ฉบับคู่มือครู

หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐาน

คณิตศาสตร์ เล่ม ๑

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๑

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑

กระทรวงศึกษาธิการ

สสวท

๓๗.-

หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐาน

คณิตศาสตร์ เล่ม ๑

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๑

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑

จัดทำโดย

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

กระทรวงศึกษาธิการ

ISBN 978 - 974 - 01 - 6221 - 6

พิมพ์ครั้งที่หนึ่ง ๘๐๐,๐๐๐ เล่ม

พ.ศ. ๒๕๕๒

องค์การค้าของ สกสค. จัดพิมพ์จำหน่าย

พิมพ์ที่โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว

๒๒๔๙ ถนนลาดพร้าว วังทองหลาง กรุงเทพมหานคร

ประกาศกระทรวงศึกษาธิการ
เรื่อง อนุญาตให้ใช้หนังสือในสถานศึกษา

ด้วยสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน กระทรวงศึกษาธิการได้มอบหมายให้สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี จัดทำหนังสือเรียน รายวิชาพื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม ๑ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๑ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช ๒๕๕๑ สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐานได้พิจารณาแล้ว อนุญาตให้ใช้หนังสือเล่มนี้ในสถานศึกษาได้

ประกาศ ณ วันที่ ๑๑ ธันวาคม พ.ศ. ๒๕๕๒

(นายชินภัทร ภูมิรัตน)
เลขาธิการคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน

คำนำ

หนังสือเรียน รายวิชาพื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม ๑ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๑ นี้ จัดทำขึ้นตามตัวชี้วัดและมาตรฐานการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ สำหรับให้สถานศึกษาเลือกใช้ประกอบการเรียนการสอนและใช้เป็นแนวทางในการออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้ ให้ความรู้ความเข้าใจผู้เรียนนำไปสู่ทักษะการคิดวิเคราะห์ สังเคราะห์ ตามความสามารถและความแตกต่างระหว่างบุคคลของผู้เรียนได้ ในการจัดทำหนังสือเล่มนี้ ได้รับความช่วยเหลือจากคณาจารย์ ผู้ทรงคุณวุฒิ ผู้เชี่ยวชาญด้านคณิตศาสตร์จากสถาบันต่างๆ ทั้งภาครัฐและเอกชนเป็นอย่างดี

สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน หวังเป็นอย่างยิ่งว่าหนังสือเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการจัดการเรียนรู้ เพื่อประยุกต์ใช้พัฒนาการเรียนรู้ของผู้เรียนได้อย่างเหมาะสม ขอขอบคุณสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ตลอดจนบุคคลและหน่วยงานที่มีส่วนเกี่ยวข้องในการจัดทำหนังสือไว้ ณ โอกาสนี้

(นายชินภัทร ภูมิรัตน)
เลขาธิการคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน
๑๑ ธันวาคม ๒๕๕๒

คำชี้แจง

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้รับมอบหมายจากกระทรวงศึกษาธิการ ให้พัฒนาหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ กลุ่มสาระการเรียนรู้วิทยาศาสตร์ รวมทั้งสาระการออกแบบและ เทคโนโลยีและสาระเทคโนโลยีสารสนเทศในกลุ่มสาระการเรียนรู้การงานอาชีพและเทคโนโลยี ตลอดจนจัดทำสื่อการเรียนรู้ตามหลักสูตรดังกล่าว

หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ สำหรับระดับมัธยมศึกษาตอนต้น มีด้วยกันทั้งหมด 6 เล่ม จัดทำขึ้นเพื่อให้ผู้เรียนสามารถเรียนรู้และพัฒนาตนเอง นำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปพัฒนาชีวิต และเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตลอดจนศาสตร์อื่นๆ ในระดับที่สูงขึ้น ทั้งนี้สถานศึกษาสามารถปรับใช้เนื้อหาจากหนังสือเรียนทั้ง 6 เล่มนี้ เพื่อจัดการเรียนการสอนรายวิชาพื้นฐาน คณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ได้ตามความเหมาะสม

หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ประกอบด้วยเรื่อง สมบัติของจำนวนนับ ระบบจำนวนเต็ม เลขยกกำลัง และพื้นฐานทางเรขาคณิต ซึ่งเป็นเนื้อหาสาระตามมาตรฐานการเรียนรู้ตามที่กำหนดไว้ในหลักสูตร อย่างไรก็ตามผู้สอนสามารถปรับบทเรียนให้เหมาะสมกับศักยภาพของผู้เรียนแต่ละกลุ่ม

การจัดทำหนังสือเรียนคณิตศาสตร์เล่มนี้ สสวท. ได้รับความร่วมมืออย่างดียิ่งจากคณาจารย์ ผู้ทรงคุณวุฒิ นักวิชาการ และครูผู้สอน จากหลายหน่วยงาน ทั้งภาครัฐและเอกชน สสวท. จึงขอขอบคุณทุกท่านไว้ ณ ที่นี้ และหวังเป็นอย่างยิ่งว่าหนังสือเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการศึกษาคณิตศาสตร์ อันเป็นรากฐานสำคัญของการพัฒนาทรัพยากรมนุษย์ของชาติต่อไป หากมีข้อเสนอแนะใดที่จะทำให้หนังสือเรียนเล่มนี้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น โปรดแจ้งให้สาขาคณิตศาสตร์มัธยมศึกษา สสวท. ทราบด้วย จักขอบคุณยิ่ง

(นางสาวนารี วงศ์สิโรจน์กุล)
รองผู้อำนวยการ รักษาการแทน
ผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

สารบัญ

สารบัญ

บทที่ 1

ตัวหารร่วมมากและตัวคูณร่วมน้อย

จำนวนซึ่งเป็นที่รู้จักและได้นำมาใช้เพื่อแสดงจำนวนของสิ่งต่าง ๆ ได้แก่ 1, 2, 3, … เรียกจำนวนเหล่านี้ว่า **จำนวนนับ**

นอกจากนี้ยังมีการบวก การลบ การคูณ และการหารจำนวนนับ การหารจำนวนนับอาจเป็นการหารลงตัวหรือเป็นการหารไม่ลงตัวก็ได้ ในกรณีที่เป็น**การหารลงตัว** เช่น $15 \div 3 = 5$ เรียก 3 ว่า **ตัวหาร** หรือ **ตัวประกอบ**ของ 15

ตัวประกอบของจำนวนนับใด คือ จำนวนนับที่หารจำนวนนับนั้นลงตัว เช่น

ตัวประกอบทั้งหมดของ 10 คือ **1**, **2**, 5 และ 10

ตัวประกอบทั้งหมดของ 12 คือ **1**, **2**, 3, 4, 6 และ 12

จะเห็นว่า 1 และ 2 เป็นตัวประกอบของทั้ง 10 และ 12 จึงเรียก 1 และ 2 ว่า **ตัวประกอบร่วม** หรือ **ตัวหารร่วม**ของ 10 และ 12

เนื่องจาก 1 หารจำนวนนับทุกจำนวนลงตัว ดังนั้น 1 จึงเป็นตัวประกอบร่วมของจำนวนนับทุกจำนวน

จำนวนนับที่มากกว่า 1 และมีตัวประกอบเพียงสองตัว คือ 1 และ ตัวเอง เรียกว่า **จำนวนเฉพาะ** เช่น 2, 3, 5, 7, 11 เป็นจำนวนเฉพาะแต่ 1, 4, 6, 8, 9, 10 ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ

ตัวประกอบที่เป็นจำนวนเฉพาะ เรียกว่า **ตัวประกอบเฉพาะ** เช่น

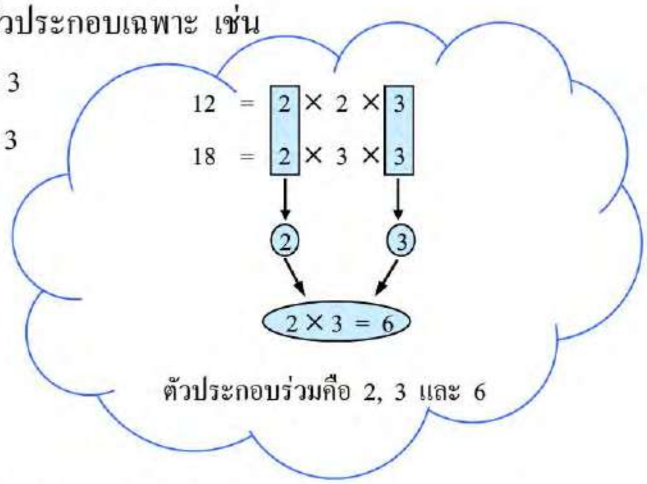
3 และ 5 เป็นตัวประกอบเฉพาะของ 15

2 และ 7 เป็นตัวประกอบเฉพาะของ 14

การแยกตัวประกอบของจำนวนนับใด คือ ประโยคที่แสดงการเขียนจำนวนนับนั้นในรูปการคูณของตัวประกอบเฉพาะ เช่น

$12 = 2 \times 2 \times 3$

$18 = 2 \times 3 \times 3$



จากการแยกตัวประกอบข้างต้น จะเห็นว่าตัวประกอบร่วมหรือตัวหารร่วมของ 12 และ 18 คือ 2, 3 และ 6

1.1 ตัวหารร่วมมากและการนำไปใช้

พิจารณาปัญหาต่อไปนี้

ชาวสวนต้องการล้อมรั้วรอบที่ดินรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแปลงหนึ่งซึ่งมีขนาดกว้าง 48 เมตร ยาว 76 เมตร โดยปักเสาแต่ละต้นให้ห่างเท่า ๆ กันเป็นจำนวนเต็มที่มีหน่วยเป็นเมตรทุกด้าน เขาจะปักเสาให้ห่างกันเท่าไรได้บ้างและห่างกันมากที่สุดกี่เมตร

จากปัญหาข้างต้นอาจแก้ปัญหาโดยการทดลองปักเสาแต่ละต้นให้ห่างกันช่วงละ 1 เมตร หรือ 2 เมตร หรือ 3 เมตร เพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ และต้องปักโดยไม่ให้เหลือเศษ จนได้ระยะห่างเท่ากันที่มากที่สุด ซึ่งต้องใช้เวลาทดลองนานกว่าจะได้ระยะที่ต้องการ

ในทางคณิตศาสตร์ มีวิธีคิดหาระยะดังกล่าวได้รวดเร็วกว่า เพราะระยะปักเสาให้ห่างเท่ากันนั้นเป็นจำนวนนับที่หารทั้ง 48 และ 76 ลงตัว ซึ่งจำนวนเหล่านั้น คือ ตัวหารร่วมของ 48 และ 76 นั่นเองและเมื่อโจทย์ต้องการปักเสาให้ห่างเท่า ๆ กันมากที่สุด ตัวหารร่วมที่ต้องการจึงเป็นตัวหารร่วมที่มากที่สุดของ 48 และ 76 เรียกว่า **ตัวหารร่วมมาก**ของ 48 และ 76 ซึ่งเขียนย่อ ๆ ว่า **ห.ร.ม.** ของ 48 และ 76

ห.ร.ม. ของ 48 และ 76 อาจหาได้ดังนี้

จำนวนนับที่หาร 48 ลงตัว ได้แก่ **1, 2,** 3, **4**, 6, 8, 12, 16, 24 และ 48

จำนวนนับที่หาร 76 ลงตัว ได้แก่ **1, 2, 4**, 19, 38 และ 76

จะเห็นว่า 1, 2 และ 4 ต่างก็เป็นตัวหารร่วมของ 48 และ 76

นั่นคือ ชาวสวนสามารถปักเสาให้ห่างเท่า ๆ กันได้ 1 เมตร หรือ 2 เมตร หรือ 4 เมตร

เนื่องจาก 4 เป็นตัวหารร่วมที่มากที่สุด 4 จึงเป็น ห.ร.ม. ของ 48 และ 76

ดังนั้น ชาวสวนจะปักเสาให้ห่างกันได้มากที่สุด 4 เมตร

เนื่องจากการหา ห.ร.ม. ของจำนวนนับตั้งแต่สองจำนวนขึ้นไปเป็นการหาตัวหารร่วมหรือตัวประกอบร่วมที่มากที่สุดของจำนวนนับเหล่านั้น เราจึงอาศัยการหาตัวประกอบร่วมในการหา ห.ร.ม.ของจำนวนนับได้โดยวิธีต่าง ๆ ดังนี้

วิธีที่ 1 **โดยการพิจารณาตัวประกอบ**

ตัวอย่างการหา ห.ร.ม. ของ 30 และ 45

เนื่องจาก ตัวประกอบของ 30 ได้แก่ **1**, 2, **3**, **5**, 6, 10, **15** และ 30

ตัวประกอบของ 45 ได้แก่ **1**, **3**, **5**, 9, **15** และ 45

จะเห็นว่า ตัวประกอบร่วมของ 30 และ 45 ได้แก่ 1, 3, 5 และ 15

ตัวประกอบร่วมที่มากที่สุดของ 30 และ 45 คือ 15

ดังนั้น ห.ร.ม. ของ 30 และ 45 คือ 15

วิธีที่ 2 **โดยการแยกตัวประกอบ**

ตัวอย่างการหา ห.ร.ม. ของ 18 และ 30

การแยกตัวประกอบของ 18 และ 30 ทำได้ดังนี้

$$18 = \boxed{2} \times \boxed{3} \times 3$$

$$30 = \boxed{2} \times \boxed{3} \times 5$$

จากการแยกตัวประกอบของ 18 และ 30 จะเห็นว่า ตัวประกอบร่วมของ 18 และ 30 ได้แก่ 2, 3 และ 2×3

ตัวประกอบร่วมที่มากที่สุดของ 18 และ 30 คือ $2 \times 3 = 6$

ดังนั้น ห.ร.ม. ของ 18 และ 30 คือ 6

วิธีที่ 3 **โดยการตั้งหาร**

ตัวอย่างการหา ห.ร.ม. ของ 24, 36 และ 48

การหา ห.ร.ม. ของ 24, 36 และ 48 โดยการตั้งหารทำได้ดังนี้

นำ 2 ซึ่งเป็นจำนวนเฉพาะที่เป็นตัวประกอบร่วมของ 24, 36 และ 48 ไปหาร 24, 36 และ 48 ได้ดังนี้

$$\begin{array}{r|lll} 2 & 24 & 36 & 48 \\ \hline & 12 & 18 & 24 \end{array}$$

นำ 2 ซึ่งเป็นจำนวนเฉพาะที่เป็นตัวประกอบร่วมของ 12, 18 และ 24 ไปหาร 12, 18 และ 24 ได้ดังนี้

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 12 & 18 & 24 \\ \hline & 6 & 9 & 12 \end{array}$$

นำ 3 ซึ่งเป็นจำนวนเฉพาะที่เป็นตัวประกอบร่วมของ 6, 9 และ 12 ไปหาร 6, 9 และ 12 ได้ดังนี้

$$\begin{array}{r|rrr} 3 & 6 & 9 & 12 \\ \hline & 2 & 3 & 4 \\ \hline\hline \end{array}$$

เนื่องจากไม่มีจำนวนเฉพาะใดเป็นตัวประกอบร่วมของ 2, 3 และ 4 จึงยุติการหาร

ดังนั้น ห.ร.ม. ของ 24, 36 และ 48 หาได้จาก $2 \times 2 \times 3$ ซึ่งเท่ากับ 12

สรุปขั้นตอนการหา ห.ร.ม. ของ 24, 36 และ 48 โดยการตั้งหารได้ดังนี้

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 24 & 36 & 48 \\ \hline 2 & 12 & 18 & 24 \\ \hline 3 & 6 & 9 & 12 \\ \hline & 2 & 3 & 4 \\ \hline\hline \end{array}$$

ดังนั้น ห.ร.ม. ของ 24, 36 และ 48 คือ $2 \times 2 \times 3 = 12$

ข้อสังเกต 1. ในแต่ละขั้นตอนของการหาร จำนวนที่นำไปหารต้องเป็นจำนวนเฉพาะที่เป็นตัวประกอบร่วมของทุกจำนวนที่ต้องการหารซึ่งอาจมีหลายจำนวน เลือกจำนวนเฉพาะจำนวนใดจำนวนหนึ่งไปหารก่อนก็ได้

2. การหารจะยุติเมื่อไม่มีจำนวนเฉพาะที่เป็นตัวประกอบร่วมของทุกจำนวนที่ต้องการหาร

3. ห.ร.ม. ที่ได้ คือ ผลคูณของจำนวนเฉพาะที่นำไปหารในแต่ละขั้นตอน

ตัวอย่างที่ 1 จงหา ห.ร.ม. ของ 42 และ 105

วิธีทำ แยกตัวประกอบของ 42 และ 105 ได้ดังนี้

$$42 = 2 \times \boxed{3} \times \boxed{7}$$

$$105 = \boxed{3} \times 5 \times \boxed{7}$$

ดังนั้น ห.ร.ม. ของ 42 และ 105 คือ $3 \times 7 = 21$

ตอบ 21

ตัวอย่างที่ 2 จงหา ห.ร.ม. ของ 210, 315 และ 525

วิธีทำ แยกตัวประกอบของ 210, 315 และ 525 ได้ดังนี้

$$210 = 2 \times \boxed{3} \times \boxed{5} \times \boxed{7}$$

$$315 = 3 \times \boxed{3} \times \boxed{5} \times \boxed{7}$$

$$525 = \boxed{3} \times 5 \times \boxed{5} \times \boxed{7}$$

ดังนั้น ห.ร.ม. ของ 210, 315 และ 525 คือ $3 \times 5 \times 7 = 105$

ตอบ 105

ตัวอย่างที่ 3 จงหา ห.ร.ม. ของ 9 และ 14

วิธีทำ แยกตัวประกอบของ 9 และ 14 ได้ดังนี้

$$9 = 3 \times 3$$

$$14 = 2 \times 7$$

จากการแยกตัวประกอบ จะเห็นว่า ไม่มีจำนวนนับที่มากกว่า 1 เป็นตัวประกอบร่วมของ 9 และ 14

ดังนั้น ห.ร.ม. ของ 9 และ 14 คือ 1

ตอบ 1

ตัวอย่างที่ 4 จงหา ห.ร.ม. ของ 23 และ 49

วิธีทำ เนื่องจาก 23 เป็นจำนวนเฉพาะ และ 23 ไม่เป็นตัวประกอบของ 49

ตัวประกอบร่วมของ 23 และ 49 มีเพียงจำนวนเดียว คือ 1

ดังนั้น ห.ร.ม. ของ 23 และ 49 คือ 1

ตอบ 1

ตัวอย่างที่ 5 จงหา ห.ร.ม. ของ 35, 105, 280 และ 385

วิธีทำ

$$
\begin{array}{r|rrrr}
5 & 35 & 105 & 280 & 385 \\ \hline
7 & 7 & 21 & 56 & 77 \\ \hline
 & 1 & 3 & 8 & 11 \\ \hline\hline
\end{array}
$$

ดังนั้น ห.ร.ม. ของ 35, 105, 280 และ 385 คือ $5 \times 7 = 35$

ตอบ 35

เราสามารถนำความรู้เกี่ยวกับ ห.ร.ม. ไปใช้ในการแก้ปัญหาบางปัญหาได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 6 จงหาจำนวนนับที่มากที่สุดที่หาร 15, 23 และ 31 แล้วเหลือเศษ 1, 2 และ 3 ตามลำดับ

วิธีทำ จำนวนนับที่หาร 15 แล้วเหลือเศษ 1 จะเป็นจำนวนที่หาร $15 - 1$ หรือ 14 ลงตัว

จำนวนนับที่หาร 23 แล้วเหลือเศษ 2 จะเป็นจำนวนที่หาร $23 - 2$ หรือ 21 ลงตัว

จำนวนนับที่หาร 31 แล้วเหลือเศษ 3 จะเป็นจำนวนที่หาร $31 - 3$ หรือ 28 ลงตัว

จำนวนนับที่มากที่สุดที่หาร 14, 21 และ 28 ลงตัวจะเป็น ห.ร.ม. ของ 14, 21 และ 28

หา ห.ร.ม. ของ 14, 21 และ 28 ได้ดังนี้

$$\begin{array}{r|rrr} 7 & 14 & 21 & 28 \\ \hline & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

ตรวจสอบได้อย่างไรว่า 7 เป็นคำตอบที่ต้องการ

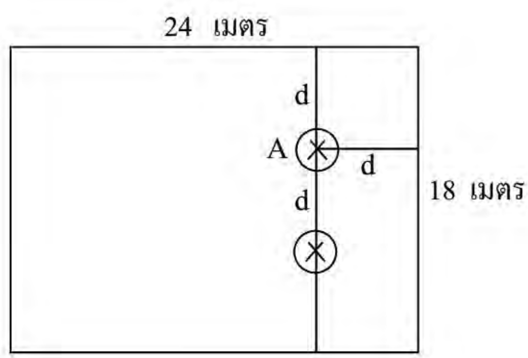
ห.ร.ม. ของ 14, 21 และ 28 คือ 7

ดังนั้น จำนวนนับที่มากที่สุดที่หาร 15, 23 และ 31 แล้วเหลือเศษ 1, 2 และ 3 ตามลำดับ คือ 7

ตอบ 7

ตัวอย่างที่ 7 ต้องการติดตั้งพัดลมเพดานในห้องประชุมซึ่งกว้าง 18 เมตร ยาว 24 เมตร โดยให้พัดลมแต่ละตัวมีระยะห่างเท่ากันและตัวที่อยู่ใกล้ฝาผนังมีระยะห่างจากฝาผนังเท่ากับระยะห่างจากพัดลมตัวอื่น ๆ จงหาว่าต้องใช้พัดลมอย่างน้อยที่สุดกี่ตัว

วิธีทำ



ให้ A แทนจุดหนึ่งที่ติดตั้งพัดลม

d แทนระยะห่างระหว่างพัดลมกับพัดลม และระยะห่างระหว่างพัดลมกับฝาผนัง

เนื่องจากต้องการใช้พัดลมจำนวนน้อยตัวที่สุด ดังนั้น d จึงต้องเป็นจำนวนนับที่มากที่สุดที่หาร 18 และ 24 ลงตัว

