300 บาท ขายขาดทุน 60 บาท

ถ้าต้นทุน 100 บาท จะขายขาดทุน $\frac{60 \times 100}{300} = 20$ บาท

ดังนั้นพงษ์ขายรองเท้าคู่นี้ขาดทุน 20 เปอร์เซ็นต์

ในกรณีที่เป็นสินค้าที่ผลิตขึ้นมาใหม่ เราต้องคิดต้นทุนการผลิตจากต้นทุนของส่วนประกอบต่าง ๆ ดังตัวอย่าง

แม่แป๋วทำน้ำพริกเผาปลาย่างไปฝากขายที่ศูนย์จำหน่ายสินค้าของหมู่บ้าน แม่แป๋วคิดต้นทุนของส่วนประกอบของน้ำพริกเผาและภาชนะบรรจุได้ขวดละ 20 บาท แต่ยังต้องบวกค่าใช้จ่ายอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการผลิต เช่น ค่าน้ำ ค่าไฟ ค่าเชื้อเพลิง ค่าพาหนะ ค่าแรงและกำไรอีก 100% ของราคาทุน 20 บาท

ดังนั้น แม่แป๋วจึงต้องตั้งราคาขายน้ำพริกเผาไว้ขวดละ $20 + 20 = 40$ บาท

ศูนย์จำหน่ายสินค้าคิดค่าฝากขาย 20% ของราคาขาย คิดเป็นเงิน $\frac{20 \times 40}{100} = 8$ บาท

นั่นคือ ถ้าขายน้ำพริกเผาได้ 1 ขวด แม่แป๋วจะได้รับเงินกลับไป $40 - 8 = 32$ บาท

ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้

1. สมมติตัวเองเป็นผู้ลงทุนทำสินค้าชนิดหนึ่งเพื่อขาย เช่น ทำบัตรอวยพร เพาะต้นไม้ วาดรูป ฯลฯ
2. คำนวณหาต้นทุนของสินค้าที่จะขาย
3. อธิบายวิธีการคิดกำไรและการตั้งราคาขาย

ลดแล้ว ลดอีก

นักเรียนคงเคยเห็นร้านค้าทั่ว ๆ ไปปิดราคาขายสินค้า ในช่วงแรกที่เป็นสินค้าใหม่จะคิดกำไรไว้มาก โดยปิดราคาขายไว้สูงกว่าต้นทุนมาก ภายหลังถ้าสินค้าตกรุ่นไปหรือขายไม่ออก ทางร้านก็อาจจะลดราคาลงมาเรื่อย ๆ และจะสังเกตเห็นว่าเวลาที่ทางร้านติดประกาศลดราคา จะบอกเพียงจำนวนร้อยละที่ลดให้ เช่น ปิดราคาเสื้อไว้ 200 บาท และติดประกาศลด 10%

การประกาศลดราคา 10% นี้เป็นที่เข้าใจตรงกันว่าลดราคา 10% ของราคาที่ปิดไว้

ตัวอย่าง สลิลต้องการซื้อเสื้อตัวหนึ่งซึ่งปิดราคาขายไว้ 600 บาท ทางร้านติดประกาศลดราคา 20% สลิลซื้อเสื้อตัวนี้ในราคากี่บาท

วิธีคิดทำได้สองวิธีดังนี้

วิธีที่ 1 คิดเงินส่วนที่ทางร้านลดให้

ถ้าทางร้านลดให้ 20% จะได้ส่วนลด $\frac{20}{100} \times 600 = 120$ บาท

สลิลซื้อเสื้อตัวนี้ในราคา $600 - 120 = 480$ บาท

วิธีที่ 2 คิดราคาเสื้อที่ลดแล้ว

ถ้าทางร้านลดให้ 20% หมายความว่าผู้ซื้อจะซื้อเสื้อตัวนี้ในราคา 80%

สลิลซื้อเสื้อตัวนี้ในราคา $\frac{80}{100} \times 600 = 480$ บาท

ให้นักเรียนพิจารณาปัญหา

ร้านขายสินค้าแห่งหนึ่งปิดราคาขายรถจักรยานคันหนึ่งไว้ 2,600 บาท ซึ่งจะทำให้ทางร้านได้กำไร 30% หลังจากตั้งขายไว้นานสองเดือน ยังไม่มีผู้ซื้อ จึงติดราคาขายใหม่โดยลดราคาลง 10% ก็ยังไม่มีผู้ใดสนใจซื้อ เมื่อเห็นร้านข้างเคียงลดกระหน่ำจึงติดประกาศลดราคาขายลงอีก 10% จึงขายรถจักรยานคันนี้ได้

จากปัญหาข้างต้นให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

1. ครั้งแรกทางร้านปิดราคาขายจักรยานคันนี้ไว้ 2,600 บาท โดยคิดกำไรไว้ 30% นักเรียนคิดว่าราคาต้นทุนจักรยานคันนี้กี่บาท
2. ถ้าทางร้านลดราคาครั้งแรก 10% จะต้องปิดราคาขายใหม่เป็นกี่บาท
3. ถ้าทางร้านลดราคาครั้งที่สองอีก 10% ต้องปิดราคาขายในครั้งนี้กี่บาท
4. ถ้าทางร้านประกาศลดราคาตั้งแต่ครั้งแรก 30% และขายจักรยานคันนี้ได้ นักเรียนคิดว่าจะขายได้เท่ากับต้นทุนหรือไม่ เพราะเหตุใด
5. ถ้าทางร้านลดราคาตั้งแต่ครั้งแรก 20% และขายได้ จะขายจักรยานคันนี้ได้ในราคาเดียวกับที่ขายได้ในข้อ 3 หรือไม่ เพราะเหตุใด

ดอกเบี้ย

เมื่อนักเรียนมีเงินออมจำนวนหนึ่ง อาจนำเงินนั้นไปฝากธนาคารเพราะนอกจากจะมั่นคงและปลอดภัยแล้ว ยังได้ดอกเบี้ยเป็นผลตอบแทนด้วย นักเรียนอาจเลือกฝากแบบออมทรัพย์หรือฝากแบบประจำก็ได้ แต่ละแบบจะได้ดอกเบี้ยตามอัตราและเงื่อนไขที่ธนาคารกำหนด

ถ้านักเรียนฝากแบบออมทรัพย์ นักเรียนจะถอนเงินเมื่อไรก็ได้ธนาคารจะคิดดอกเบี้ยให้ตามจำนวนวันที่ฝากในอัตราที่ธนาคารกำหนด หากดอกเบี้ยที่คำนวณได้เป็นเงินตั้งแต่ 20,000 บาทขึ้นไป ธนาคารจะหักภาษีไว้ร้อยละ 15 เพื่อนำส่งเป็นรายได้ของรัฐ

ถ้านักเรียนฝากแบบประจำ นักเรียนอาจเลือกฝากแบบ 3 เดือน 6 เดือน หรือ 12 เดือน ก็ได้ธนาคารจะให้ดอกเบี้ยตามอัตราที่ธนาคารกำหนด ต่อเมื่อนักเรียนฝากเงินครบตามเงื่อนไขของเวลาที่ฝากในแต่ละแบบ และดอกเบี้ยที่คำนวณได้จะถูกหักภาษีร้อยละ 15 เพื่อนำส่งเป็นรายได้ของรัฐ

นอกจากธนาคารจะรับฝากเงินแล้ว ธนาคารยังให้กู้เงินอีกด้วยโดยผู้กู้ต้องเสียดอกเบี้ยตามอัตราและเงื่อนไขที่ธนาคารกำหนด

ตารางต่อไปนี้แสดงอัตราดอกเบี้ยเงินฝากเป็นร้อยละต่อปีของบางสถาบันการเงินประจำเดือนกรกฎาคม พ.ศ. 2545 ตามที่ปรากฏในหนังสือสถิติเศรษฐกิจและการเงินประจำเดือนกรกฎาคม 2545 ของธนาคารแห่งประเทศไทย

สถาบันการเงิน	**ฝากแบบออมทรัพย์**	**ฝากแบบประจำ**				
		3 เดือน	**6 เดือน**	**12 เดือน**	**2 ปี**	**มากกว่า 2 ปี**
ธนาคารพาณิชย์	1.75	2.00	2.00	2.5 – 3.00	3 – 3.5	4.00
ธนาคารออมสิน	1.75	2.00	2.00	3.00	–	–
ธนาคารอาคารสงเคราะห์	1.75	2.00	2.00	2.75	3.00	–
ธนาคารเพื่อการเกษตรและสหกรณ์การเกษตร	1.75	2.00	2.00	2.75	3.00	–

ตัวอย่าง วันดีออมเงินไว้ได้ 20,000 บาท นำไปเปิดบัญชีฝากธนาคารออมสินโดยเลือกฝากแบบประจำ 3 เดือนอัตราดอกเบี้ย 2% เมื่อครบ 6 เดือน ถ้าวันดีไม่ได้เบิกเงินออกมาใช้เลย ยอดเงินในบัญชีของวันดีจะมีอยู่เท่าไร

วิธีทำ การฝากแบบประจำ 3 เดือนอัตราดอกเบี้ย 2% ต่อปี

เมื่อครบ 3 เดือนแรก วันดีฝากเงิน 20,000 บาท จะได้ดอกเบี้ย

$$\left(\frac{2}{100}\times 20,000\right)\times\frac{3}{12} = 100$$

3 เดือนคิดเป็น $\frac{3}{12}$ ปี

การฝากแบบประจำต้องเสียภาษี 15% ของดอกเบี้ยที่ได้

วันดีต้องถูกหักภาษีดอกเบี้ย $\frac{15}{100}\times 100 = 15$ บาท

คงเหลือยอดเงินในบัญชี $20,000 + (100 - 15) = 20,085$ บาท

ดังนั้นในช่วง 3 เดือนหลัง วันดีจึงมีเงินต้น 20,085 บาท

เมื่อครบ 3 เดือนหลัง วันดีจะได้ดอกเบี้ย $\left(\frac{2}{100}\times 20,085\right)\times\frac{3}{12} = 100.425$ บาท

หรือประมาณ 100.43 บาท

หักภาษี 15% ของดอกเบี้ยที่ได้ คิดเป็น $\frac{15}{100}\times 100.43 = 15.0645$ บาท

หรือประมาณ 15.06 บาท

มียอดเงินในบัญชี $20,085 + (100.43 - 15.06) = 20085 + 85.37$ บาท

$= 20,170.37$ บาท

ตอบ 20,170.37 บาท

ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้

ดอกเบี้ยเงินฝาก

สุดาและรจนาเป็นเพื่อนรักกัน ทั้งสองได้รับรางวัลเรียนดีและความประพฤติดีจากสมาคมศิษย์เก่าของโรงเรียนคนละ 3,000 บาท จึงนำเงินทั้งหมดไปเปิดบัญชีฝากธนาคารออมสิน สุดาเลือกฝากแบบประจำ 6 เดือนอัตราดอกเบี้ย 2% รจนาเลือกฝากแบบออมทรัพย์อัตราดอกเบี้ย 1.75% ถ้าทั้งสองคนไม่มีใครถอนเงินมาใช้ เมื่อครบ 6 เดือน แต่ละคนนำสมุดไปตรวจสอบยอดเงินในบัญชีที่ธนาคาร นักเรียนคิดว่ายอดเงินในบัญชีของใครมากกว่ากันและมากกว่ากันอยู่กี่บาท

ดอกเบี้ยเงินกู้

ไพลินกู้เงินจากสถาบันการเงินแห่งหนึ่งเพื่อมาลงทุนทำร้านเสริมสวย 200,000 บาท ต้องเสียดอกเบี้ยเงินกู้ในอัตรา 12% ต่อปี คิดดอกเบี้ยทุก 3 เดือน แบ่งชำระเงินต้นคืนเป็นงวด งวดละ 50,000 บาท ทุก 3 เดือนพร้อมดอกเบี้ย อยากทราบว่าในการกู้เงินครั้งนี้ไพลินจ่ายเงินให้สถาบันการเงินเท่าไรในแต่ละงวดและจ่ายเป็นดอกเบี้ยเงินกู้ทั้งหมดกี่บาท

เงินโบนัส

เงินพิเศษที่รัฐวิสาหกิจ องค์การ บริษัท หรือห้างร้าน จ่ายให้เป็นบำเหน็จรางวัลแก่พนักงานขององค์กรนอกเหนือจากเงินเดือนค่าจ้าง เรียกว่า **เงินโบนัส**

การจ่ายเงินโบนัสของแต่ละองค์กรมีเงื่อนไขแตกต่างกัน บางองค์กรให้เป็นจำนวนเท่าของเงินเดือนของพนักงานแต่ละคน บางองค์กรให้ตามผลการประเมินงาน และบางองค์กรใช้ทั้งสองเงื่อนไขประกอบกัน โดยทั่วไปองค์กรจะจ่ายเงินโบนัสให้พนักงานหลังจากปิดงบสิ้นปีบัญชี เงินโบนัสเป็นรายได้ส่วนหนึ่งของพนักงาน องค์กรจึงต้องหักภาษีเงินได้ ณ ที่จ่ายด้วย

ตัวอย่าง การจ่ายเงินโบนัสแบบจำนวนเท่าของเงินเดือน

ระดับผู้บริหาร	จ่ายให้	1.5	เท่าของเงินเดือน
ระดับหัวหน้างาน	จ่ายให้	2	เท่าของเงินเดือน
ระดับผู้ปฏิบัติงาน	จ่ายให้	2.5	เท่าของเงินเดือน

ตัวอย่าง การจ่ายเงินโบนัสแบบจ่ายตามผลงาน

ผลงานระดับดีมาก	จ่ายให้	3	เท่าของเงินเดือน
ผลงานระดับดี	จ่ายให้	2	เท่าของเงินเดือน
ผลงานระดับปานกลาง	จ่ายให้	1	เท่าของเงินเดือน

ตัวอย่าง นิกรเป็นพนักงานของบริษัทแห่งหนึ่งได้รับเงินเดือนเดือนละ 23,600 บาท เมื่อสิ้นปีบริษัทจ่ายเงินโบนัสให้นิกร 2.5 เท่าของเงินเดือนและได้หักภาษีเงินได้ ณ ที่จ่ายไว้ 10% จงหาว่านิกรได้รับเงินโบนัสหลังจากหักภาษีแล้วเท่าไร

วิธีทำ นิกรได้รับเงินโบนัส 2.5 เท่าของเงินเดือน

ดังนั้น นิกรได้รับเงินโบนัส 2.5×23600 บาท

นิกรถูกหักภาษีจากเงินโบนัส 10%

ถ้าได้รับเงินโบนัส 100 บาท จะได้รับจริง $100 - 10 = 90$ บาท

ได้รับเงินโบนัส $2.5 \times 23{,}600$ บาท จะได้รับจริง $\frac{90}{100} \times (2.5 \times 23{,}600)$

$= 53{,}100$ บาท

นั่นคือ นิกรได้รับเงินโบนัสหลังถูกหักภาษีแล้ว 53,100 บาท

ตอบ 53,100 บาท

ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้

เงินโบนัสของปิติ

ปิติเป็นพนักงานขององค์กรอิสระแห่งหนึ่ง ได้รับเงินเดือนเดือนละ 47,500 บาท แต่ละเดือนปิติต้องถูกหักเงินสำหรับกองทุนสำรองเลี้ยงชีพ 3,800 บาท และในปีนี้ปิติจะได้รับเงินโบนัส 1.8 เท่าของเงินเดือน ให้นักเรียนแสดงวิธีคิดและตอบคำถามต่อไปนี้

1. ปิติได้รับเงินโบนัสกี่บาท
2. ถ้าปิติถูกหักเงินโบนัสไว้สำหรับชำระภาษีเงินได้ ณ ที่จ่าย 10% ปิติได้รับเงินโบนัสส่วนที่เหลือกี่บาท
3. ถ้าปิติถูกหักเงินไว้สำหรับชำระภาษีเงินได้ ณ ที่จ่าย 6% ของเงินเดือน ปิติได้รับเงินเดือนส่วนที่เหลือกี่บาท
4. ถ้าองค์กรนี้จ่ายเงินโบนัสและเงินเดือนส่วนที่เหลือให้ปิติพร้อมกันในวันที่ 30 ธันวาคม วันนั้นปิติได้รับเงินกี่บาท

ใช้เงินโบนัสอย่างไรดี

หลังจากที่ปิติได้รับเงินโบนัสตามที่คำนวณได้ในกิจกรรมข้างต้นแล้ว เขาตั้งใจที่จะนำเงินจำนวนนี้ไปใช้ให้เป็นประโยชน์ต่อครอบครัวในหลาย ๆ เรื่อง ตามความต้องการของตนเอง ของภรรยา และของลูก ๆ แต่ยังตัดสินใจไม่ได้ว่าจะใช้เงินจำนวนนี้อย่างไรดี

นักเรียนคิดว่าปิติควรจะตัดสินใจใช้เงินโบนัสในรายการใดบ้างจึงจะอยู่ในวงเงินของเงินโบนัสที่ได้รับ จงให้เหตุผลประกอบ

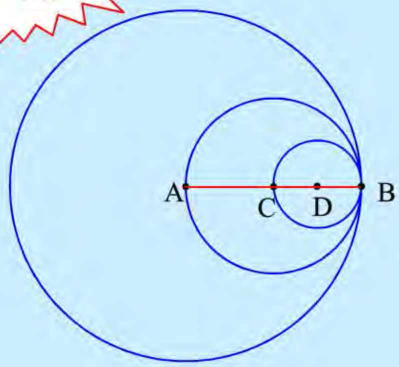
1. ปิติต้องการเงิน 30,000 บาท ฝากธนาคารเป็นเงินออมไว้ใช้จ่ายเป็นทุนสำรองของครอบครัว หรือนำเงินที่ได้รับไปชำระหนี้บางส่วนที่กู้มาซื้อบ้านซึ่งยังมียอดค้างชำระอยู่ 185,000 บาท เพื่อจะได้เสียดอกเบี้ยน้อยลง หรือซื้อเครื่องเสียงที่อยากได้และกำลังลดราคา 50% จากราคาที่ปิดไว้ 29,800 บาท

2. ภรรยาอยากได้เครื่องซักผ้าซึ่งกำลังลดราคา 30% จากราคาที่ปิดไว้ 22,700 บาท หรือปรับปรุงครัวใหม่ซึ่งต้องใช้เงินประมาณ 30,000 บาท

3. ลูกสาวอยากได้เครื่องคอมพิวเตอร์สำหรับทำรายงานและค้นหาข้อมูล ราคาประมาณ 25,400 บาท

4. ลูกชายต้องการซื้อรถจักรยานสำหรับขี่ไปโรงเรียน ราคา 1,950 บาท

คิด



วงกลมสามวงมีจุดศูนย์กลางที่จุด A, C และ D ตามลำดับ โดย $AC = \frac{1}{2}AB$ และ $CD = \frac{1}{2}CB$ พื้นที่ของวงกลมที่มี D เป็นจุดศูนย์กลาง เป็นร้อยละเท่าใดของพื้นที่ของวงกลมที่มี A เป็นจุดศูนย์กลาง

1.4 ปัญหาชวนคิด

การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ทำให้เราได้เรียนรู้และเสริมความเข้าใจเกี่ยวกับเนื้อหาของคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับปัญหานั้น ๆ ประสบการณ์เกี่ยวกับการแก้ปัญหาจะช่วยให้เรามีแนวทางหลากหลายในการแก้ปัญหาในชีวิตจริง

กิจกรรมต่อไปนี้จะช่วยให้นักเรียนเห็นวิธีการแก้ปัญหาที่สำคัญทางคณิตศาสตร์

ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้

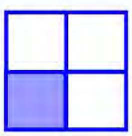
ผลบวกของจำนวนคี่

พิจารณาจำนวนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีขนาด 1 × 1 ตารางหน่วยจากแบบรูป ดังแผนภาพต่อไปนี้

รูปที่ 1

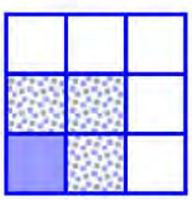
$1 = 1 \times 1 = 1^2$

รูปที่ 2



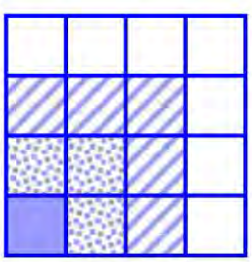
$1 + 3 = 2 \times 2 = 2^2$

รูปที่ 3



$1 + 3 + 5 = 3 \times 3 = 3^2$

รูปที่ 4



$1 + 3 + 5 + 7 = 4 \times 4 = 4^2$

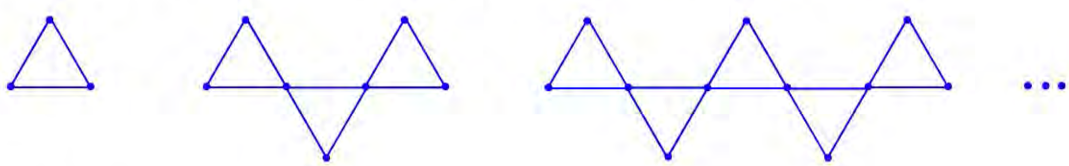
ให้รูปที่ 5 รูปที่ 6 และรูปต่อไปเรื่อย ๆ มีการเพิ่มของจำนวนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 1×1 ตารางหน่วย เป็นไปตามแบบรูปที่แสดงมาข้างต้น

จงตอบคำถามต่อไปนี้

1. รูปที่ 5 มีรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 1×1 ตารางหน่วยกี่รูป
2. รูปที่ 31 มีรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 1×1 ตารางหน่วยกี่รูป
3. ถ้ารูปหนึ่งมีรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 1×1 ตารางหน่วย 144 รูป รูปนั้นเป็นรูปที่เท่าไร
4. รูปที่ 17 จะมีจำนวนคี่ที่เรียงลำดับตั้งแต่ 1 ขึ้นไป จำนวนใดบ้างบวกกันและผลบวกเป็นเท่าไร
5. จงเขียน 169 ในรูปการบวกของจำนวนคี่ที่เรียงลำดับตั้งแต่ 1 ขึ้นไป
6. จงเขียน $1 + 3 + 5 + \ldots + 35$ ให้อยู่ในรูปเลขยกกำลัง
7. $1 + 3 + 5 + \ldots + 59$ มีผลลัพธ์เท่าไร

มีอะไรอยู่เท่าไร

กำหนดแบบรูปการเรียงรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าดังแผนภาพต่อไปนี้



รูปที่ 1 รูปที่ 2 รูปที่ 3

ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้

1. สังเกตแบบรูปทั้งสามแล้วเติมจำนวนที่เกี่ยวข้องกับแบบรูปลงในตารางให้สมบูรณ์

รูปที่	1	2	3	4	5	6	7
จำนวนรูปสามเหลี่ยม	1	3					
จำนวนจุดยอด	3	7					
จำนวนด้านของรูปสามเหลี่ยม	3	9					

2. สังเกตจำนวนในตารางแล้วตอบคำถามต่อไปนี้
    1) จำนวนรูปสามเหลี่ยมเปลี่ยนแปลงอย่างไร จงอธิบาย
    2) จำนวนจุดยอดเปลี่ยนแปลงอย่างไร จงอธิบาย
    3) จำนวนด้านของรูปสามเหลี่ยมเปลี่ยนแปลงอย่างไร จงอธิบาย
    4) รูปที่ 12 จะมีรูปสามเหลี่ยมกี่รูป
    5) 49 เป็นจำนวนรูปสามเหลี่ยมได้หรือไม่ จงอธิบาย
    6) 47 เป็นจำนวนจุดยอดได้หรือไม่ จงอธิบาย
    7) 64 เป็นจำนวนจุดยอดได้หรือไม่ จงอธิบาย
    8) 53 เป็นจำนวนด้านของรูปสามเหลี่ยมได้หรือไม่ จงอธิบาย
    9) 57 เป็นจำนวนด้านของรูปสามเหลี่ยมได้หรือไม่ จงอธิบาย
3. จงตอบคำถามต่อไปนี้
    1) รูปที่ 13 จะมีจุดยอดทั้งหมดกี่จุด
    2) รูปที่ 24 จะมีรูปสามเหลี่ยมกี่รูป
    3) ถ้ารูปหนึ่งมีด้านของรูปสามเหลี่ยม 117 ด้าน รูปนั้นเป็นรูปที่เท่าไร
    4) ถ้ารูปหนึ่งมีจุดยอด 99 จุด รูปนั้นเป็นรูปที่เท่าไร
    5) ถ้ารูปหนึ่งมีด้านของรูปสามเหลี่ยม 201 ด้าน รูปนั้นจะมีจุดยอดกี่จุด

จากกิจกรรม “ผลบวกของจำนวนคี่” และ “มีอะไรอยู่เท่าไร” นักเรียนจะพบวิธีการแก้ปัญหาวิธีหนึ่งที่สามารถทำให้นักเรียนตอบคำถามในกิจกรรมได้ วิธีการแก้ปัญหาดังกล่าวคือ สำรวจและสังเกตแบบรูปของความเกี่ยวข้องของผลที่เกิดขึ้น โดยพิจารณาจากตัวอย่างที่ไม่ซับซ้อน เราเรียกวิธีการแก้ปัญหาในลักษณะนี้ว่า **การค้นหาแบบรูป**

เงิน – เงิน – เงิน

ในสมัยโบราณ ตั้งแต่สมัยสุโขทัยมาแล้ว คนไทยใช้เบี้ยหอยและเงินพดด้วงเป็นเงินตราในการซื้อขายสินค้า เบี้ยหอยเป็นเงินตราที่มีมูลค่าต่ำ ส่วนเงินพดด้วงเป็นเงินตราที่มีมูลค่าสูง

ต่อมาจนถึงสมัยกรุงรัตนโกสินทร์ ระบบเศรษฐกิจของประเทศเริ่มเปลี่ยนแปลงไปจากระบบการผลิตเพื่อใช้เองในสมัยก่อนมาเป็นระบบการผลิตเพื่อการค้า โดยเฉพาะอย่างยิ่งในสมัยพระบาทสมเด็จพระจอมเกล้าเจ้าอยู่หัว ระบบการเงินของประเทศไทยจึงได้รับการปรับปรุงให้ทันสมัยขึ้น จนในที่สุดใช้เงินที่ทำด้วยกระดาษ เรียกว่า **ธนบัตร** เมื่อ พ.ศ. 2445 ในสมัยพระบาทสมเด็จพระจุลจอมเกล้าเจ้าอยู่หัว

ใน พ.ศ. 2471 รัฐบาลได้กำหนดให้เงินตราของประเทศประกอบด้วยธนบัตรและเหรียญกษาปณ์ เปลี่ยนหน่วยจากอัฐ โสฬส ไพ เฟื้อง สลึง บาท ตำลึง ชั่ง ฯลฯ เป็นบาท และสตางค์

ใน พ.ศ. 2554 มีธนบัตรและเหรียญกษาปณ์ที่ใช้กันในท้องตลาด ได้แก่ ธนบัตรฉบับละ 1000 บาท 500 บาท 100 บาท 50 บาท 20 บาท และ 10 บาท และเหรียญกษาปณ์ ได้แก่ เหรียญ 10 บาท เหรียญ 5 บาท เหรียญ 2 บาท เหรียญ 1 บาท เหรียญ 50 สตางค์ และเหรียญ 25 สตางค์