นั่นคือ d เป็น ห.ร.ม. ของ 18 และ 24

ห.ร.ม. ของ 18 และ 24 คือ 6

ดังนั้น ระยะห่างระหว่างพัดลมกับพัดลมและระยะห่างระหว่างพัดลมกับฝาผนังเป็น 6 เมตร

จึงแบ่งด้านกว้างได้ $\frac{18}{6} = 3$ ช่วง ซึ่งติดพัดลมได้ 2 แถว

แบ่งด้านยาวได้ $\frac{24}{6} = 4$ ช่วง ซึ่งติดพัดลมได้ 3 แถว

ดังนั้น ต้องใช้พัดลมอย่างน้อยที่สุด $2 \times 3 = 6$ ตัว

ตอบ 6 ตัว

ตัวอย่างที่ 8 จงทำ $\frac{24}{36}$ ให้เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ

วิธีทำ วิธีการอย่างหนึ่งที่ใช้ในการทอนเศษส่วนให้เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ คือ นำ ห.ร.ม. ของตัวเศษและตัวส่วนมาหารทั้งตัวเศษและตัวส่วน

ห.ร.ม. ของ 24 และ 36 คือ 12

ดังนั้น เศษส่วนอย่างต่ำของ $\frac{24}{36}$ คือ $\frac{24 \div 12}{36 \div 12} = \frac{2}{3}$

ตอบ $\frac{2}{3}$

แบบฝึกหัด 1.1

1. จงหา ห.ร.ม. ของจำนวนในแต่ละข้อต่อไปนี้
   1) 51 และ 85
   2) 47 และ 103
   3) 42, 105 และ 165
   4) 375, 748 และ 932
2. จงหาจำนวนนับที่มากที่สุดที่หาร 48 และ 115 ลงตัว
3. จงหาจำนวนนับที่มากที่สุดที่หาร 85, 136 และ 187 ลงตัว
4. จงเขียนจำนวนนับที่มีสามหลักสามจำนวนที่ต่างกัน แล้วหา ห.ร.ม. ของสามจำนวนนั้น
5. จงหาจำนวนนับที่มากที่สุดที่หาร 676 และ 460 แล้วเหลือเศษ 1 เท่ากัน
6. จงหาจำนวนนับที่มากที่สุดที่หาร 70 และ 105 แล้วเหลือเศษ 2 และ 3 ตามลำดับ
7. มีส้มอยู่สามชนิด ชนิดที่หนึ่งมี 48 ผล ชนิดที่สองมี 60 ผล และชนิดที่สามมี 84 ผล ต้องการแบ่งส้มออกเป็นกอง กองละเท่า ๆ กัน ให้แต่ละกองมีจำนวนมากที่สุดและไม่เหลือเศษ โดยที่ส้มแต่ละชนิดไม่ปะปนกัน จะแบ่งส้มได้กี่กอง กองละกี่ผล

8. นักเรียนกลุ่มหนึ่งเป็นชาย 64 คน เป็นหญิง 96 คน ถ้าต้องการจัดแถวนักเรียนชายและนักเรียนหญิงให้ได้แถวละเท่า ๆ กันและได้แถวยาวที่สุดโดยไม่ให้นักเรียนชายและนักเรียนหญิงอยู่ในแถวเดียวกันจะจัดได้กี่แถวและแถวละกี่คน
9. ไม้อัดแผ่นหนึ่งกว้าง 104 เซนติเมตร ยาว 195 เซนติเมตร นำมาตัดเป็นแผ่นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีขนาดเท่ากันทุกแผ่นให้ได้แผ่นขนาดใหญ่ที่สุดและไม่เหลือเศษ จะได้ไม้อัดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสกี่แผ่นและแต่ละแผ่นมีขนาดเท่าใด
10. ต้องการขุดหลุมเพื่อปลูกมะม่วงในที่ดินรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่ง กว้าง 18 เมตร ยาว 25.5 เมตรและล้อมรั้วไว้แล้วทั้ง 4 ด้าน หลุมที่ขุดแต่ละหลุมมีระยะห่างระหว่างหลุมเท่ากันและหลุมที่อยู่ใกล้ขอบรั้วมีระยะห่างจากขอบรั้วเท่ากับระยะห่างจากหลุมอื่น ๆ จงหาว่าจะปลูกมะม่วงได้อย่างน้อยที่สุดกี่ต้น
11. มีผ้าอยู่ผืนหนึ่งกว้าง 36 เซนติเมตร ยาว 180 เซนติเมตร ถ้าต้องการตัดเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีความยาวของด้านเป็นจำนวนเต็มซึ่งมีหน่วยเป็นเซนติเมตร โดยไม่ให้เหลือเศษและขนาดของผ้าที่ตัดออกมีความยาวด้านละไม่ต่ำกว่า 5 เซนติเมตร จะตัดได้มากที่สุดกี่ผืนและน้อยที่สุดกี่ผืน
12. จงทำ $\frac{78}{108}$ ให้เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ เราจะทราบได้อย่างไรว่าคำตอบที่ได้เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ
13. ห.ร.ม. ของจำนวนนับสองจำนวนใด ๆ มากกว่าหรือเท่ากับ 1 เสมอหรือไม่ เพราะเหตุใด

1.2 ตัวคูณร่วมน้อยและการนำไปใช้

จากความรู้เรื่องตัวประกอบของจำนวนนับ เราทราบว่า 2 เป็นตัวประกอบของ 6 และ 5 เป็นตัวประกอบของ 10 ในทางคณิตศาสตร์เรากล่าวว่า 6 เป็น **พหุคูณ**ของ 2 และ 10 เป็น**พหุคูณ**ของ 5

จำนวนนับที่หารด้วยจำนวนนับที่กำหนดให้ลงตัว เรียกว่า **พหุคูณ** ของจำนวนนับที่กำหนดให้นั้น เช่น

2, 4, **6**, 8, 10, **12**, 14, 16, **18**, … เป็นพหุคูณของ 2

3, **6**, 9, **12**, 15, **18**, … เป็นพหุคูณของ 3

จะเห็นว่า 6, 12, 18, … เป็นพหุคูณของทั้ง 2 และ 3 จึงเรียก 6, 12, 18, … ว่า **พหุคูณร่วม** ของ 2 และ 3 และจะเรียกพหุคูณร่วมที่น้อยที่สุดของ 2 และ 3 ว่า **ตัวคูณร่วมน้อย**ของ 2 และ 3 ซึ่งเขียนย่อ ๆ ว่า **ค.ร.น.** ของ 2 และ 3 ซึ่ง ค.ร.น. ของ 2 และ 3 คือ 6

พิจารณาปัญหาต่อไปนี้

ในสวนสาธารณะแห่งหนึ่ง มีน้ำพุอยู่กลางสวน ฐานของน้ำพุเป็นรูปวงกลมสามวงซ้อนกัน น้ำพุแต่ละวงพุ่งขึ้นสลับกันดังนี้

น้ำพุวงในสุดจะพุ่งขึ้นทุก 10 วินาที น้ำพุวงกลางจะพุ่งขึ้นทุก 12 วินาทีและน้ำพุวงนอกสุดจะพุ่งขึ้นทุก 15 วินาที ถ้าเจ้าหน้าที่เปิดน้ำพุให้พุ่งขึ้นพร้อมกันครั้งแรกเมื่อเวลา 16.00 น. จะต้องรออีกนานเท่าใดจึงจะเห็นน้ำพุทั้งสามวงพุ่งขึ้นพร้อมกันอีกครั้งหนึ่ง

จากปัญหาข้างต้น เวลาที่น้ำพุพุ่งขึ้นพร้อมกันอีกครั้ง คือ ค.ร.น. ของ 10, 12 และ 15 นั่นเอง

ค.ร.น. ของ 10, 12 และ 15 อาจหาได้ดังนี้

10, 20, 30, 40, 50, **60**, … เป็นพหุคูณของ 10

12, 24, 36, 48, **60**, 72, … เป็นพหุคูณของ 12

15, 30, 45, **60**, 75, 90, … เป็นพหุคูณของ 15

จะเห็นว่า 60 เป็นพหุคูณร่วมที่น้อยที่สุดของ 10, 12 และ 15

ดังนั้น ค.ร.น. ของ 10, 12 และ 15 คือ 60

นั่นคือ น้ำพุทั้งสามวงพุ่งขึ้นพร้อมกันครั้งต่อไปเมื่อเวลาผ่านไป 60 วินาที หรือ 1 นาที

เนื่องจากการหา ค.ร.น. ของจำนวนนับตั้งแต่สองจำนวนขึ้นไปเป็นการหาพหุคูณร่วมที่น้อยที่สุดของจำนวนนับเหล่านั้น เราจึงอาศัยการหาพหุคูณร่วมในการหา ค.ร.น. ของจำนวนนับ โดยวิธีต่าง ๆ ดังนี้

วิธีที่ 1 **โดยการพิจารณาพหุคูณ**

ตัวอย่างการหา ค.ร.น. ของ 8 และ 12

เนื่องจาก 8, 16, **24**, 32, 40, **48**, …เป็นพหุคูณของ 8

12, **24**, 36, **48**, …เป็นพหุคูณของ 12

จะเห็นว่า 24, 48, …เป็นพหุคูณร่วมของ 8 และ 12

24 เป็นพหุคูณร่วมที่น้อยที่สุดของ 8 และ 12

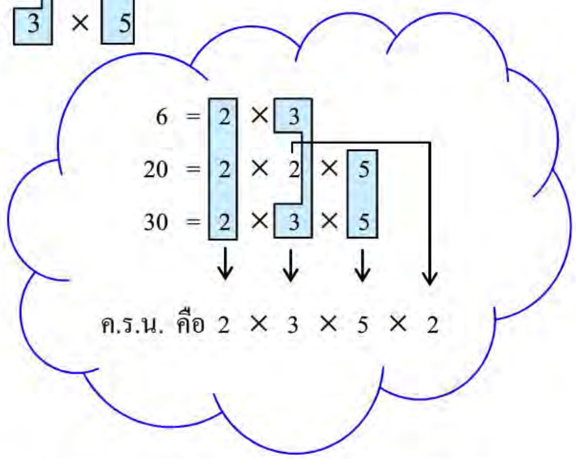
ดังนั้น ค.ร.น. ของ 8 และ 12 คือ 24

วิธีที่ 2 **โดยการแยกตัวประกอบ**

ตัวอย่างการหา ค.ร.น. ของ 6, 20 และ 30

การแยกตัวประกอบของ 6, 20 และ 30 ทำได้ดังนี้

$$\begin{aligned} 6 &= 2 \times 3 \\ 20 &= 2 \times 2 \times 5 \\ 30 &= 2 \times 3 \times 5 \end{aligned}$$



จากการแยกตัวประกอบของ 6, 20 และ 30 จะเห็นว่า พหุคูณร่วมที่น้อยที่สุดของ 6, 20 และ 30 คือ $2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$

ดังนั้น ค.ร.น. ของ 6, 20 และ 30 คือ 60

ข้อสังเกต 1. เมื่อแยกตัวประกอบของทุกจำนวนที่ต้องการหา ค.ร.น. แล้ว ให้เลือกจำนวนเฉพาะที่เป็นตัวประกอบร่วมของทุกจำนวน หรือเป็นตัวประกอบร่วมของอย่างน้อยสองจำนวนในแต่ละชุด

2. ค.ร.น. ที่ได้ คือ ผลคูณของจำนวนเฉพาะที่เลือกได้จากข้อ 1 และจำนวนเฉพาะที่เหลืออยู่ทั้งหมด

วิธีที่ 3 โดยการตั้งหาร

ตัวอย่างการหา ค.ร.น. ของ 8, 30 และ 42

การหา ค.ร.น. ของ 8, 30 และ 42 โดยการตั้งหารทำได้ ดังนี้

หาจำนวนเฉพาะที่เป็นตัวประกอบร่วมของทั้งสามจำนวน ซึ่งคือ 2 และนำไปหาร 8, 30 และ 42 ได้ดังนี้

$$\begin{array}{r|ccc} 2 & 8 & 30 & 42 \\ \hline & 4 & 15 & 21 \end{array}$$

หาตัวหารตัวต่อไป แต่เนื่องจากไม่มีจำนวนเฉพาะที่เป็นตัวประกอบร่วมของ 4, 15 และ 21 แล้ว จึงหาจำนวนเฉพาะที่เป็นตัวประกอบร่วมของอย่างน้อยสองจำนวนจากจำนวนสามจำนวนซึ่งคือ 3 และนำ 3 ไปหาร 15 และ 21 ได้ดังนี้

$$\begin{array}{r|ccc} 3 & 4 & 15 & 21 \\ \hline & 4 & 5 & 7 \end{array}$$

3 ไม่ได้หาร 4
จึงเขียน 4 ไว้อีกครั้ง

เนื่องจากไม่มีจำนวนเฉพาะซึ่งเป็นตัวประกอบร่วมของสองจำนวนใด ๆ ของ 4, 5 และ 7 จึงยุติการหาร

ดังนั้น ค.ร.น. ของ 8, 30 และ 42 หาได้จาก $2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 7$ ซึ่งเท่ากับ 840

สรุปขั้นตอนการหา ค.ร.น. ของ 8, 30 และ 42 โดยการตั้งหารได้ดังนี้

$$\begin{array}{r|ccc} 2 & 8 & 30 & 42 \\ \hline 3 & 4 & 15 & 21 \\ \hline & 4 & 5 & 7 \\ \hline\hline \end{array}$$

ดังนั้น ค.ร.น. ของ 8, 30 และ 42 คือ $2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 7 = 840$

ข้อสังเกต 1. ในแต่ละขั้นตอนของการหาร จำนวนที่นำไปหารต้องเป็นจำนวนเฉพาะที่เป็นตัวประกอบร่วมของอย่างน้อยสองจำนวนที่ต้องการหาร

2. การหารจะยุติเมื่อไม่มีจำนวนเฉพาะที่เป็นตัวประกอบร่วมของสองจำนวนใด ๆ ที่ต้องการหาร

3. ค.ร.น. ที่ได้ คือ ผลคูณของจำนวนเฉพาะที่นำไปหารในแต่ละขั้นตอนและจำนวนที่เหลือจากการหารทั้งหมด

ตัวอย่างที่ 1 จงหา ค.ร.น. ของ 42 และ 105

วิธีทำ แยกตัวประกอบของ 42 และ 105 ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} 42 &= 2 \times \boxed{3} \times \boxed{7} \\ 105 &= \boxed{3} \times 5 \times \boxed{7} \end{aligned}$$

ดังนั้น ค.ร.น. ของ 42 และ 105 คือ $2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$

ตอบ 210

ตัวอย่างที่ 2 จงหา ค.ร.น. ของ 36, 60 และ 210

วิธีทำ แยกตัวประกอบของ 36, 60 และ 210 ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} 36 &= \boxed{2} \times \boxed{2} \times \boxed{3} \times 3 \\ 60 &= \boxed{2} \times \boxed{2} \times \boxed{3} \times \boxed{5} \\ 210 &= \boxed{2} \times \boxed{3} \times \boxed{5} \times 7 \end{aligned}$$

ดังนั้น ค.ร.น. ของ 36, 60 และ 210 คือ $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 = 1{,}260$

ตอบ 1,260

ตัวอย่างที่ 3 จงหา ค.ร.น. ของ 14 และ 25

วิธีทำ แยกตัวประกอบของ 14 และ 25 ได้ดังนี้

$$14 = 2 \times 7$$

$$25 = 5 \times 5$$

จากการแยกตัวประกอบ จะเห็นว่า พหุคูณร่วมที่น้อยที่สุดของ 14 และ 25 คือ $2 \times 5 \times 5 \times 7 = 350$

ดังนั้น ค.ร.น. ของ 14 และ 25 คือ 350

ตอบ 350

ตัวอย่างที่ 4 จงหา ค.ร.น. ของ 11 และ 35

วิธีทำ เนื่องจากไม่มีจำนวนเฉพาะที่เป็นตัวประกอบร่วมของ 11 และ 35

จะได้ว่า พหุคูณร่วมที่น้อยที่สุดของ 11 และ 35 คือ $11 \times 35 = 385$

ดังนั้น ค.ร.น. ของ 11 และ 35 คือ 385

ตอบ 385

ตัวอย่างที่ 5 จงหา ค.ร.น. ของ 15, 21, 42 และ 75

วิธีทำ

$$\begin{array}{r|cccc}
3 & 15 & 21 & 42 & 75 \\ \hline
5 & 5 & 7 & 14 & 25 \\ \hline
7 & 1 & 7 & 14 & 5 \\ \hline
 & 1 & 1 & 2 & 5
\end{array}$$

ดังนั้น ค.ร.น. ของ 15, 21, 42 และ 75 คือ

$$3 \times 5 \times 7 \times 1 \times 1 \times 2 \times 5 = 1{,}050$$

ตอบ 1,050

เราสามารถนำความรู้เกี่ยวกับ ค.ร.น. ไปใช้ในการแก้ปัญหาบางปัญหาได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 6 จงหาผลลัพธ์ $\left(\frac{5}{8}-\frac{5}{12}\right)+\frac{4}{15}$

วิธีทำ หา ค.ร.น. ของ 8, 12 และ 15 ได้ 120

$$\left(\frac{5}{8}-\frac{5}{12}\right)+\frac{4}{15} = \left(\frac{5\times15}{8\times15}-\frac{5\times10}{12\times10}\right)+\frac{4\times8}{15\times8}$$

หา ค.ร.น. ของ 8, 12 และ 15 ได้ 120
จึงทำตัวส่วนของเศษส่วน
ทุกจำนวนให้เป็น 120

$$= \left(\frac{75}{120}-\frac{50}{120}\right)+\frac{32}{120}$$

$$= \frac{(75-50)+32}{120}$$

$$= \frac{25+32}{120}$$

$$= \frac{57}{120}$$

$$= \frac{19}{40}$$

ตอบ $\frac{19}{40}$

ตัวอย่างที่ 7 จงหาจำนวนนับที่น้อยที่สุดซึ่งหารด้วย 36, 54 และ 63 แล้วเหลือเศษ 7 ทุกจำนวน

วิธีทำ จำนวนนับที่น้อยที่สุดซึ่งหารด้วย 36, 54 และ 63 ลงตัว คือ ค.ร.น. ของ 36, 54 และ 63

แต่ต้องการหาจำนวนนับที่น้อยที่สุดซึ่งหารด้วย 36, 54 และ 63 แล้วเหลือเศษ 7 จำนวนนับที่ต้องการหาจึงต้องมากกว่า ค.ร.น. ของทั้งสามจำนวนอยู่ 7

ค.ร.น. ของ 36, 54 และ 63 คือ 756

ดังนั้น จำนวนนับที่น้อยที่สุดซึ่งหารด้วย 36, 54 และ 63 แล้วเหลือเศษ 7 คือ $756 + 7 = 763$

ตอบ 763

รู้ได้อย่างไรว่า 763
เป็นคำตอบที่ต้องการ

ตัวอย่างที่ 8 ร้านขายขนมแห่งหนึ่งรับขนมจากผู้ผลิตเป็นงวด ๆ ดังนี้ รับขนมปังไส้ไก่ทุก 2 วัน รับขนมเค้กทุก 3 วัน และรับคุกกี้ทุก 4 วัน โดยมีข้อตกลงกับผู้ผลิตว่าเมื่อมาส่งขนมใหม่จะรับขนมเก่าที่เหลือกลับไป ติ๊กไปซื้อขนมที่ร้านนี้ในวันที่ 1 พฤศจิกายนซึ่งตรงกับวันที่ร้านรับขนมทั้งสามชนิดพร้อมกันพอดี อยากทราบว่าติ๊กควรไปซื้อขนมที่ร้านนี้ครั้งต่อไปเมื่อใดจึงจะได้ขนมที่มาส่งใหม่ทั้งสามชนิด

วิธีทำ จำนวนวันที่ส่งขนมพร้อมกันครั้งต่อไป คือ ค.ร.น. ของ 2, 3 และ 4 นั่นเอง

ค.ร.น. ของ 2, 3 และ 4 คือ 12

ดังนั้น ติ๊กควรไปซื้อขนมครั้งต่อไปวันที่ 13 พฤศจิกายน

ตอบ 13 พฤศจิกายน

หลังจาก 1 พฤศจิกายน
ต้องรออีก 12 วัน ติ๊กควรไป
ซื้อขนมวันที่ 13 พฤศจิกายน

แบบฝึกหัด 1.2

1. จงหา ค.ร.น. ของจำนวนในแต่ละข้อต่อไปนี้

   1) 38 และ 57
   2) 13 และ 29
   3) 53 และ 69
   4) 24, 60 และ 120
   5) 7, 51 และ 147
   6) 3, 11 และ 47

2. จงเขียนจำนวนนับสามจำนวนที่ต่างกัน แล้วหา ค.ร.น. ของสามจำนวนนั้น
3. จงใช้ความรู้เกี่ยวกับ ค.ร.น. หาผลลัพธ์ต่อไปนี้

   1) $\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{5}\right)+\frac{7}{30}$
   2) $\frac{7}{15}+\left(\frac{9}{10}-\frac{5}{8}\right)$
   3) $\left(\frac{7}{12}-\frac{1}{16}\right)-\frac{7}{24}$

4. จงหาจำนวนนับที่น้อยที่สุดซึ่งหารด้วย 9, 16 และ 24 แล้วเหลือเศษ 5 เท่ากัน
5. นายแม้นเก็บส้มจากสวนไว้กองหนึ่ง เขามีกล่องอยู่สามขนาด คือกล่องเล็กจุ 9 ผล กล่องกลางจุ 12 ผล และกล่องใหญ่จุ 20 ผล ไม่ว่าจะเลือกใช้กล่องขนาดใดก็ตามเพียงขนาดเดียวก็สามารถบรรจุส้มกองนี้ได้หมดพอดี อยากทราบว่าส้มกองนี้มีอย่างน้อยที่สุดกี่ผล
6. การเดินทางจากเมือง ก ไปเมือง ข ไปได้สามทาง ในแต่ละวันนายท่าปล่อยรถโดยสารออกพร้อมกันทั้งสามเส้นทางเมื่อเวลา 7.30 น. และจะปล่อยรถโดยสารแต่ละเส้นทางในครั้งต่อไปดังนี้

   เส้นทางที่หนึ่ง รถออกทุก 30 นาที
   เส้นทางที่สอง รถออกทุก 40 นาที
   เส้นทางที่สาม รถออกทุก 50 นาที