แลกเงิน

ในชีวิตประจำวัน บางครั้งเราจำเป็นต้องมีการแลกเงินจากธนบัตรที่มีมูลค่ามากเป็นธนบัตรที่มีมูลค่าน้อยลง และในบางครั้งก็อาจนำเหรียญกษาปณ์หรือธนบัตรที่มีมูลค่าน้อยไปแลกเป็นธนบัตรที่มีมูลค่าสูงกว่า

ให้นักเรียนแสดงแนวคิดประกอบการหาคำตอบต่อไปนี้

1. ถ้ายุวดีต้องการแลกธนบัตร 20 บาท เป็นเหรียญ 10 บาท เหรียญ 5 บาท หรือเหรียญ 1 บาท ชนิดเดียวกันหรือต่างชนิดกันก็ได้ จะมีวิธีแลกได้อย่างไรบ้าง
2. ถ้ายุวดีต้องการแลกธนบัตรฉบับละ 1,000 บาท เป็นธนบัตรที่มีมูลค่ามากกว่า 20 บาท ชนิดเดียวกันหรือต่างชนิดกันก็ได้ จะมีวิธีแลกได้อย่างไรบ้าง

แลกเงินตรา

ทุกประเทศจะมีเงินตราของประเทศใช้ซื้อขายแลกเปลี่ยนกันในประเทศ หรือต่างประเทศ แต่เงินสกุลหลักที่นิยมซื้อขายแลกเปลี่ยนกันระหว่างประเทศโดยผ่านธนาคารหรือตัวแทนจำหน่าย ได้แก่ เงินดอลลาร์สหรัฐ เงินปอนด์สเตอร์ลิง (อังกฤษ) เงินยูโร (บางประเทศในยุโรป) เงินฟรังก์สวิส (สวิตเซอร์แลนด์) และเงินเยน (ญี่ปุ่น) เป็นต้น

โดยทั่วไปธนาคารจะมีป้ายประกาศอัตราแลกเปลี่ยนเงินสกุลต่าง ๆ ให้ทราบ นักเรียนอาจดูอัตราการแลกเปลี่ยนเงินเหล่านี้จากหนังสือพิมพ์หรือเว็บไซต์ของธนาคารต่าง ๆ เช่น ธนาคารกรุงเทพ เมื่อวันที่ 9 ธันวาคม 2552 มีอัตราแลกเปลี่ยนเงินตราต่างประเทศ เป็นดังนี้

อัตราแลกเปลี่ยน

สกุลเงิน	**ซื้อ**	**ขาย**
บาท / ดอลลาร์สหรัฐ	32.82	33.47
บาท / ปอนด์สเตอร์ลิง	53.06	54.79
บาท / ยูโร	48.22	49.35
บาท / ฟรังก์สวิส	31.82	32.72
บาท / 100 เยน	36.77	38.07
บาท / ดอลลาร์สิงคโปร์	23.43	24.11

ในที่นี้ **ซื้อ** เป็นราคาที่ธนาคารรับซื้อจากลูกค้า

ขาย เป็นราคาที่ธนาคารขายให้แก่ลูกค้า

ถ้านำเงิน 33.47 บาท ไปแลกเงินดอลลาร์สหรัฐ จะได้ 1 เหรียญ แต่ถ้านำเงิน 1 ดอลลาร์สหรัฐไปแลกเงินบาทจะได้ 32.82 บาท

จะเห็นว่า ส่วนต่างของมูลค่าเงินระหว่างราคาขายกับราคาซื้อต่างกัน
33.47 – 32.82 = 0.65 บาทต่อเงิน 1 ดอลลาร์สหรัฐ ส่วนต่างนี้เป็นรายได้ของธนาคาร

ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้โดยใช้อัตราแลกเปลี่ยนข้างต้น

1. ยุวดีต้องการแลกเงินบาทเป็นเงินดอลลาร์สหรัฐ เพื่อฝากเพื่อนไปซื้อหนังสือเป็นเงิน 130 ดอลลาร์สหรัฐ ยุวดีต้องนำเงินไปแลกกี่บาท
2. เพื่อนของยุวดีเป็นชาวอังกฤษมาเที่ยวเมืองไทย ยุวดีพาเพื่อนไปแลกเงินที่ธนาคาร ถ้าเพื่อนของยุวดีนำเงินปอนด์สเตอร์ลิง 180 ปอนด์มาแลกเป็นเงินไทย เขาจะได้รับเงินเท่าไร
3. เพื่อนอีกคนหนึ่งของยุวดีเป็นชาวญี่ปุ่นมาเที่ยวเมืองไทยและจะกลับญี่ปุ่น ยุวดีพาเพื่อนไปแลกเงินบาทกลับคืนเป็นเงินเยน ในการแลกเป็นเงินเยนจะต้องแลกเป็นจำนวนเต็ม 100 เยน เศษที่เหลือจะทอนให้เป็นเงินไทย ถ้าเพื่อนของยุวดีมีเงินบาทที่จะแลกคืน 14,500 บาท เขาจะได้เงินเยนคืนกี่ร้อยเยนและเหลือเป็นเงินไทยเท่าไร

ซื้อสินค้า

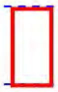
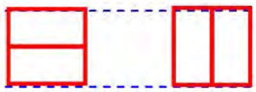
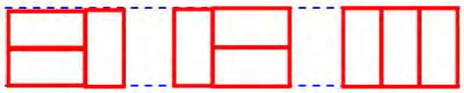
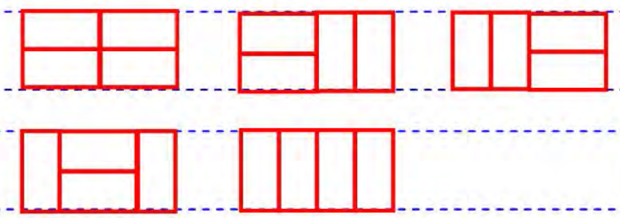
ให้นักเรียนแสดงแนวคิดประกอบการหาคำตอบต่อไปนี้

1. ยุวดีซื้อร่ม 1 คัน ราคา 80 บาท และซื้อผ้าเช็ดตัว 1 ผืน ราคา 140 บาท ถ้ายุวดีให้เงินผู้ขายเป็นธนบัตรฉบับละ 500 บาท ผู้ขายจะทอนเงินเป็นธนบัตรที่มีมูลค่ามากกว่า 10 บาท ให้ยุวดีได้อย่างไรบ้าง

2. เพื่อนของยุวดีซื้อเสื้อ 1 ตัว ราคา 230 บาท ถ้าเธอจ่ายเงินเป็นธนบัตรที่มีมูลค่ามากกว่า 10 บาท โดยไม่ต้องให้ทอนเงิน เธอจะมีวิธีจ่ายเงินเป็นธนบัตรได้อย่างไรบ้าง

เรียงอิฐปูพื้น

กำหนดอิฐปูพื้นให้แต่ละก้อนมีความกว้าง 1 หน่วยและความยาว 2 หน่วย ให้นักเรียนศึกษาการเรียงอิฐตามรูปแบบที่ปรากฏในตารางข้างล่าง แล้วเขียนรูปการวางอิฐ 5 ก้อนลงในรางรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากซึ่งกว้าง 2 หน่วย ให้ได้รูปแบบต่างกันมากที่สุด

จำนวนอิฐ (ก้อน)	รูปแบบการเรียงอิฐ	จำนวนรูปแบบ
1		1
2		2
3		3
4		5
5		

ในการเรียงอิฐ 5 ก้อน นักเรียนมีระบบการเรียงที่ไม่ทำให้สับสนและได้ครบทุกกรณีหรือไม่ ถ้ามี เป็นอย่างไร จงอธิบาย

ถ้ามีอิฐเป็นจำนวนมากขึ้น อาจใช้การวิเคราะห์และแจกแจงกรณีดังตัวอย่าง

จำนวนอิฐ (ก้อน)	จำนวนอิฐที่วาง		การเรียง		จำนวนรูปแบบ	รวม
	แนวนอน	แนวตั้ง	เป็นไปไม่ได้	เป็นไปได้		
1	1	0	✓		0	
	0	1		✓	1	1
2	2	0		✓	1	
	1	1	✓		0	
	0	2		✓	1	2
3	3	0	✓		0	
	2	1		✓	2	
	1	2	✓		0	
	0	3		✓	1	3
4	4	0		✓	1	
	3	1	✓		0	
	2	2		✓	3	
	1	3	✓		0	
	0	4		✓	1	5
5						
6						

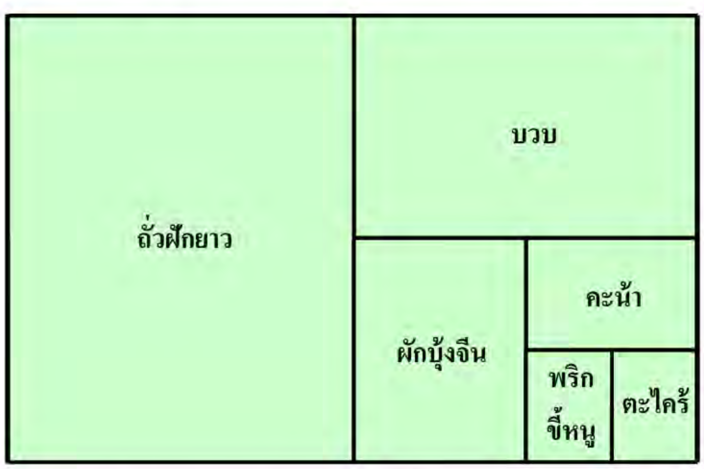
1. ให้นักเรียนเขียนจำนวนรูปแบบการเรียงอิฐ 5 ก้อนทุกกรณีในตารางข้างบน
2. ให้นักเรียนเขียนจำนวนรูปแบบการเรียงอิฐ 6 ก้อนทุกกรณีในตารางข้างบน

จากกิจกรรม “แลกเงิน” “ซื้อสินค้า” และ “เรียงอิฐปูพื้น” นักเรียนจะเห็นว่าคำตอบที่เป็นไปได้มีหลายคำตอบ เพื่อให้หาคำตอบได้ครบถ้วน เราจำเป็นต้องแจกแจงกรณีต่าง ๆ ที่เป็นไปได้ทั้งหมดอย่างเป็นระบบ เราเรียกวิธีการแก้ปัญหาในลักษณะนี้ว่า **การแจกแจงกรณี**

แบ่งที่ดินปลูกผัก

ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้

นายเทพไทมีที่ดินว่างอยู่หลังบ้านเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า เขาวางแผนจะปลูกพืชผักสวนครัวปลอดสารพิษในที่ดินนั้น โดยใช้การแบ่งครึ่งที่ดินไปเรื่อย ๆ เพื่อปลูกถั่วฝักยาว บวบ ผักบุ้งจีน คะน้า พริกขี้หนู และตะไคร้ ดังแผนภาพ พื้นที่ของที่ดินที่ใช้ปลูกผักคะน้าคิดเป็น 20 ตารางเมตร



ให้นักเรียนบอกแนวคิดในการตอบคำถามต่อไปนี้
1. พื้นที่ของที่ดินที่ใช้ปลูกพืชผักสวนครัวแต่ละชนิดเป็นเท่าไร
2. พื้นที่ทั้งหมดที่ใช้ปลูกพืชผักสวนครัวเท่ากับกี่ตารางเมตร

มีลูกอมอยู่กี่เม็ด

กนกมีลูกอมอยู่จำนวนหนึ่ง ได้แบ่งให้เพื่อนสามคนดังนี้ ให้เพื่อนคนที่หนึ่งครึ่งหนึ่งของที่มีและแถมอีกหนึ่งเม็ด ให้เพื่อนคนที่สองครึ่งหนึ่งของที่เหลือและแถมอีกหนึ่งเม็ด แล้วให้เพื่อนคนที่สามครึ่งหนึ่งของที่เหลือและแถมอีกหนึ่งเม็ด ปรากฏว่าสุดท้ายกนกมีลูกอมเหลืออยู่หนึ่งเม็ด

ให้นักเรียนบอกแนวคิดในการตอบคำถามต่อไปนี้

1. เพื่อนคนที่สามได้ลูกอมกี่เม็ด
2. เพื่อนคนที่สองได้ลูกอมกี่เม็ด
3. เพื่อนคนที่หนึ่งได้ลูกอมกี่เม็ด
4. ลูกอมทั้งหมดมีกี่เม็ด

การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมักจะเริ่มต้นด้วยการพิจารณาสิ่งที่กำหนดให้ แล้วใช้ความรู้ที่เกี่ยวข้องมาแก้ปัญหา แต่วิธีการดังกล่าวอาจไม่สะดวก เช่นในกิจกรรม “แบ่งที่ดินปลูกผัก” และ “มีลูกอมอยู่กี่เม็ด” นักเรียนจะพบว่า ถ้านักเรียนเริ่มต้นโดยพิจารณาผลที่เกิดขึ้นแล้วคิดย้อนกลับสู่สิ่งที่กำหนดให้ ก็จะได้คำตอบ เราเรียกวิธีการแก้ปัญหาลักษณะนี้ว่า **การคิดย้อนกลับ** หรือ **การคิดถอยหลัง**

การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ยังมีอีกหลายวิธี บางวิธีนักเรียนอาจเคยนำมาใช้แล้ว เช่น การลองแทนค่า (ลองผิดลองถูก) การเดาและตรวจสอบ และการสร้างแบบจำลอง การได้ฝึกหัดแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์บ่อย ๆ จะช่วยให้นักเรียนมีไหวพริบและทักษะในการแก้ปัญหามากขึ้น

บทที่ 2

จำนวนและตัวเลข

กระดูกพบที่อิชันโก(*Ishango*) ในประเทศแซร์ (*Zaire*) แสดงรอยขีดบันทึกจำนวน

ในช่วงเวลาประมาณ 30,000 ปีก่อนคริสต์ศักราช มีร่องรอยหลักฐานทางโบราณคดีบ่งบอกว่ามีมนุษย์อาศัยอยู่ในถ้ำ มนุษย์เหล่านี้ขีดและเขียนภาพที่ผนังถ้ำ ซึ่งสันนิษฐานว่าเป็นการบอกจำนวนสมาชิกในครอบครัว บอกจำนวนสัตว์ที่ล่ามาได้หรือบอกจำนวนสัตว์ที่เลี้ยงไว้ สันนิษฐานว่าการนับสิ่งของในสมัยเริ่มแรกนั้นใช้วิธีจับคู่สิ่งของแบบหนึ่งต่อหนึ่งกับสิ่งต่าง ๆ เช่น จับคู่กับนิ้วมือ จับคู่กับก้อนหิน จับคู่กับท่อนไม้ จับคู่กับปมเชือก หรือจับคู่กับรอยขีดบนหินหรือรอยขีดบนกระดูก

จากความจำเป็นของมนุษย์ในการสื่อสารบอกปริมาณ มนุษย์จึงมีแนวคิดเรื่อง**จำนวน** (number) เพื่อบอกปริมาณว่ามีมากหรือน้อย เช่น มีคนกลุ่มหนึ่งกับวัวฝูงหนึ่ง ถ้าจับคู่คนหนึ่งคนกับวัวหนึ่งตัวได้หมดพอดี จะถือว่าคนกลุ่มนี้กับวัวฝูงนี้มีจำนวนเท่ากัน แต่ถ้าจับคู่แล้วไม่พอดี ก็แสดงว่าจำนวนคนกับจำนวนวัวไม่เท่ากัน

จำนวนเป็นนามธรรมที่มนุษย์ทุกชาติทุกภาษามีความเข้าใจตรงกัน แต่มีการใช้ภาษาเพื่อบอกจำนวนเดียวกันแตกต่างกันออกไป เช่น มีดอกไม้วางเรียงกัน ดังนี้

ในการบอกจำนวนดอกไม้ข้างต้น

ภาษาไทยใช้คำว่า **สอง** เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ ๒

ภาษาอังกฤษใช้คำว่า two เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ 2

ภาษาจีนใช้คำว่า 二 (เอ้อ) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ 二

สัญลักษณ์ที่ใช้เขียนแทนจำนวน เรียกว่า **ตัวเลข** (numeral)

ตัวเลขอียิปต์ ตัวเลขบาบิโลน ตัวเลขโรมัน และตัวเลขฮินดู เป็นตัวเลขที่ใช้แพร่หลายในสมัยโบราณ ปัจจุบันตัวเลขที่ใช้กันมากที่สุดเป็นภาษาสากลคือ ตัวเลขฮินดูอารบิก ส่วนตัวเลขโรมันมีใช้กันอยู่บ้างในบางโอกาส

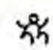
สำหรับตัวเลขไทยนั้น มีหลักฐานปรากฏว่า พ่อขุนรามคำแหงมหาราชได้ทรงประดิษฐ์ขึ้นพร้อมกับตัวอักษรไทย มีบันทึกอยู่ในศิลาจารึกหลักที่หนึ่ง

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของตัวเลขชนิดต่าง ๆ เขียนเปรียบเทียบกัน ตัวเลขที่อยู่ในช่องเดียวกันใช้แทนจำนวนเดียวกัน

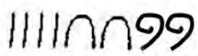
ตัวเลขบาบิโลน	𒁹	𒈫	𒐈	𒐉	𒐊	𒐋	𒑂	𒑄	𒑆	𒌋	𒁹𒐏
ตัวเลขอียิปต์	|	||	|||	||||	|||||	||||| |	||||| ||	||||| |||	||||| ||||	∩	𓍢
ตัวเลขมายัน	𝋡	𝋢	𝋣	𝋤	𝋥	𝋦	𝋧	𝋨	𝋩	𝋪	𝋥𝋠
ตัวเลขจีน	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	百
ตัวเลขโรมัน	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	C
ตัวเลขฮินดู	१	२	३	४	५	६	७	८	९	१०	१००
ตัวเลขฮินดูอารบิก	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100
ตัวเลขไทย	๑	๒	๓	๔	๕	๖	๗	๘	๙	๑๐	๑๐๐

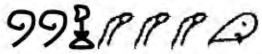
ตัวเลขอียิปต์

ในสมัยโบราณชาวอียิปต์เป็นชาติที่เจริญรุ่งเรืองทางด้านศิลปะวิทยาการ รู้จักบันทึกจำนวน โดยใช้ภาพเป็นสัญลักษณ์ ดังนี้

ตัวเลขอียิปต์	ขีดหรือเสา	 รูปเกือกม้า	 รูปม้วนกระดาษ	 รูปดอกบัว	 รูปนิ้วกำลังชี้	 รูปปลา	 รูปคนกำลังตกใจ
แทนจำนวน	หนึ่ง	สิบ	หนึ่งร้อย	หนึ่งพัน	หนึ่งหมื่น	หนึ่งแสน	หนึ่งล้าน

การเขียนตัวเลขอียิปต์แทนจำนวนใช้วิธีเขียนตัวเลขเรียงกัน ซึ่งจะเรียงกันอย่างไรก็ได้ แล้วนำค่ามาบวกกัน เช่น

 แทนจำนวน สองร้อยยี่สิบสี่

 แทนจำนวน หนึ่งแสนสามหมื่นหนึ่งพันสองร้อย

 แทนจำนวน สองล้านหนึ่งหมื่นสามพันสี่ร้อยสิบสาม

ตัวเลขบาบิโลน

แผ่นดินเหนียวจารึกตัวเลขบาบิโลน

ประมาณ 3,000 – 2,000 ปีก่อนคริสต์ศักราช มีจารึกที่แสดงว่า ชาวบาบิโลนใช้สัญลักษณ์ที่มีลักษณะคล้ายรูปลิ่ม (∇) ซึ่งเป็นผลจากการบันทึกรอยของวัตถุที่มีหน้าตัดเป็นรูปคล้ายลิ่มแทนจำนวน ได้แก่

ตัวเลขบาบิโลน	∇	∇∇	∇∇∇	∇∇∇ ∇	∇∇∇ ∇∇	∇∇∇ ∇∇∇	∇∇∇ ∇∇∇ ∇	∇∇∇ ∇∇∇ ∇∇	∇∇∇ ∇∇∇ ∇∇∇	⟨
แทนจำนวน	หนึ่ง	สอง	สาม	สี่	ห้า	หก	เจ็ด	แปด	เก้า	สิบ

ชาวบาบิโลนเป็นผู้เริ่มต้นแนวคิดเกี่ยวกับค่าประจำหลัก คือ ใช้สัญลักษณ์ตัวเดียวกันแทนจำนวนที่ต่างกัน ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับตำแหน่งของตัวเลขนั้น ๆ

สัญลักษณ์ ∇ อาจหมายถึง $1,\ 60,\ 60^2,\ 60^3,\ \ldots$

สัญลักษณ์ ⟨ อาจหมายถึง $10,\ 10 \times 60,\ 10 \times 60^2,\ 10 \times 60^3,\ \ldots$

ตัวอย่างเช่น

⟨∇ อาจหมายถึง $10 + 1$ ซึ่งเท่ากับ 11 หรือ $600 + 60$
ซึ่งเท่ากับ 660 หรืออื่น ๆ

2.1 ระบบตัวเลขโรมัน

ส่วนหนึ่งของเสาหิน Columna Rostrata ซึ่งพบที่กรุงโรมมีตัวเลขโรมันจารึกอยู่

ประมาณ 300 – 100 ปีก่อนคริสต์ศักราช ชาวโรมันนำตัวหนังสือกรีกมาดัดแปลงเป็นตัวเลขโรมัน ซึ่งเป็นสัญลักษณ์พื้นฐานเจ็ดตัวดังนี้

ตัวเลขโรมัน	I	V	X	L	C	D	M
ตัวเลขฮินดูอารบิก	1	5	10	50	100	500	1,000

เมื่อต้องการเขียนแทนจำนวนอื่น ๆ นอกเหนือจากที่ปรากฏในตารางก็เขียนสัญลักษณ์ข้างต้นเรียงกันโดยใช้หลักการเพิ่มและการลด หลักการเพิ่ม คือ เขียนตัวเลขเรียงกันตามลำดับจากค่ามากไปหาค่าน้อย ตัวเลขดังกล่าวจะแทนจำนวนที่ได้จากการบวกค่าของตัวเลขแต่ละตัว ดังตัวอย่าง

VI แทน 5 + 1 หรือ 6

XVII แทน 10 + 5 + 1 + 1 หรือ 17

CLXX แทน 100 + 50 + 10 + 10 หรือ 170

ในการเขียนตัวเลขโรมันแทนเก้า จะไม่เขียน VIIII แต่จะเขียนแทนด้วย IX ซึ่งแทน 10 – 1 เป็นการเขียนตัวเลขโดยใช้หลักการลด กล่าวคือจะเขียนตัวเลขที่มีค่าน้อยกว่าไว้ข้างหน้าตัวเลขที่มีค่ามากกว่า แล้วนำค่าของตัวเลขทั้งสองมาลบกัน การเขียนตัวเลขโดยใช้หลักการลด มีเงื่อนไขตามหลักเกณฑ์ต่อไปนี้

1. ตัวเลขที่ใช้เป็นตัวลบได้แก่ I, X และ C เท่านั้น
2. ตัวเลขที่อยู่ข้างหน้าของ X หรือ V ได้แก่ I เพียงตัวเดียว

   เช่น IV แทน 4

   IX แทน 9
3. ตัวเลขที่อยู่ข้างหน้าของ L หรือ C ได้แก่ X เพียงตัวเดียว

   เช่น XL แทน 40

   XC แทน 90
4. ตัวเลขที่อยู่ข้างหน้าของ D หรือ M ได้แก่ C เพียงตัวเดียว

   เช่น CD แทน 400

   CM แทน 900

ให้สังเกตว่า ตัวลบ I, X หรือ C จะต้องใช้คู่กับตัวเลขเฉพาะของแต่ละกลุ่มตามหลักเกณฑ์ข้างบนนี้เท่านั้น เช่น

499 ให้เขียนเป็น 400 + 90 + 9 ซึ่งเท่ากับ CD + XC + IX

จึงแทนด้วย CDXCIX

944 ให้เขียนเป็น 900 + 40 + 4 ซึ่งเท่ากับ CM + XL + IV

จึงแทนด้วย CMXLIV

แต่ 99 **ไม่**เขียนแทนด้วย IC

499 **ไม่**เขียนแทนด้วย ID

950 **ไม่**เขียนแทนด้วย LM

ในระบบตัวเลขโรมันยังมีสัญลักษณ์แทนจำนวนที่มีค่ามาก ๆ ซึ่งเป็นสัญลักษณ์ที่ได้จากการเขียนเครื่องหมาย – บนสัญลักษณ์พื้นฐานเพียงหกตัวดังนี้ $\overline{\mathrm{V}}$, $\overline{\mathrm{X}}$, $\overline{\mathrm{L}}$, $\overline{\mathrm{C}}$, $\overline{\mathrm{D}}$ และ $\overline{\mathrm{M}}$ สัญลักษณ์ใหม่จะแทนตัวเลขที่มีค่า 1,000 เท่าของตัวเดิม ดังนี้

$\overline{\mathrm{V}}$ แทน 5,000	$\overline{\mathrm{X}}$ แทน 10,000	$\overline{\mathrm{L}}$ แทน 50,000
$\overline{\mathrm{C}}$ แทน 100,000	$\overline{\mathrm{D}}$ แทน 500,000	$\overline{\mathrm{M}}$ แทน 1,000,000

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนตัวเลขโรมันแทน 296

วิธีทำ 296 = 200 + 90 + 6

= CC + XC + VI

= CCXCVI

ตอบ CCXCVI

ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนตัวเลขฮินดูอารบิกแทน MMDXXIV

วิธีทำ MMDXXIV = MM + D + XX + IV

= 2,000 + 500 + 20 + 4

= 2,524

ตอบ 2,524

ตัวเลขโรมันไม่สะดวกที่จะนำมาใช้ในการคิดคำนวณ จึงมีผู้นิยมใช้น้อย ในปัจจุบันยังมีการใช้ตัวเลขโรมันอยู่บ้าง เช่น บนหน้าปัดนาฬิกา การบอกเลขหน้าหนังสือหน้าต้น ๆ และการบอกลำดับ

แบบฝึกหัด 2.1

1. จงเขียนเป็นตัวเลขโรมัน

1) 11	2) 28
3) 126	4) 140
5) 319	6) 450
7) 749	8) 1,983
9) 2,526	10) 3,891

2. จงเขียนเป็นตัวเลขฮินดูอารบิก

1) CXXIV	2) CMLXV
3) CCXI	4) MXL
5) MMCDXLI	6) MCMXCIII
7) CCLXII	8) CDXLIV
9) DXLV	10) MMMCMLXXIV

3. จงเขียนตัวเลขโรมันแสดงจำนวนตั้งแต่

1) 15 ถึง 20	2) 40 ถึง 50
3) 395 ถึง 400	4) 1,239 ถึง 1,244

ชวนคิด

กรุงโรมของชาวโรมัน

กรุงโรมสร้างขึ้นครั้งแรกเมื่อประมาณ DCCLII ปีก่อนคริสต์ศักราช สิ่งก่อสร้างที่มีชื่อเสียงอย่างหนึ่งในกรุงโรม ได้แก่ โคโลเซียม (Colosseum) สร้างขึ้นประมาณ ค.ศ. LXXV ในสมัยโบราณใช้เป็นสถานที่สำหรับประลองยุทธ์ ตลอดจนการต่อสู้ระหว่างคนกับสัตว์ร้ายต่าง ๆ โคโลเซียมมีขนาดใหญ่มากจุคนได้ประมาณ $\overline{X}\,\overline{L}\,\overline{V}$ คน มีห้องใต้ดินขนาดใหญ่พื้นที่ประมาณ DC เอเคอร์ ซึ่งใช้เป็นที่สำหรับขังสัตว์ และขังนักโทษ

1. กรุงโรมมีอายุประมาณกี่ปี
2. โคโลเซียมมีอายุประมาณกี่ปี
3. โคโลเซียมจุคนได้ประมาณเท่าใด
4. ห้องใต้ดินของโคโลเซียมมีพื้นที่ประมาณกี่ไร่

(1 เอเคอร์ ประมาณ 4,046.85 ตารางเมตร และ 1,600 ตารางเมตร เท่ากับ 1 ไร่)

2.2 ระบบตัวเลขฐานต่าง ๆ

1. ระบบตัวเลขฐานสิบ

ระบบตัวเลขฮินดูอารบิกเป็นระบบตัวเลขฐานสิบ ได้ชื่อมาจากชนชาติฮินดูซึ่งเป็นผู้คิดระบบนี้ขึ้น และชนชาติอาหรับซึ่งเดินทางติดต่อค้าขายระหว่างอินเดียและยุโรปได้นำระบบตัวเลขนี้ไปเผยแพร่ในยุโรป หลักฐานที่เก่าแก่ที่สุดซึ่งตัวเลขระบบนี้ปรากฏอยู่คือ เสาหินในประเทศอินเดียซึ่งเชื่อว่าสร้างในสมัยพระเจ้าอโศกมหาราช ประมาณ 250 ปีก่อนคริสต์ศักราช ในสมัยต้น ๆ ยังไม่มีการใช้ตัวเลข *ศูนย์* อย่างไรก็ตามหลักฐานการใช้ตัวเลข ศูนย์ ปรากฏในหนังสือซึ่งเขียนเมื่อประมาณ ค.ศ. 800

สัญลักษณ์หรือ**เลขโดด**ที่ใช้ในระบบตัวเลขฐานสิบมีสิบตัวคือ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 และ 9 ตัวเลขเหล่านี้ใช้เขียนแทนจำนวนใดขึ้นอยู่กับหลักที่ปรากฏอยู่และค่าประจำหลักนั้น หลักและค่าประจำหลักในระบบตัวเลขฐานสิบแสดงดังตารางต่อไปนี้

ตารางแสดงหลักและค่าประจำหลักในระบบตัวเลขฐานสิบ

หลักที่	…	เจ็ด	หก	ห้า	สี่	สาม	สอง	หนึ่ง
ค่าประจำหลัก	…	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	1

การเขียนตัวเลขแทนจำนวนในระบบตัวเลขฐานสิบ เช่น 4,821,309 มีความหมายดังนี้

$$4821309 = (4\times10^6) + (8\times10^5) + (2\times10^4) + (1\times10^3) + (3\times10^2) + (0\times10^1) + (9\times1)$$

เรียกประโยคข้างต้นว่าการเขียน 4,821,309 ในรูปกระจาย ในที่นี้

9 อยู่ในหลักที่หนึ่ง 9 มีค่าเป็น 9×1

0 อยู่ในหลักที่สอง 0 มีค่าเป็น 0×10^1

3 อยู่ในหลักที่สาม 3 มีค่าเป็น 3×10^2

1 อยู่ในหลักที่สี่ 1 มีค่าเป็น 1×10^3

2 อยู่ในหลักที่ห้า 2 มีค่าเป็น 2×10^4

8 อยู่ในหลักที่หก 8 มีค่าเป็น 8×10^5

4 อยู่ในหลักที่เจ็ด 4 มีค่าเป็น 4×10^6

แสดงค่าของเลขโดดใน 4,821,309 ในตารางได้ดังนี้

หลักที่	เจ็ด	หก	ห้า	สี่	สาม	สอง	หนึ่ง
ค่าประจำหลัก	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	1
เลขโดด	4	8	2	1	3	0	9
ค่าของเลขโดด	4×10^6	8×10^5	2×10^4	1×10^3	3×10^2	0×10^1	9×1

แบบฝึกหัด 2.2 ก

1. จงบอกว่า 5 ในแต่ละจำนวนต่อไปนี้มีค่าเท่าไร

    1) 5   2) 56

    3) 85   4) 135

    5) 253   6) 5,138

2. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปกระจาย

    1) 21   2) 336

    3) 4,073   4) 10,180

3. จงเขียนจำนวนแทนรูปกระจายต่อไปนี้

    1) $(4 \times 10^2) + 3$

    2) $(2 \times 10^3) + (7 \times 10)$

    3) $(7 \times 10^3) + (4 \times 10^2) + (0 \times 10) + 3$

    4) $(5 \times 10^4) + (6 \times 10^2) + (9 \times 1)$

    5) $(7 \times 10^4) + (5 \times 10^3) + (7 \times 10^2)$

    6) $(5 \times 10^6) + (2 \times 10^4) + (8 \times 10^3) + (7 \times 10)$

    7) $(2 \times 10^5) + (5 \times 10^3) + (8 \times 1)$

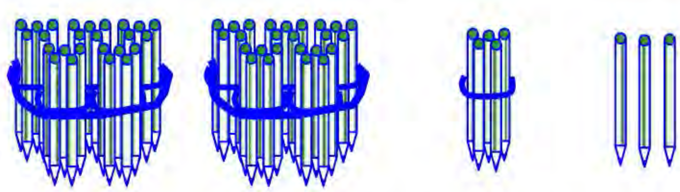
2. ระบบตัวเลขฐานห้า

การนับในระบบตัวเลขฐานสิบ มีหลักเกณฑ์ว่าเมื่อนับสิ่งของที่มีจำนวนไม่ถึงสิบจะใช้เลขโดดสิบตัวคือ 0, 1, ... หรือ 9 เป็นสัญลักษณ์เขียนบอกปริมาณของสิ่งนั้น เมื่อนับได้ครบสิบก็จะรวมสิ่งของนั้นเป็น 1 มัดหรือ 1 กอง และใช้เลขโดด 0 กับ 1 เขียนเป็น 10 แสดงปริมาณสิบ เมื่อนับต่อไปได้ครบ 10 มัดหรือ 10 กอง ก็จะรวมสิ่งของที่นับได้เป็น 1 มัดใหญ่หรือ 1 กองใหญ่และทำเช่นนี้เรื่อย ๆ ไป ในระบบตัวเลขฐานสิบจึงมีค่าประจำหลักเป็น $1,\ 10,\ 10 \times 10,\ 10 \times 10 \times 10,\ \ldots$ หรือ $1,\ 10^1,\ 10^2,\ 10^3,\ \ldots$

ในระบบตัวเลขฐานห้าก็มีแนวคิดเกี่ยวกับการนับสิ่งของเช่นเดียวกันกับการนับในระบบตัวเลขฐานสิบ คือมีหลักเกณฑ์ว่าเมื่อนับสิ่งของที่มีจำนวนไม่ถึงห้า จะใช้เลขโดดห้าตัวคือ 0, 1, 2, 3 หรือ 4 เป็นสัญลักษณ์เขียนบอกปริมาณของสิ่งนั้น เมื่อนับได้ครบห้าก็จะมัดเป็น 1 มัดหรือรวมเป็น 1 กอง และใช้เลขโดด 0 กับ 1 เขียนเป็น $10_{\text{ห้า}}$ แสดงปริมาณห้า ถ้าสิ่งของที่นับมีจำนวนมาก ทุก ๆ ครั้งที่นับได้ครบห้า ก็จะมัดเป็น 1 มัดหรือกองเป็น 1 กองที่ใหญ่ขึ้น และทำเช่นนี้เรื่อย ๆ ไป ในระบบตัวเลขฐานห้าจึงมีค่าประจำหลักเป็น $1,\ 5,\ 5 \times 5,\ 5 \times 5 \times 5,\ \ldots$ หรือ $1,\ 5^1,\ 5^2,\ 5^3,\ \ldots$

ในระบบตัวเลขฐานห้าจะเขียน **ห้า** กำกับไว้ที่ตัวเลขเช่น $12_{\text{ห้า}}$ อ่านว่า หนึ่งสองฐานห้า $3142_{\text{ห้า}}$ อ่านว่า สามหนึ่งสี่สองฐานห้า ทั้งนี้เพื่อให้มีความหมายแตกต่างไปจากตัวเลขในระบบตัวเลขฐานสิบ *หลักเกณฑ์การเขียนและการอ่านตัวเลขดังแสดงมานี้จะใช้กับการเขียนและการอ่านตัวเลขในระบบตัวเลขทุกฐานที่ไม่ใช่ฐานสิบ*

ถ้าเรามีดินสออยู่จำนวนหนึ่งซึ่งมัดได้ดังรูป



จำนวนดินสอในภาพนี้เขียนแทนด้วย $213_{\text{ห้า}}$ หมายถึงมีดินสอมัดละ 25 แท่งอยู่ 2 มัด มัดละ 5 แท่ง 1 มัด และเศษอีก 3 แท่ง

เมื่อนำดินสอมารวมกันทั้งหมดจะได้จำนวนดินสอที่เขียนอยู่ในระบบตัวเลขฐานสิบ ดังนี้

$$
\begin{aligned}
(2 \times 25) + (1 \times 5) + 3 &= 50 + 5 + 3 \\
&= 58
\end{aligned}
$$

หลักและค่าประจำหลักในระบบตัวเลขฐานห้าแสดงดังตารางต่อไปนี้

ตารางแสดงหลักและค่าประจำหลักในระบบตัวเลขฐานห้า

หลักที่	...	หก	ห้า	สี่	สาม	สอง	หนึ่ง
ค่าประจำหลัก	...	5^5	5^4	5^3	5^2	5^1	1

การเขียนตัวเลขแทนจำนวนในระบบตัวเลขฐานห้า เช่น $3012_{\text{ห้า}}$ มีความหมายดังนี้

$3012_{\text{ห้า}} = (3 \times 5^3) + (0 \times 5^2) + (1 \times 5^1) + (2 \times 1)$

เรียกประโยคข้างต้นว่าการเขียน $3012_{\text{ห้า}}$ ในรูปกระจาย ในที่นี้

2 อยู่ในหลักที่หนึ่ง 2 มีค่าเป็น 2×1

1 อยู่ในหลักที่สอง 1 มีค่าเป็น 1×5^1

0 อยู่ในหลักที่สาม 0 มีค่าเป็น 0×5^2

3 อยู่ในหลักที่สี่ 3 มีค่าเป็น 3×5^3

แสดงค่าของเลขโดดใน $3012_{\text{ห้า}}$ ในตารางได้ดังนี้

หลักที่	สี่	สาม	สอง	หนึ่ง
ค่าประจำหลัก	5^3	5^2	5^1	1
เลขโดด	3	0	1	2
ค่าของเลขโดด	3×5^3	0×5^2	1×5^1	2×1

ผลลัพธ์ที่หาได้จาก $(3 \times 5^3) + (0 \times 5^2) + (1 \times 5^1) + (2 \times 1)$ คือ 382 ซึ่งเป็นค่าของ $3012_{\text{ห้า}}$ ที่เขียนในระบบตัวเลขฐานสิบ

นั่นคือ $3012_{\text{ห้า}} = 382$

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียน $1234_{\text{ห้า}}$ ให้อยู่ในระบบตัวเลขฐานสิบ

วิธีทำ $1234_{\text{ห้า}} = (1 \times 5^3) + (2 \times 5^2) + (3 \times 5) + (4 \times 1)$

$= (1 \times 125) + (2 \times 25) + (3 \times 5) + (4 \times 1)$

$= 125 + 50 + 15 + 4$

$= 194$

ตอบ 194

การเขียนตัวเลขในระบบตัวเลขฐานสิบให้อยู่ในระบบฐานห้าทำได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างการเขียน 748 ให้อยู่ในระบบตัวเลขฐานห้า

พิจารณาการกระจาย 748 ให้อยู่ในระบบตัวเลขฐานห้า

หลักที่	หก	ห้า	สี่	สาม	สอง	หนึ่ง
ค่าประจำหลัก	5^5 (3,125)	5^4 (625)	5^3 (125)	5^2 (25)	5^1 (5)	1 1
เลขโดด		1	0	4	4	3

อธิบายตารางข้างต้นได้ดังนี้

748 ⟵ จัด 748 ให้อยู่ในหลักที่ห้าได้ 1 ครั้งเหลืออีก 123 เขียน 1 ในช่องหลักที่ห้า

$(1 \times 625) \longrightarrow$ $\underline{625}$ −

123 ⟵ จัด 123 ให้อยู่ในหลักที่สี่ไม่ได้ เพราะมีค่าน้อยกว่าค่าประจำหลัก เขียน 0

$(4 \times 25) \longrightarrow$ $\underline{100}$ − ในช่องหลักที่สี่ จัด 123 ให้อยู่ในหลักที่สามได้ 4 ครั้ง เหลืออีก 23 เขียน 4 ในช่องหลักที่สาม

23 ⟵ จัด 23 ให้อยู่ในหลักที่สองได้ 4 ครั้งเหลืออีก 3 เขียน 4 ในช่องหลักที่สอง

$(4 \times 5) \longrightarrow$ $\underline{20}$ −

$\underline{3}$ จัด 3 ให้อยู่ในหลักที่หนึ่งได้ 3 ครั้งพอดี เขียน 3 ในช่องหลักที่หนึ่ง

จากการพิจารณาข้างต้น จะได้

$$\begin{aligned} 748 &= (1 \times 625) + (0 \times 125) + (4 \times 25) + (4 \times 5) + (3 \times 1) \\ &= (1 \times 5^4) + (0 \times 5^3) + (4 \times 5^2) + (4 \times 5^1) + (3 \times 1) \\ &= 10443_{\text{ห้า}} \end{aligned}$$

สังเกตว่า $10443_{\text{ห้า}}$ ได้มาจากการนำเลขโดดที่อยู่ในหลักต่าง ๆ มาเขียนเรียงกันจากหลักที่มีค่ามากไปหาหลักที่มีค่าน้อยตามลำดับให้ครบทุกหลัก

ในการเขียน 748 ให้อยู่ในระบบตัวเลขฐานห้า เพื่อความสะดวกและรวดเร็วให้หาร 748 ด้วย 5 ดังนี้

5) 748

5) 149 เศษ 3

5) 29 เศษ 4

5) 5 เศษ 4

1 เศษ 0

ดังนั้น 748 = $10443_{\text{ห้า}}$

สังเกตว่า $10443_{\text{ห้า}}$ ได้มาจากการเรียงย้อนกลับผลลัพธ์สุดท้ายและเศษจากการหารในแต่ละขั้น

ตัวอย่างที่ 2 จงเขียน 385 ให้อยู่ในระบบตัวเลขฐานห้า

วิธีทำ หาร 385 ด้วย 5 ดังนี้

5) 385

5) 77 เศษ 0

5) 15 เศษ 2

3 เศษ 0

ดังนั้น 385 = $3020_{\text{ห้า}}$

ตอบ $3020_{\text{ห้า}}$

แบบฝึกหัด 2.2 ข

1. จงบอกว่า 3 ในแต่ละจำนวนต่อไปนี้มีค่าเท่าไร

1) $430_{\text{ห้า}}$	2) $1312_{\text{ห้า}}$
3) $2341_{\text{ห้า}}$	4) $23024_{\text{ห้า}}$

2. ค่าของ 2 และ 4 ในแต่ละจำนวนต่อไปนี้ต่างกันอยู่เท่าไร

1) $24_{\text{ห้า}}$	2) $402_{\text{ห้า}}$
3) $2143_{\text{ห้า}}$	4) $4210_{\text{ห้า}}$

3. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปกระจาย

1) $401_{\text{ห้า}}$	2) $4432_{\text{ห้า}}$
3) $20433_{\text{ห้า}}$	4) $31020_{\text{ห้า}}$

4. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในระบบตัวเลขฐานสิบ

1) $421_{\text{ห้า}}$	2) $3044_{\text{ห้า}}$
3) $11402_{\text{ห้า}}$	4) $40130_{\text{ห้า}}$

5. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในระบบตัวเลขฐานห้า

1) 149	2) 636
3) 862	4) 1,108
5) 3,055	6) 4,297

รู้หรือไม่

นักเรียนทราบหรือไม่ว่า จำนวนที่เขียนอยู่ในระบบตัวเลขฐานห้าในแต่ละข้อต่อไปนี้มีอย่างมากกี่จำนวน

1. จำนวนที่มีหนึ่งหลัก
2. จำนวนที่มีสองหลัก
3. จำนวนที่มีสามหลัก

3. ระบบตัวเลขฐานสอง

การเขียนตัวเลขในระบบตัวเลขฐานสองมีหลักการเช่นเดียวกับการเขียนตัวเลขในระบบตัวเลขฐานสิบและฐานห้า ในระบบตัวเลขฐานสองใช้เลขโดดเพียงสองตัว คือ 0 และ 1 ค่าประจำหลักอยู่ในรูปเลขยกกำลังที่มีฐานเป็น 2 หลักและค่าประจำหลักในระบบตัวเลขฐานสองแสดงดังตารางต่อไปนี้

ตารางแสดงหลักและค่าประจำหลักในระบบตัวเลขฐานสอง

หลักที่	...	เจ็ด	หก	ห้า	สี่	สาม	สอง	หนึ่ง
ค่าประจำหลัก	...	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	1

การเขียนตัวเลขแทนจำนวนในระบบตัวเลขฐานสอง เช่น $110101_{\text{สอง}}$ มีความหมายดังนี้

$110101_{\text{สอง}} \quad = \quad (1 \times 2^5) + (1 \times 2^4) + (0 \times 2^3) + (1 \times 2^2) + (0 \times 2^1) + (1 \times 1)$

เรียกประโยคข้างต้นว่า การเขียน $110101_{\text{สอง}}$ ในรูปกระจาย ในที่นี้

1 อยู่ในหลักที่หนึ่ง 1 มีค่าเป็น 1×1

0 อยู่ในหลักที่สอง 0 มีค่าเป็น 0×2^1

1 อยู่ในหลักที่สาม 1 มีค่าเป็น 1×2^2

0 อยู่ในหลักที่สี่ 0 มีค่าเป็น 0×2^3

1 อยู่ในหลักที่ห้า 1 มีค่าเป็น 1×2^4

1 อยู่ในหลักที่หก 1 มีค่าเป็น 1×2^5

แสดงค่าของเลขโดดใน $110101_{\text{สอง}}$ ในตารางได้ดังนี้

หลักที่	หก	ห้า	สี่	สาม	สอง	หนึ่ง
ค่าประจำหลัก	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	1
เลขโดด	1	1	0	1	0	1
ค่าของเลขโดด	1×2^5	1×2^4	0×2^3	1×2^2	0×2^1	1×1

ผลลัพธ์ที่หาได้จาก $(1 \times 2^5) + (1 \times 2^4) + (0 \times 2^3) + (1 \times 2^2) + (0 \times 2^1) + (1 \times 1)$ คือ 53 ซึ่งเป็นค่าของ $110101_{\text{สอง}}$ ที่เขียนในระบบตัวเลขฐานสิบ

นั่นคือ $110101_{\text{สอง}} = 53$

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียน $10100_{\text{สอง}}$ ให้อยู่ในระบบตัวเลขฐานสิบ

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
10100_{\text{สอง}} &= (1 \times 2^4) + (0 \times 2^3) + (1 \times 2^2) + (0 \times 2) + (0 \times 1) \\
&= (1 \times 16) + (0 \times 8) + (1 \times 4) + (0 \times 2) + (0 \times 1) \\
&= 16 + 0 + 4 + 0 + 0 \\
&= 20
\end{aligned}
$$

ตอบ 20

ตัวอย่างที่ 2 จงเขียน 130 ให้อยู่ในระบบตัวเลขฐานสอง

วิธีทำ หาร 130 ด้วย 2 ดังนี้

2) 130

2) 65 เศษ 0

2) 32 เศษ 1

2) 16 เศษ 0

2) 8 เศษ 0

2) 4 เศษ 0

2) 2 เศษ 0

1

ดังนั้น $130 = 1000010_{\text{สอง}}$

ตอบ $1000010_{\text{สอง}}$

แบบฝึกหัด 2.2 ค

1. จงบอกว่า 1 ที่ขีดเส้นใต้ในแต่ละจำนวนต่อไปนี้มีค่าเท่าไร

1) $\underline{1}01_{\text{สอง}}$ 2) $\underline{1}101_{\text{สอง}}$

3) $100\underline{1}11_{\text{สอง}}$ 4) $1\underline{1}01101_{\text{สอง}}$

2. ค่าของ 1 ที่ขีดเส้นใต้ในแต่ละจำนวนต่อไปนี้ต่างกันอยู่เท่าไร

1) $\underline{1}0\underline{1}_{\text{สอง}}$ 2) $\underline{1}\underline{1}01_{\text{สอง}}$

3) $\underline{1}\underline{1}001_{\text{สอง}}$ 4) $\underline{1}0\underline{1}101_{\text{สอง}}$

3. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปกระจาย

1) $1101_{\text{สอง}}$ 2) $10110_{\text{สอง}}$

3) $101001_{\text{สอง}}$ 4) $110000_{\text{สอง}}$

4. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในระบบตัวเลขฐานสิบ

1) $1011_{\text{สอง}}$ 2) $10001_{\text{สอง}}$

3) $11000_{\text{สอง}}$ 4) $101110_{\text{สอง}}$

5. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในระบบตัวเลขฐานสอง

1) 19 2) 36

3) 70 4) 150

5) 214 6) 300

6. นักเรียนเคยทราบการใช้ระบบตัวเลขฐานสองในที่ใดบ้าง

4. ระบบตัวเลขฐานสิบสอง

การเขียนตัวเลขในระบบตัวเลขฐานสิบสองมีหลักการเช่นเดียวกันกับการเขียนตัวเลขในระบบตัวเลขฐานต่าง ๆ ที่กล่าวมาแล้วข้างต้น ในระบบตัวเลขฐานสิบสองใช้เลขโดดสิบสองตัว แต่เรามีเลขโดดใช้เพียงสิบตัวคือ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 และ 9 จึงต้องเพิ่มสัญลักษณ์แทนเลขโดดอีกสองตัว ในที่นี้ใช้ A และ B แทน*สิบ*และ*สิบเอ็ด* ตามลำดับ ค่าประจำหลักอยู่ในรูปเลขยกกำลังที่มีฐานเป็น 12 หลักและค่าประจำหลักในระบบตัวเลขฐานสิบสองแสดงดังตารางต่อไปนี้

ตารางแสดงหลักและค่าประจำหลักในระบบตัวเลขฐานสิบสอง

หลักที่	…	เจ็ด	หก	ห้า	สี่	สาม	สอง	หนึ่ง
ค่าประจำหลัก	…	12^6	12^5	12^4	12^3	12^2	12^1	1

การเขียนตัวเลขแทนจำนวนในระบบตัวเลขฐานสิบสอง เช่น $4A0B3_{\text{สิบสอง}}$ มีความหมายดังนี้

$$4A0B3_{\text{สิบสอง}} = (4 \times 12^4) + (A \times 12^3) + (0 \times 12^2) + (B \times 12^1) + (3 \times 1)$$

เรียกประโยคข้างต้นว่าการเขียน $4A0B3_{\text{สิบสอง}}$ ในรูปกระจาย ในที่นี้

3	อยู่ในหลักที่หนึ่ง	3	มีค่าเป็น	3×1
B	อยู่ในหลักที่สอง	B	มีค่าเป็น	$B \times 12^1 = 11 \times 12^1$
0	อยู่ในหลักที่สาม	0	มีค่าเป็น	0×12^2
A	อยู่ในหลักที่สี่	A	มีค่าเป็น	$A \times 12^3 = 10 \times 12^3$
4	อยู่ในหลักที่ห้า	4	มีค่าเป็น	4×12^4

แสดงค่าของเลขโดดใน $4A0B3_{\text{สิบสอง}}$ ในตารางได้ดังนี้

หลักที่	ห้า	สี่	สาม	สอง	หนึ่ง
ค่าประจำหลัก	12^4	12^3	12^2	12^1	1
เลขโดด	4	A	0	B	1
ค่าของเลขโดด	4×12^4	10×12^3	0×12^2	11×12^1	3×1

ผลลัพธ์ที่ได้จาก $(4 \times 12^4) + (A \times 12^3) + (0 \times 12^2) + (B \times 12^1) + (3 \times 1)$ คือ 100,359 ซึ่งเป็นค่าของ $4A0B3_{\text{สิบสอง}}$ ที่เขียนในระบบตัวเลขฐานสิบ

นั่นคือ $4A0B3_{\text{สิบสอง}} = 100{,}359$

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียน $A90BB_{\text{สิบสอง}}$ ให้อยู่ในระบบตัวเลขฐานสิบ

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
A90BB_{\text{สิบสอง}} &= (A \times 12^4) + (9 \times 12^3) + (0 \times 12^2) + (B \times 12) + (B \times 1) \\
&= (10 \times 12^4) + (9 \times 12^3) + (0 \times 12^2) + (11 \times 12) + (11 \times 1) \\
&= (10 \times 20{,}736) + (9 \times 1{,}728) + (11 \times 12) + 11 \\
&= 207{,}360 + 15{,}552 + 132 + 11 \\
&= 223{,}055
\end{aligned}
$$

ตอบ 223,055

ตัวอย่างที่ 2 จงเขียน 3,275 ให้อยู่ในระบบตัวเลขฐานสิบสอง

วิธีทำ หาร 3,275 ด้วย 12 ดังนี้

12) 3,275

12) 272 เศษ B

12) 22 เศษ 8

1 เศษ A

ดังนั้น $3{,}275 = 1A8B_{\text{สิบสอง}}$

ตอบ $1A8B_{\text{สิบสอง}}$

แบบฝึกหัด 2.2 ง

1. จงบอกค่าของ A และ B ในแต่ละจำนวนต่อไปนี้
   1) $B93A_{\text{สิบสอง}}$　　2) $A2B90_{\text{สิบสอง}}$
   3) $AB930_{\text{สิบสอง}}$　　4) $BA009_{\text{สิบสอง}}$
2. ค่าของ A และ B ใน $2A0B01_{\text{สิบสอง}}$ ต่างกันอยู่เท่าไร
3. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปกระจาย
   1) $B3A_{\text{สิบสอง}}$　　2) $AA97_{\text{สิบสอง}}$
   3) $9A0B8_{\text{สิบสอง}}$　　4) $5A3B20_{\text{สิบสอง}}$
4. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในระบบตัวเลขฐานสิบ
   1) $51B_{\text{สิบสอง}}$　　2) $7A80_{\text{สิบสอง}}$
   3) $A0BB5_{\text{สิบสอง}}$　　4) $B00AA_{\text{สิบสอง}}$
5. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในระบบตัวเลขฐานสิบสอง
   1) 981　　2) 1,865
   3) 6,659　　4) 20,448
6. ในชีวิตประจำวันมีการใช้ระบบตัวเลขฐานสิบสองในเรื่องใดบ้าง