   จงหาว่านายท่าจะปล่อยรถโดยสารทั้งสามเส้นทางพร้อมกันครั้งต่อไปในเวลาใด

7. นางสายใจมีลูกสาวสามคน คือ สวย คม และขำ ลูกสาวทั้งสามคนอยู่ต่างจังหวัด แต่ทุกคนจะแวะมาเยี่ยมแม่เสมอ โดยตกลงกันว่า สวยมาเยี่ยมแม่ทุก 4 วัน คมมาเยี่ยมแม่ทุก 5 วันและขำมาเยี่ยมแม่ทุก 6 วัน ถ้าลูกทั้งสามคนมาเยี่ยมแม่พร้อมกันเมื่อวันที่ 13 เมษายน จงหาว่าครั้งต่อไปแม่จะได้พบลูกพร้อมกันสองคนเมื่อใดและสามคนเมื่อใด
8. ค.ร.น. ของจำนวนนับสองจำนวนใด ๆ มากกว่าหรือเท่ากับจำนวนใดจำนวนหนึ่งในสองจำนวนนั้นเสมอหรือไม่ เพราะเหตุใด
9. ห.ร.ม. ของจำนวนนับสองจำนวนใด ๆ หาร ค.ร.น. ของจำนวนนับสองจำนวนนั้นได้ลงตัวเสมอหรือไม่ เพราะเหตุใด

ชวนคิด

จงทำกิจกรรมต่อไปนี้

1. เติมจำนวนลงในตารางให้สมบูรณ์ตามตัวอย่างที่แสดงไว้ในบรรทัดแรกของตาราง

จำนวนนับ a	จำนวนนับ b	ห.ร.ม. ของ a และ b	ค.ร.น. ของ a และ b	ผลคูณของ a และ b
6	10	2	30	60
8	28			
10	30			
15	35			
16	40			
20	50			

จากตารางข้างต้น สังเกตเห็นหรือไม่ว่า เมื่อกำหนดจำนวนนับสองจำนวนให้ ผลคูณของ ห.ร.ม. และ ค.ร.น. กับ ผลคูณของจำนวนนับสองจำนวนนั้นสัมพันธ์กันอย่างไร

2. จำนวนนับสองจำนวนมี ห.ร.ม. เท่ากับ 6 และ ค.ร.น. เท่ากับ 72 ถ้าจำนวนหนึ่งคือ 18 อีกจำนวนหนึ่งจะเป็นเท่าไร
3. ให้ตรวจสอบจำนวนที่หาได้ในข้อ 2 กับ 18 ว่ามี ห.ร.ม. เท่ากับ 6 และ ค.ร.น. เท่ากับ 72 จริงหรือไม่
4. ถ้า ห.ร.ม. ของ a และ b เท่ากับ d แล้ว ค.ร.น. ของ a และ b เท่ากับเท่าไร

บทที่ 2

ระบบจำนวนเต็ม

ในชีวิตประจำวันเราจะพบว่ามีการใช้ตัวเลขแทนจำนวนนอกเหนือจากจำนวนนับที่เราเคยรู้จักมาแล้ว เช่น จำนวนที่บอกอุณหภูมิของอากาศที่ต่ำกว่า $0^{\circ}C$ ดังที่กรมอุตุนิยมวิทยาได้บันทึกไว้เมื่อวันที่ 15 มกราคม 2552 ดังนี้

สถานที่	อุณหภูมิ
ยอดดอยอินทนนท์ จังหวัดเชียงใหม่	$-3^{\circ}C$
ยอดภูเรือ จังหวัดเลย	$-2^{\circ}C$

จำนวนเช่น -3, -2 เรียกว่า จำนวนเต็มลบ

2.1 จำนวนเต็ม

จำนวนที่เรารู้จักเป็นครั้งแรกคือจำนวนนับ หรือเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า **จำนวนเต็มบวก** ซึ่งได้แก่ 1, 2, 3, ...

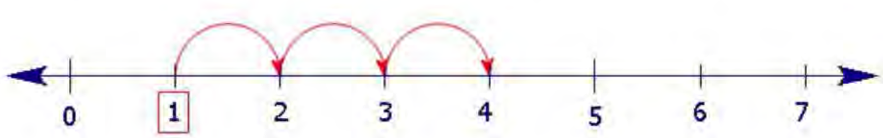
1 เป็นจำนวนนับที่น้อยที่สุด จำนวนนับอื่น ๆ เกิดจาก 1 ดังนี้

$1 + 1$ แทนด้วย 2

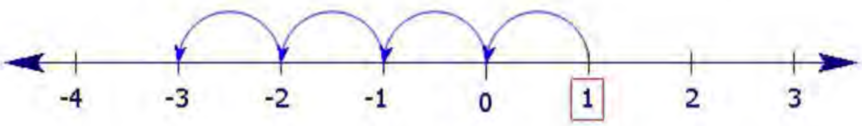
$2 + 1$ แทนด้วย 3

$3 + 1$ แทนด้วย 4

โดยการนับเพิ่มทีละ 1 เช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จะได้จำนวนนับอื่น ๆ เพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ ซึ่งแสดงด้วยแผนภาพที่นับเพิ่มจาก 1 ไปทางขวาทีละ 1 หน่วยได้ดังนี้



ถ้าเรานับลดลงทีละ 1 ก็จะได้ 0, -1, -2, -3, … ไปเรื่อย ๆ ซึ่งแสดงด้วยแผนภาพที่นับลดจาก 1 ไปทางซ้ายทีละ 1 หน่วยได้ดังนี้



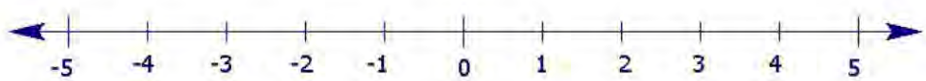
จากแผนภาพข้างต้น จำนวนที่ได้ทั้งหมดเป็น**จำนวนเต็ม** ซึ่งประกอบด้วย

จำนวนเต็มบวก ได้แก่ 1, 2, 3, 4, 5, …

จำนวนเต็มลบ ได้แก่ -1, -2, -3, -4, -5, …

ศูนย์ ได้แก่ 0

ดังนั้น *เมื่อกล่าวถึงจำนวนเต็มจะหมายถึง จำนวนเต็มบวก หรือ จำนวนเต็มลบ หรือ ศูนย์* เขียนแสดงจำนวนเต็มทั้งหมดโดยใช้**เส้นจำนวน** ดังนี้



บนเส้นจำนวนนี้ จำนวนเต็มที่อยู่ทางขวาของ 0 เป็นจำนวนเต็มบวก จำนวนเต็มที่อยู่ทางซ้ายของ 0 เป็นจำนวนเต็มลบ และจำนวนที่อยู่ทางขวาจะมากกว่าจำนวนที่อยู่ทางซ้ายเสมอ

ในการเขียนเส้นจำนวน จะเขียนหัวลูกศรทั้งสองข้างเพื่อแสดงว่ายังมีจำนวนอื่น ๆ ที่มากกว่าหรือน้อยกว่าจำนวนที่เขียนแสดงไว้

สำหรับ 0 ซึ่งเป็นจำนวนเต็ม ในทางคณิตศาสตร์ถือว่า 0 ไม่ใช่จำนวนนับ เช่น เราไม่นิยมพูดว่ามีส้มอยู่ 0 ผล หรือมีดินสออยู่ 0 แท่ง แต่เราพูดว่า ไม่มีส้ม ไม่มีดินสอ ในกรณีเช่นนี้ 0 แทนความไม่มี อย่างไรก็ตาม 0 ก็ไม่ได้แทนความไม่มีเสมอไป เช่น เมื่อเราพูดว่าอุณหภูมิของน้ำแข็งเป็น 0 องศาเซลเซียส เราไม่ได้หมายความว่าน้ำแข็งไม่มีอุณหภูมิ แต่หมายความว่าน้ำแข็งมีความเย็นระดับหนึ่งซึ่งกำหนดว่าเป็น 0 องศาเซลเซียส

แบบฝึกหัด 2.1 ก

1. ข้อความต่อไปนี้จริงหรือเท็จ
    1) 0 เป็นจำนวนเต็มบวก
    2) -23 เป็นจำนวนเต็มลบ
    3) 500 เป็นจำนวนเต็ม
    4) -500 ไม่เป็นจำนวนเต็มบวก
    5) 1.5 เป็นจำนวนเต็ม
    6) $\frac{4}{2}$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม
    7) จำนวนเต็มบวกเป็นจำนวนนับ
    8) จำนวนเต็มบวกมีมากมายนับไม่ถ้วน
    9) ถ้า a เป็นจำนวนเต็มบวก จะหาจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า a ได้เสมอ
    10) ถ้า a เป็นจำนวนเต็มแล้ว จะหาจำนวนเต็มที่น้อยกว่า a ได้เสมอ
2. จงเลือกจำนวนเต็มจากจำนวนในแต่ละข้อต่อไปนี้
    1) $0, \frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, 2$
    2) $-1, -2, 3, -3$
    3) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 4, -4, 0.1, 3.78$
    4) $5, -5, \frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, 6, -\frac{1}{6}$
3. ถ้า a แทนจำนวนเต็มจำนวนหนึ่ง a จะต้องแทนจำนวนเต็มบวกใช่หรือไม่ ถ้าไม่ใช่ a จะแทนจำนวนใดได้บ้าง
4. จงเขียนเส้นจำนวนแสดงศูนย์และจำนวนเต็มลบถึง -20
5. จงเขียนจำนวนห้าจำนวนต่อจาก 0 โดยลดทีละ 3
6. จงเขียนจำนวนห้าจำนวนต่อจาก -1 โดยลดทีละ 2
7. จงเขียนจำนวนห้าจำนวนต่อจาก -15 โดยเพิ่มทีละ 3
8. จงเขียนจำนวนห้าจำนวนต่อจาก -6 โดยเพิ่มทีละ 2

9. จากแบบรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงเติมจำนวนเต็มอีกสามจำนวนตามลำดับ

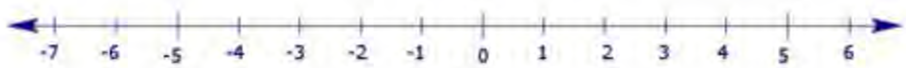
1) -8, -6, -4, … 2) -7, -4, -1, …

3) 4, 2, 0, … 4) 15, 10, 5, …

5) 6, 2, -2, … 6) -9, -4, 1, …

การเปรียบเทียบจำนวนเต็ม

ในการเปรียบเทียบจำนวนสองจำนวนที่ไม่เท่ากัน เพื่อพิจารณาว่าจำนวนใดน้อยกว่าหรือจำนวนใดมากกว่า สามารถแสดงให้เห็นได้ง่ายโดยใช้เส้นจำนวน



บนเส้นจำนวน จำนวนเต็มที่อยู่ทางขวาจะมากกว่าจำนวนเต็มที่อยู่ทางซ้ายเสมอ เช่น

5 มากกว่า 4 ใช้สัญลักษณ์ 5 > 4 หรือ 4 น้อยกว่า 5 ใช้สัญลักษณ์ 4 < 5

3 มากกว่า 1 ใช้สัญลักษณ์ 3 > 1 หรือ 1 น้อยกว่า 3 ใช้สัญลักษณ์ 1 < 3

1 มากกว่า 0 ใช้สัญลักษณ์ 1 > 0 หรือ 0 น้อยกว่า 1 ใช้สัญลักษณ์ 0 < 1

0 มากกว่า -1 ใช้สัญลักษณ์ 0 > -1 หรือ -1 น้อยกว่า 0 ใช้สัญลักษณ์ -1 < 0

- 3 มากกว่า -4 ใช้สัญลักษณ์ -3 > -4 หรือ -4 น้อยกว่า -3 ใช้สัญลักษณ์ -4 < -3

-2 มากกว่า -5 ใช้สัญลักษณ์ -2 > -5 หรือ -5 น้อยกว่า -2 ใช้สัญลักษณ์ -5 < -2

3 มากกว่า -7 ใช้สัญลักษณ์ 3 > -7 หรือ -7 น้อยกว่า 3 ใช้สัญลักษณ์ -7 < 3

แบบฝึกหัด 2.1 ข

1. จงเติมเครื่องหมาย < หรือ > เพื่อทำให้ประโยคต่อไปนี้เป็นจริง

1) -4 … -5	2) 7 … -7
3) 0 … 5	4) 0 … -5
5) 18 … -12	6) 20 … -2
7) -15 … 3	8) -8 … 1

2. จงเรียงลำดับจำนวนเต็มต่อไปนี้จากน้อยไปมาก

   2, -2, 5, 1, 0, -15, -10, - 8, 3

3. จากตารางแสดงความสัมพันธ์ของระดับความสูงในระดับต่าง ๆ กับอุณหภูมิที่บันทึกได้ ณ สถานที่แห่งหนึ่งและเวลาหนึ่งเป็นดังนี้

ความสูงเหนือระดับน้ำทะเล (กิโลเมตร)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
อุณหภูมิของอากาศ (องศาเซลเซียส)	28	22	17	11	6	0	-6	-11	-17	-22

จงใช้ข้อมูลจากตารางตอบคำถามต่อไปนี้

1) ที่ระดับความสูงใดอากาศร้อนที่สุด
2) ที่ระดับความสูงใดขึ้นไปน้ำจะเริ่มกลายเป็นน้ำแข็ง
3) ที่ระดับความสูงใดอากาศหนาวที่สุด
4) อุณหภูมิของอากาศที่ 1 กิโลเมตรเหนือระดับน้ำทะเลต่างจากอุณหภูมิของอากาศที่ 3 กิโลเมตรเหนือระดับน้ำทะเลเท่าไร
5) อุณหภูมิของอากาศที่ 4 กิโลเมตรเหนือระดับน้ำทะเลต่างจากอุณหภูมิของอากาศที่ 8 กิโลเมตรเหนือระดับน้ำทะเลเท่าไร

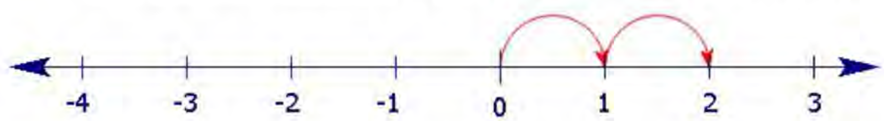
6) ถ้าสถานที่ที่บันทึกอุณหภูมิมียอดดอยซึ่งสูงจากระดับน้ำทะเลประมาณ 2,580 เมตร บนยอดดอยจะมีอุณหภูมิประมาณเท่าใด

7) ความสูงเหนือระดับน้ำทะเลมีความสัมพันธ์กับอุณหภูมิของอากาศอย่างไร

2.2 การบวกจำนวนเต็ม

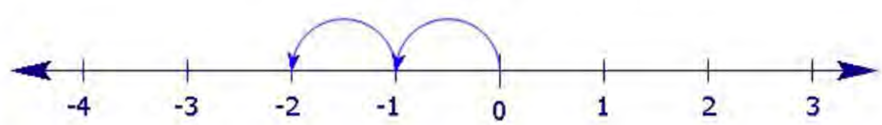
ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็ม

พิจารณาการหาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็ม โดยใช้เส้นจำนวนต่อไปนี้



2 อยู่ห่างจาก 0 เป็นระยะ 2 หน่วย

กล่าวว่า **ค่าสัมบูรณ์**ของ 2 เท่ากับ 2



-2 อยู่ห่างจาก 0 เป็นระยะ 2 หน่วย

กล่าวว่า **ค่าสัมบูรณ์**ของ -2 เท่ากับ 2

ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มใด ๆ จะหาได้จากระยะที่จำนวนเต็มนั้นอยู่ห่างจาก 0 บนเส้นจำนวน ตัวอย่างเช่น

ค่าสัมบูรณ์ของ 8 เท่ากับ 8 เนื่องจาก 8 อยู่ห่างจาก 0 เป็นระยะ 8 หน่วย

ค่าสัมบูรณ์ของ -8 เท่ากับ 8 เนื่องจาก -8 อยู่ห่างจาก 0 เป็นระยะ 8 หน่วย

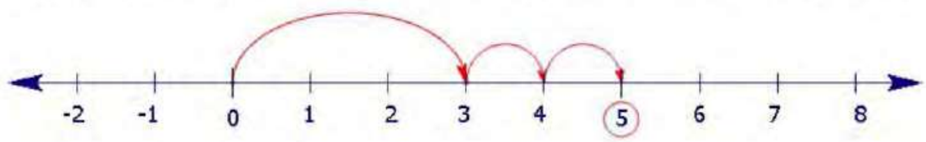
ค่าสัมบูรณ์ของ 1 เท่ากับ 1 เนื่องจาก 1 อยู่ห่างจาก 0 เป็นระยะ 1 หน่วย

ค่าสัมบูรณ์ของ -1 เท่ากับ 1 เนื่องจาก -1 อยู่ห่างจาก 0 เป็นระยะ 1 หน่วย

ค่าสัมบูรณ์ของ 0 เท่ากับ 0 เนื่องจาก 0 อยู่ห่างจาก 0 เป็นระยะ 0 หน่วย

การบวกจำนวนเต็มบวกด้วยจำนวนเต็มบวกและการบวกจำนวนเต็มลบด้วยจำนวนเต็มลบ

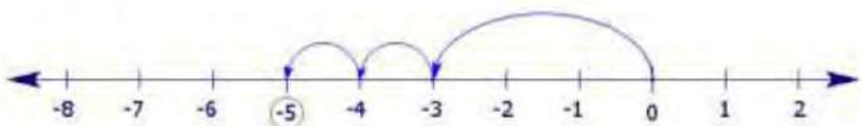
การบวกจำนวนเต็มบวกด้วยจำนวนเต็มบวก คือ การบวกจำนวนนับด้วยจำนวนนับนั่นเอง เช่น $3 + 2$ สามารถแสดงการหาผลบวกโดยใช้เส้นจำนวนได้ดังนี้



เริ่มต้นที่ 0 นับไปทางขวาถึง 3 เมื่อบวกด้วย 2 ให้นับเพิ่มไปทางขวา 2 หน่วยซึ่งจะไปสิ้นสุดที่ 5 จะได้ 5 เป็นผลบวกของ 3 กับ 2

ดังนั้น $3 + 2 = 5$

การบวกจำนวนเต็มลบด้วยจำนวนเต็มลบ เช่น $(-3) + (-2)$ แสดงการหาผลบวกโดยใช้เส้นจำนวนได้ดังนี้



เริ่มต้นที่ 0 นับไปทางซ้ายถึง -3 เมื่อบวกด้วย -2 ให้นับลดไปทางซ้าย 2 หน่วยซึ่งจะไปสิ้นสุดที่ -5 จะได้ -5 เป็นผลบวกของ -3 กับ -2

ดังนั้น $(-3) + (-2) = -5$

พิจารณาการหาผลบวก $(-3) + (-2)$ โดยใช้ค่าสัมบูรณ์ ดังนี้

ค่าสัมบูรณ์ของ -3 เท่ากับ 3

ค่าสัมบูรณ์ของ -2 เท่ากับ 2

จะเห็นว่าถ้านำค่าสัมบูรณ์ของ -3 บวกด้วยค่าสัมบูรณ์ของ -2 แล้วตอบเป็นจำนวนเต็มลบ จะได้ผลลัพธ์เท่ากับ -5 เช่นเดียวกับการหาผลบวกโดยใช้เส้นจำนวน

การบวกจำนวนเต็มบวกด้วยจำนวนเต็มบวกและการบวกจำนวนเต็มลบด้วยจำนวนเต็มลบข้างต้น เป็นไปตามหลักเกณฑ์ดังนี้

1. การบวกจำนวนเต็มบวกด้วยจำนวนเต็มบวก ใช้วิธีเดียวกับการบวกจำนวนนับด้วยจำนวนนับ ซึ่งจะได้คำตอบเป็นจำนวนเต็มบวก

2. การบวกจำนวนเต็มลบด้วยจำนวนเต็มลบ ให้นำค่าสัมบูรณ์มาบวกกัน แล้วตอบเป็นจำนวนเต็มลบ

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลบวก 9 + 5

วิธีทำ 9 + 5 = 14

ตอบ 14

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลบวก (-9) + (-5)

วิธีทำ (-9) + (-5) = -14

ตอบ - 14

ค่าสัมบูรณ์ของ -9 บวกด้วย
ค่าสัมบูรณ์ของ -5
แล้วตอบเป็นจำนวนเต็มลบ

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลบวก [(-7) + (-3)] + (-12)

วิธีทำ [(-7) + (-3)] + (-12) = [-10] + (-12)

= -22

ให้ทำในวงเล็บใหญ่ก่อน

ตอบ - 22

แบบฝึกหัด 2.2 ก

1. จงหาผลบวก

1) $18 + 15$	2) $15 + 18$
3) $(-5) + (-7)$	4) $(-7) + (-5)$
5) $(-8) + (-2)$	6) $(-2) + (-8)$
7) $(-20) + (-5)$	8) $(-5) + (-20)$
9) $(-47) + (-59)$	10) $(-59) + (-47)$

จากผลลัพธ์ที่ได้ในข้อ 3) ถึง 10) การบวกจำนวนเต็มลบน่าจะมีสมบัติการสลับที่หรือไม่

2. จงหาผลลัพธ์โดยบวกสองจำนวนที่อยู่ในวงเล็บใหญ่ก่อน

1) $3 + [2 + 7]$
2) $[3 + 2] + 7$
3) $(-2) + [(-1) + (-9)]$
4) $[(-2) + (-1)] + (-9)$
5) $(-3) + [(-4) + (-6)]$
6) $[(-3) + (-4)] + (-6)$
7) $[(-2) + (-10)] + (-20)$
8) $(-2) + [(-10) + (-20)]$

จากผลลัพธ์ที่ได้ในข้อ 3) ถึง 8) การบวกจำนวนเต็มลบน่าจะมีสมบัติการเปลี่ยนหมู่หรือไม่

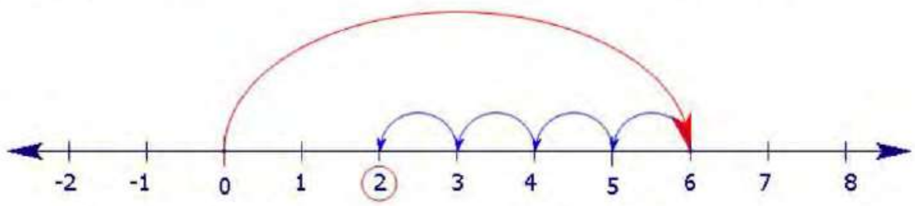
3. จงหาจำนวนเต็มที่แทน x แล้วทำให้ได้ประโยคที่เป็นจริง