2.3 การเปลี่ยนฐานในระบบตัวเลข

ถ้าต้องการเปลี่ยนฐานที่กำหนดให้ เป็นฐานอื่นและฐานทั้งคู่ไม่ใช่ฐานสิบทำได้โดยเปลี่ยนตัวเลขที่กำหนดให้เป็นตัวเลขในระบบตัวเลขฐานสิบก่อน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียน $234_{\text{ห้า}}$ ให้อยู่ในระบบตัวเลขฐานสอง

วิธีทำ เปลี่ยน $234_{\text{ห้า}}$ ให้เป็นตัวเลขในระบบตัวเลขฐานสิบ

$$
\begin{aligned}
234_{\text{ห้า}} &= (2 \times 5^2) + (3 \times 5) + (4 \times 1) \\
&= 50 + 15 + 4 \\
&= 69
\end{aligned}
$$

เปลี่ยน 69 ให้เป็นตัวเลขในระบบตัวเลขฐานสอง

2) 69

2) 34 เศษ 1

2) 17 เศษ 0

2) 8 เศษ 1

2) 4 เศษ 0

2) 2 เศษ 0

1 เศษ 0

ดังนั้น $234_{\text{ห้า}} = 1000101_{\text{สอง}}$

ตอบ $1000101_{\text{สอง}}$

ตัวอย่างที่ 2 จงเขียน $1101101_{\text{สอง}}$ ให้อยู่ในระบบตัวเลขฐานห้า

วิธีทำ เปลี่ยน $1101101_{\text{สอง}}$ ให้เป็นตัวเลขในระบบตัวเลขฐานสิบ

$$
\begin{aligned}
1101101_{\text{สอง}} &= (1 \times 2^6) + (1 \times 2^5) + (1 \times 2^3) + (1 \times 2^2) + (1 \times 1) \\
&= 64 + 32 + 8 + 4 + 1 \\
&= 109
\end{aligned}
$$

เปลี่ยน 109 ให้เป็นตัวเลขในระบบตัวเลขฐานห้า

5) 109

5) 21 เศษ 4

4 เศษ 1

ดังนั้น $1101101_{\text{สอง}} = 414_{\text{ห้า}}$

ตอบ $414_{\text{ห้า}}$

ตัวอย่างที่ 3 จงเขียน $130120_{\text{ห้า}}$ ให้อยู่ในระบบตัวเลขฐานสิบสอง

วิธีทำ เปลี่ยน $130120_{\text{ห้า}}$ ให้เป็นตัวเลขในระบบตัวเลขฐานสิบ

$$
\begin{aligned}
130120_{\text{ห้า}} &= (1 \times 5^5) + (3 \times 5^4) + (1 \times 5^2) + (2 \times 5^1) \\
&= 3{,}125 + 1{,}875 + 25 + 10 \\
&= 5{,}035
\end{aligned}
$$

เปลี่ยน 5,035 ให้เป็นตัวเลขในระบบตัวเลขฐานสิบสอง

12) 5,035

12) 419 เศษ 7

12) 34 เศษ B

2 เศษ A

ดังนั้น $130120_{\text{ห้า}} = 2AB7_{\text{สิบสอง}}$

ตอบ $2AB7_{\text{สิบสอง}}$

แบบฝึกหัด 2.3

1. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในระบบตัวเลขฐานห้า
   1) $11011_{\text{สอง}}$ 2) 7,120
   3) $AB0_{\text{สิบสอง}}$ 4) $BAB_{\text{สิบสอง}}$
2. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในระบบตัวเลขฐานสิบสอง
   1) $110001_{\text{สอง}}$ 2) $44120_{\text{ห้า}}$
   3) $1012033_{\text{ห้า}}$ 4) 78,130
3. ระบบตัวเลขฐานสามต้องใช้เลขโดดกี่ตัว อะไรบ้าง
4. ระบบตัวเลขฐานแปดต้องใช้เลขโดดกี่ตัว อะไรบ้าง
5. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปกระจาย
   1) $1122_{\text{สาม}}$ 2) $2100_{\text{สาม}}$
   3) $7504_{\text{แปด}}$ 4) $16520_{\text{แปด}}$
6. จงเขียน $A19B_{\text{สิบสอง}}$ ให้อยู่ในระบบตัวเลขฐานแปด
7. จงเติมเครื่องหมาย $>$, $<$ หรือ $=$ ในช่องว่างต่อไปนี้
   1) $17_{\text{แปด}}$ ….. $16_{\text{เก้า}}$
   2) $15_{\text{แปด}}$ ….. $20_{\text{เก้า}}$
   3) $1267_{\text{เก้า}}$ ….. $1267_{\text{แปด}}$
   4) $39420_{\text{สิบเอ็ด}}$ ….. $39420_{\text{สิบสอง}}$

8. นายมั่นอายุ $60_{\text{แปด}}$ ปี นายบุญอายุ $112_{\text{ห้า}}$ ใครมีอายุมากกว่าและมากกว่าอยู่กี่ปี
9. จงเรียง $247810_{\text{สิบสอง}}$, $247810_{\text{เก้า}}$, $247810_{\text{สิบเอ็ด}}$ จากน้อยไปมาก
10. 4 ที่อยู่ในจำนวนใดต่อไปนี้มีค่ามากที่สุด

    $2438_{\text{สิบสอง}}$, 5462 และ $3495_{\text{สิบเอ็ด}}$

จำนวนอะไรเอ่ย

จำนวนอะไรที่มากกว่า 500 มีสามหลัก ค่าของเลขโดดในหลักหน่วยเป็นสามเท่าของเลขโดดในหลักสิบ และเลขโดดในหลักร้อยเป็นสองเท่าของเลขโดดในหลักสิบ

บทที่ 3

การประยุกต์ของจำนวนเต็มและเลขยกกำลัง

3.1 การคิดคำนวณ

ในชีวิตประจำวันเราใช้การคิดคำนวณเกี่ยวกับรายรับ รายจ่าย การซื้อ การขาย ฯลฯ แม้ว่าในปัจจุบันจะใช้เครื่องคิดเลขได้ก็ตาม ในบางสถานการณ์เราก็ยังต้องคิดคำนวณด้วยตนเอง เช่น เมื่อเราซื้อของ เราอาจคำนวณจำนวนเงินที่ต้องจ่ายโดยคิดในใจ ดังนั้นความสามารถในการคิดคำนวณจึงยังมีความจำเป็นอยู่เสมอ

ให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

พัชรีไปซื้อผักที่ตลาดสดดังนี้ ผักคะน้า 15 บาท ถั่วฝักยาว 18 บาท กะหล่ำปลี 20 บาท และพริกขี้หนู 10 บาท ถ้าเธอให้ธนบัตร 100 บาทแก่แม่ค้า พัชรีจะได้เงินทอนกี่บาท

จากโจทย์ในตัวอย่างนี้พัชรีอาจคิดในใจดังนี้

ขั้นแรก คิดราคาผักที่ซื้อทั้งหมดเป็น $15 + 18 + 20 + 10 = 63$ บาท

ขั้นที่สอง คิดจำนวนเงินที่ได้รับทอนเป็น $100 - 63 = 37$ บาท

การคิดเงินของพัชรีตามข้างต้น เขียนเป็นประโยคคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$100 - (15 + 18 + 20 + 10) = 37$$

ถ้าเราคิดว่าเงินที่ให้แม่ค้า 100 บาท จ่ายเป็นค่าผักคะน้าก่อน แล้วจึงจ่ายเป็นค่าถั่วฝักยาว ค่ากะหล่ำปลี และค่าพริกขี้หนู ต่อไปตามลำดับ ดังนั้นการคำนวณโจทย์ในตัวอย่างนี้อาจเขียนเป็น $100 - 15 - 18 - 20 - 10$ ซึ่งเท่ากับ $100 - (15 + 18 + 20 + 10)$ และอาจเขียนประโยคคณิตศาสตร์ดังกล่าวข้างต้นเป็นดังนี้

$$100 - 15 - 18 - 20 - 10 = 37$$

เราอาจแสดงที่มาของ $100 - 15 - 18 - 20 - 10$ ว่าเท่ากับ $100 - (15 + 18 + 20 + 10)$ โดยใช้หลักเกณฑ์ของการลบจำนวนเต็มด้วยจำนวนเต็มที่นักเรียนเคยทราบมาแล้วว่า

ตัวตั้ง – ตัวลบ = ตัวตั้ง + จำนวนตรงข้ามของตัวลบ

ซึ่งแสดงได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
100 - 15 - 18 - 20 - 10 &= 100 + (-15) + (-18) + (-20) + (-10) \\
&= 100 + \{(-15) + (-18) + (-20) + (-10)\} \\
&= 100 + (-63) \\
&= 100 - 63 \\
&= 100 - (15 + 18 + 20 + 10)
\end{aligned}
$$

ฉะนั้นเมื่อมีโจทย์ที่มีการดำเนินการเฉพาะการบวกและการลบของจำนวนเต็มหลาย ๆ จำนวน เช่น $5 + 11 - 12 + 8 - 9$ อาจคำนวณได้สองวิธีดังนี้

1. คำนวณจากซ้ายไปขวาทีละสองจำนวน

$$
\begin{aligned}
5 + 11 - 12 + 8 - 9 &= 16 - 12 + 8 - 9 \\
&= 4 + 8 - 9 \\
&= 12 - 9 \\
&= 3
\end{aligned}
$$

$5 + 11 = 16$

$16 - 12 = 4$

$4 + 8 = 12$

หรือ 2. เขียนโจทย์ใหม่ให้อยู่ในรูปการบวกทั้งหมดแล้วแบ่งจำนวนออกเป็นสองกลุ่ม คือกลุ่มของจำนวนเต็มบวกและกลุ่มของจำนวนเต็มลบ โดยใช้สมบัติการสลับที่และสมบัติการเปลี่ยนหมู่สำหรับการบวกจำนวนเต็ม

$$
\begin{aligned}
5 + 11 - 12 + 8 - 9 &= 5 + 11 + (-12) + 8 + (-9) \\
&= (5 + 11 + 8) - (12 + 9) \\
&= 24 - 21 \\
&= 3
\end{aligned}
$$

จะสังเกตได้ว่าการคำนวณโดยวิธีนี้มีการจัดกลุ่มจำนวนเต็มบวกและกลุ่มจำนวนเต็มลบ โดยใช้วงเล็บและสมบัติการบวกและการลบจำนวนเต็ม การใช้วงเล็บเพื่อจัดกลุ่มจำนวนทำได้ดังนี้

1. ***ถ้าต้องการใส่วงเล็บ***คลุมกลุ่มจำนวนใดและมีเครื่องหมายบวกอยู่หน้าวงเล็บ เมื่อใส่วงเล็บแล้วให้คงเครื่องหมายเดิม ดังตัวอย่าง

$$12 + 3 + 5 = 12 + (3 + 5)$$
$$12 + 3 - 5 = 12 + (3 - 5)$$

ในกรณีที่มีเครื่องหมายลบอยู่หน้าวงเล็บ ให้เปลี่ยนเครื่องหมายที่จะอยู่ในวงเล็บเป็นตรงกันข้าม ดังตัวอย่าง

$$12 - 3 + 5 = 12 - (3 - 5)$$
$$12 - 3 - 5 = 12 - (3 + 5)$$

2. ***ถ้าต้องการถอดวงเล็บ***ที่คลุมกลุ่มจำนวนใดและมีเครื่องหมายบวกอยู่หน้าวงเล็บ ให้ถอดวงเล็บออกและคงเครื่องหมายเดิม ดังตัวอย่าง

$$12 + (3 + 5) = 12 + 3 + 5$$
$$12 + (3 - 5) = 12 + 3 - 5$$

ในกรณีที่มีเครื่องหมายลบอยู่หน้าวงเล็บ เมื่อถอดวงเล็บออกให้เปลี่ยนเครื่องหมายที่เคยอยู่ในวงเล็บเป็นตรงกันข้าม ดังตัวอย่าง

$$12 - (3 - 5) = 12 - 3 + 5$$
$$12 - (3 + 5) = 12 - 3 - 5$$

ในกรณีที่มีโจทย์การบวกและลบจำนวนเต็มหลาย ๆ จำนวน แต่ไม่มีวงเล็บระบุว่าจะดำเนินการใดก่อนหลัง เช่น $100 - 15 - 18 - 20 - 10$ เราจะถือว่าให้ดำเนินการจากซ้ายไปขวา แสดงด้วยประโยคคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$[\{(100 - 15) - 18\} - 20] - 10 = 37$$

ในที่นี้ใช้วงเล็บเล็ก ( ) วงเล็บปีกกา { } และวงเล็บใหญ่หรือวงเล็บก้ามปู [ ] โดยใช้วงเล็บเล็กแสดงการคำนวณเป็นลำดับแรก วงเล็บปีกกาคลุมวงเล็บเล็กแสดงการคำนวณในลำดับต่อไป และวงเล็บใหญ่หรือวงเล็บก้ามปูคลุมวงเล็บปีกกา แสดงการคำนวณเป็นลำดับสุดท้ายดังต่อไปนี้

$[\{(100 - 15) - 18\} - 20] - 10 \;=\; [\{85 - 18\} - 20] - 10$

คำนวณในวงเล็บเล็ก
$100 - 15 = 85$

$= [67 - 20] - 10$

คำนวณในวงเล็บปีกกา
$85 - 18 = 67$

$= 47 - 10$

$= 37$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลลัพธ์ $11 - 20 + 32 - 12 + 55 - 35$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} 11 - 20 + 32 - 12 + 55 - 35 &= 11 + 32 + 55 - 20 - 12 - 35 \\ &= (11 + 32 + 55) - (20 + 12 + 35) \\ &= 98 - 67 \\ &= 31 \end{aligned}$$

ตอบ 31

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลลัพธ์ $48 + \{125 - (125 - 2)\}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} 48 + \{125 - (125 - 2)\} &= 48 + \{125 - 125 + 2\} \\ &= 48 + 2 \\ &= 50 \end{aligned}$$

ตอบ 50

การถอดวงเล็บในโจทย์ที่มีวงเล็บแสดงลำดับการคำนวณอยู่หลายชนิด บางครั้งเมื่อคำนวณในวงเล็บใหญ่หรือวงเล็บปีกกาแล้วอาจเปลี่ยนไปใช้วงเล็บอันดับรองลงมา ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลลัพธ์ $12 - [15 + \{(-3) - 10\}]$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} 12 - [15 + \{(-3) - 10\}] &= 12 - \{15 + (-13)\} \\ &= 12 - 2 \\ &= 10 \end{aligned}$$

ตอบ 10

ให้นักเรียนหาผลลัพธ์ต่อไปนี้

1. $11 + 12 - 13 + 14 - 15 + 16 - 17$
2. $18 + 14 - 20 - 12 + 40 - 9$
3. $(-35) + 17 - 22 - 43 + 60$
4. $\{(-9) + 24\} - \{(-40) - (28 - 40)\}$
5. $3 + \{18 - (-19)\} - (15 - 22)$
6. $(-5) - [(-2) + \{(-10) - 16\}]$

นอกจากนักเรียนต้องมีความสามารถในการคิดคำนวณแล้ว นักเรียนควรรู้จักเลือกใช้วิธีที่จะช่วยให้คำนวณได้รวดเร็ว ดังตัวอย่าง

1. จงหาผลบวก $32 + 15 + 18 + 9 + 45$

วิธีที่ 1 หาผลบวกที่ทำให้ได้จำนวนเต็มสิบ โดยใช้สมบัติการสลับที่และสมบัติการเปลี่ยนหมู่ (ในที่นี้โยงเส้นเพื่อช่วยให้เห็นการจัดกลุ่ม)

$$\begin{aligned} 32 + 15 + 18 + 9 + 45 &= (32 + 18) + (15 + 45) + 9 \\ &= 50 + 60 + 9 \\ &= 119 \end{aligned}$$

วิธีที่ 2 หาผลบวกจากการทำในรูปกระจาย

$$
\begin{aligned}
32 + 15 + 18 + 9 + 45 &= (30 + 2) + (10 + 5) + (10 + 8) + 9 + (40 + 5) \\
&= (30 + 10 + 10 + 40) + (2 + 5 + 8 + 9 + 5) \\
&= 90 + 29 \\
&= 119
\end{aligned}
$$

ตอบ 119

2. จงหาผลลัพธ์ $10 - 3 + 9 - 7 - 13$

วิธีที่ 1

$$
\begin{aligned}
10 - 3 + 9 - 7 - 13 &= 7 + 9 - 7 - 13 \\
&= 9 - 13 \\
&= -4
\end{aligned}
$$

วิธีที่ 2

$$
\begin{aligned}
10 - 3 + 9 - 7 - 13 &= 10 - 3 + 9 - 20 \\
&= -10 + 6 \\
&= -4
\end{aligned}
$$

วิธีที่ 3

$$
\begin{aligned}
10 - 3 + 9 - 7 - 13 &= 10 - 10 + 9 - 13 \\
&= 9 - 13 \\
&= -4
\end{aligned}
$$

ตอบ -4

3. จงหาผลบวก $99 + 399 + 298$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
99 + 399 + 298 &= (100 - 1) + (400 - 1) + (300 - 2) \\
&= 100 - 1 + 400 - 1 + 300 - 2 \\
&= (100 + 400 + 300) - (1 + 1 + 2) \\
&= 800 - 4 \\
&= 796
\end{aligned}
$$

ตอบ 796

4. จงหาผลลัพธ์ $197 + 201 - 98$

วิธีทำ $197 + 201 - 98 = (200 - 3) + (200 + 1) - (100 - 2)$

$= 200 - 3 + 200 + 1 - 100 + 2$

$= (200 + 200 - 100) - 3 + (1 + 2)$

$= 300 - 3 + 3$

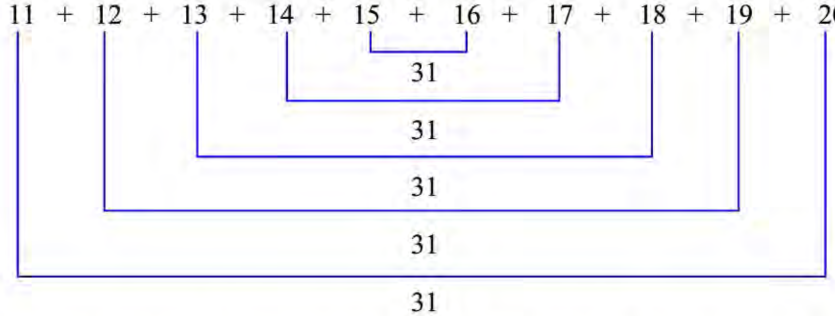
$= 300$

ตอบ 300

นอกจากจะใช้วิธีข้างต้นช่วยคำนวณโจทย์บางข้อดังกล่าวข้างต้นให้หาผลลัพธ์ได้รวดเร็วแล้ว ยังมีวิธีคำนวณโจทย์การบวกจำนวนเต็มบวกหลาย ๆ จำนวน แต่มีแบบรูปพิเศษดังตัวอย่าง

ตัวอย่าง จงหาผลบวก $11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20$

วิธีทำ $11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20$



จากแผนภาพเราสามารถจับคู่หาผลบวกของจำนวนสองจำนวนที่มีผลบวกเท่ากับ 31 ได้ 5 คู่

ดังนั้น $11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 5 \times 31$

$= 155$

ตอบ 155

ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

1) จำนวนเต็มที่บวกกันในโจทย์ข้อนี้มีแบบรูปเป็นอย่างไร จงอธิบาย
2) ถ้าโจทย์ข้อนี้มี 9 จำนวน บวกกันดังนี้

   $11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19$

   นักเรียนจะอาศัยวิธีการข้างต้นหาคำตอบได้อย่างไร จงอธิบาย
3) นักเรียนมีวิธีหาผลบวกวิธีอื่นอีกหรือไม่ ถ้ามีจงแสดงวิธีทำของนักเรียน
4) จงหาผลบวก $51 + 52 + 53 + 54 + \ldots + 100$

แบบฝึกหัด 3.1 ก

1. จงหาผลลัพธ์

   1) $30 - 35 + 40 - 45 + 50 - 55 + 60$
   2) $205 + 297 + 98$
   3) $398 - 206 + 95$
   4) $1,009 - 999 + 97 - 501$

2. จงหาผลลัพธ์

   1) $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 100$
   2) $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 99$
   3) $5 + 10 + 15 + 20 + \ldots + 100$
   4) $-3 - 6 - 9 - \ldots - 54$

3. มะลิซื้อเสื้อ 2 ตัว ราคาตัวละ 199 บาท ซื้อกระเป๋าถือ 1 ใบ ราคา 220 บาท และรองเท้าผ้าใบ 1 คู่ ราคา 298 บาท มะลิจ่ายเงินไปทั้งหมดกี่บาท

4. มานีช่วยแม่ทำกรอบเค็มส่งขายในวันหยุดเพื่อเสริมรายได้ให้ครอบครัว ถ้ามานีจดบันทึกรายรับรายจ่ายในการทำขนมในแต่ละครั้งของเดือนกรกฎาคม ไว้ดังนี้

วันที่	รายการ	จำนวนเงิน (บาท)
5	ซื้อของ	320
6	ขายได้	280
7	ขายได้	275
12	ซื้อของ	280
13	ขายได้	200
14	ซื้อของ	172
14	ขายได้	360

วันที่	รายการ	จำนวนเงิน (บาท)
19	ซื้อของ	300
20	ขายได้	220
21	ขายได้	385
26	ซื้อของ	353
27	ขายได้	280
28	ขายได้	375

นักเรียนคิดว่าเดือนนี้มานีขายขนมได้กำไรทั้งหมดกี่บาท

ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้

1. จงหาผลลัพธ์ $9+3\times5-8\div4$ และเขียนลำดับการคำนวณประกอบด้วย
2. คำตอบและลำดับการคำนวณของเพื่อน ๆ เหมือนกับของนักเรียนหรือไม่ ถ้าไม่เหมือนกันนักเรียนคิดว่าเป็นเพราะอะไร จงอธิบาย

นักเรียนจะสังเกตได้ว่าคำตอบของนักเรียนและของเพื่อน ๆ อาจไม่เท่ากัน เนื่องจากโจทย์ข้อนี้มีการดำเนินการหลายอย่างและไม่มีวงเล็บบอกให้ทราบว่าต้องดำเนินการใดก่อนหรือหลัง แต่ละคนอาจใช้ลำดับการดำเนินการแตกต่างกัน ดังเช่น

นักเรียนคนที่หนึ่ง หาผลลัพธ์ $9 + 3 \times 5 - 8 \div 4$ โดยคำนวณจากซ้ายไปขวาตามลำดับจะได้ดังนี้

$$\begin{array}{llll} 9 + 3 = 12 & & & \\ \quad\ \downarrow & & & \\ & 12 \times 5 = 60 & & \\ & \quad\ \ \downarrow & & \\ & & 60 - 8 = 52 & \\ & & \quad\ \ \downarrow & \\ & & & 52 \div 4 = 13 \end{array}$$

วิธีนี้มีลำดับการคำนวณที่เขียนอยู่ในรูปของ $[\{(9+3)\times 5\}-8]\div 4$ ซึ่งหาผลลัพธ์ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} [\{(9 + 3) \times 5\} - 8] \div 4 &= \{(12 \times 5) - 8\} \div 4 \\ &= (60 - 8) \div 4 \\ &= 52 \div 4 \\ &= 13 \end{aligned}$$

นักเรียนคนที่สอง คำนวณโดยใช้การคูณและการหารก่อนการบวกและการลบ จะได้ดังนี้

จาก $9 + 3 \times 5 - 8 \div 4$ จะได้

$$\begin{array}{ccc} 3 \times 5 & & 8 \div 4 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 15 & & 2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 9 + 15 & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ 24 & \longrightarrow & 24 - 2 = 22 \end{array}$$

วิธีนี้มีลำดับการคำนวณที่เขียนอยู่ในรูปของ $\{9+(3\times 5)\}-(8\div 4)$ ซึ่งหาผลลัพธ์ได้ดังนี้

$$\{9 + (3 \times 5)\} - (8 \div 4) = (9 + 15) - 2$$
$$= 24 - 2$$
$$= 22$$

นักเรียนคนที่สาม คำนวณตามลำดับที่แตกต่างกันอีกดังนี้

จาก $9 + 3 \times 5 - 8 \div 4$ คิดเป็น $\{(9 + 3) \times 5\} - (8 \div 4)$ ซึ่งหาผลลัพธ์ได้ดังนี้

$$\{(9 + 3) \times 5\} - (8 \div 4) = (12 \times 5) - 2$$
$$= 60 - 2$$
$$= 58$$

จากตัวอย่างการคำนวณของนักเรียนทั้งสามคนข้างต้นจะเห็นว่าลำดับการคำนวณที่แตกต่างกันทำให้ได้ผลลัพธ์ไม่ตรงกันแม้ว่าจะเป็นโจทย์เดียวกัน

*ถ้าเราต้องการให้โจทย์ข้อนี้มีความหมายและมีคำตอบเดียว เราจะต้องกำหนดลำดับการคำนวณไว้อย่างชัดเจนโดยใช้**วงเล็บ*** ดังตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลลัพธ์ $16 + 2[5 + \{3(-12 + 9)\}]$

วิธีทำ

$$16 + 2[5 + \{3(-12 + 9)\}] = 16 + 2[5 + \{3(-3)\}]$$
$$= 16 + 2[5 + (-9)]$$
$$= 16 + 2(-4)$$
$$= 16 + (-8)$$
$$= 8$$

ตอบ 8

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลลัพธ์ $\{(3 \times 8) - (6 \times 2^3)\} \div \{3 + (-7)\}$

วิธีทำ

$$\{(3 \times 8) - (6 \times 2^3)\} \div \{3 + (-7)\} = \{24 - (6 \times 8)\} \div (-4)$$
$$= (24 - 48) \div (-4)$$
$$= (-24) \div (-4)$$
$$= 6$$

ตอบ 6

หมายเหตุ ในบางครั้งนักเรียนอาจพบการใช้วงเล็บชนิดเดียวกันทั้งหมด ในกรณีเช่นนี้จะต้องคิดคำนวณในวงเล็บชั้นในสุดก่อนแล้วทำในวงเล็บชั้นนอกต่อมาตามลำดับ เช่น

$4^2 - (8 + 2(-5)) = 4^2 - (8 - 10) = 16 - (-2) = 16 + 2 = 18$

ให้นักเรียนหาผลลัพธ์ต่อไปนี้

1. $-2\{7 - (-12)\}$
2. $5^3 + \{2^4 - (-3)^2\}$
3. $\{(-3)(9 - 15)\} + \{18 \div (-3)\}$
4. $7 - [1 + \{5(-3) - (-13)\}]$
5. $15 + 2[3 + \{8(-2) + 11\}]$

จากกิจกรรมนี้จะเห็นได้ว่าโจทย์ที่มีการดำเนินการหลายอย่าง ถ้าใช้วงเล็บกำหนดลำดับการคำนวณให้ชัดเจนแล้วจะมีคำตอบเดียว

รู้ไว้ใช่ว่า

โดยปกติเมื่อมีการดำเนินการหลายอย่างระคนกัน เช่น บวก ลบ คูณ หาร หรือยกกำลัง จะนิยมใช้วงเล็บช่วยในการกำหนดลำดับการคำนวณเพื่อให้ได้คำตอบเดียว อย่างไรก็ตาม นักเรียนอาจพบโจทย์ที่ไม่มีวงเล็บกำกับไว้ ถ้าจำเป็นต้องคำนวณโจทย์ข้อนั้น ให้นักเรียนใช้หลักการดังนี้

1. ถ้ามีการยกกำลัง ให้ทำเป็นลำดับแรกและทำจากซ้ายไปขวา
2. ถ้ามีการคูณหรือการหาร ให้ทำเป็นลำดับที่สองและทำจากซ้ายไปขวา
3. ถ้ามีการบวกหรือการลบ ให้ทำเป็นลำดับที่สามและทำจากซ้ายไปขวา

ตัวอย่าง

1. $(-3) - 9 + 12 = (-12) + 12$
   $= 0$
2. $12 \div (-4) \times 5 = (-3) \times 5$
   $= -15$
3. $18 - (-3) \times 2 + 20 \div (-4) = 18 - (-6) + (-5)$
   $= 24 + (-5)$
   $= 19$
4. $(-8) + 2^4 - 3 \times 10 \div 6 = (-8) + 16 - 3 \times 10 \div 6$
   $= (-8) + 16 - 30 \div 6$
   $= (-8) + 16 - 5$
   $= 8 - 5$
   $= 3$

ทำได้หรือไม่

ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้

1. จงใช้วงเล็บแสดงลำดับการคำนวณ $20 - 12 \div (-8) \times 4 - 3$ เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ เท่ากับ -1 พร้อมแสดงวิธีทำตามลำดับที่นักเรียนกำหนด
2. จงใช้วงเล็บแสดงลำดับการคำนวณ $2^4 - 10 \times 2 \div 9 - 5$ เพื่อให้ได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนเต็ม พร้อมแสดงวิธีทำตามลำดับที่นักเรียนกำหนด
3. จงใช้จำนวนเฉพาะ 2, 3, 5, 7 และ 11 ให้ครบทุกจำนวนและใช้เพียงครั้งเดียว สร้างโจทย์การคำนวณเพื่อให้ได้ผลลัพธ์เท่ากับ 100
4. ให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง จงเขียนนิพจน์โดยใช้เลขโดด 3 สามตัวและการดำเนินการต่าง ๆ เพื่อให้ได้ผลลัพธ์เป็น 24

คำตอบ $3^3 - 3$

วิธีคำนวณ
$$3^3 - 3 = 27 - 3 = 24$$

จงเขียนนิพจน์โดยใช้เลขโดดและการดำเนินการต่าง ๆ ตามเงื่อนไขในแต่ละข้อต่อไปนี้ พร้อมทั้งแสดงวิธีคำนวณ

1) 3 สี่ตัว ผลลัพธ์เป็น 24
2) 4 สี่ตัว ผลลัพธ์เป็น 5
3) 9 ห้าตัว ผลลัพธ์เป็น 10
4) เลขโดดตัวเดียวกันสามตัว ผลลัพธ์เป็น 30

5. จงเขียนนิพจน์โดยใช้เลขโดดทุกตัวของจำนวนในแต่ละข้อต่อไปนี้เพียงครั้งเดียว และใช้การดำเนินการต่าง ๆ เพื่อให้ได้ผลลัพธ์เป็น 24

1) 1,234	2) 1,259
3) 3,468	4) 3,679

ใครทำได้มากที่สุด

ให้นักเรียนกำหนดการดำเนินการกับเลขโดดทุกตัวในปี พ.ศ. ปัจจุบัน หรือ ปี พ.ศ. ที่นักเรียนเกิดเพียงครั้งเดียวเพื่อให้ได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนนับที่แตกต่างกันตั้งแต่ 1 ถึง 100 ให้ได้มากจำนวนที่สุด

ตัวอย่าง พ.ศ. 2553 มีเลขโดดสี่ตัว คือ 2, 5, 5 และ 3

ตัวอย่างคำตอบ

1. $(5+3) - (5+2) = 8-7$
$\qquad = 1$

2. $(5+5) - 2^3 = 10-8$
$\qquad = 2$

ในการหาผลคูณของจำนวนเต็ม นอกจากจะใช้วิธีตั้งคูณตามที่เรียนมาแล้ว นักเรียนอาจใช้สมบัติการแจกแจง หรือจัดรูปของจำนวนในกรณีที่จำนวนนั้นสามารถเขียนในรูปอื่น ๆ ที่ช่วยให้การคำนวณทำได้ง่ายขึ้น ดังตัวอย่าง

ให้นักเรียนพิจารณาการหาผลคูณต่อไปนี้

1. จงหาผลคูณ 36×9

วิธีทำ

$$36 \times 9 = 36 \times (10-1)$$
$$= 360 - 36$$
$$= 324$$

ตอบ 324

2. จงหาผลคูณ 36×11

วิธีทำ $36 \times 11 = 36 \times (10 + 1)$

$= 360 + 36$

$= 396$

ตอบ 396

3. จงหาผลลัพธ์ $(3 \times 198) + (20 \times 99)$

วิธีทำ $(3 \times 198) + (20 \times 99) = 3\,(200 - 2) + 20\,(100 - 1)$

$= (600 - 6) + (2{,}000 - 20)$

$= 600 + 2{,}000 - 6 - 20$

$= (600 + 2{,}000) - (6 + 20)$

$= 2{,}600 - 26$

$= 2{,}574$

ตอบ 2,574

4. จงหาผลคูณ 48×25

วิธีทำ $48 \times 25 = 48 \times \frac{100}{4}$

$= 12 \times 100$

$= 1{,}200$

ตอบ 1,200

แบบฝึกหัด 3.1 ข

1. จงหาผลคูณ
   1) 40×99 2) 101×21
   3) 18×198 4) 204×30
   5) 360×25 6) 45×120
2. จงหาผลลัพธ์
   1) $(206 \times 50) + 399$ 2) $905 - (103 \times 6)$
   3) $(51 \times 99) + (64 \times 25)$ 4) $(65 \times 9) - (32 \times 5)$
3. มะลิรับเสื้อผ้ามือสองมาขายในตลาดนัด ถ้าเดือนนี้มะลิขายเสื้อได้ 108 ตัว ราคาตัวละ 199 บาท และขายชุดทำงานได้ 72 ชุด ราคาชุดละ 499 บาท เดือนนี้มะลิขายเสื้อผ้าได้เงินกี่บาท
4. พอพลซื้อบัตรเข้าชมสวนสัตว์แห่งหนึ่ง บัตรผู้ใหญ่ราคา 25 บาท บัตรเด็กราคา 10 บาท พอพลซื้อบัตรผู้ใหญ่ 28 ใบ และบัตรเด็ก 9 ใบ ถ้าพอพลให้ธนบัตรฉบับละ 1,000 บาท เขาจะได้รับเงินทอนกี่บาท

วิธีการคำนวณต่าง ๆ เกี่ยวกับจำนวนเต็มที่กล่าวมาแล้วข้างต้น สามารถนำมาใช้ได้กับจำนวนที่อยู่ในรูปเลขยกกำลังหรืออยู่ในรูปสัญกรณ์วิทยาศาสตร์ที่มีการบวก การลบ การคูณหรือการหาร ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลลัพธ์ $(5 \times 10^3) + (12 \times 10^3)$

วิธีทำ $(5 \times 10^3) + (12 \times 10^3) = (5 + 12) \times 10^3$

$= 17 \times 10^3$

ตอบ 17×10^3

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลลัพธ์ $(12 \times 10^8) - (58 \times 10^7)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}(12 \times 10^8) - (58 \times 10^7) &= (120 \times 10^7) - (58 \times 10^7)\\ &= (120 - 58) \times 10^7\\ &= 62 \times 10^7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}12 \times 10^8 &= 12 \times 10 \times 10^7\\ &= 120 \times 10^7\end{aligned}$$

ตอบ 62×10^7

ตัวอย่างที่ 3 การค้าขายระหว่างประเทศมีการนำสินค้าเข้าและส่งสินค้าออก ถ้าประเทศใดมีมูลค่าสินค้าส่งออกน้อยกว่ามูลค่าสินค้านำเข้า เรียกว่า *มีดุลการค้าขาดดุล* แต่ถ้ามูลค่าสินค้าส่งออกมากกว่ามูลค่าสินค้านำเข้า เรียกว่า *มีดุลการค้าเกินดุล*

ใน พ.ศ. 2543 ประเทศไทยส่งสินค้าออกคิดเป็นมูลค่าประมาณ 2.78 ล้านล้านบาท และนำสินค้าเข้าคิดเป็นมูลค่าประมาณ 2.49 ล้านล้านบาท

ใน พ.ศ. 2544 ประเทศไทยส่งสินค้าออกคิดเป็นมูลค่าประมาณ 2.89 ล้านล้านบาท และนำสินค้าเข้าคิดเป็นมูลค่าประมาณ 2.75 ล้านล้าน บาท

จงหาว่า ใน พ.ศ. ใด มีดุลการค้าเกินดุลมากกว่าและมากกว่าประมาณกี่ล้านบาท

วิธีทำ ใน พ.ศ. 2543

มูลค่าสินค้าส่งออกของประเทศไทยประมาณ 2.78×10^6 ล้านบาท

มูลค่าสินค้านำเข้าของประเทศไทยประมาณ 2.49×10^6 ล้านบาท

จะได้ว่าใน พ.ศ. 2543 ประเทศไทยมีดุลการค้าเกินดุลประมาณ

$$\begin{aligned}(2.78 \times 10^6) - (2.49 \times 10^6) &= (2.78 - 2.49) \times 10^6 \text{ ล้านบาท}\\ &= 0.29 \times 10^6 \text{ ล้านบาท}\end{aligned}$$

ใน พ.ศ. 2544

มูลค่าสินค้าส่งออกของประเทศไทยประมาณ 2.89×10^6 ล้านบาท

มูลค่าสินค้านำเข้าของประเทศไทยประมาณ 2.75×10^6 ล้านบาท

จะได้ว่าใน พ.ศ. 2544 ประเทศไทยมีดุลการค้าเกินดุลประมาณ

$$(2.89 \times 10^{6}) - (2.75 \times 10^{6}) = (2.89 - 2.75) \times 10^{6} \text{ ล้านบาท}$$

$$= 0.14 \times 10^{6} \text{ ล้านบาท}$$

ดังนั้น ใน พ.ศ. 2543 มีดุลการค้าเกินดุลมากกว่าใน พ.ศ. 2544 ประมาณ

$$(0.29 \times 10^{6}) - (0.14 \times 10^{6}) = (0.29 - 0.14) \times 10^{6} \text{ ล้านบาท}$$

$$= 0.15 \times 10^{6} \text{ ล้านบาท}$$

ตอบ ใน พ.ศ. 2543 มีดุลการค้าเกินดุลมากกว่า พ.ศ. 2544 ประมาณ 0.15×10^{6} ล้านบาท

แบบฝึกหัด 3.1 ค

1. จงเขียนผลลัพธ์ต่อไปนี้ในรูปสัญกรณ์วิทยาศาสตร์
   1) $(2 \times 10^{42}) - (105 \times 10^{40})$
   2) $(7.6 \times 10^{25}) + (24 \times 10^{24})$
   3) $\dfrac{(1.6 \times 10^{5}) + (4.4 \times 10^{5})}{1.5 \times 10^{3}}$
   4) $\dfrac{(82 \times 10^{10}) - (1.8 \times 10^{11})}{(2 \times 10^{8}) + (3 \times 10^{9})}$
2. บริเวณโคนเสาธงชาติของโรงเรียนแห่งหนึ่งเป็นคอนกรีตรูปวงกลมซึ่งมีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 2 เมตร ทางโรงเรียนต้องการปรับพื้นที่รอบคอนกรีตเป็นสวนดอกไม้รูปวงแหวนที่มีความกว้าง 2 เมตร ดังแผนภาพ อยากทราบว่าบริเวณเฉพาะสวนดอกไม้มีพื้นที่ประมาณกี่ตารางเมตร ($\pi \approx 3.14$)

3. ในช่วงครึ่งปีหลังของ พ.ศ. 2544 ประเทศไทยส่งข้าวออกดังนี้ ในช่วงเดือนกรกฎาคมถึงเดือนกันยายน ประมาณ 2.5×10^6 ตัน คิดเป็นมูลค่าประมาณ 2.3×10^7 พันบาท และในช่วงเดือนตุลาคมถึงเดือนธันวาคมประมาณ 2×10^6 ตัน คิดเป็นมูลค่าประมาณ 1.75×10^7 พันบาท จงหาว่าข้าวที่ส่งออกในช่วงครึ่งปีหลังนี้มีราคาเฉลี่ยประมาณตันละกี่บาท

3.2 โจทย์ปัญหา

ในชีวิตประจำวันบางครั้งเราอาจพบสถานการณ์ที่ต้องคำนวณเกี่ยวกับจำนวนต่าง ๆ และปัญหาในสถานการณ์นั้นอาจไม่มีความจำเป็นต้องคำนวณให้ได้ค่าที่แท้จริง อาจใช้ค่าที่ใกล้เคียงซึ่งง่ายต่อการคำนวณและอาจใช้เทคนิคการคำนวณให้ได้ค่าประมาณอย่างรวดเร็ว แต่มีความเพียงพอที่จะให้คำตอบได้ดังตัวอย่าง

อุ๋มชวนเพื่อน ๆ ไปเที่ยวต่างจังหวัด ค่ารถโดยสารประจำทางคนละ 28 บาท มีเพื่อนสนใจไปด้วย 12 คน อุ๋มบอกเพื่อน ๆ ว่า มีเงินกองกลางสำหรับค่าโดยสารอยู่ 350 บาท ซึ่งคิดแล้วน่าจะพอและอุ๋มอธิบายวิธีคิดให้เพื่อน ๆ ฟังดังนี้

ประมาณค่าโดยสารเป็นคนละ 30 บาท จำนวน 12 คน

คิดเป็นเงิน $30 \times 12 = 360$ บาท

คิดค่าโดยสารเกินไว้คนละ 2 บาท คิดเป็นเงิน $12 \times 2 = 24$ บาท

เมื่อหักส่วนที่เกินออกจะได้ $360 - 24$ ซึ่งมีค่าน้อยกว่า 350 บาท

วิธีการคำนวณของอุ๋มถือว่าเป็นวิธีหนึ่งที่พอจะใช้ในการตัดสินใจได้ถูกต้อง

ให้นักเรียนพิจารณาสถานการณ์ต่อไปนี้

สมมติว่านักเรียนออกไปรับประทานอาหารนอกบ้านกับครอบครัวที่ร้านอาหารแห่งหนึ่ง และสั่งอาหารหลายอย่าง เมื่อรับประทานอาหารเสร็จแล้ว ทางร้านคิดค่าอาหารตามรายการ ดังนี้

ปลาทอด	85	บาท
ต้มยำ	120	บาท
ไข่เจียว	35	บาท
ไก่อบ	70	บาท
ผัดผักรวม	40	บาท
ข้าว	36	บาท
น้ำแข็ง	20	บาท
น้ำ	32	บาท
รวม	**435**	**บาท**

ถ้านักเรียนพิจารณาอย่างรวดเร็วว่าค่าอาหารที่ทางร้านคิดรวมครั้งนี้ถูกต้องหรือมีความเป็นไปได้หรือไม่ นักเรียนมีวิธีคิดอย่างไร จงอธิบาย

ในทางปฏิบัติการคำนวณเพื่อตรวจสอบความถูกต้องและความสมเหตุสมผลของคำตอบที่เกิดจากการบวกจำนวนเงินในรายการอาหารเราอาจใช้วิธีดังนี้

ขั้นแรกเราอาจพิจารณาที่ผลลัพธ์ว่า ค่าที่ได้ในหลักหน่วยถูกต้องหรือไม่ จากค่าอาหารตามรายการข้างต้น ผลลัพธ์ในหลักหน่วยควรเป็น 8 ไม่ใช่ 5 ดังนั้น ค่าอาหาร 435 บาท ที่ร้านคิดจึงไม่ถูกต้อง

แต่ถ้าพิจารณาค่าประมาณอย่างคร่าว ๆ ว่า คำตอบน่าจะใกล้เคียงความจริงหรือไม่ อาจพิจารณาที่หลักสิบเป็น $90 + 120 + 30 + 70 + 40 + 40 + 20 + 30 = 440$ ซึ่งใกล้เคียงกับค่าอาหารที่ร้านคิดได้ 435 บาท

สถานการณ์ข้างต้นเป็นเพียงตัวอย่างหนึ่งของการหาคำตอบ โดยไม่ต้องคำนวณอย่างละเอียด บ่อยครั้งที่นักเรียนอาจพบโจทย์ปัญหาที่ไม่ต้องคำนวณหรืออาจต้องคำนวณอยู่บ้าง แต่อาศัยความรู้ทางคณิตศาสตร์หาคำตอบได้ ดังตัวอย่างในกิจกรรมต่อไปนี้

1. ให้นักเรียนพิจารณาปัญหาว่าข้อสรุปของแต่ละปัญหาต่อไปนี้เป็นไปได้หรือไม่ เพราะเหตุใด
   1) ลูกแก้วขนาดเท่ากัน สีแดง 30 ลูก สีขาว 6 ลูก และสีฟ้า 4 ลูก คละปนกันอยู่ในขวดใบหนึ่ง นิดบอกเพื่อนว่า "ถ้าฉันหลับตาหยิบลูกแก้วขึ้นมา 1 ลูก ฉันน่าจะหยิบได้ลูกแก้วสีแดงมากกว่าสีอื่น"
   2) สมฤทัยสอบคณิตศาสตร์ได้ 65 คะแนน จากคะแนนเต็ม 80 สมฤทัยบอกเพื่อนว่า "ฉันสอบคณิตศาสตร์ได้ 65 %"
   3) พีระพบข้อความหนึ่งในเอกสารรายงานข่าวกีฬาของโรงเรียนว่า "เด็กชายพงษ์ทัศน์ยอดดี วิ่งรอบสนามฟุตบอลระยะทาง 2 กิโลเมตร ในเวลา 15 วินาที"
   4) กุ๊กกิ๊กบอกเพื่อนว่า "ถ้ามีจำนวนนับสี่จำนวนเรียงกันจากน้อยไปมาก เมื่อบวกแต่ละจำนวนด้วย 3 แล้ว อันดับของจำนวนทั้งสี่จะไม่เปลี่ยนแปลง"
   5) แต้วและตองมีเงินฝากในธนาคาร 500 บาท และ 800 บาท ตามลำดับ ถ้าเดือนนี้แม่ฝากเงินเพิ่มให้คนละ 200 บาท สรุปได้ว่า "ยอดเงินฝากของแต้วและตองยังต่างกันเท่าเดิม"

2. จงตอบปัญหาต่อไปนี้พร้อมทั้งให้เหตุผล
   1) ผงซักฟอกชนิดหนึ่งขนาด 800 กรัม ราคา 140 บาท ขนาด 1,200 กรัม ราคา 195 บาท ถ้าให้เลือกซื้อผงซักฟอกชนิดนี้ นักเรียนคิดว่าควรจะเลือกซื้อขนาดใด
   2) บ้านของครูศจีอยู่ห่างจากโรงเรียน 15 กิโลเมตร ปกติครูศจีจะขี่รถจักรยานยนต์ไปโรงเรียนด้วยอัตราเร็วเฉลี่ยประมาณ 20 กิโลเมตรต่อชั่วโมง พรุ่งนี้ครูศจีจะออกจากบ้านช้ากว่าทุกวัน ถ้าครูศจีออกจากบ้านเวลา 7.20 น. นักเรียนคิดว่าครูศจีจะมาทันนักเรียนเข้าแถวเพื่อเคารพธงชาติเวลา 7.50 น. หรือไม่

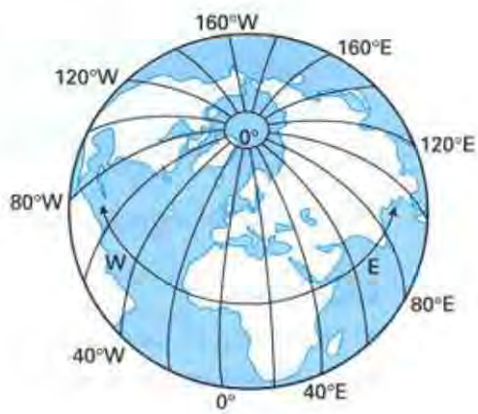
3) ไพศาลมีกระเบื้องปูพื้นอยู่ 9 กล่อง กระเบื้อง 1 กล่อง ใช้ปูพื้นได้ 1 ตารางเมตร ถ้าไพศาลใช้กระเบื้องทั้งหมดปูพื้นห้องครัวซึ่งกว้าง 2.5 เมตร ยาว 3 เมตร นักเรียนคิดว่าไพศาลมีกระเบื้องพอที่จะปูพื้นหรือไม่

4) ข้าวสาร 1 ถุง หนัก 5 กิโลกรัม บ้านวิทยาหุงข้าววันละ 3 กระป๋อง ข้าวสาร 1 กิโลกรัม ตวงได้ประมาณ 6 กระป๋อง ถ้าวิทยาซื้อข้าวสารมา 3 ถุง นักเรียนคิดว่าบ้านวิทยาจะมีข้าวสารพอหุงกินได้ตลอดทั้งเดือนหรือไม่

นอกจากโจทย์ปัญหาในทำนองเดียวกันกับข้างต้นที่นักเรียนอาจพบในชีวิตประจำวันแล้ว นักเรียนอาจพบโจทย์ปัญหาหรือข้อมูลที่น่าสนใจซึ่งต้องใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์และความสามารถในการคำนวณเพื่อหาคำตอบ ดังตัวอย่าง

เวลากรีนิช

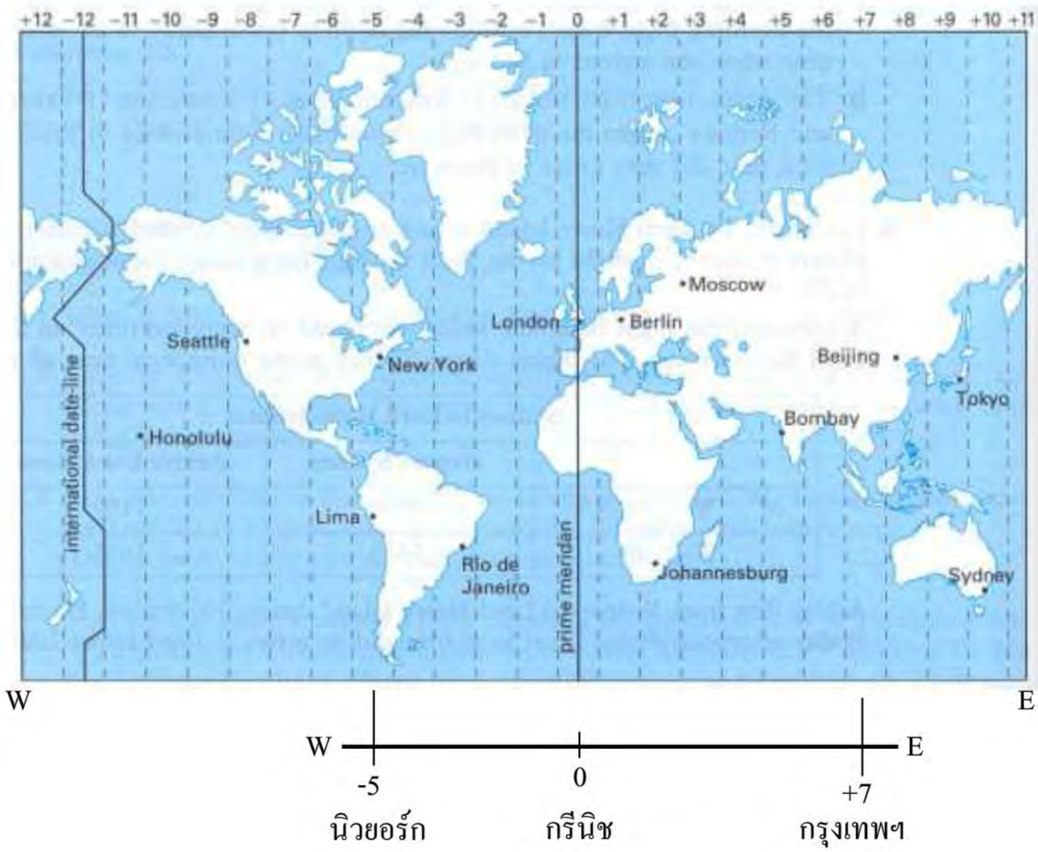
นักเรียนคงทราบว่าเวลาในประเทศทั่วโลกแตกต่างกัน บางครั้งเราเรียกว่า *เวลาท้องถิ่น* เช่น เมื่อคราวแข่งขันฟุตบอลโลกที่เกาหลีใต้และญี่ปุ่นร่วมกันเป็นเจ้าภาพตลอดเดือนมิถุนายน พ.ศ. 2545 นักเรียนจะเห็นว่าเวลาแข่งขันในแต่ละครั้งที่ประเทศญี่ปุ่นหรือเกาหลีใต้ เร็วกว่าเวลาของประเทศไทยประมาณ 2 ชั่วโมง เช่น ถ้าแข่งขันกันเมื่อเวลา 14.00 น. ตามเวลาท้องถิ่นของประเทศญี่ปุ่น เวลาท้องถิ่นที่ประเทศไทยจะเป็น 12.00 น. เวลาท้องถิ่นแตกต่างกันเพราะโลกโคจรรอบดวงอาทิตย์และหมุนรอบตัวเองด้วย การที่โลกหมุนรอบตัวเอง ทำให้แต่ละพื้นที่บนพื้นผิวโลกมืดและสว่างไม่พร้อมกัน เวลาท้องถิ่นของทุกประเทศทั่วโลกกำหนดตาม*เวลากรีนิช* (Greenwich Mean Time – GMT)