1) $x + (-5) = -7$
2) $(-2) + x = -8$
3) $x + (-10) = -11$
4) $(-15) + x = -20$

อะไรเอ่ยบวกกับ -5 แล้วได้ -7

การบวกจำนวนเต็มบวกด้วยจำนวนเต็มลบและการบวกจำนวนเต็มลบด้วยจำนวนเต็มบวก

การบวกจำนวนเต็มบวกด้วยจำนวนเต็มลบ **ในกรณีที่จำนวนเต็มบวกมีค่าสัมบูรณ์มากกว่า** เช่น 6 + (-4) สามารถแสดงการหาผลบวกโดยใช้เส้นจำนวนได้ดังนี้



เริ่มต้นที่ 0 นับไปทางขวาถึง 6 เมื่อบวกด้วย -4 ให้นับลดไปทางซ้าย 4 หน่วยซึ่งจะไปสิ้นสุดที่ 2 จะได้ 2 เป็นผลบวกของ 6 กับ -4

ดังนั้น 6 + (-4) = 2

พิจารณาการหาผลบวก 6 + (-4) โดยใช้ค่าสัมบูรณ์ ดังนี้

ค่าสัมบูรณ์ของ 6 เท่ากับ 6

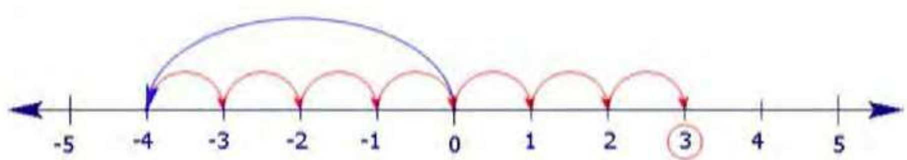
ค่าสัมบูรณ์ของ -4 เท่ากับ 4

จะเห็นว่าถ้านำค่าสัมบูรณ์ของ 6 ลบด้วยค่าสัมบูรณ์ของ -4 จะได้ผลลัพธ์เท่ากับ 2 เช่นเดียวกับการหาผลบวกโดยใช้เส้นจำนวน

6 + (-4) = 2

2 เป็นจำนวนเต็มบวกเช่นเดียวกับ 6 ซึ่ง 6 มีค่าสัมบูรณ์มากกว่าค่าสัมบูรณ์ของ -4

การบวกจำนวนเต็มลบด้วยจำนวนเต็มบวก **ในกรณีที่จำนวนเต็มบวกมีค่าสัมบูรณ์มากกว่า** เช่น (-4) + 7 สามารถแสดงการหาผลบวกโดยใช้เส้นจำนวนได้ดังนี้



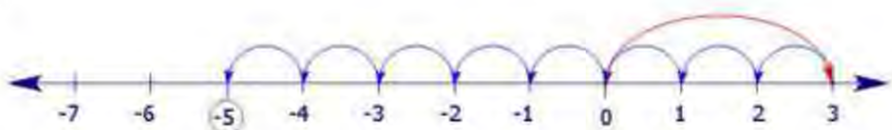
เริ่มต้นที่ 0 นับไปทางซ้ายถึง -4 เมื่อบวกด้วย 7 ให้นับเพิ่มไปทางขวา 7 หน่วยซึ่งจะไปสิ้นสุดที่ 3 จะได้ 3 เป็นผลบวกของ -4 กับ 7

ดังนั้น $(-4) + 7 = 3$

พิจารณาการหาผลบวก $(-4) + 7$ โดยใช้ค่าสัมบูรณ์ จะเห็นว่าถ้านำค่าสัมบูรณ์ของ 7 ลบด้วยค่าสัมบูรณ์ของ -4 จะได้ผลลัพธ์เท่ากับ 3 เช่นเดียวกับการหาผลบวกโดยใช้เส้นจำนวน

3 เป็นจำนวนเต็มบวกเช่นเดียวกับ 7
ซึ่ง 7 มีค่าสัมบูรณ์มากกว่า
ค่าสัมบูรณ์ของ -4

การบวกจำนวนเต็มบวกด้วยจำนวนเต็มลบ **ในกรณีที่จำนวนเต็มลบมีค่าสัมบูรณ์มากกว่า** เช่น $3 + (-8)$ สามารถแสดงการหาผลบวกโดยใช้เส้นจำนวนได้ดังนี้



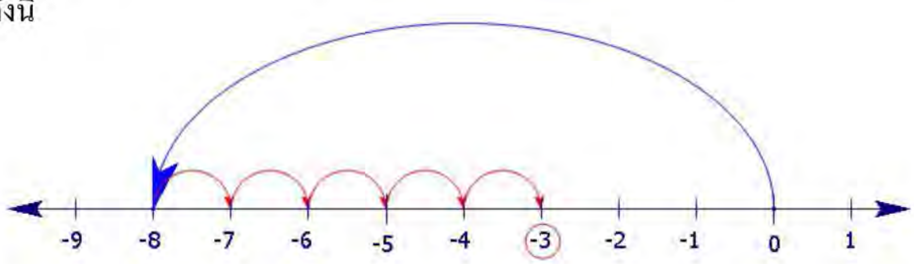
เริ่มต้นที่ 0 นับไปทางขวาถึง 3 เมื่อบวกด้วย -8 ให้นับลดไปทางซ้าย 8 หน่วย ซึ่งจะไปสิ้นสุดที่ -5 จะได้ -5 เป็นผลบวกของ 3 กับ -8

ดังนั้น $3 + (-8) = -5$

พิจารณาการหาผลบวก $3 + (-8)$ โดยใช้ค่าสัมบูรณ์ จะเห็นว่าถ้านำค่าสัมบูรณ์ของ -8 ลบด้วยค่าสัมบูรณ์ของ 3 แล้วตอบเป็นจำนวนเต็มลบ จะได้ผลลัพธ์เท่ากับ -5 เช่นเดียวกับการหาผลบวกโดยใช้เส้นจำนวน

-5 เป็นจำนวนเต็มลบเช่นเดียวกับ -8
ซึ่ง -8 มีค่าสัมบูรณ์มากกว่า
ค่าสัมบูรณ์ของ 3

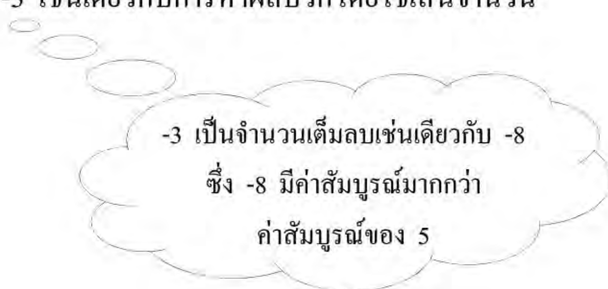
การบวกจำนวนเต็มลบด้วยจำนวนเต็มบวก **ในกรณีที่จำนวนเต็มลบมีค่าสัมบูรณ์มากกว่า** เช่น (-8) + 5 สามารถแสดงการหาผลบวกโดยใช้เส้นจำนวนได้ดังนี้



เริ่มต้นที่ 0 นับไปทางซ้ายถึง -8 เมื่อบวกด้วย 5 ให้นับเพิ่มไปทางขวา 5 หน่วย ซึ่งจะไปสิ้นสุดที่ -3 จะได้ -3 เป็นผลบวกของ -8 กับ 5

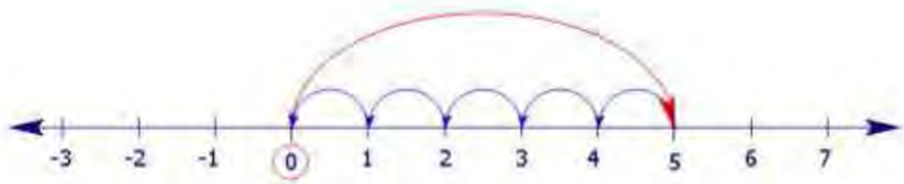
ดังนั้น (-8) + 5 = -3

พิจารณาการหาผลบวก (-8) + 5 โดยใช้ค่าสัมบูรณ์ จะเห็นว่าถ้านำค่าสัมบูรณ์ของ -8 ลบด้วยค่าสัมบูรณ์ของ 5 แล้วตอบเป็นจำนวนเต็มลบ จะได้ผลลัพธ์เท่ากับ -3 เช่นเดียวกับการหาผลบวกโดยใช้เส้นจำนวน



การบวกระหว่างจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบที่มีค่าสัมบูรณ์ไม่เท่ากัน ให้นำค่าสัมบูรณ์ที่มากกว่าลบด้วยค่าสัมบูรณ์ที่น้อยกว่า แล้วตอบเป็นจำนวนเต็มบวกหรือจำนวนเต็มลบตามจำนวนที่มีค่าสัมบูรณ์มากกว่า

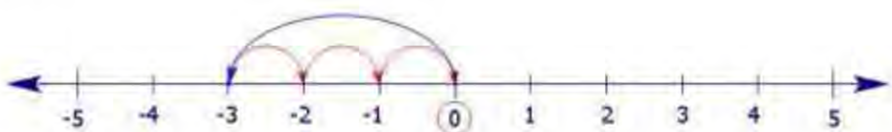
การบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ **ในกรณีที่จำนวนเต็มทั้งสองมีค่าสัมบูรณ์เท่ากัน** เช่น $5 + (-5)$ หรือ $(-3) + 3$ สามารถแสดงการหาผลบวกโดยใช้เส้นจำนวนได้ดังนี้



ในการหาผลบวก $5 + (-5)$ เริ่มต้นที่ 0 นับไปทางขวาถึง 5 แล้วนับลดไปทางซ้าย 5 หน่วย ซึ่งจะสิ้นสุดที่ 0 จะได้ 0 เป็นผลบวกของ 5 กับ -5

ดังนั้น $5 + (-5) = 0$

พิจารณาการหาผลบวกของ $5 + (-5)$ โดยใช้ค่าสัมบูรณ์ จะเห็นว่าถ้านำค่าสัมบูรณ์ของ 5 ลบด้วยค่าสัมบูรณ์ของ -5 หรือนำค่าสัมบูรณ์ของ -5 ลบด้วยค่าสัมบูรณ์ของ 5 จะได้ผลลัพธ์เท่ากับ 0 เช่นเดียวกับการหาผลบวกโดยใช้เส้นจำนวน



ในการหาผลบวก $(-3) + 3$ เริ่มต้นที่ 0 นับไปทางซ้ายถึง -3 แล้วนับเพิ่มไปทางขวา 3 หน่วย ซึ่งจะไปสิ้นสุดที่ 0 จะได้ 0 เป็นผลบวกของ -3 กับ 3

ดังนั้น $(-3) + 3 = 0$

พิจารณาการหาผลบวกของ $(-3) + 3$ โดยใช้ค่าสัมบูรณ์ จะเห็นว่าถ้านำค่าสัมบูรณ์ของ -3 ลบด้วยค่าสัมบูรณ์ของ 3 หรือนำค่าสัมบูรณ์ของ 3 ลบด้วยค่าสัมบูรณ์ของ -3 จะได้ผลลัพธ์เท่ากับ 0 เช่นเดียวกับการหาผลบวกโดยใช้เส้นจำนวน

การบวกระหว่างจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบที่มีค่าสัมบูรณ์เท่ากัน ผลบวกเท่ากับ 0

หลักเกณฑ์การบวกจำนวนเต็ม มีดังนี้

1. การบวกจำนวนเต็มบวกด้วยจำนวนเต็มบวก ใช้วิธีเดียวกับการบวกจำนวนนับด้วยจำนวนนับ ซึ่งจะได้คำตอบเป็นจำนวนเต็มบวก
2. การบวกจำนวนเต็มลบด้วยจำนวนเต็มลบ ให้นำค่าสัมบูรณ์มาบวกกันแล้วตอบเป็นจำนวนเต็มลบ
3. การบวกระหว่างจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบที่มีค่าสัมบูรณ์ไม่เท่ากัน ให้นำค่าสัมบูรณ์ที่มากกว่าลบด้วยค่าสัมบูรณ์ที่น้อยกว่า แล้วตอบเป็นจำนวนเต็มบวกหรือจำนวนเต็มลบตามจำนวนที่มีค่าสัมบูรณ์มากกว่า
4. การบวกระหว่างจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบที่มีค่าสัมบูรณ์เท่ากัน ผลบวกเท่ากับ 0

สำหรับการบวกจำนวนเต็มใด ๆ ด้วยศูนย์ หรือการบวกศูนย์ด้วยจำนวนเต็มใด ๆ จะได้ผลบวกเท่ากับจำนวนเต็มนั้นเสมอ

นั่นคือ $a + 0 = 0 + a = a$ *เมื่อ* a *แทนจำนวนเต็มใด ๆ*

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลบวก $32 + (-17)$

วิธีทำ $32 + (-17) = 15$

ตอบ 15

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลบวก $17 + (-32)$

วิธีทำ $17 + (-32) = -15$

ตอบ -15

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลบวก $25 + (-25)$

วิธีทำ $25 + (-25) = 0$

ตอบ 0

ตัวอย่างที่ 4 จงหาผลบวก [(-19) + 8] + (-2)

วิธีทำ [(-19) + 8] + (-2) = (-11) + (-2)

= -13

ตอบ -13

แบบฝึกหัด 2.2 ข

1. จงหาผลบวก

1) 20 + 300	2) 300 + 20
3) (-7) + (-29)	4) (-29) + (-7)
5) 8 + (-8)	6) (-8) + 8
7) (-6) + 10	8) 10 + (-6)
9) 57 + (-74)	10) (-74) + 57

2. จงหาผลบวก a + b และ b+ a แล้วตรวจสอบดูว่า a + b = b + a เป็นจริงหรือเท็จ ถ้ากำหนด a และ b ดังต่อไปนี้

1) a = 4, b = 5	2) a = -9, b = -32
3) a = 21, b = -6	4) a = 0, b = -2
5) a = -96, b = 96	6) a = 26, b = -26

3. จงหาผลบวก

1) [38 + 5] + (-2)	2) 38 + [5 + (-2)]
3) [(-15) + 7] + (-3)	4) (-15) + [7 + (-3)]
5) [(-1) + 2] + 1	6) (-1) + [2 + 1]
7) [(-1) + (-1)] + 1	8) (-1) + [(-1) + 1]
9) [6 + 4] + (-10)	10) 6 + [4 + (-10)]
11) [12 + (-3)] + (-8)	12) 12 + [(-3) + (-8)]

4. จงหาผลบวก $(a + b) + c$ และ $a + (b + c)$ แล้วตรวจสอบดูว่า $(a + b) + c = a + (b + c)$ เป็นจริงหรือเท็จ ถ้ากำหนด a, b และ c ดังต่อไปนี้

    1) $a = 2, \quad b = 3, \quad c = 1$

    2) $a = -8, \quad b = -11, \quad c = -10$

    3) $a = -2, \quad b = -1, \quad c = 3$

    4) $a = -3, \quad b = 2, \quad c = 5$

5. จงหาผลบวก

    1) $13 + 0$ 2) $0 + (-13)$

    3) $(-4) + 0$ 4) $0 + 0$

6. จงหาจำนวนเต็มสองจำนวนที่บวกกันแล้วมีคำตอบเป็นจำนวนต่อไปนี้

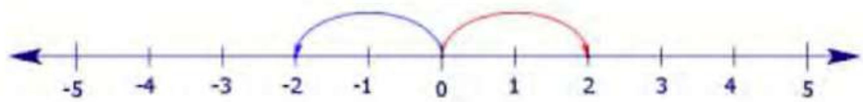
    1) 6 2) 0

    3) -9 4) -15

2.3 การลบจำนวนเต็ม

จำนวนตรงข้าม

เมื่อพิจารณาบนเส้นจำนวนจะพบว่าจำนวนเต็มบวกและจำนวนเต็มลบที่มีค่าสัมบูรณ์เท่ากันจะอยู่คนละข้างของ 0 และอยู่ห่างจาก 0 เป็นระยะเท่ากัน เช่น -2 และ 2

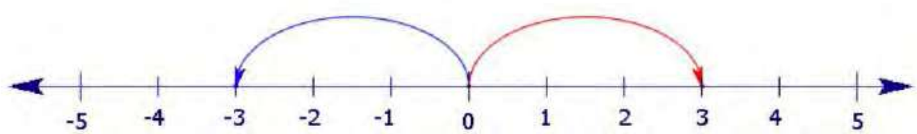


เรากล่าวว่า

-2 เป็น**จำนวนตรงข้าม**ของ 2

2 เป็น**จำนวนตรงข้าม**ของ -2

และ $2 + (-2) = (-2) + 2 = 0$



-3 เป็น**จำนวนตรงข้าม**ของ 3

3 เป็น**จำนวนตรงข้าม**ของ -3

และ $3 + (-3) = (-3) + 3 = 0$

> ถ้า a เป็นจำนวนเต็มใด ๆ **จำนวนตรงข้าม**ของ a เขียนแทนด้วย -a และ
>
> $a + (-a) = (-a) + a = 0$

สำหรับ 0 จะมี *0 เป็นจำนวนตรงข้ามของ 0*

ในทางคณิตศาสตร์ *จำนวนตรงข้ามของจำนวนเต็มแต่ละจำนวนมีเพียงจำนวนเดียวเท่านั้น*

สำหรับจำนวนเต็มเช่น -5 จำนวนตรงข้ามของ -5 คือ 5

และจำนวนตรงข้ามของ -5 เขียนแทนด้วย -(-5)

เนื่องจากจำนวนตรงข้ามของ -5 มีเพียงจำนวนเดียว

ดังนั้น $-(-5) = 5$

ถ้า a เป็นจำนวนใด ๆ **จำนวนตรงข้าม**ของ -a คือ a เขียนแทนด้วย

$$-(-a) = a$$

แบบฝึกหัด 2.3 ก

1. จงหาจำนวนตรงข้ามของ 11, 13, 15, 16, 20
2. จงหาจำนวนตรงข้ามของ -11, -13, -15, -16, -20
3. จงหาจำนวนตรงข้ามของ -5, 5, 20, -20, 9, -9, 25, 100, -586, -1079, 5936
4. จงเติมคำตอบในช่องว่าง

1) -0 = ... 2) -(-0) = ...

3) -(-17) = ... 4) -(-29) = ...

การลบจำนวนเต็ม

ในการลบจำนวนเต็มนั้นเราอาศัยการบวกตามข้อตกลงดังนี้

ตัวตั้ง – ตัวลบ = ตัวตั้ง + จำนวนตรงข้ามของตัวลบ

นั่นคือ เมื่อ a และ b แทนจำนวนเต็มใด ๆ

$a - b = a +$ จำนวนตรงข้ามของ b

หรือ $a - b = a + (-b)$

ตัวอย่าง

$$4 - 2 = 4 + (-2)$$
$$2 - 4 = 2 + (-4)$$
$$(-7) - 3 = (-7) + (-3)$$
$$(-5) - (-1) = (-5) + 1$$
$$8 - (-11) = 8 + 11$$

เมื่อเขียนการลบให้อยู่ในรูปการบวกแล้ว จึงหาผลบวกของจำนวนเต็มตามวิธีที่กล่าวมาแล้ว ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลลบ $7 - 15$

วิธีทำ $7 - 15 = 7 + (-15)$

$= -8$

ตอบ -8

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลลบ $(-3) - 4$

วิธีทำ

$$(-3) - 4 = (-3) + (-4)$$
$$= -7$$

ตอบ -7

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลลบ $2 - (-3)$

วิธีทำ

$$2 - (-3) = 2 + 3$$
$$= 5$$

ตอบ 5

ตัวอย่างที่ 4 จงหาผลลบ $(-2) - (-6)$

วิธีทำ

$$(-2) - (-6) = (-2) + 6$$
$$= 4$$

ตอบ 4

แบบฝึกหัด 2.3 ข

1. จงเขียนการลบต่อไปนี้ในรูปการบวกของจำนวนตรงข้าม

1) $8 - 9$	2) $3 - 16$
3) $0 - 20$	4) $(-28) - 9$
5) $(-5) - 27$	6) $(-17) - 2$
7) $0 - (-15)$	8) $9 - (-35)$
9) $(-30) - (-30)$	10) $(-53) - (-30)$

2. จงหาผลลบ

1) 14 – 8	2) 13 – (-6)
3) (-13) – (-6)	4) (-13) – 6
5) 14 – (-8)	6) (-99) – 1
7) 3 – 12	8) (-3) – 12
9) (-3) – (-12)	10) (-7) – (-7)
11) 0 – (-15)	12) -(-27) – 0

3. จงหาผลลัพธ์

1) [(-3) + 5] – 2	2) [(-10) + 30] – (-12)
3) (12 – 7) + 25	4) (25 – 30) + (-13)
5) [(-39) – 14] + 9	6) [(-41) – 8] – 6
7) (-19) + (16 – 15)	8) 12 – (3 – 9)
9) (-10) + [(-11) – 2]	10) (-5) – (16 – 8)

4. จงหาจำนวนเต็มที่แทน a แล้วทำให้ได้ประโยคที่เป็นจริง

1) (-4) – a = -10	2) a – 12 = 10
3) (-35) – a = -20	4) (-46) – (-35) = a
5) 80 – a = 40	6) (-17) – a = 30
7) -(-26) – a = 50	8) a – (-8) = 26
9) 50 – (-50) = a	10) (-19) – a = -20
11) 0 – (-24) = a	12) (-27) – a = 0
13) 0 – a = 5	14) -(-8) – 0 = a
15) 0 + 0 = a	16) 0 + (-0) = a

5. จงพิจารณาประโยค a – b = b – a แล้วตอบคำถามต่อไปนี้

   1) จงหาจำนวนเต็มมาแทน a และ b เพื่อทำให้ประโยคข้างบนเป็นจริง
   2) จงหาจำนวนเต็มมาแทน a และ b เพื่อทำให้ประโยคข้างบนเป็นเท็จ
   3) จำนวนเต็มมีสมบัติการสลับที่สำหรับการลบหรือไม่

6. จงพิจารณาประโยค $(a-b)-c = a-(b-c)$ แล้วตอบคำถามต่อไปนี้
    1) จงหาจำนวนเต็มมาแทน a, b และ c เพื่อทำให้ประโยคข้างบนเป็นจริง
    2) จงหาจำนวนเต็มมาแทน a, b และ c เพื่อทำให้ประโยคข้างบนเป็นเท็จ
    3) จำนวนเต็มมีสมบัติการเปลี่ยนหมู่สำหรับการลบหรือไม่
7. จงหาจำนวนเต็มสองจำนวนที่ลบกันแล้วมีคำตอบเท่ากับจำนวนที่กำหนดให้ต่อไปนี้
    1) 6
    2) -9
    3) 0
    4) a เมื่อ a แทนจำนวนเต็มใด ๆ

การทอนเงินของแม่ค้า

เคยสังเกตหรือไม่ว่า บางครั้งที่เราซื้อของจากแม่ค้า และต้องมีการทอนเงิน แม่ค้าส่วนใหญ่คิดทอนเงินเป็นลำดับ ดังตัวอย่าง

ศจีไปตลาดสดซื้อปูม้า 5 ตัว คิดเป็นเงิน 155 บาท ถ้าศจีจ่ายเงินให้แม่ค้าเป็นธนบัตรใบละ 500 บาทหนึ่งใบ แม่ค้าจะทอนเงินให้ศจีเป็นลำดับ ดังนี้

ครั้งแรกทอนเงินให้ 5 บาทโดยนับเพิ่มจาก 155 บาท เป็น 160

ครั้งที่สองทอนเงินให้อีก 40 บาทโดยนับเพิ่มจาก 160 เป็น 200

ครั้งที่สามทอนเงินให้อีก 300 บาทโดยนับเพิ่มจาก 200 เป็น 500

ดังนั้น ศจีจะได้รับเงินทอน $5 + 40 + 300 = 345$ บาท

ซึ่งเขียนแสดงความเกี่ยวข้องของจำนวนเงินดังกล่าวได้เป็น $500 - 155 = 5 + 40 + 300$ แนวคิดในการทอนเงินของแม่ค้านี้ แม่ค้าคิดคำนวณเงินที่ลูกค้าให้มาเป็นตัวตั้งไว้ในใจและนับเงินทอนให้ลูกค้าโดยนับต่อจากราคาสินค้าที่ลูกค้าซื้อไปจนครบจำนวนเงินที่เป็นตัวตั้งหรือจำนวนเงินที่ลูกค้าให้มานั่นเอง

2.4 การคูณจำนวนเต็ม

การคูณจำนวนเต็มบวกด้วยจำนวนเต็มบวก

การคูณจำนวนเต็มบวกด้วยจำนวนเต็มบวก คือการคูณจำนวนนับด้วยจำนวนนับ ดังตัวอย่าง

$$2 \times 5 = 5 + 5 = 10$$

$$3 \times 6 = 6 + 6 + 6 = 18$$

$$4 \times 7 = 7 + 7 + 7 + 7 = 28$$

การคูณจำนวนเต็มบวกด้วยจำนวนเต็มบวกข้างต้น จะได้คำตอบเป็นจำนวนเต็มบวก

การคูณจำนวนเต็มบวกด้วยจำนวนเต็มลบ

การคูณจำนวนเต็มบวกด้วยจำนวนเต็มลบ สามารถหาผลคูณโดยใช้ความหมายของการคูณและการบวกจำนวนเต็มลบดังตัวอย่าง

$$2 \times (-4) = (-4) + (-4) = -8$$

$$4 \times (-8) = (-8) + (-8) + (-8) + (-8) = -32$$

$$5 \times (-10) = (-10) + (-10) + (-10) + (-10) + (-10) = -50$$

การคูณจำนวนเต็มบวกด้วยจำนวนเต็มลบข้างต้น จะได้คำตอบเป็นจำนวนเต็มลบที่มีค่าสัมบูรณ์เท่ากับผลคูณของค่าสัมบูรณ์ของสองจำนวนนั้น เช่น

$$7 \times (-9) = -63$$

$$3 \times (-11) = -33$$

$$13 \times (-2) = -26$$

การคูณจำนวนเต็มลบด้วยจำนวนเต็มบวก

เนื่องจาก จำนวนเต็มมีสมบัติการสลับที่สำหรับการคูณ ดังนั้นในการคูณจำนวนเต็มลบด้วยจำนวนเต็มบวกจึงหาผลคูณได้โดยใช้สมบัติการสลับที่ เช่น

$$\begin{aligned}(-9) \times 7 &= 7 \times (-9)\\ &= -63\end{aligned}$$

$$(-15) \times 3 = 3 \times (-15)$$
$$= -45$$
$$(-2) \times 13 = 13 \times (-2)$$
$$= -26$$

การคูณจำนวนเต็มลบด้วยจำนวนเต็มบวก ได้คำตอบเป็นจำนวนเต็มลบที่มีค่าสัมบูรณ์เท่ากับผลคูณของค่าสัมบูรณ์ของสองจำนวนนั้น

การคูณจำนวนเต็มลบด้วยจำนวนเต็มลบ

การคูณจำนวนเต็มลบด้วยจำนวนเต็มลบเป็นไปตามหลักเกณฑ์การคูณจำนวนเต็มที่กล่าวว่า *การคูณจำนวนเต็มลบด้วยจำนวนเต็มลบ จะได้คำตอบเป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่าสัมบูรณ์เท่ากับผลคูณของค่าสัมบูรณ์ของสองจำนวนนั้น* เช่น

$$(-7) \times (-5) = 35$$
$$(-8) \times (-2) = 16$$

หลักเกณฑ์การคูณจำนวนเต็ม มีดังนี้

1. การคูณจำนวนเต็มบวกด้วยจำนวนเต็มบวก ใช้วิธีเดียวกับการคูณจำนวนนับด้วยจำนวนนับ ซึ่งจะได้คำตอบเป็นจำนวนเต็มบวก
2. การคูณจำนวนเต็มบวกด้วยจำนวนเต็มลบ จะได้คำตอบเป็นจำนวนเต็มลบที่มีค่าสัมบูรณ์เท่ากับผลคูณของค่าสัมบูรณ์ของสองจำนวนนั้น
3. การคูณจำนวนเต็มลบด้วยจำนวนเต็มบวก จะได้คำตอบเป็นจำนวนเต็มลบที่มีค่าสัมบูรณ์เท่ากับผลคูณของค่าสัมบูรณ์ของสองจำนวนนั้น
4. การคูณจำนวนเต็มลบด้วยจำนวนเต็มลบ จะได้คำตอบเป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่าสัมบูรณ์เท่ากับผลคูณของค่าสัมบูรณ์ของสองจำนวนนั้น

การคูณจำนวนเต็มใด ๆ ด้วยศูนย์หรือการคูณศูนย์ด้วยจำนวนเต็มใด ๆ จะได้คำตอบเป็นศูนย์

นั่นคือ $a \times 0 = 0 \times a = 0$ *เมื่อ* a *แทนจำนวนเต็มใด ๆ*

การคูณจำนวนเต็มใด ๆ ด้วยหนึ่งหรือการคูณหนึ่งด้วยจำนวนเต็มใด ๆ จะได้คำตอบเป็นจำนวนเต็มนั้นเสมอ

นั่นคือ $a \times 1 = 1 \times a = a$ *เมื่อ a แทนจำนวนเต็มใด ๆ*

เมื่อ a และ b แทนจำนวนใด ๆ ในทางคณิตศาสตร์อาจเขียนแทน $a \times b$ ด้วย $a \cdot b$ หรือ ab หรือ (a)(b) เช่น

$2 \cdot 3$ หมายถึง 2×3

$2(-2)(-3)$ หมายถึง $2 \times (-2) \times (-3)$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลคูณ $(-19) \times (-5)$

วิธีทำ $(-19) \times (-5) = 95$

ตอบ 95

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลคูณ $(-15) \cdot 13$

วิธีทำ $(-15) \cdot 13 = -195$

ตอบ -195

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลคูณ $[(-25)(-6)](-2)$

วิธีทำ
$$[(-25)(-6)](-2) = 150(-2)$$
$$= -300$$

ตอบ -300

ตัวอย่างที่ 4 จงหาผลคูณ $8(-5x)$ เมื่อแทน x ด้วย -4

วิธีทำ
$$8(-5x) = 8[(-5)(-4)]$$
$$= 8 \times 20$$

ตอบ 160

จำนวนเต็มใดเอ่ย ที่บวกด้วยตัวมันเองแล้ว
ได้ค่ามากกว่าตัวมันเองคูณกันเสียอีก

แบบฝึกหัด 2.4

1. จงหาผลคูณ

1) 9×12 2) $(-11) \times 7$
3) $13 \times (-8)$ 4) $(-21) \times (-12)$
5) $25 \times (-25)$ 6) $(-400) \times 20$
7) $0 \times (1250)$ 8) $(-135) \times 0$
9) $(-1) \times (-115)$ 10) $(-318) \times (-1)$
11) $(-1) \times (-1)$ 12) 0×0

2. จงหาผลคูณ

1) 14×17 2) 17×14
3) $3 \times (-15)$ 4) $(-15) \times 3$
5) $20 \times (-3)$ 6) $(-3) \times 20$
7) $25 \times (-40)$ 8) $(-40) \times 25$
9) $(-38) \times (-120)$ 10) $(-120) \times (-38)$
11) $14 \times (-14)$ 12) $(-14) \times 14$

3. จงหาผลคูณ $a \times b$ และ $b \times a$ แล้วตรวจสอบดูว่า $a \times b = b \times a$ เป็นจริงหรือเท็จ ถ้ากำหนด a และ b ดังต่อไปนี้

1) $a = -4, \ b = 5$ 2) $a = 3, \ b = -4$
3) $a = -9, \ b = -10$ 4) $a = 0, \ b = -21$

4. จงหาผลคูณ

1) $[(-1) \times (-1)] \times (-1)$ 2) $(-1) \times [(-1) \times (-1)]$
3) $[0 \times (-10)] \times (-10)$ 4) $0 \times [(-10) \times (-10)]$
5) $[(-3)(-2)] \cdot 1$ 6) $(-3)[(-2) \cdot 1]$
7) $[(-7)(-8)] \cdot 9$ 8) $(-7)[(-8) \cdot 9]$
9) $[(-7) \cdot 10](-5)$ 10) $(-7)[10 \cdot (-5)]$

5. จงแทน a, b และ c ด้วยจำนวนที่กำหนดให้ในประโยค

   $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ แล้วตรวจสอบว่าประโยคที่ได้เป็นจริงหรือไม่

   1) $a = -2,\ b = 3,\ c = 2$ 2) $a = -1,\ b = -4,\ c = 5$

   3) $a = -3,\ b = -2,\ c = -2$

6. จงหาผลลัพธ์

   1) $2 \times (3 + 7)$ 2) $(2 \times 3) + (2 \times 7)$

   3) $(-4) \times (5 + 6)$ 4) $\{(-4) \times 5\} + \{(-4) \times 6\}$

   5) $3 \times \{(-2) + 7\}$ 6) $\{3 \times (-2)\} + (3 \times 7)$

   7) $(-2) \times \{4 + (-9)\}$ 8) $\{(-2) \times 4\} + \{(-2) \times (-9)\}$

   9) $(-3) \times \{(-1) + (-11)\}$ 10) $(-3)(-1) + (-3)(-11)$

7. จงแทน a, b และ c ด้วยจำนวนที่กำหนดให้ในประโยค

   $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ แล้ว ตรวจสอบว่าประโยคที่ได้เป็นจริงหรือไม่

   1) $a = 2,\ b = 1,\ c = -1$ 2) $a = -7,\ b = -4,\ c = -3$

   3) $a = -3,\ b = 8,\ c = -2$

8. จงหาผลลัพธ์

   1) $(8 + 4) \times 3$ 2) $(8 \times 3) + (4 \times 3)$

   3) $(10 + 5) \times (-2)$ 4) $\{(10) \times (-2)\} + \{5 \times (-2)\}$

   5) $\{(-2) + 6\} \times 5$ 6) $\{(-2) \times 5\} + (6 \times 5)$

   7) $\{7 + (-8)\} \times (-1)$ 8) $\{7 \times (-1)\} + (-8)(-1)$

   9) $\{(-3) + (-12)\} \times (-3)$ 10) $(-3)(-3) + (-12)(-3)$

9. จงแทน a, b และ c ด้วยจำนวนที่กำหนดให้ในประโยค

   $(b + c) \times a = (b \times a) + (c \times a)$ แล้วตรวจสอบว่าประโยคที่ได้เป็นจริงหรือไม่

   1) $a = 3,\ b = 2,\ c = -1$ 2) $a = -4,\ b = 6,\ c = -8$

   3) $a = -3,\ b = -9,\ c = -5$

10. จงหาจำนวนเต็มที่แทน b แล้วทำให้ได้ประโยคที่เป็นจริง

1) $b \times 6 = -12$
2) $5 \times b = -5$
3) $(-2) \times b = 6$
4) $(-1) \times b = 1$
5) $b \times 1 = -1$
6) $7 \times (-10) \times b = -70$
7) $100 \times b = -200$
8) $(-1) \times b = 2$
9) $(-1) \times b \times (-1) = 1$
10) $(-5) \times b \times (-5) = -125$

11. จงหาจำนวนเต็มสองจำนวนที่คูณกันแล้วได้ผลคูณเป็นจำนวนที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1) -7
2) 15
3) -24
4) 31

12. กำหนดให้ a และ b แทนจำนวนเต็มใด ๆ จงพิจารณาว่าประโยคต่อไปนี้เป็นจริงหรือไม่ จงให้เหตุผล

1) ab มากกว่า a
2) ab มากกว่า b

2.5 การหารจำนวนเต็ม

การหารจำนวนเต็มด้วยจำนวนเต็มอาจเป็นการหารลงตัวหรือเป็นการหารไม่ลงตัวก็ได้ แต่ในที่นี้จะกล่าวถึงเฉพาะการหารจำนวนเต็มด้วยจำนวนเต็มที่เป็นการหารลงตัวซึ่งมีผลหารเป็นจำนวนเต็มและเศษเป็น 0

การหารจำนวนเต็มด้วยจำนวนเต็มที่เป็นการหารลงตัวเราอาศัยการคูณตามข้อตกลงดังนี้

ตัวหาร $\times$ ผลหาร = ตัวตั้ง

นั่นคือ เมื่อ a, b และ c แทนจำนวนเต็มใด ๆ ที่ b ไม่เท่ากับ 0

ถ้า $a \div b = c$ แล้ว $a = b \times c$

และ ถ้า $a = b \times c$ แล้ว $a \div b = c$

ในทางคณิตศาสตร์ อาจเขียนแทน $a \div b$ ด้วย $\frac{a}{b}$

เราใช้หลักการข้างต้นหาผลหารของจำนวนเต็ม ดังเช่น

1. การหาผลหาร $\frac{-30}{5}$

ทำได้โดยการหาจำนวนเต็มที่คูณกับ 5 แล้วได้ -30

เนื่องจาก $5 \times (-6) = -30$

จำนวนเต็มที่ต้องการคือ -6

นั่นคือ $\frac{-30}{5} = -6$

2. การหาผลหาร $\frac{30}{-5}$

ทำได้โดยการหาจำนวนเต็มที่คูณกับ -5 แล้วได้ 30

เนื่องจาก $(-5) \times (-6) = 30$

จำนวนเต็มที่ต้องการคือ -6

นั่นคือ $\frac{30}{-5} = -6$

3. การหาผลหาร $\frac{-30}{-5}$

ทำได้โดยการหาจำนวนเต็มที่คูณกับ -5 แล้วได้ -30

เนื่องจาก $(-5) \times 6 = -30$

จำนวนเต็มที่ต้องการคือ 6

นั่นคือ $\frac{-30}{-5} = 6$

เพื่อจะหาวิธีหารจำนวนเต็มด้วยจำนวนเต็มที่ไม่เท่ากับศูนย์ให้รวดเร็วขึ้น ให้นักเรียนพิจารณาการหาผลหารต่อไปนี้

$\frac{20}{5} = 4$ หาจำนวนที่คูณกับ 5 ได้ 20

$\frac{-12}{6} = -2$ หาจำนวนที่คูณกับ 6 ได้ -12

$\frac{9}{-3} = -3$ หาจำนวนที่คูณกับ -3 ได้ 9

$\frac{-10}{-2} = 5$ หาจำนวนที่คูณกับ -2 ได้ -10

เนื่องจากการหารมีความสัมพันธ์กับการคูณ และการหาผลคูณสามารถทำได้โดยใช้ค่าสัมบูรณ์ ดังนั้นการหาผลหารของจำนวนเต็มจึงสามารถหาได้โดยใช้ค่าสัมบูรณ์ดังนี้

หลักเกณฑ์การหารจำนวนเต็ม มีดังนี้

1. ถ้าตัวตั้งและตัวหารเป็นจำนวนเต็มบวกทั้งคู่ ใช้วิธีเดียวกับการหารจำนวนนับด้วยจำนวนนับ ซึ่งจะได้คำตอบเป็นจำนวนเต็มบวก
2. ถ้าตัวตั้งและตัวหารเป็นจำนวนเต็มลบทั้งคู่ ให้นำค่าสัมบูรณ์ของตัวตั้งและค่าสัมบูรณ์ของตัวหารมาหารกัน แล้วตอบเป็นจำนวนเต็มบวก
3. ถ้าตัวตั้งหรือตัวหารตัวใดตัวหนึ่งเป็นจำนวนเต็มลบโดยที่อีกตัวหนึ่งเป็นจำนวนเต็มบวก ให้นำค่าสัมบูรณ์ของตัวตั้งและค่าสัมบูรณ์ของตัวหารมาหารกัน แล้วตอบเป็นจำนวนเต็มลบ

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลหาร $444 \div (-12)$

วิธีทำ $444 \div (-12) = -37$

ตอบ -37

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลหาร $(-525) \div 7$

วิธีทำ $(-525) \div 7 = -75$

ตอบ -75

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลหาร $(-777) \div (-37)$

วิธีทำ $(-777) \div (-37) = 21$

ตอบ 21

ตัวอย่างที่ 4 จงหาผลลัพธ์ $[\{(-7) \times (-9)\} + (-11)] \div (-13)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}[\{(-7) \times (-9)\} + (-11)] \div (-13) &= [63 + (-11)] \div (-13) \\ &= 52 \div (-13) \\ &= -4\end{aligned}$$

ตอบ -4

แบบฝึกหัด 2.5

1. จงหาผลหาร

    1) $21 \div 21$
    2) $7 \div (-7)$
    3) $(-50) \div 2$
    4) $(-15) \div (-3)$
    5) $(-441) \div 21$
    6) $(-19) \div (-1)$
    7) $180 \div (-90)$
    8) $(-200) \div 20$
    9) $(-1,000) \div (-100)$
    10) $550 \div (-11)$
    11) $2,262 \div 58$
    12) $(-9,968) \div (-89)$
    13) $10,680 \div (-120)$
    14) $\{(-45) \div 3\} \div (-3)$
    15) $(-45) \div \{3 \div (-3)\}$
    16) $\{48 \div (-6)\} \div (-2)$
    17) $48 \div \{(-6) \div (-2)\}$
    18) $\{(-64) \div 8\} \div \{(-8) \div (-4)\}$

2. จงหาจำนวนเต็มที่แทน b แล้วทำให้ได้ประโยคที่เป็นจริง

    1) $b \div (-3) = 4$
    2) $15 \div b = -5$
    3) $(-16) \div b = -4$
    4) $b \div 1 = -12$
    5) $(-32) \div b = 1$
    6) $[(-64) \div 8] \div b = 2$

3. จงพิจารณาประโยค $a \div b = b \div a$ แล้วตอบคำถามต่อไปนี้

    1) จงหาจำนวนเต็มมาแทน a และ b เพื่อทำให้ประโยคข้างบนเป็นจริง
    2) จงหาจำนวนเต็มมาแทน a และ b เพื่อทำให้ประโยคข้างบนเป็นเท็จ
    3) จำนวนเต็มมีสมบัติการสลับที่สำหรับการหารหรือไม่

4. จงพิจารณาประโยค $(a \div b) \div c = a \div (b \div c)$ แล้วตอบคำถามต่อไปนี้

    1) จงหาจำนวนเต็มมาแทน a, b และ c เพื่อทำให้ประโยคข้างบนเป็นจริง
    2) จงหาจำนวนเต็มมาแทน a, b และ c เพื่อทำให้ประโยคข้างบนเป็นเท็จ
    3) จำนวนเต็มมีสมบัติการเปลี่ยนหมู่สำหรับการหารหรือไม่

5. ในทางคณิตศาสตร์มีบทนิยามของ**จำนวนคู่**และ**จำนวนคี่**ดังนี้

บทนิยาม **จำนวนคู่** คือจำนวนเต็มที่หารด้วย 2 ลงตัว
จำนวนคี่ คือจำนวนเต็มที่หารด้วย 2 ไม่ลงตัว

จงตอบคำถามต่อไปนี้

1) 0 เป็นจำนวนคู่หรือจำนวนคี่ เพราะเหตุใด
2) จำนวนใดบ้างที่เป็นจำนวนคู่
3) จำนวนใดบ้างที่เป็นจำนวนคี่

2.6 สมบัติของจำนวนเต็ม

สมบัติเกี่ยวกับการบวกและการคูณจำนวนเต็ม

ในทางคณิตศาสตร์มีสมบัติเกี่ยวกับการบวกและการคูณจำนวนเต็มบางประการดังนี้

1. สมบัติการสลับที่

1) เมื่อมีจำนวนเต็มสองจำนวนบวกกัน เราสามารถสลับที่ระหว่างตัวตั้งและตัวบวกได้โดยที่ผลลัพธ์ยังคงเท่ากัน เช่น

$$2 + (-3) = (-3) + 2 = -1$$

นั่นคือ ถ้า a และ b แทนจำนวนเต็มใด ๆ แล้ว $a + b = b + a$
สมบัตินี้เรียกว่า *สมบัติการสลับที่สำหรับการบวก*

2) เมื่อมีจำนวนเต็มสองจำนวนคูณกัน เราสามารถสลับที่ระหว่างตัวตั้งและตัวคูณได้โดยที่ผลลัพธ์ยังคงเท่ากัน เช่น

$$4 \times (-5) = (-5) \times 4 = -20$$

นั่นคือ ถ้า a และ b แทนจำนวนเต็มใด ๆ แล้ว $a \times b = b \times a$
สมบัตินี้เรียกว่า *สมบัติการสลับที่สำหรับการคูณ*