เนื่องจากโลกหมุนรอบตัวเองครบ 1 รอบ ในเวลา 24 ชั่วโมงจึงแบ่งเขตเวลาของโลกเป็น 24 ส่วน โดยตั้งต้นที่เส้นลองจิจูด (longitude) 0° ซึ่งผ่านเมืองกรีนิชในประเทศอังกฤษ เส้นลองจิจูดมี 360 เส้น แต่ละเส้นแบ่งมุมรอบจุดที่ขั้วโลกเหนือและใต้เป็น 360 ส่วน แต่ละเส้นจึงเท่ากับ 1° ในการคิดเวลาท้องถิ่นของแต่ละเขต เราแบ่งเส้นลองจิจูด 360 เส้นออกเป็น 24 ส่วน หรือ 24 เขตเวลา ดังนั้นเขตเวลาหนึ่งหรือ 1 ชั่วโมงจึงเท่ากับ 15°

ฉะนั้นเมื่อนับไปทางขวาของเส้นลองจิจูด 0° ก็จะบวกเวลาไปทีละ 1 ชั่วโมง ทุก ๆ 15° จนถึงเส้นลองจิจูดที่ 180° ตะวันออก

เมื่อนับไปทางซ้ายของเส้นลองจิจูด 0° ก็จะลบเวลาไปทีละ 1 ชั่วโมงจนถึงเส้นลองจิจูด 180° ตะวันตก ซึ่งจะเป็นเส้นเดียวกันกับเส้นลองจิจูด 180° ตะวันออก เรียกเส้นนี้ว่า *เส้นวันสากล* (international date line) ดังรูป



ประเทศไทยอยู่ในเขตเวลาของเส้นลองจิจูด 105° ตะวันออกซึ่งผ่านอำเภอโขงเจียม จังหวัดอุบลราชธานี เส้นลองจิจูด 105° คิดเป็น 7 ช่วงเขตเวลา เวลาของประเทศไทยจึงก่อนเวลาประเทศอังกฤษ 7 ชั่วโมง

นครนิวยอร์ก ประเทศสหรัฐอเมริกาอยู่ในเขตเวลาของเส้นลองจิจูด 75° ตะวันตก เวลาจึงหลังเวลาประเทศอังกฤษ 5 ชั่วโมง

ให้นักเรียนใช้แผนภาพข้างต้นตอบคำถามต่อไปนี้

1. ถ้าที่เมืองกรีนิชเป็นเวลา 13.00 น. ที่กรุงเทพฯ จะเป็นเวลากี่นาฬิกา
2. ถ้าที่เมืองกรีนิชเป็นเวลา 8.00 น. ประเทศญี่ปุ่นอยู่ในเขตเวลาของเส้นลองจิจูด 135° ตะวันออก จะเป็นเวลากี่นาฬิกา
3. ประเทศบราซิลอยู่ในเขตเวลาของเส้นลองจิจูด 60° ตะวันตก ถ้าที่ประเทศบราซิลเป็นเวลา 12.00 น. ที่เมืองกรีนิชจะเป็นเวลากี่นาฬิกา
4. ถ้าที่ประเทศไทยเป็นเวลา 9.00 น. ของวันอาทิตย์ ที่นครนิวยอร์กจะเป็นวันและเวลาใด
5. สมมติว่านักเรียนศึกษาอยู่ที่ประเทศอิตาลีซึ่งอยู่ในเขตเวลาของเส้นลองจิจูด 15° ตะวันออก ถ้านักเรียนต้องการโทรศัพท์มาคุยกับผู้ปกครองที่กรุงเทพฯ ให้ตรงกับเวลา 20.00 น. ของประเทศไทย นักเรียนจะต้องโทรศัพท์เวลาใด

เม็ดเลือด

ร่างกายของมนุษย์มีเม็ดเลือดแดงอยู่เป็นจำนวนมาก ผู้ใหญ่จะมีเม็ดเลือดแดงอยู่ประมาณ 25 ล้านล้านเซลล์ เม็ดเลือดแดงมีอายุอยู่ในกระแสโลหิตได้นานประมาณ 120 วัน หลังจากนั้นจะถูกทำลายไปในตับและม้าม เมื่อเม็ดเลือดแดงเก่าถูกทำลายไปไขกระดูกก็จะสร้างเม็ดเลือดแดงใหม่ขึ้นมาแทนที่ หน้าที่สำคัญของเม็ดเลือดแดงคือ นำออกซิเจนจากปอดไปเลี้ยงเนื้อเยื่อและอวัยวะต่าง ๆ แล้วนำคาร์บอนไดออกไซด์กลับไปยังปอด

เม็ดเลือดขาวมีขนาดใหญ่กว่าเม็ดเลือดแดง แต่มีจำนวนน้อยกว่าคือประมาณ $\frac{1}{500}$ เท่าของจำนวนเม็ดเลือดแดง หน้าที่สำคัญของเม็ดเลือดขาวคือ กำจัดแบคทีเรีย

ถ้านภาอยากทราบว่าจำนวนเม็ดเลือดขาวโดยปกติในร่างกายของผู้ใหญ่จะมีประมาณกี่เซลล์ นภาจะต้องคิดดังนี้

เนื่องจาก เม็ดเลือดแดงมีจำนวนประมาณ 25 ล้านล้านเซลล์ หรือเท่ากับ $25 \times 10^{6} \times 10^{6}$ เซลล์

ดังนั้น เม็ดเลือดขาวมีจำนวนประมาณ $\frac{1}{500} \times 25 \times 10^{6} \times 10^{6}$ เซลล์

$= \frac{1}{500} \times 25 \times 10^{2} \times 10^{4} \times 10^{6}$ เซลล์

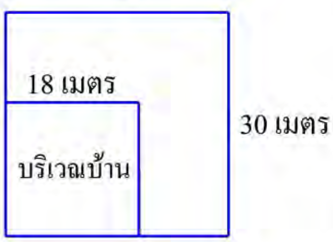
$= \frac{1}{500} \times 2{,}500 \times 10^{4} \times 10^{6}$ เซลล์

$= 5 \times 10^{4} \times 10^{6}$ เซลล์

$=$ 50,000 ล้านเซลล์

นั่นคือ จำนวนเม็ดเลือดขาวในร่างกายของผู้ใหญ่ มีประมาณห้าหมื่นล้านเซลล์

แบบฝึกหัด 3.2

1. เมื่อวันที่ 29 ตุลาคม พ.ศ. 2544 มีรายงานเกี่ยวกับภูมิอากาศของประเทศต่าง ๆ ซึ่งปรากฏว่าอุณหภูมิเฉลี่ยที่เมืองมอนทรีออล ประเทศแคนาดา เท่ากับ -3°C และที่จังหวัดเชียงใหม่เท่ากับ 31°C อุณหภูมิเฉลี่ยของสองเมืองนี้ต่างกันกี่องศา
2. เมืองซิดนีย์ประเทศออสเตรเลียใช้เส้นลองจิจูด 150° ตะวันออกเป็นเส้นกำหนดเวลา ถ้าที่เมืองซิดนีย์เป็นวันอาทิตย์ เวลา 6.00 น. เวลาที่เมืองเดนเวอร์ประเทศสหรัฐอเมริกาซึ่งใช้เส้นลองจิจูด 105° ตะวันตกเป็นเส้นกำหนดเวลา จะเป็นวันและเวลาใด
3. 

มะลิมีที่ดินเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ 30 เมตร ถ้ามะลิสร้างบ้านตรงมุมหนึ่งของที่ดินในบริเวณรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ 18 เมตร ดังรูป มะลิเหลือที่ดินกี่ตารางเมตร
4. ฉันมีเงินอยู่ไม่ถึง 200 บาท ถ้าแจกให้เด็ก 7 คน คนละเท่า ๆ กัน จะเหลือเงินอยู่ 2 บาท และถ้าแจกให้เด็ก 9 คน คนละเท่า ๆ กัน ก็จะเหลือเงินอยู่ 2 บาท เช่นกัน ถ้าเด็กทุกคนได้รับเงินเป็นจำนวนเต็มบาท ฉันมีเงินอย่างน้อยที่สุดกี่บาทและอย่างมากที่สุดกี่บาท

5. สมศักดิ์รับเหมางานทาสีบ้านหลังหนึ่งในราคา 35,000 บาท ใช้เวลา 10 วัน เขาประมาณว่าต้องใช้สีทั้งหมด 27 ลิตร ถ้าสีที่ต้องการมีขายในท้องตลาดอยู่ 3 ขนาด คือขนาด 1 ลิตร 2 ลิตร และ 4 ลิตร ราคา 300 บาท 550 บาท และ 960 บาท ตามลำดับ ในการทาสีบ้านหลังนี้สมศักดิ์จ้างช่าง 2 คน และต้องจ่ายค่าแรงคนละ 285 บาทต่อวัน ถ้าหักค่าสีและค่าแรงของช่างที่เป็นลูกมือแล้ว สมศักดิ์จะเหลือเงินมากที่สุดกี่บาท
6. เงินกองทุนหมู่บ้านเป็นเงินที่ได้รับการอุดหนุนจากกองทุนระดับชาติตามนโยบายของรัฐบาล หมู่บ้านและชุมชนละ 1 ล้านบาท มีหมู่บ้านทั้งหมด 71,501 หมู่บ้าน และชุมชนทั้งหมด 3,371 ชุมชน จากรายงานของเดือนสิงหาคม พ.ศ. 2545 ของกรมพัฒนาชุมชนกระทรวงมหาดไทย มีหมู่บ้านได้รับเงินไปแล้ว 70,723 หมู่บ้าน และชุมชนได้รับเงินไปแล้ว 2,067 ชุมชน จงหาว่ารัฐบาลจ่ายเงินกองทุนหมู่บ้านไปแล้วกี่ล้านบาท และยังต้องจ่ายเงินอีกกี่ล้านบาทจึงจะครบทุกหมู่บ้านและทุกชุมชน
7. ดาวพุธเป็นดาวเคราะห์ที่เล็กที่สุดและอยู่ใกล้ดวงอาทิตย์มากที่สุดประมาณ 58 ล้านกิโลเมตร โลกอยู่ห่างจากดวงอาทิตย์เป็นลำดับที่สามประมาณ 150 ล้านกิโลเมตร ดาวพลูโตอยู่ห่างจากดวงอาทิตย์มากที่สุดประมาณ 5,900 ล้านกิโลเมตร จงหาว่าดาวพุธและดาวพลูโตอยู่ห่างจากโลกประมาณกี่กิโลเมตร (เขียนคำตอบในรูปสัญกรณ์วิทยาศาสตร์)
8. ในการผสมคลอรีนชนิดเข้มข้น 90% ในน้ำมีอัตราส่วนการผสมโดยใช้คลอรีน 200 ลูกบาศก์เซนติเมตร ต่อน้ำ 10^5 ลิตร ถ้ามีน้ำในสระอยู่ 600 ลูกบาศก์เมตร จะต้องใช้คลอรีนกี่ลิตร
9. ในช่วงเดือนกันยายน พ.ศ. 2545 มีฝนตกมาก จากการสำรวจพบว่ามีน้ำไหลลงสู่แม่น้ำเจ้าพระยาประมาณ 3×10^3 ลูกบาศก์เมตรต่อวินาที จงหาว่าในเวลา 1 ชั่วโมง มีน้ำไหลลงสู่แม่น้ำเจ้าพระยากี่ลูกบาศก์เมตร (เขียนคำตอบในรูปสัญกรณ์วิทยาศาสตร์)

10. สารคาเฟอีนที่เหลืออยู่ในกระแสเลือดภายหลังที่ร่างกายรับสารนี้เข้าไปโดยผ่านทางอาหาร หรือเครื่องดื่มที่มีคาเฟอีนผสมอยู่สามารถประมาณได้จากสูตร

$$A = B \times \left(\frac{84}{100}\right)^{t}$$

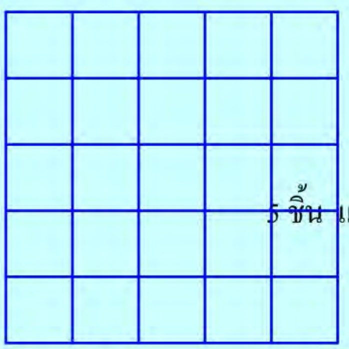
เมื่อ A แทนจำนวนคาเฟอีนที่เหลืออยู่ มีหน่วยเป็นมิลลิกรัม

B แทนคาเฟอีนที่บริโภคเข้าไป มีหน่วยเป็นมิลลิกรัม

และ t แทนเวลาหลังจากการบริโภค มีหน่วยเป็นชั่วโมง

ชูชาติดื่มกาแฟสองถ้วยเมื่อเวลา 8.00 น. แต่ละถ้วยมีคาเฟอีน 25 มิลลิกรัม อยากทราบว่า เมื่อเวลา 10.00 น. จะมีสารคาเฟอีนอยู่ในกระแสเลือดของเขา ประมาณกี่มิลลิกรัม

มานะทำได้อย่างไร



มานะเขียนจำนวนเต็มตั้งแต่ -12 ถึง 12 ครบทุกจำนวน ลงในกระดาษตารางรูปสี่เหลี่ยมขนาด 5×5 ช่องละหนึ่งจำนวน ให้เพื่อน ๆ ตัดกระดาษแผ่นนี้ออกเป็น 5 ชิ้น แต่ละชิ้นมี 5 ตารางและมีผลบวกของจำนวนเท่ากันทุกชิ้น จงหาว่า

1. มานะมีวิธีเขียนจำนวนเหล่านั้นลงในช่องตารางได้อย่างไร ให้นักเรียนบอกมา 1 วิธี พร้อมเขียนตารางที่มีจำนวนตามแนวคิดของนักเรียน
2. เขียนภาพกระดาษ 5 ชิ้นพร้อมจำนวนที่มีผลบวกของจำนวนในแต่ละชิ้นเท่ากัน

บทที่ 4

การสร้าง

การสร้างเป็นการเขียนรูปเรขาคณิตโดยใช้สันตรงและวงเวียน ซึ่งเป็นวิธีการดั้งเดิมตั้งแต่ยุคกรีกโบราณตามหลักฐานที่เพลโต (Plato, ประมาณ 427 – 347 ปีก่อนคริสต์ศักราช) บันทึกไว้ และยุคลิดเป็นคนแรกที่รวบรวมไว้อย่างเป็นระบบในหนังสือเอลเลเมนตส์ (Elements)

การสร้างที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้อาศัยความรู้จากการสร้างพื้นฐานที่นักเรียนเคยเรียนมาแล้ว ดังนี้

1. การสร้างส่วนของเส้นตรงให้ยาวเท่ากับความยาวของส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้
2. การแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้
3. การสร้างมุมให้มีขนาดเท่ากับขนาดของมุมที่กำหนดให้
4. การแบ่งครึ่งมุมที่กำหนดให้
5. การสร้างเส้นตั้งฉากจากจุดภายนอกมายังเส้นตรงที่กำหนดให้
6. การสร้างเส้นตั้งฉากที่จุดจุดหนึ่งบนเส้นตรงที่กำหนดให้

4.1 การแบ่งส่วนของเส้นตรง

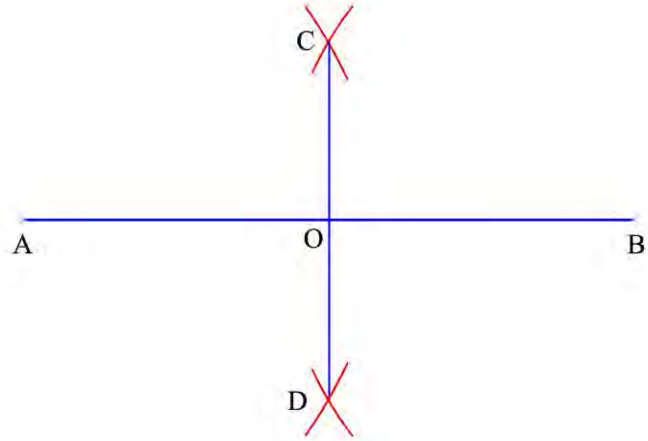
นักเรียนเคยแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรงมาแล้ว ในหัวข้อนี้จะเป็นการแบ่งส่วนของเส้นตรงให้เป็นส่วน ๆ ที่ยาวเท่ากัน ดังนี้

1. การแบ่งส่วนของเส้นตรงโดยการแบ่งครึ่ง

การแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้โดยใช้สันตรงและวงเวียน มีขั้นตอนการสร้าง ดังนี้

กำหนดให้ $\overline{AB}$

ต้องการสร้าง แบ่งครึ่ง $\overline{AB}$

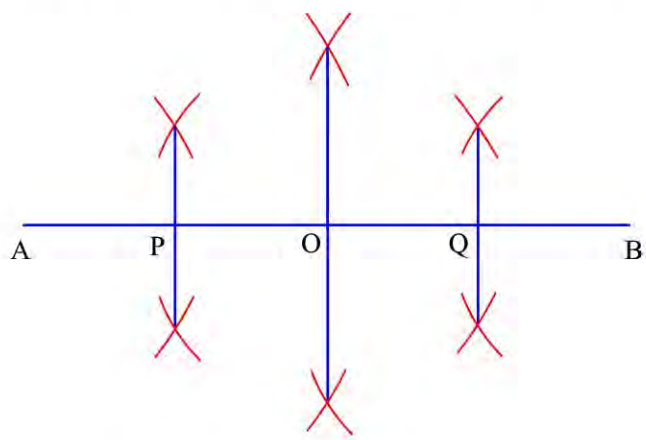


วิธีสร้าง

1. ใช้จุด A และจุด B เป็นจุดศูนย์กลางรัศมียาวพอสมควรและยาวเท่ากัน เขียนส่วนโค้งตัดกันที่จุด C และจุด D
2. ลาก $\overline{CD}$ ตัด $\overline{AB}$ ที่จุด O

จะได้จุด O เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}$ ทำให้ AO = OB ตามต้องการ

การแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรงโดยวิธีสร้างข้างต้น สามารถนำไปใช้เมื่อต้องการแบ่ง $\overline{AB}$ ออกเป็น 4 ส่วนที่ยาวเท่ากัน โดยแบ่งครึ่ง $\overline{AO}$ และ $\overline{OB}$ ที่จุด P และจุด Q ตามลำดับ ดังรูป



จากการแบ่งครึ่ง $\overline{AO}$ และ $\overline{OB}$ จะได้ AP = PO = OQ = QB
หรือกล่าวได้ว่าแบ่ง $\overline{AB}$ เป็น 4 ส่วนที่ยาวเท่ากัน

นักเรียนคิดว่าจะใช้วิธีสร้างข้างต้นแบ่ง $\overline{AB}$ เป็น 8 ส่วน 16 ส่วน หรือ 32 ส่วนที่ยาวเท่ากันได้หรือไม่

นักเรียนคิดว่าจะใช้วิธีสร้างข้างต้นแบ่ง $\overline{AB}$ เป็น 6 ส่วน 12 ส่วน หรือ 24 ส่วนที่ยาวเท่ากันได้หรือไม่

นักเรียนคิดว่าจะใช้วิธีสร้างข้างต้นแบ่ง $\overline{AB}$ เป็น 3 ส่วน 5 ส่วน หรือ 7 ส่วนที่ยาวเท่ากันได้หรือไม่

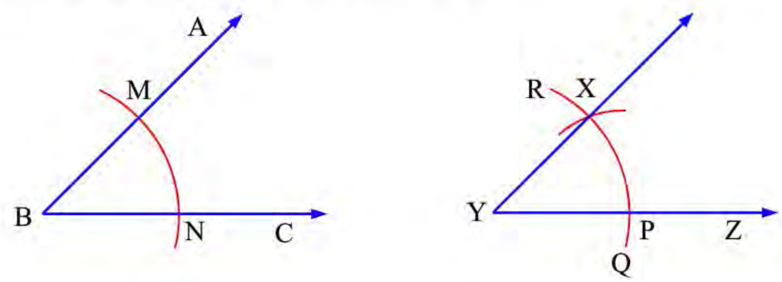
2. การแบ่งส่วนของเส้นตรงโดยการสร้างมุมแย้ง

นอกจากวิธีสร้างข้างต้นแล้วยังมีวิธีแบ่งส่วนของเส้นตรงออกเป็นส่วน ๆ ที่ยาวเท่ากันได้อีกวิธีหนึ่งโดยสร้างมุมแย้งให้มีขนาดเท่ากัน

การสร้างมุมให้มีขนาดเท่ากับขนาดของมุมที่กำหนดให้โดยใช้สันตรงและวงเวียนที่นักเรียนเคยเรียนมาแล้ว มีขั้นตอนดังนี้

กำหนดให้ $A\hat{B}C$

ต้องการสร้าง สร้าง $X\hat{Y}Z$ ให้มีขนาดเท่ากับขนาดของ $A\hat{B}C$



วิธีสร้าง

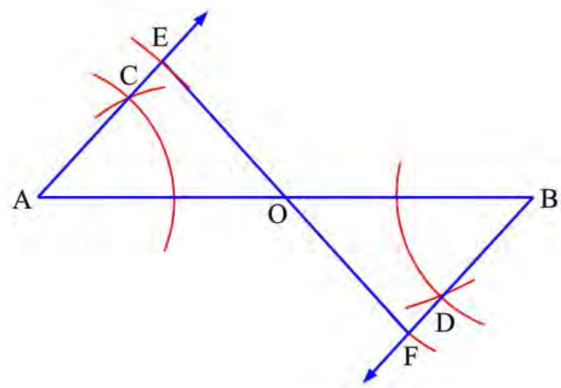
1. ลาก $\overrightarrow{YZ}$
2. ใช้จุด B เป็นจุดศูนย์กลางรัศมียาวพอสมควร เขียนส่วนโค้งตัด $\overrightarrow{BC}$ และ $\overrightarrow{BA}$ ที่จุด N และจุด M ตามลำดับ
3. ใช้จุด Y เป็นจุดศูนย์กลางรัศมียาวเท่ากับ BN เขียนส่วนโค้ง RQ ตัด $\overrightarrow{YZ}$ ที่จุด P
4. ใช้จุด P เป็นจุดศูนย์กลางรัศมียาวเท่ากับ MN เขียนส่วนโค้งตัดส่วนโค้ง RQ ที่จุด X
5. ลาก $\overrightarrow{YX}$

จะได้ $X\hat{Y}Z$ มีขนาดเท่ากับขนาดของ $A\hat{B}C$ ตามต้องการ

การแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรงโดยสร้างมุมแย้งให้มีขนาดเท่ากัน มีขั้นตอนดังนี้

กำหนดให้ $\overline{AB}$

ต้องการสร้าง แบ่งครึ่ง $\overline{AB}$



วิธีสร้าง

1. ที่จุด A และจุด B สร้าง $C\hat{A}B$ และ $D\hat{B}A$ ให้เป็นมุมแย้งที่มีขนาดเท่ากัน ดังนี้
   1.1 ที่จุด A สร้าง $C\hat{A}B$ ให้มีขนาดพอสมควร
   1.2 ที่จุด B สร้าง $D\hat{B}A$ ให้มีขนาดเท่ากับขนาดของ $C\hat{A}B$ และอยู่คนละข้างกับ $C\hat{A}B$
2. ใช้จุด A เป็นจุดศูนย์กลางรัศมียาวพอสมควร เขียนส่วนโค้งตัด $\overrightarrow{AC}$ ที่จุด E
3. ใช้จุด B เป็นจุดศูนย์กลางรัศมียาวเท่ากับ AE เขียนส่วนโค้งตัด $\overrightarrow{BD}$ ที่จุด F
4. ลาก $\overline{EF}$ ตัด $\overline{AB}$ ที่จุด O

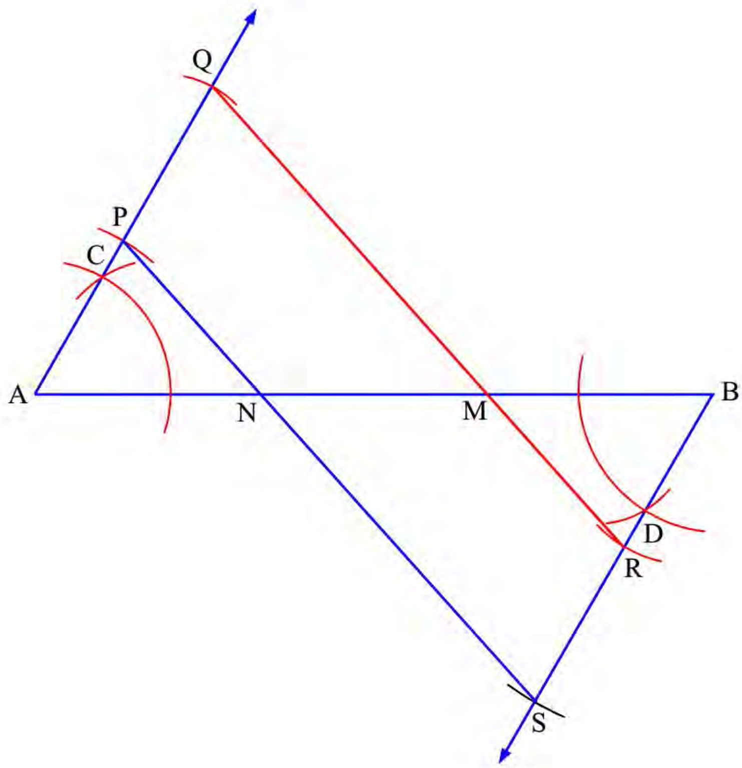
จะได้จุด O เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}$ ทำให้ $AO = OB$ ตามต้องการ

เราสามารถนำวิธีแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรงโดยสร้างมุมแย้งให้มีขนาดเท่ากัน ไปใช้ในการแบ่งส่วนของเส้นตรงเป็นกี่ส่วนที่เท่ากันก็ได้ตามต้องการ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง จงแบ่ง $\overline{AB}$ เป็น 3 ส่วนที่ยาวเท่ากัน และเขียนวิธีสร้าง

กำหนดให้ $\overline{AB}$

ต้องการสร้าง แบ่ง $\overline{AB}$ เป็น 3 ส่วนที่ยาวเท่ากัน



วิธีสร้าง

1. ที่จุด A และจุด B สร้าง $C\hat{A}B$ และ $D\hat{B}A$ ให้เป็นมุมแย้งที่มีขนาดเท่ากัน
2. ให้จุด A เป็นจุดศูนย์กลางรัศมียาวพอสมควร เขียนส่วนโค้งตัด $\overrightarrow{AC}$ ที่จุด P
3. ใช้จุด P เป็นจุดศูนย์กลางรัศมียาวเท่าเดิม เขียนส่วนโค้งตัด $\overrightarrow{AC}$ ที่จุด Q
4. ให้จุด B เป็นจุดศูนย์กลางรัศมียาวเท่าเดิม เขียนส่วนโค้งตัด $\overrightarrow{BD}$ ที่จุด R
5. ใช้จุด R เป็นจุดศูนย์กลางรัศมียาวเท่าเดิม เขียนส่วนโค้งตัด $\overrightarrow{BD}$ ที่จุด S
6. ลาก $\overline{QR}$ และ $\overline{PS}$ ตัด $\overline{AB}$ ที่จุด M และจุด N ตามลำดับ

จะได้ AN = NM = MB นั่นคือ แบ่ง $\overline{AB}$ เป็น 3 ส่วนที่ยาวเท่ากันตามต้องการ เราอาจใช้วงเวียนตรวจสอบว่า AN = NM = MB จริง

ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

1. ในการแบ่ง $\overline{AB}$ เป็น 3 ส่วนที่ยาวเท่ากัน เราใช้ส่วนโค้งที่มีรัศมียาวเท่ากันตัดแขนของมุมแย้งกี่ครั้ง
2. ถ้าต้องการแบ่ง $\overline{AB}$ เป็น 4 ส่วนที่ยาวเท่ากัน เราจะใช้ส่วนโค้งที่มีรัศมียาวเท่ากันตัดแขนของมุมแย้งกี่ครั้ง
3. ถ้าต้องการแบ่ง $\overline{AB}$ เป็น 5 ส่วนที่ยาวเท่ากัน เราจะใช้ส่วนโค้งที่มีรัศมียาวเท่ากันตัดแขนของมุมแย้งกี่ครั้ง
4. ถ้าต้องการแบ่ง $\overline{AB}$ เป็น 10 ส่วนที่ยาวเท่ากัน เราจะใช้ส่วนโค้งที่มีรัศมียาวเท่ากันตัดแขนของมุมแย้งกี่ครั้ง
5. ถ้าต้องการแบ่ง $\overline{AB}$ เป็น n ส่วนที่ยาวเท่ากัน เราจะใช้ส่วนโค้งที่มีรัศมียาวเท่ากันตัดแขนของมุมแย้งกี่ครั้ง

แบบฝึกหัด 4.1

1. จงสร้าง $\overline{AB}$ ยาวพอสมควร แล้วแบ่ง $\overline{AB}$ เป็น 4 ส่วนที่ยาวเท่ากัน โดยสร้างมุมแย้ง และ เขียนวิธีสร้าง
2. กำหนด $\overline{AB}$ ดังรูป จงแบ่ง $\overline{AB}$ เป็น 5 ส่วนที่ยาวเท่ากัน และเขียนวิธีสร้าง

3. จงแบ่ง $\overline{RS}$ ที่กำหนดให้เป็น 7 ส่วนที่ยาวเท่ากัน และเขียนวิธีสร้าง

4. กำหนด Δ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ จงแบ่งฐาน BC เป็น 4 ส่วนที่ยาวเท่ากัน ที่จุด D จุด E และจุด F โดยให้ BD = DE = EF = FC แล้วตอบคำถามต่อไปนี้

1) ความยาวของ $\overline{BE}$ คิดเป็นเศษส่วนเท่าใดของความยาวของ $\overline{BC}$

2) ความยาวของ $\overline{BD}$ คิดเป็นเศษส่วนเท่าใดของความยาวของ $\overline{BC}$

3) ความยาวของ $\overline{BD}$ คิดเป็นเศษส่วนเท่าใดของความยาวของ $\overline{DC}$

4) ถ้าลากส่วนสูงจากจุด A มายัง $\overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{DE}$, $\overleftrightarrow{EF}$ และ $\overleftrightarrow{FC}$ ของ ΔABD, ΔADE, ΔAEF และ ΔAFC ตามลำดับแล้ว ส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยมเหล่านี้สัมพันธ์กันอย่างไร

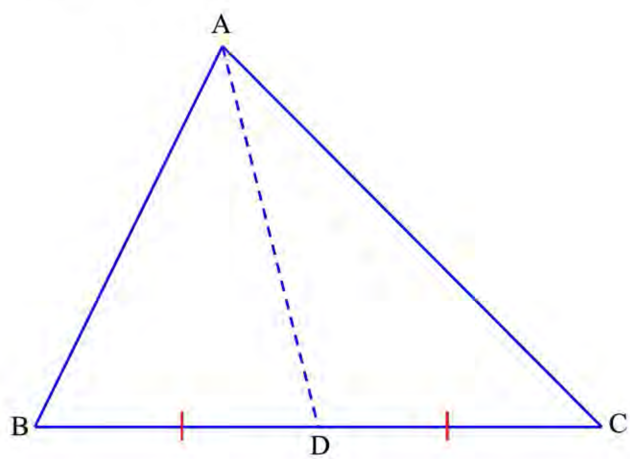
5) พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมทุกรูปในข้อ 4) สัมพันธ์กันอย่างไร

6) พื้นที่ของ ΔABD คิดเป็นเศษส่วนเท่าใดของพื้นที่ของ ΔABC

5. กำหนด $\overline{PQ}$ เป็นส่วนของเส้นตรงใด ๆ จงแบ่ง $\overline{PQ}$ เป็นสองส่วนที่จุด X โดยให้ $PX = \frac{2}{3}PQ$ และเขียนวิธีสร้าง

6. กำหนด $\overline{XY}$ เป็นส่วนของเส้นตรงใด ๆ จงแบ่ง $\overline{XY}$ เป็นสองส่วนที่จุด P โดยให้ $XP = \frac{2}{3}PY$ และเขียนวิธีสร้าง

7. **เส้นมัธยฐาน** คือ ส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดยอดไปยังจุดกึ่งกลางของด้านที่อยู่ตรงข้ามของรูปสามเหลี่ยม



จากรูป ΔABC มีจุด D เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{BC}$ ดังนั้น $\overline{AD}$ เป็นเส้นมัธยฐานที่ลากจากจุดยอด A

จงสร้าง $\overline{BE}$ ให้เป็นเส้นมัธยฐานที่ลากจากจุดยอด B ไปยังจุดกึ่งกลาง E ของ $\overline{AC}$ ให้ $\overline{AD}$ และ $\overline{BE}$ ตัดกันที่จุด M ลาก $\overrightarrow{CM}$ ตัด $\overline{AB}$ ที่จุด F แล้วใช้วงเวียนตรวจสอบความยาวของ $\overline{AF}$ และความยาวของ $\overline{FB}$ และตอบคำถามต่อไปนี้

1) AF และ FB สัมพันธ์กันอย่างไร

2) $\overline{CF}$ เป็นเส้นมัธยฐานหรือไม่

จากการสร้างและตรวจสอบข้างต้น จะได้ผลตรงตามสมบัติที่ว่า *เส้นมัธยฐานทั้งสามเส้นของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ จะพบกันที่จุดจุดหนึ่งและจุดเดียวเท่านั้น เรียกจุดนั้นว่า* **เซนทรอยด์** (centroid)

8. จากรูปที่สร้างได้ในข้อ 7 จงใช้วงเวียนตรวจสอบความยาวและตอบคำถามต่อไปนี้

1) AM เป็นกี่เท่าของ MD

2) BM เป็นกี่เท่าของ ME

3) CM เป็นกี่เท่าของ MF

จากการตรวจสอบข้างต้น จะได้ผลตรงตามสมบัติที่ว่า *ในรูปสามเหลี่ยมใด ๆ เซนทรอยด์แบ่งเส้นมัธยฐานแต่ละเส้นออกเป็นสองส่วน ทำให้ระยะจากจุดยอดถึงเซนทรอยด์เป็นสองเท่าของความยาวของอีกส่วนหนึ่ง*

9. จากรูปที่สร้างได้ในข้อ 7 จงลาก $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ และ $\overline{FD}$ แล้วใช้วงเวียนตรวจสอบความยาวและตอบคำถามต่อไปนี้

1) DE และ AB สัมพันธ์กันอย่างไร

2) EF และ BC สัมพันธ์กันอย่างไร

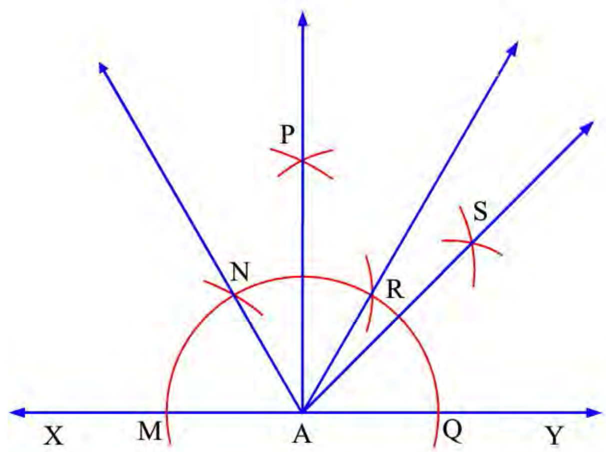
3) FD และ CA สัมพันธ์กันอย่างไร

4) ความยาวรอบรูปของ ΔDEF และ ΔABC สัมพันธ์กันอย่างไร

4.2 การสร้างมุมขนาดต่าง ๆ

นักเรียนเคยแบ่งครึ่งมุมมาแล้ว ในหัวข้อนี้จะเป็นการสร้างมุมขนาดต่าง ๆ ซึ่งอาศัยแนวคิดจากการสร้างมุม เช่นมุมที่มีขนาด 90 องศา และมุมที่มีขนาด 60 องศา ดังรายละเอียดต่อไปนี้

ให้นักเรียนพิจารณาการสร้างมุมต่อไปนี้



วิธีสร้าง

1. สร้าง $X\hat{A}Y$ ให้เป็นมุมตรง
2. ใช้จุด A เป็นจุดศูนย์กลางรัศมียาวพอสมควร เขียนส่วนโค้งตัด $\overleftrightarrow{XY}$ ที่จุด M และจุด Q
3. ใช้จุด M เป็นจุดศูนย์กลางรัศมียาวเท่าเดิม เขียนส่วนโค้งตัดส่วนโค้งแรกที่จุด N และใช้จุด N เป็นจุดศูนย์กลางรัศมียาวเท่าเดิม เขียนส่วนโค้งตัดส่วนโค้งแรกที่จุด R
4. ลาก $\overrightarrow{AN}$ และ $\overrightarrow{AR}$
5. สร้าง $\overrightarrow{AP}$ แบ่งครึ่ง $N\hat{A}R$
6. สร้าง $\overrightarrow{AS}$ แบ่งครึ่ง $P\hat{A}Y$

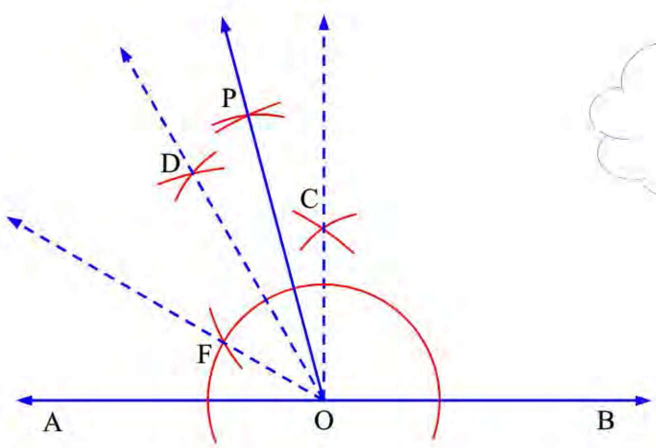
จากการสร้างข้างต้น ให้นักเรียนบอกขนาดของมุมต่อไปนี้

1. $P\hat{A}Y$ 2. $S\hat{A}Y$
3. $N\hat{A}M$ 4. $R\hat{A}M$
5. $P\hat{A}N$ 6. $R\hat{A}S$

จากการสร้างข้างต้น จะเห็นว่าการสร้างมุมบางมุมอาจทำได้โดยสร้างมุมอื่น ๆ มาประกอบกัน หรือหักออกจากกัน

ตัวอย่างที่ 1 จงสร้างมุมที่มีขนาดเท่ากับ 105 องศา และเขียนวิธีสร้าง

วิธีที่ 1



แนวคิด

105 = 90 +15

วิธีสร้าง

1. สร้าง $B\hat{O}C$ ให้มีขนาดเท่ากับ 90 องศา
2. สร้าง $C\hat{O}F$ ให้มีขนาดเท่ากับ 60 องศา
3. สร้าง $\overrightarrow{OD}$ แบ่งครึ่ง $C\hat{O}F$ ทำให้ $C\hat{O}D$ = 30 องศา
4. สร้าง $\overrightarrow{OP}$ แบ่งครึ่ง $C\hat{O}D$ ทำให้ $C\hat{O}P$ = 15 องศา

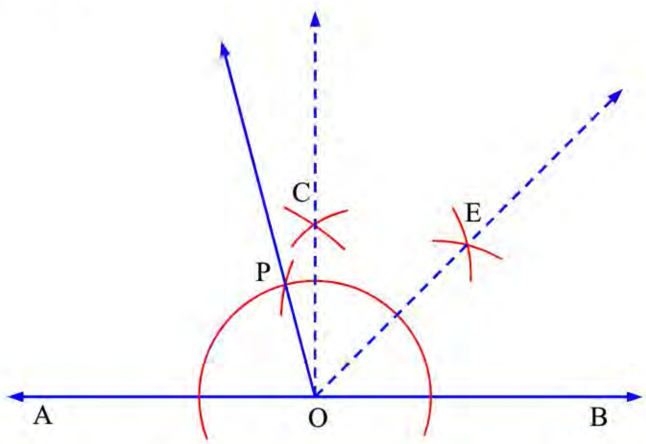
จะได้ $B\hat{O}P = B\hat{O}C + C\hat{O}P$

$= 90 + 15$

$= 105$ องศา

นั่นคือ $B\hat{O}P$ มีขนาดเท่ากับ 105 องศา ตามต้องการ

วิธีที่ 2



วิธีสร้าง

1. สร้าง $B\hat{O}C$ ให้มีขนาดเท่ากับ 90 องศา
2. สร้าง $\overrightarrow{OE}$ แบ่งครึ่ง $B\hat{O}C$ ทำให้ $B\hat{O}E$ = 45 องศา
3. สร้าง $E\hat{O}P$ ให้มีขนาดเท่ากับ 60 องศา

จะได้ $B\hat{O}P = B\hat{O}E + E\hat{O}P$

$= 45 + 60$

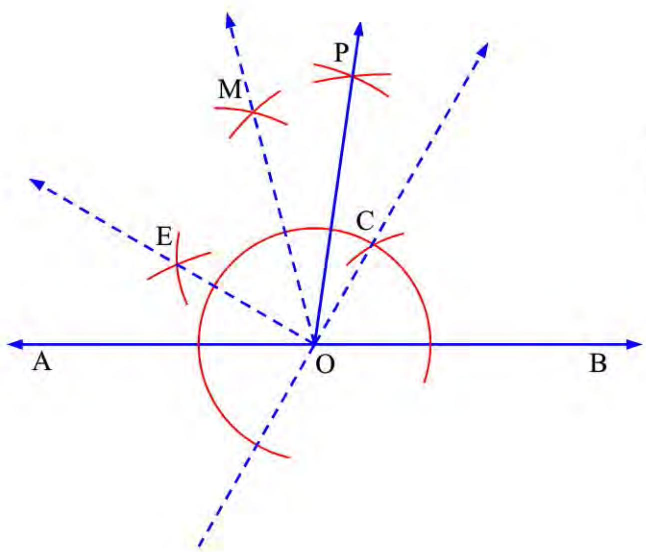
$= 105$ องศา

นั่นคือ $B\hat{O}P$ มีขนาดเท่ากับ 105 องศา ตามต้องการ

จากตัวอย่างข้างต้น นักเรียนจะเห็นได้ว่าวิธีสร้างมุมที่มีขนาดเท่ากับ 105 องศา ทำได้มากกว่าหนึ่งวิธี นักเรียนคิดว่ายังมีวิธีสร้างมุมที่มีขนาดเท่ากับ 105 องศา วิธีอื่นอีกหรือไม่ ถ้ามีให้นักเรียนบอกวิธีของนักเรียน

ตัวอย่างที่ 2 จงสร้างมุมที่มีขนาดเท่ากับ 82.5 องศา และเขียนวิธีสร้าง

วิธีที่ 1



วิธีสร้าง

1. สร้าง $A\hat{O}B$ ให้เป็นมุมตรง
2. สร้าง $B\hat{O}C$ ให้มีขนาดเท่ากับ 60 องศา
3. สร้าง $C\hat{O}E$ ให้มีขนาดเท่ากับ 90 องศา
4. สร้าง $\overrightarrow{OM}$ แบ่งครึ่ง $C\hat{O}E$ ทำให้ $C\hat{O}M = 45$ องศา
5. สร้าง $\overrightarrow{OP}$ แบ่งครึ่ง $C\hat{O}M$ ทำให้ $C\hat{O}P = 22.5$ องศา

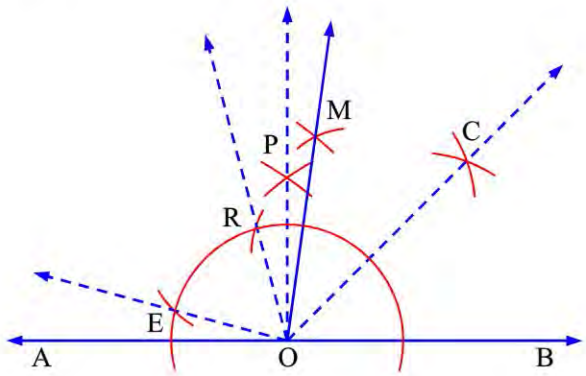
จะได้ $B\hat{O}P = B\hat{O}C + C\hat{O}P$

$= 60 + 22.5$

$= 82.5$ องศา

นั่นคือ $B\hat{O}P$ มีขนาดเท่ากับ 82.5 องศา ตามต้องการ

วิธีที่ 2



แนวคิด

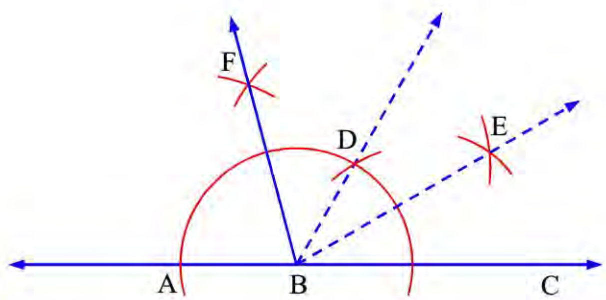
$$82.5 = \frac{45 + 120}{2}$$

วิธีสร้าง

1. สร้าง $A\hat{O}B$ ให้เป็นมุมตรง
2. สร้าง $B\hat{O}P$ ให้มีขนาดเท่ากับ 90 องศา
3. สร้าง $\overrightarrow{OC}$ แบ่งครึ่ง $B\hat{O}P$ ทำให้ $B\hat{O}C = 45$ องศา
4. สร้าง $C\hat{O}R$ ให้มีขนาดเท่ากับ 60 องศา
5. สร้าง $R\hat{O}E$ ให้มีขนาดเท่ากับ 60 องศา ทำให้ $C\hat{O}E = 120$ องศา และ $B\hat{O}E = 45 + 120 = 165$ องศา
6. สร้าง $\overrightarrow{OM}$ แบ่งครึ่ง $B\hat{O}E$ ทำให้ $B\hat{O}M = 82.5$ องศา ตามต้องการ

แบบฝึกหัด 4.2

1. จงสร้างมุมให้มีขนาดเท่ากับที่กำหนดให้ต่อไปนี้ และบอกว่าได้มาอย่างไร (เช่น $105 = \frac{90 + 120}{2}$)
    1) 67.5 องศา
    2) 75 องศา
    3) 150 องศา
    4) 195 องศา
    5) 225 องศา
    6) 165 องศา
    7) 255 องศา
    8) 315 องศา
2. จงสร้างมุมให้มีขนาดเท่ากับที่กำหนดให้ต่อไปนี้ และเขียนวิธีสร้าง
    1) 52.5 องศา
    2) 135 องศา
3. จากร่องรอยการสร้าง จงหาขนาดของมุมในแต่ละข้อต่อไปนี้
    1)



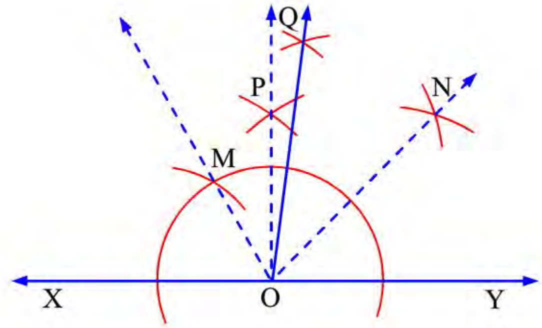
(1) $C\hat{B}E$ มีขนาดกี่องศา

(2) $A\hat{B}E$ มีขนาดกี่องศา

(3) $\overrightarrow{BF}$ เกี่ยวข้องกับ $A\hat{B}E$ อย่างไร

(4) $F\hat{B}C$ มีขนาดกี่องศา

2)



(1) $X\hat{O}M$ มีขนาดกี่องศา

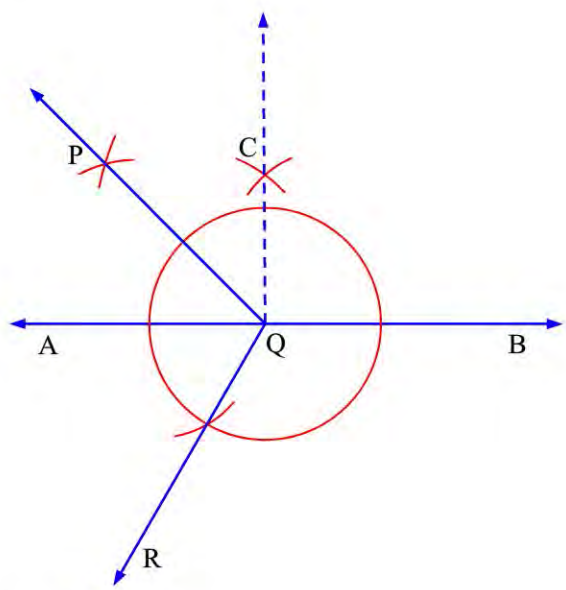
(2) $X\hat{O}P$ มีขนาดกี่องศา

(3) $N\hat{O}Y$ มีขนาดกี่องศา

(4) $\overrightarrow{OQ}$ เกี่ยวข้องกับ $M\hat{O}N$ อย่างไร

(5) $Q\hat{O}Y$ มีขนาดกี่องศา

3)



(1) $A\hat{Q}R$ มีขนาดกี่องศา

(2) $A\hat{Q}P$ มีขนาดกี่องศา

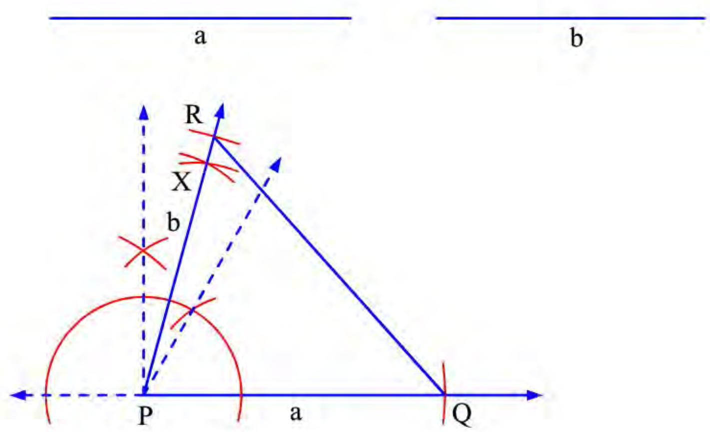
(3) $R\hat{Q}P$ มีขนาดกี่องศา

(4) มุมกลับ PQR มีขนาดกี่องศา

4.3 การสร้างรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

นักเรียนเคยแบ่งส่วนของเส้นตรงเป็นส่วน ๆ ที่ยาวเท่ากัน และเคยสร้างมุมที่มีขนาดต่าง ๆ มาแล้ว ในหัวข้อนี้นักเรียนจะได้นำความรู้ดังกล่าวมาใช้สร้างรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงสร้างรูปสามเหลี่ยมให้มุมมุมหนึ่งมีขนาดเท่ากับ 75 องศา และด้านประกอบมุมนั้นยาวเท่ากับ a และ b พร้อมทั้งเขียนวิธีสร้าง

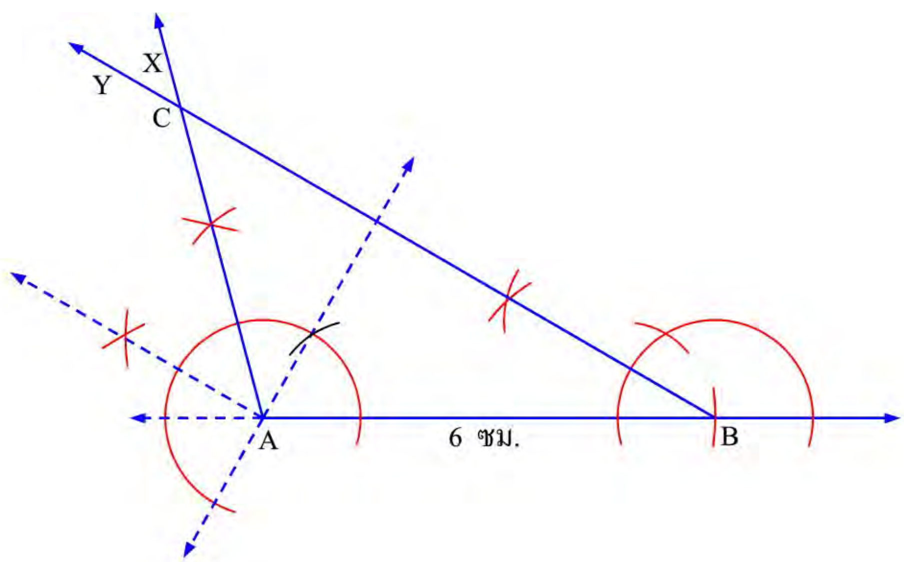


วิธีสร้าง

1. สร้าง $\overline{PQ}$ ยาวเท่ากับ a
2. สร้าง $Q\hat{P}X$ ให้มีขนาดเท่ากับ 75 องศา
3. ใช้จุด P เป็นจุดศูนย์กลางรัศมียาวเท่ากับ b เขียนส่วนโค้งตัด $\overrightarrow{PX}$ ที่จุด R
4. ลาก $\overline{QR}$

จะได้ ΔPQR เป็นรูปสามเหลี่ยม ที่ $Q\hat{P}R = 75$ องศา PQ = a และ PR = b ตามต้องการ

ตัวอย่างที่ 2 จงสร้างรูปสามเหลี่ยมให้ฐานยาว 6 เซนติเมตร มุมที่ฐานมีขนาดเท่ากับ 105 องศา และ 30 องศา และเขียนวิธีสร้าง