2. สมบัติการเปลี่ยนหมู่

1) เมื่อมีจำนวนเต็มสามจำนวนบวกกัน เราสามารถบวกจำนวนเต็มคู่แรกหรือคู่หลังก่อนก็ได้ โดยที่ผลลัพธ์สุดท้ายยังคงเท่ากัน เช่น

$$\{(-23) + 9\} + (-7) = (-23) + \{9 + (-7)\} = -21$$

นั่นคือ ถ้า a, b และ c แทนจำนวนเต็มใด ๆ แล้ว

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

สมบัตินี้เรียกว่า *สมบัติการเปลี่ยนหมู่สำหรับการบวก*

2) เมื่อมีจำนวนเต็มสามจำนวนคูณกัน เราสามารถคูณจำนวนเต็มคู่แรกหรือคู่หลังก่อนก็ได้ โดยที่ผลลัพธ์สุดท้ายยังคงเท่ากัน เช่น

$$\{(-13) \times (-25)\} \times 4 = (-13) \times \{(-25) \times 4\} = 1{,}300$$

นั่นคือ ถ้า a, b และ c แทนจำนวนเต็มใด ๆ แล้ว

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

สมบัตินี้เรียกว่า *สมบัติการเปลี่ยนหมู่สำหรับการคูณ*

3. สมบัติการแจกแจง

สมบัติการแจกแจง เป็นสมบัติที่แสดงความเกี่ยวข้องระหว่างการบวกและการคูณที่กล่าวว่า ถ้า a, b และ c แทนจำนวนเต็มใด ๆ แล้ว

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

และ $(b + c) \times a = (b \times a) + (c \times a)$

เช่น $(-7) \times \{(-5) + 3\} = \{(-7) \times (-5)\} + \{(-7) \times 3\} = 14$

และ $\{(-3) + 6\} \times (-5) = \{(-3) \times (-5)\} + \{6 \times (-5)\} = -15$

สมบัติของหนึ่งและศูนย์

1. สมบัติของหนึ่ง

1) การคูณจำนวนใด ๆ ด้วยหนึ่งหรือคูณหนึ่งด้วยจำนวนใด ๆ จะได้ผลคูณเท่ากับจำนวนนั้น เช่น

$$35 \times 1 = 1 \times 35 = 35$$

$$(-18) \times 1 = 1 \times (-18) = -18$$

$$(-1) \times 1 = 1 \times (-1) = -1$$

นั่นคือ *ถ้า* a *แทนจำนวนใด ๆ แล้ว* $a \times 1 = 1 \times a = a$

2) การหารจำนวนใด ๆ ด้วยหนึ่งจะได้ผลหารเท่ากับจำนวนนั้น เช่น

$$\frac{27}{1} = 27$$

$$\frac{-31}{1} = -31$$

นั่นคือ *ถ้า* a *แทนจำนวนใด ๆ แล้ว* $\frac{a}{1} = a$

2. สมบัติของศูนย์

1) การบวกจำนวนใด ๆ ด้วยศูนย์หรือการบวกศูนย์ด้วยจำนวนใด ๆ จะได้ผลบวกเท่ากับจำนวนนั้น เช่น

$$5 + 0 = 0 + 5 = 5$$

$$(-13) + 0 = 0 + (-13) = -13$$

$$0 + 0 = 0$$

นั่นคือ *ถ้า* a *แทนจำนวนใด ๆ แล้ว* $a + 0 = 0 + a = a$

2) การคูณจำนวนใด ๆ ด้วยศูนย์หรือการคูณศูนย์ด้วยจำนวนใด ๆ จะได้ผลคูณเท่ากับศูนย์ เช่น

$$11 \times 0 = 0 \times 11 = 0$$

$$(-24) \times 0 = 0 \times (-24) = 0$$

$$0 \times 0 = 0$$

นั่นคือ *ถ้า* a *แทนจำนวนใด ๆ แล้ว* $a \times 0 = 0 \times a = 0$

3) การหารศูนย์ด้วยจำนวนใด ๆ ที่ไม่ใช่ศูนย์ จะได้ผลหารเท่ากับศูนย์ เช่น

$$\frac{0}{25} = 0$$

$$\frac{0}{-9} = 0$$

นั่นคือ *ถ้า* a *แทนจำนวนใด ๆ ที่ไม่ใช่* 0 *แล้ว* $\frac{0}{a} = 0$

หมายเหตุ ในทางคณิตศาสตร์เรา**ไม่ใช้ 0 เป็นตัวหาร** นั่นคือ

ถ้า a แทนจำนวนใด ๆ แล้ว $\frac{a}{0}$ ไม่มีความหมายทางคณิตศาสตร์

4) ถ้าผลคูณของจำนวนสองจำนวนใดเท่ากับศูนย์ จำนวนใดจำนวนหนึ่งอย่างน้อยหนึ่งจำนวนต้องเป็นศูนย์

กล่าวคือ *ถ้า* a *และ* b *แทนจำนวนใด ๆ และ* $a \times b = 0$ *แล้ว จะได้* $a = 0$ *หรือ* $b = 0$

เราสามารถนำสมบัติของจำนวนเต็มดังกล่าวข้างต้นมาใช้ในการคำนวณและในการแก้ปัญหาดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลคูณ (-7)(-5)(-4)

วิธีทำ

$$\begin{aligned}(-7)(-5)(-4) &= (-7)\{(-5)(-4)\} \\ &= (-7)(20) \\ &= -140\end{aligned}$$

เราอาจหาผลคูณ (-7)(-5) หรือ (-5)(-4) คู่ใดก่อนก็ได้ แต่ถ้าทำ (-5)(-4) = 20 ก่อน จะทำให้คำนวณได้ง่ายกว่า

ตอบ -140

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลลัพธ์ $8m + 5m$ เมื่อ m แทนจำนวนเต็มใด ๆ

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
8m + 5m &= (8 + 5)m \\
&= 13m
\end{aligned}
$$

ตัวอย่างนี้ใช้สมบัติการแจกแจง

ตอบ 13m

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลคูณ (-4a)(3b) เมื่อ a และ b แทนจำนวนเต็มใด ๆ

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
(-4a)(3b) &= \{(-4) \times 3\}(ab) \\
&= -12ab
\end{aligned}
$$

ตัวอย่างนี้ใช้สมบัติการเปลี่ยนหมู่และการสลับที่สำหรับการคูณมาช่วยในการคำนวณ

ตอบ -12ab

ตัวอย่างที่ 4 จงหาผลคูณ 998×32

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
998 \times 32 &= \{(1{,}000) - 2\} \times 32 \\
&= \{(1{,}000) + (-2)\} \times 32 \\
&= (1{,}000 \times 32) + \{(-2) \times 32\} \\
&= 32{,}000 + (-64) \\
&= 31{,}936
\end{aligned}
$$

ลองคิดดูซิว่าทำไมเขียน “1000 – 2” แทน 998

ตอบ 31,936

ตัวอย่างที่ 5 แม่ค้าติดราคาขายส้มไว้กิโลกรัมละ 40 บาท นิดเลือกซื้อส้มจำนวนหนึ่งชั่งน้ำหนักได้ 3 กิโลกรัมกับ 8 ขีด แม่ค้าคิดเงินค่าส้มให้นิดอย่างรวดเร็วมาก อยากทราบว่าแม่ค้ามีวิธีคิดราคาส้มอย่างไรได้บ้างและคิดค่าส้มเป็นเงินเท่าไร

วิธีคิดราคาส้มของแม่ค้าอาจคิดได้สามแบบดังนี้

แบบที่ 1 แม่ค้าคิดเงินจากน้ำหนักส้ม 3 กิโลกรัมก่อน

ซึ่งคิดเป็นเงิน $3 \times 40 = 120$ บาท

และคิดเงินจากน้ำหนักส้มอีก 8 ขีด ขีดละ 4 บาท

คิดเป็นเงิน $8 \times 4 = 32$ บาท

ดังนั้น แม่ค้าคิดค่าส้มเป็นเงิน $120 + 32 = 152$ บาท

ตอบ 152 บาท

แบบที่ 2 แม่ค้าคิดเงินจากน้ำหนักส้ม 4 กิโลกรัมก่อน

ซึ่งคิดเป็นเงิน $4 \times 40 = 160$ บาท

และคิดเงินจากน้ำหนักส้มอีก 2 ขีด ขีดละ 4 บาท

คิดเป็นเงิน $2 \times 4 = 8$ บาท

ดังนั้น แม่ค้าคิดค่าส้มเป็นเงิน $160 - 8 = 152$ บาท

ตอบ 152 บาท

แบบที่ 3 แม่ค้าคิดแบ่งน้ำหนักส้มเป็นสามส่วนโดยคิดน้ำหนักส้มเป็น 3 กิโลกรัม ครึ่งกิโลกรัม และ 3 ขีด ซึ่งคิดเป็นเงินดังนี้

ส้ม 3 กิโลกรัมราคา $3 \times 40 = 120$ บาท

ส้มครึ่งกิโลกรัมราคา $\frac{40}{2} = 20$ บาท

ส้ม 3 ขีดราคา $3 \times 4 = 12$ บาท

รวมเป็นเงิน $120 + 20 + 12 = 152$ บาท

ตอบ 152 บาท

การคิดราคาส้มของแม่ค้าทั้งสามแบบข้างต้น
อาศัยสมบัติใดช่วยในการคิดคำนวณ

แบบฝึกหัด 2.6

1. จงหาผลลัพธ์

1) $0 + (-21)$	2) $480 + 0$
3) $(-12) \times 0$	4) $7 + (-7)$
5) $(-25) \times 1$	6) 1×52
7) $0 \div (-20)$	8) $(-9) \div 1$
9) $13 \div 13$	10) $(-42) \div (-42)$
11) $a \div a$ เมื่อ $a \neq 0$	12) $(-a) \div a$ เมื่อ $a \neq 0$

2. จงหาจำนวนเต็มที่แทน p แล้วทำให้ประโยคต่อไปนี้เป็นจริง

1) $3p = 0$	2) $p \times (-7) = 0$
3) $p \times 1 = 5$	4) $3 + p = 3$
5) $p + (-9) = 0$	6) $3 + p = 0$
7) $p \times (-1) = 1$	8) $0 \times p = 0$

3. ในแต่ละข้อต่อไปนี้มี m แทนจำนวนใด เพราะเหตุใด

1) $-3m = 0$	2) $m \times m = 0$

4. จงเติมจำนวนเต็มหรืออักษรแทนจำนวนเต็มในช่องที่เว้นไว้เพื่อให้แต่ละประโยคต่อไปนี้ เป็นจริง

    1) $7 + (a + 3) = (7 + \text{........}) + 3$
    2) $x + (6 + a) = (x + 6) + \text{........}$
    3) $(-3) + (b + c) = (b - \text{........}) + c$
    4) $(-3) \times 6 = \text{........} \times (-3)$
    5) $7 \times (p \times 3) = (7 \times \text{........}) \times 3$
    6) $2(3 + \text{........}) = (2 \times 3) + (2 \times 5)$
    7) $(\text{........} - 5)a = (12 \times a) - (5 \times a)$
    8) $(-2)(3 - b) = (-2 \times 3) - (\text{........} \times b)$

9) $(5 \times 200) + (5 \times 30) + 5 = 5(200 + 30 + ...)$

10) $25 \times 36 = (25 \times ....) - (25 \times 4)$

11) $39 \times 15 = (40 + ...) \times 15$

12) $(9 - 6 + 3) \times 7 = (9 \times 7) + (........ \times 7) + (3 \times 7)$

13) $(4a + 4b - 4c) = 4(a + ...)$

5. จงหาจำนวนเต็มที่แทน a แล้วทำให้ประโยคต่อไปนี้เป็นจริง

1) $(6 \times 5) + (6 \times 1) = 6 \times a$

2) $(17 \times 9) - (8 \times 9) = a \times 9$

3) $a \times 253 = (-7 \times 200) + (-7 \times 50) + (-7 \times 3)$

4) $236 \times 27 = (200 \times 27) + (40 \times 27) - (a \times 27)$

5) $(12 \times 55) + (12 \times a) = 12 \times 100$

6) $(12 \times a) - (12 \times 136) = 12 \times 300$

7) $25 \times 24 = (25 \times 20) + (25 \times a)$

8) $36 \times 283 = (36 \times 300) + (36 \times a) - (36 \times 3)$

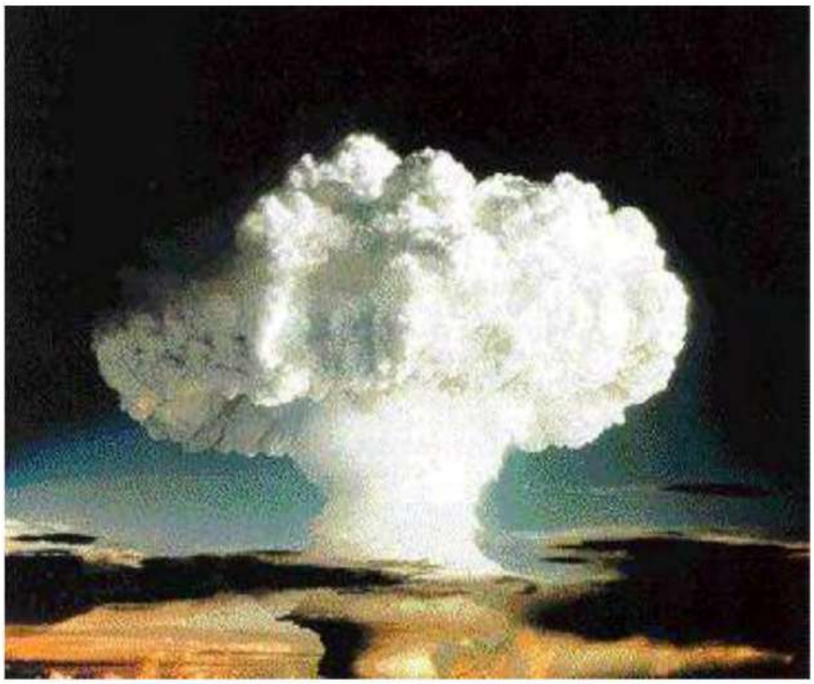
6. นุชไปตลาดกับแม่และแม่ต้องการซื้อข้าวสาร 14 ถุง ราคาถุงละ 55 บาท แม่ถามนุชว่าแม่ต้องจ่ายเงินกี่บาท ถ้านุชต้องคิดคำตอบนี้ในใจ นุชจะมีวิธีคิดอย่างรวดเร็วได้อย่างไรบ้าง จงอธิบาย

7. สมใจซื้อเสื้อ 5 ตัว ราคาตัวละ 99 บาท กางเกง 4 ตัว ราคาตัวละ 199 บาท ถ้าสมใจต้องการคิดราคาเสื้อและกางเกงอย่างรวดเร็ว สมใจจะคิดอย่างไรได้บ้าง และได้คำตอบเท่าไร

ทำไม ไม่ ใช้ 0 เป็นตัวหาร

จงทำกิจกรรมต่อไปนี้

1. ถ้ากำหนดให้ $\frac{0}{0} = a$ แล้วจะเขียนประโยคนี้ให้อยู่ในรูปการคูณได้อย่างไร
2. จงหาค่า a ที่ทำให้ $0 \times a = 0$ เป็นจริง
3. ค่า a ที่หาได้ในข้อ 2 มีมากกว่าหนึ่งค่าหรือไม่
4. ถ้าให้ a เป็นคำตอบของ $\frac{0}{0}$ จะหาค่า a ที่แน่นอนได้หรือไม่ เพราะเหตุใด
5. จงหาคำตอบของ $\frac{5}{0}$ โดยใช้วิธีการหาค่า b ที่ $0 \times b = 5$
6. มีคำตอบของ $\frac{5}{0}$ หรือไม่เพราะเหตุใด
7. การหารจำนวนใด ๆ ด้วย 0 เกิดปัญหาอย่างไรบ้าง

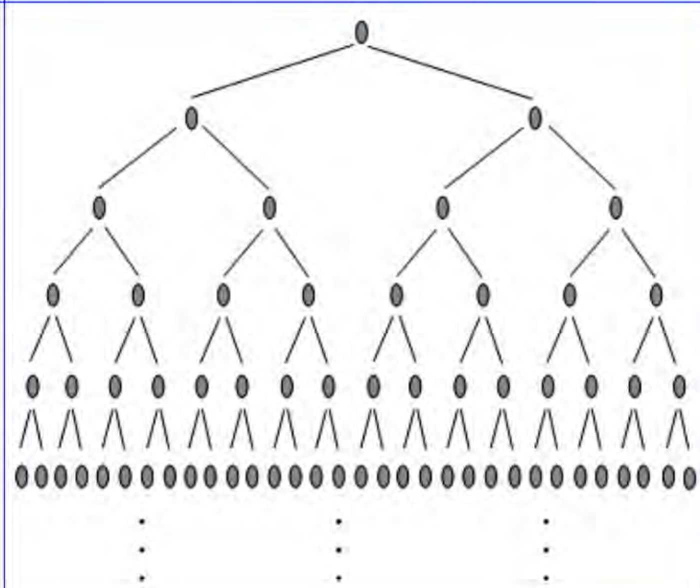


http://www.school.net.th/library/snet3/atom/nuclear1.htm

บทที่ 3

เลขยกกำลัง

ในระบบทางเดินอาหารของคนเราที่เริ่มจาก ลำคอ กระเพาะอาหาร ลำไส้ จนถึงทวารหนักจะมีแบคทีเรียอาศัยอยู่ทั้งชนิดที่มีคุณประโยชน์และชนิดที่มีโทษต่อร่างกาย ซึ่งมีจำนวนมากกว่า 400 ชนิด คิดเป็นล้านล้านเซลล์ แบคทีเรียเป็นสัตว์เซลล์เดียวขยายพันธุ์โดยการแบ่งเซลล์ จากหนึ่งเซลล์เป็นสองเซลล์ จากสองเซลล์เป็นสี่เซลล์ไปเรื่อย ๆ การแบ่งเซลล์ของแบคทีเรียแต่ละชนิดจะใช้เวลาและอุณหภูมิที่เหมาะสมต่าง ๆ กัน เช่น แบคทีเรียเอสเคอริเคียโคไล (Escherichia coli) เป็นแบคทีเรียที่มีอยู่ในธรรมชาติเป็นเชื้อที่ทำให้เกิดโรคท้องร่วง แบคทีเรียชนิดนี้ขยายพันธุ์ในอุณหภูมิที่เหมาะสม 37°C การแบ่งเซลล์รุ่นใหม่แต่ละรุ่นใช้เวลาเฉลี่ยประมาณ 20 นาที สามารถแสดงได้ดังแผนภาพต่อไปนี้

ครั้งที่	เวลาที่ผ่านไป (นาที)	จำนวนแบคทีเรีย (เซลล์)
0	0	
1	20	
2	40	
3	60	
4	80	
5	100	
⋮	⋮	

ครั้งที่	จำนวนแบคทีเรีย (เซลล์)	
0	1	1
1	2	2
2	2×2	4
3	$(2 \times 2) \times 2$	8
4	$(2 \times 2 \times 2) \times 2$	16
5	$(2 \times 2 \times 2 \times 2) \times 2$	32
⋮	⋮	⋮

จากแบบรูปข้างต้นนี้จะเห็นว่าเมื่อแบคทีเรียแบ่งเซลล์ในรุ่นต่อไปทุกครั้ง จำนวนแบคทีเรียจะเพิ่มเป็นสองเท่าของจำนวนเดิม จำนวนเหล่านี้ได้จากการคูณของ 2 ซ้ำกันหลาย ๆ ตัว ซึ่งจะเป็นจำนวนที่มีค่ามากขึ้นเรื่อย ๆ ในทางคณิตศาสตร์จึงมีสัญลักษณ์ **เลขยกกำลัง** เพื่อใช้แทนจำนวนที่เกิดจากการคูณตัวเองซ้ำกันหลาย ๆ ตัว และให้ความหมายของเลขยกกำลัง ดังนี้

3.1 ความหมายของเลขยกกำลัง

บทนิยาม ถ้า a แทนจำนวนใด ๆ และ n แทนจำนวนเต็มบวก "a ยกกำลัง n" หรือ "a กำลัง n" เขียนแทนด้วย a^n มีความหมายดังนี้

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ ตัว}}$$

เรียก a^n ว่า **เลขยกกำลัง** ที่มี a เป็น**ฐาน** และ n เป็น**เลขชี้กำลัง**

ตัวอย่าง

สัญลักษณ์ 5^4 อ่านว่า "ห้ายกกำลังสี่" หรือ "ห้ากำลังสี่" หรือ "กำลังสี่ของห้า"

5^4 แทน $5 \times 5 \times 5 \times 5$

5^4 มี 5 เป็นฐาน และ มี 4 เป็นเลขชี้กำลัง

ในทำนองเดียวกัน

สัญลักษณ์ $(-3)^5$ อ่านว่า "ลบสามทั้งหมดยกกำลังห้า" หรือ อ่านว่า "กำลังห้าของลบสาม"

$(-3)^5$ แทน $(-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)$

$(-3)^5$ มี -3 เป็นฐาน และมี 5 เป็นเลขชี้กำลัง

เมื่อมีจำนวนที่คูณตัวเองซ้ำกันหลาย ๆ ตัว เราอาจใช้เลขยกกำลังเขียนแทนจำนวนเหล่านั้นได้ เช่น

$7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$ เขียนแทนด้วย 7^5

$(0.3) \times (0.3) \times (0.3) \times (0.3)$ เขียนแทนด้วย $(0.3)^4$

$(-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5)$ เขียนแทนด้วย $(-5)^6$

$a \times a \times a \times a \times a \times a \times a$ เขียนแทนด้วย a^7

ให้สังเกตว่าการเขียนเลขยกกำลังแทนจำนวน เช่น $(-2)^4$ และ -2^4 มีความหมายต่างกัน ซึ่งนิยมถือเป็นข้อตกลงว่า

$(-2)^4$ หมายถึง $(-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)$

อ่านว่า ลบสองทั้งหมดยกกำลังสี่ หรือ กำลังสี่ของลบสอง

และ $(-2)^4 = 16$

-2^4 หมายถึง $-(2 \times 2 \times 2 \times 2)$ ซึ่งเป็นจำนวนตรงข้ามของ 2^4

อ่านว่า ลบของสองยกกำลังสี่ หรือ ลบของกำลังสี่ของสอง

และ $-2^4 = -16$

จากที่กล่าวมาจึงเห็นได้ว่า $(-2)^4 \neq -2^4$ แต่ในบางจำนวน เช่น $(-2)^3$ กับ -2^3 ถึงแม้ว่ามีความหมายต่างกันแต่มีผลลัพธ์เป็นจำนวนเดียวกันคือ -8 ดังนั้นเพื่อความชัดเจนและสื่อความหมายให้ตรงกันจึงควรเขียนสัญลักษณ์ที่แทนจำนวนนั้นให้ถูกต้องตามที่ต้องการ

เมื่อต้องการทราบว่าเลขยกกำลังนั้นแทนจำนวนใดก็ให้เขียนเลขยกกำลังนั้นให้อยู่ในรูปการคูณของจำนวนที่เป็นฐาน แล้วหาผลคูณดังตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 1 จงหาว่า 5^3 แทนจำนวนใด

วิธีทำ $5^3 = 5 \times 5 \times 5$

$= 125$

ตอบ 125

ตัวอย่างที่ 2 จงหาว่า $(-2)^6$ แทนจำนวนใด

วิธีทำ $(-2)^6 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)$

$= 64$

ตอบ 64

ตัวอย่างที่ 3 จงหาว่า $(-3)^5$ แทนจำนวนใด

วิธีทำ $(-3)^5 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)$

$= -243$

ตอบ -243

ตัวอย่างที่ 4 จงหาว่า $\left(\frac{1}{4}\right)^2$ แทนจำนวนใด

วิธีทำ $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{16}$

ตอบ $\frac{1}{16}$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาว่า $(0.3)^4$ แทนจำนวนใด

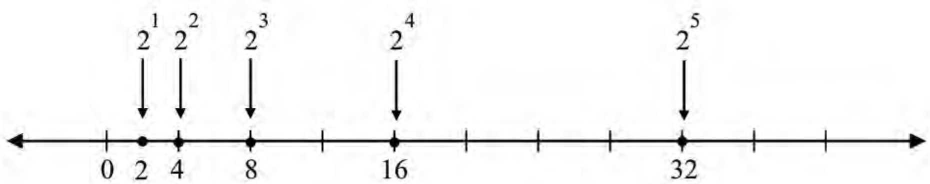
วิธีทำ $(0.3)^4 = (0.3) \times (0.3) \times (0.3) \times (0.3)$

$= 0.0081$

ตอบ 0.0081

แบบฝึกหัด 3.1 ก

1. จงหาว่าเลขยกกำลังต่อไปนี้แทนจำนวนใด
   1) 10^1 2) 4^3
   3) $(-5)^4$ 4) $(-6)^3$
   5) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$ 6) $\left(\frac{2}{5}\right)^3$
   7) $(0.2)^4$ 8) $(0.01)^3$
2. จงหาว่าจำนวนในแต่ละข้อต่อไปนี้เท่ากันหรือไม่ เพราะเหตุใด
   1) 2^1 กับ 2 2) 5^2 กับ $(-5)^2$
   3) $(-6)^2$ กับ -6^2 4) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ กับ $\frac{2^3}{3}$
3. จงพิจารณาเลขยกกำลังที่แทนด้วยจุดบนเส้นจำนวนและตอบคำถามในแต่ละข้อต่อไปนี้
   1) พิจารณา $2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, \ldots$



(1) 2^6 แทนจำนวนใดและจุดที่แทน 2^6 อยู่ที่ใดบนเส้นจำนวน

(2) จุดที่แทน 2^1 กับ 2^2 อยู่ห่างกันกี่หน่วย

(3) จุดที่แทน 2^2 กับ 2^3 อยู่ห่างกันกี่หน่วย

(4) จุดที่แทน 2^3 กับ 2^4 อยู่ห่างกันกี่หน่วย

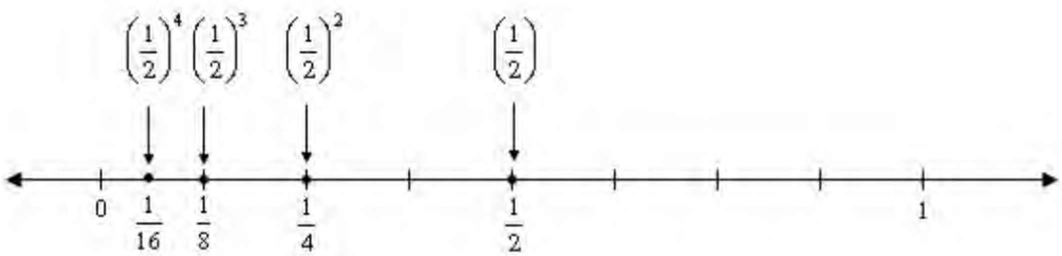
(5) ถ้าให้เลขชี้กำลังของเลขยกกำลังที่มี 2 เป็นฐานเพิ่มขึ้นทีละ 1 ไปเรื่อย ๆ ค่าของเลขยกกำลังนั้นจะเพิ่มขึ้นอย่างไร

(6) ระหว่างจุดสองจุดบนเส้นจำนวนที่แทน 2^n กับ 2^{n+1} เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก มีระยะห่างกันเท่าไร

(7) จากแผนภาพการแบ่งเซลล์ของแบคทีเรียเอสเคอริเคียโคไลที่กล่าวไว้ตอนต้นของบทเรียนนี้ มีระยะเวลาแบ่งเซลล์จากหนึ่งเซลล์เป็นสองเซลล์ประมาณทุก 20 นาที ในอุณหภูมิที่เหมาะสม $37^{\circ}C$ ถ้านำของเหลวที่มีเชื้อแบคทีเรียชนิดนี้ จำนวน 2 ล้านเซลล์ มาฟักตัวในถาดเพาะเชื้อที่อุณหภูมิ $37^{\circ}C$

เพื่อให้ได้เชื้อแบคทีเรียอย่างน้อย 120 ล้านเซลล์จะต้องใช้เวลานานเท่าใด

2) พิจารณา $\left(\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \left(\frac{1}{2}\right)^4, \ldots$



(1) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$ แทนจำนวนใดและจุดที่แทน $\left(\frac{1}{2}\right)^5$ อยู่ที่ใดบนเส้นจำนวน

(2) ระยะห่างระหว่างจุดที่แทน $\left(\frac{1}{2}\right)^1$ กับ $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ มากกว่าหรือน้อยกว่าระยะห่างระหว่างจุดที่แทน $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ กับ $\left(\frac{1}{2}\right)^3$

(3) ถ้าให้เลขชี้กำลังของเลขยกกำลังที่มี $\frac{1}{2}$ เป็นฐานเพิ่มขึ้นทีละ 1 ไปเรื่อย ๆ ค่าของเลขยกกำลังนั้นจะลดลงอย่างไร

(4) ระหว่างจุดสองจุดบนเส้นจำนวนที่แทน $\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$ กับ $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก มีระยะห่างกันเท่าไร

(5) เลขยกกำลัง $\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากขึ้นเรื่อย ๆ จะมีค่าเข้าใกล้จำนวนใดและเป็นจำนวนลบได้หรือไม่

เมื่อต้องการเขียนจำนวนให้อยู่ในรูปเลขยกกำลัง ทำได้โดยใช้ **การแยกตัวประกอบ**หรือเขียนจำนวนนั้นให้อยู่ในรูปการคูณของจำนวนที่ซ้ำ ๆ กัน

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียน 16 ในรูปเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังมากกว่า 1

วิธีทำ

$$16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$$
$$= 2^{4}$$

ตอบ 2^{4}

หรือ
$$16 = 4 \times 4$$
$$= 4^{2}$$

ตอบ 4^{2}

นอกจากสองคำตอบข้างต้นนี้แล้ว เราอาจเขียน 16 ในรูปเลขยกกำลังที่มีฐานเป็นจำนวนลบได้อีกสองคำตอบ ได้แก่ $(-2)^{4}$ และ $(-4)^{2}$

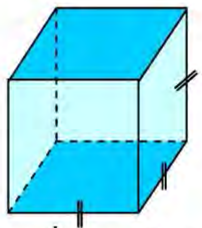
ตัวอย่างที่ 2 จงเขียน 216 ในรูปเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังมากกว่า 1

วิธีทำ

$$216 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$$
$$= (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3)$$
$$= 6 \times 6 \times 6$$
$$= 6^{3}$$

ตอบ 6^3

ตัวอย่างที่ 3



ถังสังกะสีทรงลูกบาศก์ใบหนึ่งมีปริมาตรภายใน 729 ลูกบาศก์เซนติเมตร ความยาวของแต่ละด้านภายในถังเป็นกี่เซนติเมตร

วิธีทำ เนื่องจากปริมาตรของถังทรงลูกบาศก์เท่ากับ (ความยาวของด้าน)^3

ถังทรงลูกบาศก์มีปริมาตรภายใน 729 ลูกบาศก์เซนติเมตร

เนื่องจาก $729 = 9 \times 9 \times 9$

$= 9^3$

ดังนั้น ภายในถังยาวด้านละ 9 เซนติเมตร

ตอบ 9 เซนติเมตร

ในบางครั้งเรามีความจำเป็นต้องเขียนเลขยกกำลังแทนจำนวนที่มีค่ามาก ๆ เพื่อให้สะดวกต่อการนำไปใช้ ดังตัวอย่าง

รัฐบาลไทยจัดจำหน่ายพันธบัตรออมทรัพย์ไทยเข้มแข็งในปีงบประมาณ 2552 อายุ 5 ปี มีวงเงินรวม 50,000,000,000 บาท ในทางปฏิบัตินิยมใช้หน่วย **ล้านบาท** แทนหน่วย **บาท** ในทางคณิตศาสตร์เขียนแทนงบประมาณดังกล่าวด้วย $50{,}000 \times 10^6$ บาท และเขียน 50,000 ล้านบาท อ่านว่า ห้าหมื่น**ล้านบาท**

เมื่อกล่าวถึงจำนวนดวงดาวในท้องฟ้าซึ่งมีอยู่มากมาย นักดาราศาสตร์ใช้เลขยกกำลังแสดงจำนวนดวงดาว เช่น ประมาณว่ามีดาวฤกษ์อยู่ในเอกภพทั้งหมด 10^{57} ดวง

10^{57} หมายถึง จำนวนที่เขียนแทนด้วย 1 และตามด้วย 0 อีก 57 ตัว

ถ้าไม่ใช้เลขยกกำลังแทนจำนวนนี้ เราจะต้องใช้พื้นที่มากในการเขียนตัวเลขแทนจำนวนนี้

แบบฝึกหัด 3.1 ข

1. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ในรูปเลขยกกำลังที่มีฐานเป็นจำนวนเฉพาะ

   1) 81　　2) 121

   3) 169　　4) 343

   5) 625　　6) 729

2. จงเขียนเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังมากกว่า 1 แทนจำนวนต่อไปนี้

   1) 256　　2) 625

   3) -128　　4) -1,000

   5) 2.25　　6) 0.027

   7) 1,000,000,000　　8) 0.00001

3. ถ้าให้ $x = 2$, $y = -3$ และ $z = 0.1$ จงหาค่าของจำนวนต่อไปนี้

   1) z^4　　2) y^3

   3) $(-x)^3$　　4) $(-y)^4$

   5) $(x+z)^3$　　6) $\left(\frac{x}{z}\right)^2$

   7) x^2z^2　　8) $(xz)^2$

   9) $(x+y)^2$　　10) x^2+y^2

   11) x^3-y^3　　12) $(x-y)^3$

   13) $(y-x)^x$　　14) $(x-y)^x$

4. ถ้า x แทนจำนวนเต็มบวก และ $5^x = 625$ แล้ว x แทนจำนวนใด

5. ถ้า x และ y แทนจำนวนเต็มบวก $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{16}$ และ $3^y = 27$ แล้ว $x+y$ เท่ากับจำนวนใด

6. นักประชากรศาสตร์คาดการณ์ว่าในปี พ.ศ. 2600 ประชากรของโลกจะมีมากถึง 10,000 ล้านคน จงเขียนจำนวนดังกล่าวในรูปเลขยกกำลังที่มีหน่วยเป็นคน
7. สมนึกต้องการสร้างถังคอนกรีตทรงลูกบาศก์ไว้หลังบ้าน เพื่อเก็บน้ำไว้ใช้ให้ได้น้ำอย่างน้อย 4 ลูกบาศก์เมตร ถ้าบริเวณที่จะสร้างเป็นที่ว่างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ 1.5 เมตร จงพิจารณาว่าจะสามารถสร้างถังเก็บน้ำตรงบริเวณนี้ได้ตามความต้องการหรือไม่ เพราะเหตุใด
8. ถ้าแหนชนิดหนึ่งเพิ่มจำนวนของตัวเองเป็นสองเท่าทุก ๆ สัปดาห์ เก่งได้แหนชนิดนี้มาจากเพื่อน 3 ต้นและลอยไว้ในอ่างปลา เมื่อครบ 4 สัปดาห์ เก่งจะมีแหนอย่างมากที่สุดกี่ต้น
9. สารกัมมันตรังสีเป็นสารไม่เสถียรที่สลายตัวโดยปล่อยรังสีตลอดเวลา มนุษย์ใช้สารกัมมันตรังสีในด้านต่าง ๆ เช่น ใช้เป็นเชื้อเพลิงในโรงงานไฟฟ้านิวเคลียร์ ใช้สร้างอาวุธสงคราม ในทางการแพทย์ใช้วินิจฉัยและรักษาโรค ระยะเวลาที่สารกัมมันตรังสีสลายตัวเหลือครึ่งหนึ่งของปริมาณเดิมเรียกว่า **ครึ่งชีวิต** (half – life) ของสารกัมมันตรังสี

   ครึ่งชีวิตของเรเดียมใช้เวลาประมาณ 1,600 ปี จงหาว่าเรเดียม 20 กรัมจะสลายตัวจนเหลือ 5 กรัมในเวลาประมาณกี่ปี
10. จำนวนเช่น 4, 9 และ 16 สามารถเขียนแทนด้วยจุดตามแบบรูปดังต่อไปนี้

4 9 16

คนโบราณจึงเรียกจำนวนเช่น 4, 9 และ 16 ว่า **จำนวนสี่เหลี่ยมจัตุรัส** (square number)

1) จงหาจำนวนสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ถัดจากนี้ขึ้นไปอีกสามจำนวน
2) จำนวนสี่เหลี่ยมจัตุรัสดังกล่าวนี้เขียนแทนด้วยเลขยกกำลังได้หรือไม่ ถ้าได้จะเขียนได้เป็นอย่างไร
3) ถ้าจำนวนสี่เหลี่ยมจัตุรัสจำนวนหนึ่งเท่ากับ 100 แต่ละด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่แสดงจำนวนนี้มีกี่จุด

ปัญหาชวนคิด

มีเรื่องเล่ากันมาว่ามีเศรษฐีคนหนึ่งทำกิจการหลายอย่างจนกระทั่งมีความมั่งคั่งร่ำรวย มีลูกน้องมากมาย แต่มีลูกน้องคนหนึ่งชื่อบุญมาซึ่งเป็นคนซื่อสัตย์และทำหน้าที่คอยดูแลกิจการแทนเศรษฐีอยู่บ่อย ๆ เมื่อบุญมาทำงานครบ 20 ปี เศรษฐีถึงกับเอ่ยปากให้รางวัลเป็นพิเศษ

เศรษฐี : บุญมาเอ๊ย! ไหน ๆ เจ้าก็ทำงานกับข้าด้วยความซื่อสัตย์มานานนับสิบ ๆ ปี ข้าจะให้รางวัลพิเศษแก่เจ้า เจ้าอยากได้สิ่งใดเป็นรางวัลล่ะ

บุญมา : ขอบคุณท่านมากขอรับ กระผมอยากได้อยู่สองอย่าง แต่ให้ท่านเลือกให้กระผมเพียงหนึ่งอย่าง

อย่างที่หนึ่ง กระผมอยากได้ทองคำหนัก 50 บาท

อย่างที่สอง กระผมอยากได้เงินเป็นรายวัน วันแรกขอ 1 บาท วันที่สองขอ 2 บาท วันที่สามขอ 4 บาท วันต่อ ๆ ไปขอรับเงินเป็นสองเท่าของวันที่ได้รับครั้งสุดท้ายและขอรับเงินเป็นเวลานาน 20 วันเท่านั้น

เศรษฐี : ตกลงข้าเลือกให้เงินเจ้าตามที่ขอก็แล้วกัน

บุญมา : ขอบพระคุณมากขอรับ

จงอภิปรายและตอบคำถามต่อไปนี้

1. เศรษฐีคิดอย่างไรเกี่ยวกับรางวัลที่บุญมาขอ
2. บุญมาคิดอย่างไรเกี่ยวกับรางวัลที่ขอ เขานำความรู้เรื่องใดมาใช้เป็นประโยชน์ต่อตนเอง
3. จำนวนเงินที่บุญมาได้รับทั้งสิ้นเป็นเงินกี่บาท
4. การตัดสินใจของเศรษฐีผิดหรือถูก จงให้เหตุผล

ข้อมูล ราคาทองตามประกาศของสมาคมทองคำประจำวันอังคารที่ 22 กันยายน 2552 ทองรูปพรรณราคาขายออกบาทละ 16,550 บาท

3.2 การดำเนินการของเลขยกกำลัง

การคูณเลขยกกำลังเมื่อเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก

พิจารณาปัญหาต่อไปนี้

กาแลกซีแอนโดรมีดา (Andromeda galaxy) เป็นกาแลกซีแบบกังหัน เช่นเดียวกับกาแลกซีทางช้างเผือกที่มีโลกเราอยู่ด้วย เรามองเห็นกาแลกซีนี้คล้ายก้อนเมฆสีจาง ๆ ด้วยตาเปล่าได้ ทั้งที่กาแลกซีแอนโดรมีดาอยู่ห่างจากโลกเราประมาณ 2,200,000 ปีแสง อยากทราบว่า กาแลกซีนี้อยู่ห่างจากโลกประมาณกี่กิโลเมตร

ระยะ 1 ปีแสง หมายถึง ระยะที่แสงเคลื่อนที่ไปได้ในเวลา 1 ปี ซึ่งเป็นระยะประมาณ 9,460,000,000,000 กิโลเมตร

จากปัญหาข้างต้นนี้จะได้ว่า กาแลกซีแอนโดรมีดาอยู่ห่างจากโลก

$2{,}200{,}000 \times 9{,}460{,}000{,}000{,}000 = 20{,}812{,}000{,}000{,}000{,}000{,}000$ กิโลเมตร

จะเห็นว่าการคำนวณและการเขียนคำตอบข้างต้นเกี่ยวข้องกับจำนวนที่เขียนโดยใช้ 0 ต่อท้าย 20,812 ถึง 15 ตัว ทำให้เสียเวลาในการเขียนและยากต่อการอ่าน ถ้าใช้เลขยกกำลังเขียนคำตอบเป็น $20{,}812 \times 10^{15}$ กิโลเมตร จะดูกะทัดรัดกว่า

การแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการคำนวณจำนวนที่มีลักษณะเช่นนี้ นิยมเขียนจำนวนเหล่านั้นให้อยู่ในรูปการคูณของจำนวนนับกับเลขยกกำลังที่มีสิบเป็นฐานก่อน แล้วจึงดำเนินการในรูปเลขยกกำลังต่อไป

การหาคำตอบข้างต้นอาจทำได้ดังนี้

เนื่องจาก 2,200,000 ปีแสง เท่ากับ 22×10^{5} ปีแสง

และ 9,460,000,000,000 กิโลเมตร เท่ากับ 946×10^{10} กิโลเมตร

ดังนั้น กาแลกซีแอนโดรมีดา อยู่ห่างจากโลกประมาณ

$$(22 \times 10^{5}) \times (946 \times 10^{10}) = (22 \times 946) \times (10^{5} \times 10^{10}) \text{ กิโลเมตร}$$

$$= 20{,}812 \times 10^{5+10} \text{ กิโลเมตร}$$

$$= 20{,}812 \times 10^{15} \text{ กิโลเมตร}$$

จากการคำนวณข้างต้นจะเห็นว่า $10^{5} \times 10^{10}$ ได้เท่ากับ $10^{5+10} = 10^{15}$

ผลคูณ 10^{15} นี้หาได้จากการใช้สมบัติของการคูณเลขยกกำลังซึ่งแสดงได้ดังนี้

$$10^{5} \times 10^{10} = (10\times10\times10\times10\times10)\times(10\times10\times10\times10\times10\times10\times10\times10\times10\times10)$$

$$= 10\times10\times10\times10\times10\times10\times10\times10\times10\times10\times10\times10\times10\times10\times10$$

$$= 10^{15} \text{ หรือ } 10^{5+10}$$

พิจารณาการคูณเลขยกกำลังที่มีฐานเป็นจำนวนเดียวกันต่อไปนี้

$$2^{3} \times 2^{5} = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2)$$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

$$= 2^{8} \text{ หรือ } 2^{3+5}$$

$$(-5)^{3} \times (-5)^{2} = \{(-5) \times (-5) \times (-5)\} \times \{(-5) \times (-5)\}$$

$$= (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5)$$

$$= (-5)^{5} \text{ หรือ } (-5)^{3+2}$$

จากการคูณข้างต้นจะเห็นว่า ถ้าฐานของเลขยกกำลังที่คูณกันเป็นจำนวนเดียวกันแล้วผลคูณที่ได้สามารถเขียนอยู่ในรูปเลขยกกำลังที่มีฐานเป็นจำนวนเดิม และเลขชี้กำลังหาได้จากการบวกเลขชี้กำลังของตัวตั้งกับเลขชี้กำลังของตัวคูณ

การคูณเลขยกกำลังที่มีฐานเป็นจำนวนเดียวกันและมีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก เป็นไปตาม **สมบัติของการคูณเลขยกกำลัง** ดังนี้

เมื่อ a แทนจำนวนใด ๆ m และ n แทนจำนวนเต็มบวก

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

ในกรณีที่เลขยกกำลังที่นำมาคูณกันมีฐานต่างกัน เราไม่สามารถเขียนผลคูณโดยใช้เลขชี้กำลังบวกกันได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

$$\begin{aligned} 2^3 \times 3^4 &= (2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3) \\ &= 8 \times 81 \\ &= 648 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-3)^2 \times (2)^4 &= \{(-3) \times (-3)\} \times (2 \times 2 \times 2 \times 2) \\ &= 9 \times 16 \\ &= 144 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนผลคูณ $5^3 \times 5^4$ ในรูปเลขยกกำลัง