วิธีสร้าง

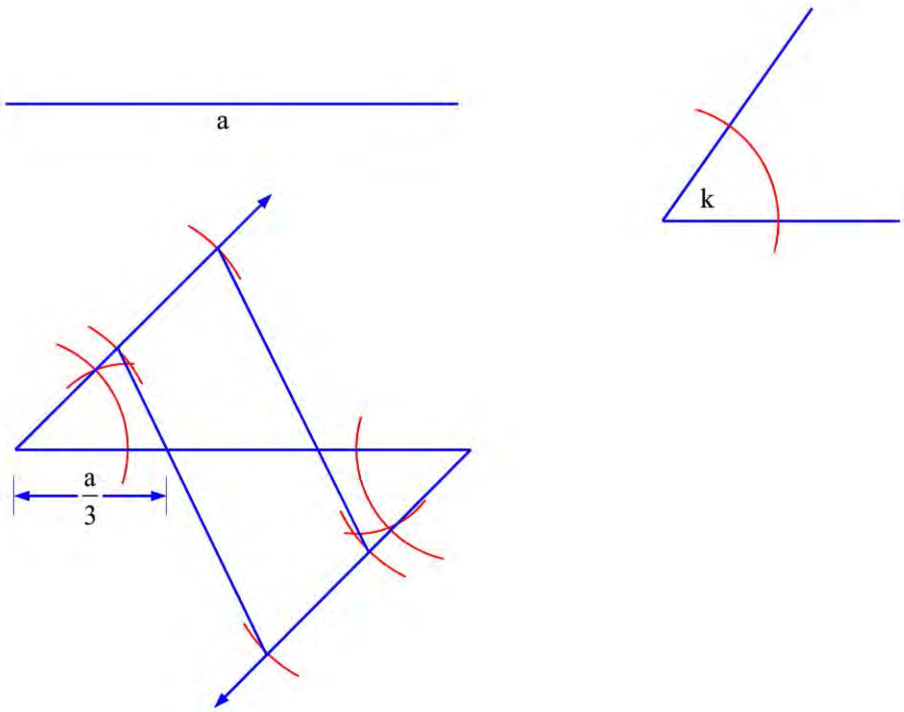
1. สร้าง $\overline{AB}$ ให้ยาว 6 เซนติเมตร
2. สร้าง $B\hat{A}X$ ให้มีขนาดเท่ากับ 105 องศา
3. สร้าง $A\hat{B}Y$ ให้มีขนาดเท่ากับ 30 องศาและให้ $\overrightarrow{AX}$ ตัด $\overrightarrow{BY}$ ที่จุด C

จะได้ ΔABC ที่ $AB = 6$ เซนติเมตร $B\hat{A}C = 105$ องศา และ $C\hat{B}A = 30$ องศา ตามต้องการ

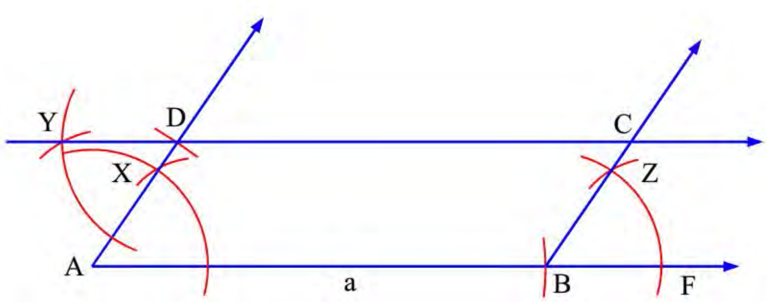
ตัวอย่างที่ 3 จงสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD ให้ AB = a , AD = $\frac{a}{3}$ และ

$D\hat{A}B = k$ และเขียนวิธีสร้าง

วิธีสร้าง



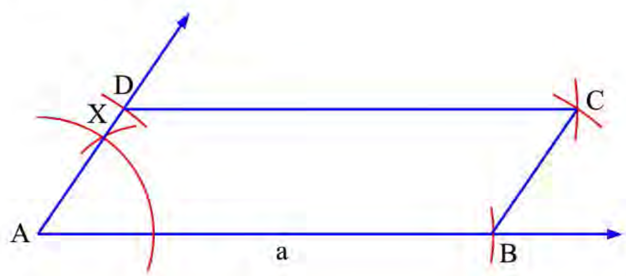
วิธีที่ 1 สร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน โดยสร้างรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามขนานกันสองคู่



1. สร้าง $\overline{AB}$ ยาวเท่ากับ a
2. สร้าง $X\hat{A}B$ ให้มีขนาดเท่ากับ k
3. ใช้จุด A เป็นจุดศูนย์กลางรัศมียาวเท่ากับ $\frac{a}{3}$ เขียนส่วนโค้งตัด $\overrightarrow{AX}$ ที่จุด D
4. สร้าง $Y\hat{D}A$ ให้ $Y\hat{D}A = X\hat{A}B$ โดยที่ $Y\hat{D}A$ และ $X\hat{A}B$ เป็นมุมแย้ง
5. สร้าง $Z\hat{B}F$ ให้ $Z\hat{B}F = X\hat{A}B$
6. ลาก $\overrightarrow{YD}$ ตัด $\overrightarrow{BZ}$ ที่จุด C

จะได้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ที่ $AB = a$, $AD = \frac{a}{3}$ และ $D\hat{A}B = k$ ตามต้องการ

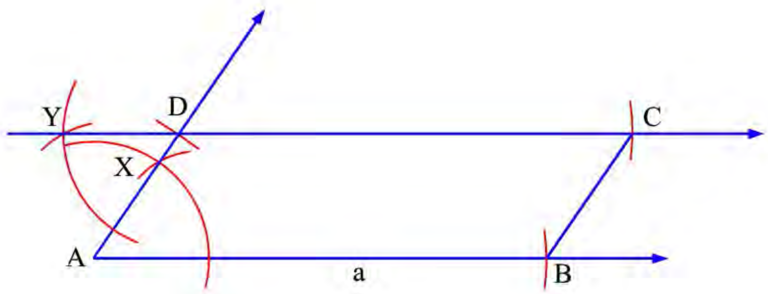
วิธีที่ 2 สร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน โดยสร้างรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามยาวเท่ากันสองคู่



1. สร้าง $\overline{AB}$ ยาวเท่ากับ a
2. สร้าง $X\hat{A}B$ ให้มีขนาดเท่ากับ k
3. ใช้ A เป็นจุดศูนย์กลางรัศมียาวเท่ากับ $\frac{a}{3}$ เขียนส่วนโค้งตัด $\overrightarrow{AX}$ ที่จุด D
4. ใช้จุด D และจุด B เป็นจุดศูนย์กลางรัศมียาวเท่ากับ a และ $\frac{a}{3}$ ตามลำดับ เขียนส่วนโค้งตัดกันที่จุด C
5. ลาก $\overline{BC}$ และ $\overline{DC}$

จะได้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ที่ $AB = a$, $AD = \frac{a}{3}$ และ $D\hat{A}B = k$ ตามต้องการ

วิธีที่ 3 สร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน โดยสร้างเป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านขนานกันหนึ่งคู่และให้ด้านคู่นี้ยาวเท่ากัน

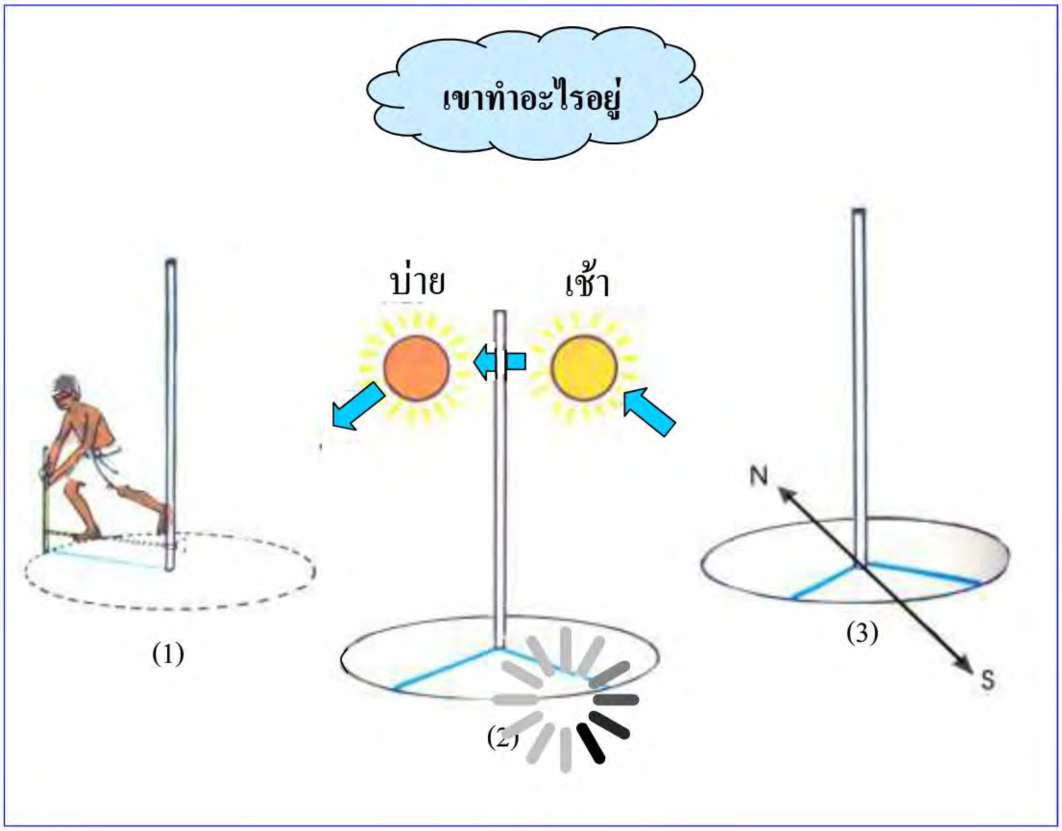


1. สร้าง $\overline{AB}$ ยาวเท่ากับ a
2. สร้าง $X\hat{A}B$ ให้มีขนาดเท่ากับ k
3. ใช้จุด A เป็นจุดศูนย์กลางรัศมียาวเท่ากับ $\frac{a}{3}$ เขียนส่วนโค้งตัด $\overrightarrow{AX}$ ที่จุด D
4. สร้าง $Y\hat{D}A$ ให้ $Y\hat{D}A = X\hat{A}B$ โดยที่ $Y\hat{D}A$ และ $X\hat{A}B$ เป็นมุมแย้ง
5. ลาก $\overrightarrow{YD}$ และสร้างให้ $DC = AB = a$
6. ลาก $\overline{BC}$

จะได้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ที่ $AB = a$, $AD = \frac{a}{3}$ และ $D\hat{A}B = k$ ตามต้องการ

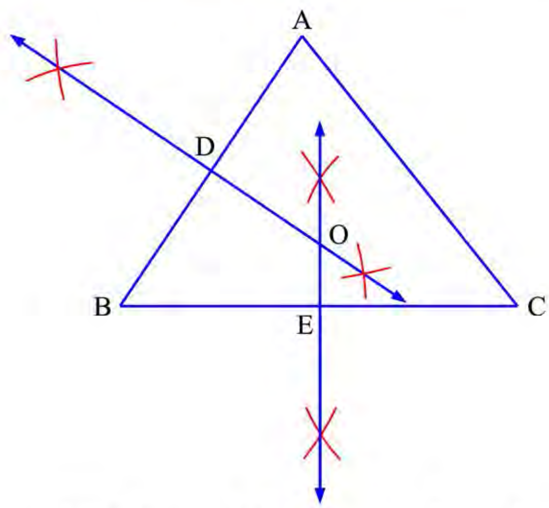
แบบฝึกหัด 4.3

1. จงกำหนดส่วนของเส้นตรงให้มีความยาวเท่ากับ a, b และ c ตามใจชอบ แล้วสร้างรูปสามเหลี่ยมให้ด้านทั้งสามยาวเท่ากับ a, b และ c จะต้องกำหนด a, b และ c ให้สัมพันธ์กันอย่างไร จึงจะสร้างรูปสามเหลี่ยมได้
2. จงกำหนดส่วนของเส้นตรงให้มีความยาวเท่ากับ a และมุมให้มีขนาดเท่ากับ k ตามใจชอบ แล้วสร้างรูปสามเหลี่ยมที่มีมุมขนาดเท่ากับ k สองมุม และด้านที่เป็นแขนร่วมของมุมทั้งสองนั้นยาวเท่ากับ a รูปสามเหลี่ยมที่ได้เป็นรูปสามเหลี่ยมชนิดใด จงอธิบาย
3. จงกำหนดส่วนของเส้นตรงให้มีความยาวเท่ากับ a และ b ตามใจชอบ แล้วสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉากให้ด้านตรงข้ามมุมฉากยาวเท่ากับ a และด้านประกอบมุมฉากด้านหนึ่งยาวเท่ากับ b จะต้องกำหนด a และ b ให้สัมพันธ์กันอย่างไรจึงจะสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่ต้องการได้
4. จงสร้าง ΔABC ให้ด้าน AB ยาวเท่ากับ 5 เซนติเมตร ฐาน BC ยาวเท่ากับ 7 เซนติเมตร และส่วนสูงที่ลากจากจุด A ยาวเท่ากับ 3 เซนติเมตร
5. จงสร้าง Δ ABC ให้มี AB = 6 เซนติเมตร $B\hat{A}C$ = 52.5 องศา และ $A\hat{B}C$ = 45 องศา และเขียนวิธีสร้าง
6. จงสร้างรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนให้มีด้านหนึ่งยาว 8 เซนติเมตร และสูง 5 เซนติเมตร
7. จงสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานให้ฐานยาว 6 เซนติเมตร สูง 4 เซนติเมตร และมุมที่ฐานมุมหนึ่งมีขนาดเท่ากับ 75 องศา
8. จงกำหนดส่วนของเส้นตรงให้มีความยาวเท่ากับ a ตามใจชอบ แล้วสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD ที่มี AB = a, AD = 2a และ $A\hat{B}C = 2\ B\hat{A}D$



ที่มา : ดัดแปลงจาก Mathematics : Man's Key To Progress, Book A หน้า 24

ศูนย์กลางวงล้อม



กำหนด Δ ABC ที่มี $\overleftrightarrow{OD}$ และ $\overleftrightarrow{OE}$ เป็นเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ และ $\overline{BC}$ ที่จุด D และ E ตามลำดับ และให้ $\overleftrightarrow{OD}$ ตัดกับ $\overleftrightarrow{OE}$ ที่จุด O

ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้

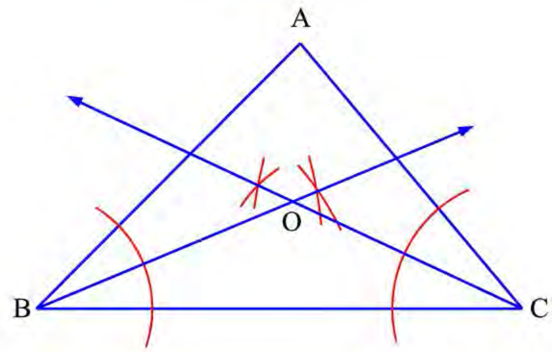
1. สร้าง $\overleftrightarrow{OF}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AC}$ ที่จุด F
2. จงใช้วงเวียนตรวจสอบความยาวของ $\overline{AF}$ และความยาวของ $\overline{CF}$
3. AF และ CF สัมพันธ์กันอย่างไร
4. $\overleftrightarrow{OF}$ เป็นเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ $\overline{AC}$ ที่จุด F หรือไม่

จากการสร้างและตรวจสอบข้างต้นจะได้ผลตรงตามสมบัติที่ว่า *ในรูปสามเหลี่ยมใด ๆ เส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับด้านแต่ละด้านจะพบกันที่จุดจุดหนึ่งและจุดเดียวเท่านั้น จุดนี้คือ* **ศูนย์กลางวงล้อม**

5. ให้นักเรียนใช้ O เป็นจุดศูนย์กลาง เขียนวงกลมผ่านจุด A โดยใช้รัศมียาวเท่ากับ OA วงกลมนี้ผ่านจุด B และจุด C หรือไม่

สิ่งที่นักเรียนพบจะเป็นคำตอบว่า เพราะเหตุใด จุด O จึงเป็นศูนย์กลางวงล้อม

ศูนย์กลางวงกลมแนบใน



กำหนด ΔABC ที่มี $\overrightarrow{BO}$ และ $\overrightarrow{CO}$ เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม $A\hat{B}C$ และ $A\hat{C}B$ ตามลำดับ และให้ $\overrightarrow{BO}$ ตัดกับ $\overrightarrow{CO}$ ที่จุด O

ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้

1. ลาก $\overrightarrow{AO}$
2. ใช้วงเวียนตรวจสอบขนาดของ $B\hat{A}O$ และขนาดของ $C\hat{A}O$
3. $B\hat{A}O$ และ $C\hat{A}O$ สัมพันธ์กันอย่างไร
4. $\overrightarrow{AO}$ เป็นเส้นแบ่งครึ่ง $B\hat{A}C$ หรือไม่

จากการสร้างและตรวจสอบข้างต้นจะได้ผลตรงตามสมบัติที่ว่า *ในรูปสามเหลี่ยมใด ๆ เส้นแบ่งครึ่งมุมภายในทั้งสามเส้นจะพบกันที่จุดจุดหนึ่งและจุดเดียวเท่านั้น* จุดนี้คือ **ศูนย์กลางวงกลมแนบใน**

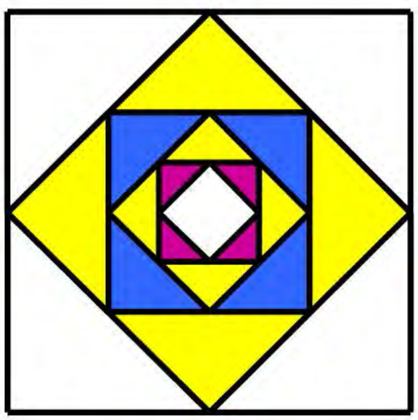
5. ให้นักเรียนสร้าง $\overline{OD}$, $\overline{OE}$ และ $\overline{OF}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ และ $\overline{AC}$ ที่จุด D, จุด E และจุด F ตามลำดับ
6. ให้นักเรียนใช้ O เป็นจุดศูนย์กลาง เขียนวงกลมผ่านจุด D โดยใช้รัศมียาวเท่ากับ OD วงกลมนี้ผ่านจุด E และจุด F หรือไม่

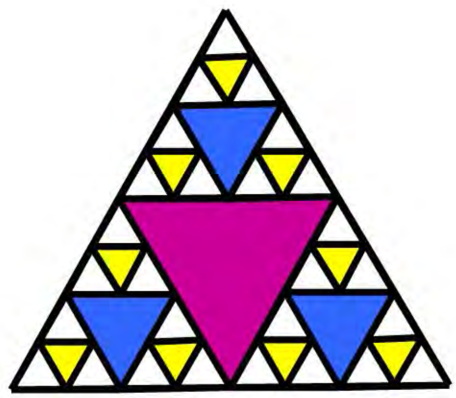
สิ่งที่นักเรียนพบจะเป็นคำตอบว่า เพราะเหตุใด จุด O จึงเป็นศูนย์กลางวงกลมแนบใน

ภาพประดิษฐ์

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างภาพประดิษฐ์ที่ได้จากการสร้างทางเรขาคณิต

1. ให้นักเรียนวิเคราะห์ว่า แต่ละภาพได้มาอย่างไร
2. ให้นักเรียนใช้ความรู้จากการสร้างทางเรขาคณิตประดิษฐ์ภาพหนึ่งภาพ





บรรณานุกรม

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2541). **คู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์ รายวิชา ค ๑๐๑ คณิตศาสตร์ ๑ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่หนึ่ง หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช ๒๕๒๑ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๓๓).** พิมพ์ครั้งที่ 4. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2541). **คู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์ รายวิชา ค ๑๐๒ คณิตศาสตร์ ๒ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่หนึ่ง หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช ๒๕๒๑ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๓๓).** พิมพ์ครั้งที่ 4. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2537). **คู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์ รายวิชา ค ๒๐๓ คณิตศาสตร์ ๓ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่สอง หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช ๒๕๒๑ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๓๓).** พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2541). **คู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์ รายวิชา ค ๒๐๔ คณิตศาสตร์ ๔ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่สอง หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช ๒๕๒๑ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๓๓).** พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2545). **คู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์ รายวิชา ค ๐๑๑ ชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช ๒๕๒๑ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๓๓).** พิมพ์ครั้งที่ 5. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2545). **หนังสือเรียน วิชาคณิตศาสตร์ เสริมทักษะคณิตศาสตร์ 1 ค 031 ชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น.** พิมพ์ครั้งที่ 12. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

ธนาคารแห่งประเทศไทย. (2530). **วิวัฒนาการธนบัตรไทย.** กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์กรุงเทพจำกัด.

ศึกษาธิการ, กระทรวง. (2525). **หนังสือประกอบการสอน วิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่หนึ่ง.** กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

Bolster, Carey L., and other. (1996). **Exploring Mathmatics Teacher's Edition Grade 6.** Illinois. U.S.A. : Scott. Foresman and Company.

Charles, Randall I., and others. (1995). **Addison – Wesley Mathematics Teacher's Edition Grade 7.** New York, U.S.A. : Addison – Wesley Publishing Company, Inc.

Denholm, Richard A. (1970). **Mathematics : Man's key to progress.** California, U.S.A. : Franklin Publications. Inc.

Eichoiz, Robert E., and others. (1995) . **Addison – Wesley Mathematics Teacher's Edition Grade 6.** New York, U.S.A. : Addison – Wesley Publishing Company, Inc.

Fey, James T., and others. (1998). **Accentuate the Negative : Integers.** U.S.A. : Dale Seymour Publications.

Fey, James T., and others. (1998). **Bits and Pieces I : Understanding Rational Numbers.** U.S.A. : Dale Seymour Publications.

Forster, lan and Thomson Sue. (2001). **Access to General Maths :** HSC. Australia. : Pearson Education Australia Pty Limited.

Jackson, Audrey L., and others. (1996). **Mathematics in Action Teacher's Edition – Part 2.**

Jurgensen, Ray C, Brown Richard G, and Jurgensen John W. (1994). **Geometry.** Boston, MA. U.S.A. : Houghton Mifflin Company.

Serra, Michael. (1993). **Discovering Geometry An Inductive Approach :** Berkeley, U.S.A. : Key Curriculum Press.

ภาคผนวก

บัญชีศัพท์

บทที่ 1

รูปเรขาคณิต	geometric figure
เส้นโค้ง	curve
รูปสามเหลี่ยม	triangle
ความยาวรอบรูป เส้นรอบรูป	perimeter
เส้นโค้งปิดเชิงเดียว	single closed curve
จุดข้างใน	interior point
จุดข้างนอก	exterior point
แทนแกรม	Tangram
จำนวนนับ	counting number
จำนวนเฉพาะ	prime number
ตะแกรงเอราทอสเทนีส	The Sieve of Eratosthenes
ขั้นตอนวิธีแบบยุคลิด	Euclidean algorithm
ตัวหารร่วมมาก (ห.ร.ม.)	greatest common divisor (G.C.D.)
ตัวคูณร่วมน้อย (ค.ร.น.)	least common multiple (L.C.M.)
ร้อยละ เปอร์เซ็นต์	percent
ดอกเบี้ย	interest
โบนัส	bonus

บทที่ 2

จำนวน	number
ตัวเลข	numeral

ค่าประจำหลัก	place value
เลขโดด	digit
รูปกระจาย	expansion form
ระบบตัวเลขฐานสิบ	decimal numeral system
ระบบตัวเลขฐานห้า	base five numeral system
ระบบตัวเลขฐานสอง	binary numeral system
ระบบตัวเลขฐานสิบสอง	duodecimal numeral system

บทที่ 3

จำนวนเต็ม	integer
เลขยกกำลัง	power
สมบัติการสลับที่	commutative property
สมบัติการเปลี่ยนหมู่	associative property
การดำเนินการ (ทวิภาค)	(binary) operation
สมบัติการแจกแจง	distributive property
สัญกรณ์วิทยาศาสตร์	scientific notation

บทที่ 4

การสร้าง (ทางเรขาคณิต)	(geometric) construction
มุมแย้ง	alternate angles
เส้นมัธยฐาน	median
เซนทรอยด์	centroid
รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน	parallelogram
รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน	rhombus
ศูนย์กลางวงล้อม	circumcentre
ศูนย์กลางวงกลมแนบใน	in-centre

บัญชีสัญลักษณ์

บทที่ 1

$\overline{AB}$	ส่วนของเส้นตรง AB
AB	ความยาวของส่วนของเส้นตรง AB
	รูปสี่เหลี่ยม
Δ	รูปสามเหลี่ยม
%	เปอร์เซ็นต์ ร้อยละ

บทที่ 2

$>$	มากกว่า
$<$	น้อยกว่า
$=$	เท่ากับ

บทที่ 3

( )	วงเล็บเล็ก
{ }	วงเล็บปีกกา
[ ]	วงเล็บใหญ่ วงเล็บก้ามปู
$\approx$	ประมาณ

บทที่ 4

$A\hat{B}C$	มุม ABC
$m(A\hat{B}C)$	ขนาดของมุม ABC
$\overrightarrow{BA}$	รังสี BA
$\overleftrightarrow{XY}$	เส้นตรง XY

คณะกรรมการจัดทำสื่อการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

นางปิยรัตน์ จาตุรันตบุตร	สถาบันราชภัฏสวนดุสิต
นางสาวลัดดาวัลย์ เพ็ญสุภา	มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์
นายปรีชา เนาว์เย็นผล	มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช
นางสาวสาคร บุญดาว	มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช
นายสมนึก บุญพาไสว	มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานคร
นางจรรยา ภูอุดม	โรงเรียนดอนเมืองจาตุรจินดา
นางยุพิน พิพิธกุล	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางจารุนี สูตะบุตร	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นายสมพล เล็กสกุล	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางอารียา สุวรรณคำ	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางเจริญศรี จันไพบูลย์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวจันทร์เพ็ญ ชุมคช	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวจารุวรรณ แสงทอง	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวปานทอง กุลนาถศิริ	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางชุลีพร สุภธีระ	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางชมัยพร ตั้งตน	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวรจนา รัตนานิคม	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาววันดี ตีระสหกุล	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวคนิตา ชื่นอารมณ์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวพิลาลักษณ์ ทองทิพย์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

คณะบรรณาธิการ

นางยุพิน พิพิธกุล	นางปิยรัตน์ จาตุรันตบุตร
นางจารุนี สูตะบุตร	นางสาวจารุวรรณ แสงทอง
นายสมพล เล็กสกุล	นางชุลีพร สุภธีระ

คณะบรรณาธิการดำเนินงานปรับปรุงหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์

นายดนัย ยังคง
นางสาวอัมพร ม้าคนอง
นางสาวลัดดาวัลย์ เพ็ญสุภา
นางสุวรรณา คล้ายกระแส
นางชมัยพร ตั้งตน
นายปรีชา เนาว์เย็นผล
นายสมนึก บุญพาไสว

ภาพ

นางวรพรรณ ทิณพงษ์
นางสาวดนพร จรัสแสงสกุล

ผู้จัดพิมพ์ต้นฉบับ

นางสาวเสาวนีย์ ประมูลทรัพย์

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

พฐ.คณิตศม.1ล.1
9 789740 162315
ราคา 45.00 บาท

ศึกษาภัณฑ์พาณิชย์
พิมพ์ที่โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว
นายรินภัทร ภูมิรัตน ผู้พิมพ์และผู้โฆษณา
๕๓๐๐๐๔๕
www.suksapan.or.th