วิธีทำ

$$\begin{aligned} 5^3 \times 5^4 &= 5^{3+4} \\ &= 5^7 \end{aligned}$$

ตอบ 5^7

ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนผลคูณ 49×7^{10} ในรูปเลขยกกำลัง

วิธีทำ เนื่องจาก $49 = 7^2$

จะได้ $$\begin{aligned} 49 \times 7^{10} &= 7^2 \times 7^{10} \\ &= 7^{2+10} \\ &= 7^{12} \end{aligned}$$

ตอบ 7^{12}

ตัวอย่างที่ 3 จงเขียนผลคูณ $(-3)^4 \times 3^5$ ในรูปเลขยกกำลัง

วิธีทำ เนื่องจาก $(-3)^4 = 81$

และ $3^4 = 81$

ดังนั้น $(-3)^4 = 3^4$

จะได้ $(-3)^4 \times 3^5 = 3^4 \times 3^5$

$= 3^{4+5}$

$= 3^9$

ตอบ 3^9

ตัวอย่างที่ 4 จงเขียนผลคูณ $(-16) \times (-2)^3 \times 2^5$ ในรูปเลขยกกำลัง

วิธีทำ $(-16) \times (-2)^3 \times 2^5 = -(2^4) \times (-2)^3 \times 2^5$

$= -(-2)^3 \times 2^4 \times 2^5$

$= -(-2)\,(-2)^2 \times 2^4 \times 2^5$ $(-2)^2 = 2^2$

$= 2 \times 2^2 \times 2^4 \times 2^5$

$= 2^{1+2+4+5}$

$= 2^{12}$

ตอบ 2^{12}

ตัวอย่างที่ 5 โลกหนักประมาณ 5×10^{24} กิโลกรัม ดวงอาทิตย์หนักเป็น 4×10^5 เท่าของโลก จงหาน้ำหนักของดวงอาทิตย์

วิธีทำ โลกหนักประมาณ 5×10^{24} กิโลกรัม

ดวงอาทิตย์หนักเป็น 4×10^5 เท่าของโลก

ดังนั้น ดวงอาทิตย์หนักประมาณ $(4\times10^5)\times(5\times10^{24})$ กิโลกรัม

$= (4 \times 5) \times (10^5 \times 10^{24})$

$= 20 \times 10^{29}$

$= 2 \times 10 \times 10^{29}$

$= 2 \times 10^{30}$ กิโลกรัม

ตอบ ประมาณ 2×10^{30} กิโลกรัม

แบบฝึกหัด 3.2 ก

1. จงเขียนผลคูณของเลขยกกำลังต่อไปนี้ในรูปเลขยกกำลัง

    1) $3^5 \times 3^8$
    2) 8×8^9
    3) $7^3 \times (-7)^8$
    4) $(-2)^6(-2)^7$
    5) $(0.2)^3(0.2)^5$
    6) $(1.2)^4(1.2)^3$
    7) $(0.01)^2(0.01)^3$
    8) $\left(\frac{1}{2}\right)^4(0.5)^2$
    9) $3^m \cdot 3^n$ เมื่อ m และ n แทนจำนวนเต็มบวก
    10) $x^m \cdot x^n$ เมื่อ $x \neq 0$, m และ n แทนจำนวนเต็มบวก

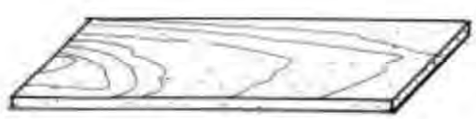
2. จงเขียนผลคูณของจำนวนในแต่ละข้อต่อไปนี้ในรูปเลขยกกำลัง

    1) $2 \times 2^3 \times 2^4$
    2) $(-3)^2 \times 3^3 \times (-3)^4$
    3) $8 \times 2^3 \times (-2)^4$
    4) $5 \times 25 \times (-5)^4$
    5) $(-2) \times 2^5 \times (-2)^5$
    6) $5^4 \times (-5)^3 \times (-5)$
    7) $x^3 \cdot x^4 \cdot x^5$ เมื่อ $x \neq 0$
    8) $a^2 \cdot (-a)^4 \cdot b^3$ เมื่อ $a \neq 0$ และ $b \neq 0$

3. ในเอกภพมีกาแลกซีประมาณ 10^{10} กาแลกซี และในแต่ละกาแลกซีมีดาวฤกษ์อยู่ประมาณ 10^{10} ดวง จงหาว่าในเอกภพมีดาวฤกษ์ประมาณกี่ดวง

4. ในกลุ่มกาแลกซีทางช้างเผือกมีดาวฤกษ์บางดวงอยู่ไกลจากโลกถึง 10^5 ปีแสง อยากทราบว่าดาวฤกษ์ดวงนั้นอยู่ห่างจากโลกประมาณกี่กิโลเมตร
(1 ปีแสง $\approx 9.46 \times 10^{12}$ กิโลเมตร)

5. ไม้กระดานแผ่นหนึ่งหนา 2 เซนติเมตร กว้าง 16 เซนติเมตร และยาว 128 เซนติเมตร จงหาว่าไม้กระดานแผ่นนี้มีปริมาตรกี่ลูกบาศก์เซนติเมตร
(ให้เขียนคำตอบในรูปเลขยกกำลัง)



6. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปเลขยกกำลัง

   1) $2^2 + 2^2$

   2) $3^2 + 3^2 + 3^2$

   3) $4^3 + 4^3 + 4^3 + 4^3$

ตอบได้หรือไม่

ถ้าแหนชนิดหนึ่งเพิ่มจำนวนของตัวเองเป็นสองเท่าในทุก ๆ สองวันและสระน้ำแห่งหนึ่งมีแหนชนิดนี้เพิ่มจำนวนจนเต็มสระในเวลา 40 วัน จงหาว่ามีแหนครึ่งสระในเวลากี่วัน

การหารเลขยกกำลังเมื่อเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก

พิจารณาปัญหาต่อไปนี้

แบคทีเรียที่อยู่ในร่างกายของคนเรามีหลายชนิดหลายสายพันธุ์ มีทั้งที่ให้คุณประโยชน์และให้โทษต่อร่างกาย แลคโตบาซิลลัส แอซิโดฟีลัส (Lactobacillus acidophilus) เป็นแบคทีเรียที่ให้คุณประโยชน์ต่อร่างกาย อาศัยอยู่ในลำไส้เล็ก ช่วยย่อยน้ำตาลในนมให้เป็นกรดแลคติก ซึ่งมีฤทธิ์ในการกำจัดแบคทีเรียที่เป็นโทษต่อร่างกาย ในนมเปรี้ยวและโยเกิร์ต (yogurt) ทุกชนิดจะมีแบคทีเรียดังกล่าวที่ให้คุณประโยชน์ช่วยในระบบการย่อยและการขับถ่าย

ถ้านมเปรี้ยวชนิดหนึ่งบรรจุอยู่ในขวดขนาด 1,000 ลูกบาศก์เซนติเมตรหรือ 1 ลิตร และให้ข้อมูลกำกับว่ามีแบคทีเรียประมาณ 6×10^{10} เซลล์ จงหาว่าในนมเปรี้ยว 1 ลูกบาศก์เซนติเมตรมีแบคทีเรียอยู่กี่เซลล์

จากปัญหาข้างต้นจะได้ว่า

นมเปรี้ยว 1,000 ลูกบาศก์เซนติเมตรมีแบคทีเรีย 6×10^{10} เซลล์

ดังนั้น นมเปรี้ยว 1 ลูกบาศก์เซนติเมตรมีแบคทีเรีย $\frac{6 \times 10^{10}}{1,000} = \frac{6 \times 10^{10}}{10^3}$ เซลล์

$= 6 \times 10^7$ เซลล์

จากการคำนวณข้างต้นจะเห็นว่า $\dfrac{10^{10}}{10^{3}}$ ได้เท่ากับ 10^{7}

ผลหาร 10^{7} นี้หาได้จากการใช้สมบัติของการหารเลขยกกำลังซึ่งจะกล่าวถึงต่อไปนี้

การหารเลขยกกำลังที่มีฐานเป็นจำนวนเดียวกันและฐานไม่เท่ากับศูนย์ มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก ในรูปของ $a^{m} \div a^{n}$ *จะพิจารณาเป็น 3 กรณี คือ เมื่อ* $m > n$, $m = n$ *และ* $m < n$ ดังนี้

กรณีที่ 1 $a^{m} \div a^{n}$ เมื่อ a แทนจำนวนใด ๆ ที่ไม่ใช่ศูนย์ m, n แทนจำนวนเต็มบวกและ $m > n$

พิจารณาการหารเลขยกกำลัง ต่อไปนี้

1. $\dfrac{5^{8}}{5^{2}} = \dfrac{5\times5\times5\times5\times5\times5\times5\times5}{5\times5}$

$$\frac{\cancel{5}\times\cancel{5}\times5\times5\times5\times5\times5\times5}{\cancel{5}\times\cancel{5}}$$

$= 5\times5\times5\times5\times5\times5$

$= 5^{6}$ หรือ 5^{8-2}

2. $\dfrac{(-7)^{6}}{(-7)^{3}} = \dfrac{(-7)(-7)(-7)(-7)(-7)(-7)}{(-7)(-7)(-7)}$

$$\frac{\cancel{(-7)}\cancel{(-7)}\cancel{(-7)}(-7)(-7)(-7)}{\cancel{(-7)}\cancel{(-7)}\cancel{(-7)}}$$

$= (-7)(-7)(-7)$

$= (-7)^{3}$ หรือ $(-7)^{6-3}$

3. $\dfrac{(0.2)^{5}}{0.2} = \dfrac{(0.2)(0.2)(0.2)(0.2)(0.2)}{0.2}$

$$\frac{\cancel{(0.2)}(0.2)(0.2)(0.2)(0.2)}{\cancel{0.2}}$$

$= (0.2)(0.2)(0.2)(0.2)$

$= (0.2)^{4}$ หรือ $(0.2)^{5-1}$

จากการหารเลขยกกำลังข้างต้นจะเห็นว่า ผลหารเป็นเลขยกกำลังที่มีฐานเป็นจำนวนเดิม และเลขชี้กำลังเท่ากับเลขชี้กำลังของตัวตั้งลบด้วยเลขชี้กำลังของตัวหาร ซึ่งเป็นไปตาม **สมบัติของการหารเลขยกกำลัง** ดังนี้

เมื่อ a แทนจำนวนใด ๆ ที่ไม่ใช่ศูนย์ m, n แทนจำนวนเต็มบวก และ m > n

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลลัพธ์ $3^9 \div 3^4$ ในรูปเลขยกกำลัง

วิธีทำ

$$\frac{3^9}{3^4} = 3^{9-4}$$

$$= 3^5$$

ตอบ 3^5

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลลัพธ์ $(-5)^6 \div (-5)^4$

วิธีทำ

$$\frac{(-5)^6}{(-5)^4} = (-5)^{6-4}$$

$= (-5)^2$ หรือ 25

ตอบ 25

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลลัพธ์ $8^2 \div 2^4$

วิธีทำ เนื่องจาก $8 = 2^3$

จะได้ $8^2 = 8 \times 8$

$$= 2^3 \times 2^3$$

$$= 2^6$$

$$\frac{8^2}{2^4} = \frac{2^6}{2^4}$$

$$= 2^{6-4}$$

$$= 2^2$$

$$= 4$$

ตอบ 4

กรณีที่ 2 $a^m \div a^n$ เมื่อ a แทนจำนวนใด ๆ ที่ไม่ใช่ศูนย์ m, n แทนจำนวนเต็มบวก และ $m = n$

พิจารณา $3^4 \div 3^4$

ถ้าใช้บทนิยามของเลขยกกำลังจะได้ $\frac{3^4}{3^4} = \frac{3\times3\times3\times3}{3\times3\times3\times3}$

$= 1$

$$\frac{\cancel{3}\times\cancel{3}\times\cancel{3}\times\cancel{3}}{\cancel{3}\times\cancel{3}\times\cancel{3}\times\cancel{3}}$$

ถ้าลองใช้สมบัติของการหารเลขยกกำลัง $a^m \div a^n = a^{m-n}, a \neq 0$ ในกรณีที่ $m = n$

$$\text{จะได้ } \frac{3^4}{3^4} = 3^{4-4}$$

$$= 3^0$$

แต่จากการใช้บทนิยามของเลขยกกำลังดังที่แสดงไว้ข้างต้น เราได้ว่า $3^4 \div 3^4 = 1$ ดังนั้นเพื่อให้สมบัติของการหารเลขยกกำลัง $a^m \div a^n = a^{m-n}$ ใช้ได้ในกรณีที่ $m = n$ ด้วย จึงต้องให้ $3^0 = 1$

ในกรณีทั่ว ๆ ไปมีบทนิยามของ a^0 ดังนี้

บทนิยาม เมื่อ a แทนจำนวนใด ๆ ที่ไม่ใช่ศูนย์

$$a^0 = 1$$

เมื่อมีข้อตกลงดังกล่าวจึงทำให้สมบัติของการหารเลขยกกำลัง $a^m \div a^n = a^{m-n}, a \neq 0$ เป็นจริง ในกรณีที่ $m = n$ ด้วย

ตัวอย่างที่ 4 จงหาผลลัพธ์ $\dfrac{2^3 \times 2^4}{2^7}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\frac{2^3 \times 2^4}{2^7} &= \frac{2^{3+4}}{2^7} \\
&= \frac{2^7}{2^7} \\
&= 2^{7-7} \\
&= 2^0 \\
&= 1
\end{aligned}$$

ตอบ 1

กรณีที่ 3 $a^m \div a^n$ เมื่อ a แทนจำนวนใด ๆ ที่ไม่ใช่ศูนย์ m, n แทนจำนวนเต็มบวก และ $m < n$

พิจารณา $3^4 \div 3^8$

ถ้าใช้บทนิยามของเลขยกกำลัง

จะได้
$$\begin{aligned}
\frac{3^4}{3^8} &= \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3}{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3} \\
&= \frac{1}{3^4}
\end{aligned}$$

$$\frac{\cancel{3} \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times \cancel{3}}{\cancel{3} \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}$$

ถ้าลองใช้สมบัติของการหารเลขยกกำลัง $a^m \div a^n = a^{m-n}, a \neq 0$ ในกรณีที่ $m < n$

จะได้
$$\begin{aligned}
\frac{3^4}{3^8} &= 3^{4-8} \\
&= 3^{-4}
\end{aligned}$$

แต่จากการใช้บทนิยามของเลขยกกำลังข้างต้น เราได้ว่า $3^4 \div 3^8 = \dfrac{1}{3^4}$

ดังนั้นเพื่อให้สมบัติของการหารเลขยกกำลัง $a^m \div a^n = a^{m-n}$ ใช้ได้ในกรณีที่ $m < n$ ด้วย จึงต้องให้ 3^{-4} เท่ากับ $\dfrac{1}{3^4}$

ในกรณีทั่ว ๆ ไปมีบทนิยามของ a^{-n} ดังนี้

บทนิยาม เมื่อ a แทนจำนวนใด ๆ ที่ไม่ใช่ศูนย์และ n แทนจำนวน เต็มบวก $a^{-n} = \frac{1}{a^{n}}$

เมื่อมีข้อตกลงดังกล่าวจึงทำให้สมบัติของการหารเลขยกกำลัง $a^{m} \div a^{n} = a^{m-n}$, $a \neq 0$ เป็นจริง ในกรณีที่ $m < n$ ด้วย

ตัวอย่างที่ 5 จงหาผลลัพธ์ $\frac{3^4 \times 3^2}{3^{11}}$

วิธีทำ

$$\frac{3^4 \times 3^2}{3^{11}} = \frac{3^{4+2}}{3^{11}}$$
$$= \frac{3^{6}}{3^{11}}$$
$$= 3^{6-11}$$
$$= 3^{-5} \text{ หรือ } \frac{1}{243}$$

ตอบ 3^{-5} หรือ $\frac{1}{243}$

สรุปได้ว่าการหารเลขยกกำลังที่มีฐานเดียวกันและฐานไม่เป็นศูนย์ มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวกที่กล่าวมาแล้วทั้งสามกรณีเป็นไปตาม**สมบัติของการหารเลขยกกำลัง** ดังนี้

เมื่อ a แทนจำนวนใด ๆ $a \neq 0$ m และ n แทนจำนวนเต็มบวก

$$a^{m} \div a^{n} = a^{m-n}$$

จากที่กล่าวมาแล้วข้างต้นจะเห็นว่า เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก จำนวนเต็มลบ หรือศูนย์ มีความหมาย ดังนี้

1. ถ้า a แทนจำนวนใด ๆ และ n แทนจำนวนเต็มบวก

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n\ \text{ตัว}}$$

2. ถ้า a แทนจำนวนใด ๆ ที่ไม่ใช่ศูนย์และ n แทนจำนวนเต็มบวก

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n\ \text{ตัว}}}$$

3. ถ้า a แทนจำนวนใด ๆ ที่ไม่ใช่ศูนย์

$$a^0 = 1$$

ตัวอย่างที่ 6 จงหาผลลัพธ์ $2^5 \times 2^7 \times 2^{-3}$ ในรูปเลขยกกำลัง

วิธีทำ

$$2^5 \times 2^7 \times 2^{-3} = 2^5 \times 2^7 \times \frac{1}{2^3}$$

$$= \frac{2^{12}}{2^3}$$

$$= 2^9$$

ตอบ 2^9

ตัวอย่างที่ 7 จงหาผลลัพธ์ $\frac{3^2 \times 3^7}{3^{11}}$ ในรูปที่มีเลขชี้กำลังเป็นบวก

วิธีทำ

$$\frac{3^2 \times 3^7}{3^{11}} = \frac{3^9}{3^{11}}$$

$$= 3^{9-11}$$

$$= 3^{-2}$$

$$= \frac{1}{3^2}$$

ตอบ $\frac{1}{3^2}$

ตัวอย่างที่ 8 จงหาผลลัพธ์ $\frac{5^4 \times 125}{5^{-3}}$ ในรูปเลขยกกำลัง

วิธีทำ

$$\frac{5^4 \times 125}{5^{-3}} = \frac{5^4 \times 5^3}{5^{-3}}$$

$$= \frac{5^7}{5^{-3}}$$

$$= \frac{5^7}{\frac{1}{5^3}}$$

$$= 5^7 \times \frac{5^3}{1}$$

$$= 5^7 \times 5^3$$

$$= 5^{10}$$

ตอบ 5^{10}

ตัวอย่างที่ 9 จงหาผลลัพธ์ $\frac{5^0 \times 2^3 \times 8}{(-2)^8}$

วิธีทำ

$$\frac{5^0 \times 2^3 \times 8}{(-2)^8} = \frac{1 \times 2^3 \times 2^3}{2^8}$$

$(-2)^8 = 2^8$

$$= \frac{2^6}{2^8}$$

$$= 2^{-2}$$

$$= \frac{1}{2^2}$$

$$= \frac{1}{4}$$

ตอบ $\frac{1}{4}$

ตัวอย่างที่ 10 จงหาผลลัพธ์ $\dfrac{a^{-2}\times a^{6}}{a^{-3}}$ เมื่อ $a \neq 0$

วิธีทำ

$$\frac{a^{-2}\times a^{6}}{a^{-3}} = \frac{\frac{1}{a^{2}}\times a^{6}}{\frac{1}{a^{3}}}$$

$$= \frac{a^{4}}{\frac{1}{a^{3}}}$$

$$= a^{4}\times a^{3}$$

$$= a^{7}$$

ตอบ a^{7}

ตัวอย่างที่ 11 พืชและสัตว์ถ่ายทอดลักษณะต่าง ๆ ทางพันธุกรรมโดยสารพันธุกรรมที่มีลักษณะเป็นสายยาว เรียกว่า ดีเอ็นเอ (DNA) ซึ่งเป็นชื่อย่อของกรดดีออกซีไรโบนิวคลีอิก (DeoxyriboNucleic Acid) ดีเอ็นเอ พบได้ในนิวเคลียสของเซลล์สิ่งที่มีชีวิตทุกชีวิตและมองด้วยตาเปล่าไม่เห็น ดีเอ็นเอของแต่ละชีวิตมีรูปแบบที่แน่นอน ดังตัวอย่างของชีวิตหนึ่งในรูป

ในการวัดความยาวของดีเอ็นเอ ใช้หน่วยอังสตรอม (Angstrom) สัญลักษณ์ของหน่วยอังสตรอม คือ Å และกำหนดให้ 1 Å เท่ากับ 10^{-10} เมตร หรือ 1 Å เท่ากับ 10^{-7} มิลลิเมตร

ในร่างกายของคนปกติจะประกอบด้วยเซลล์เล็ก ๆ ประมาณ 10^{13} เซลล์ ในแต่ละเซลล์มีดีเอ็นเอ ยาวประมาณ 1.02×10^{10} Å ถ้านำเซลล์ทั้งหมดนี้มาเรียงต่อกันเซลล์ต่อเซลล์ จะได้ความยาวของสายดีเอ็นเอประมาณกี่เมตร

วิธีทำ ในแต่ละเซลล์มีดีเอ็นเอยาวประมาณ 1.02×10^{10} Å

คิดเป็น $1.02 \times 10^{10} \times 10^{-10} = \dfrac{1.02 \times 10^{10}}{10^{10}}$ เมตร

$= 1.02$ เมตร

ในร่างกายคนปกติมีเซลล์เล็ก ๆ ประมาณ 10^{13} เซลล์

คิดเป็นความยาวของสายดีเอ็นเอที่ต่อกันได้ประมาณ 1.02×10^{13} เมตร

ตอบ 1.02×10^{13} เมตร

แบบฝึกหัด 3.2 ข

1. จงหาผลลัพธ์

1) $2^7 \div 2^3$	2) $(-3)^7 \div 3^4$
3) $(0.5)^4 \div (0.5)^6$	4) $(-11)^5 \div (-11)^9$
5) $(0.8)^4 \div \left(\dfrac{4}{5}\right)^3$	6) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 \div (0.5)^4$
7) $(0.3)^0 \times (0.3)^3$	8) $(4^2 \times 4^3) \div 4^4$
9) $4^2 \times (4^3 \div 4^4)$	10) $(5^2 \times 5^3) \div 5$
11) $(m^2 \div m^3) \times m^4$ เมื่อ $m \neq 0$	12) $(a^3 \times a^2) \div (a^0 \times a^5)$ เมื่อ $a \neq 0$
13) $(a^2 \times a) \times (a^3 \div a^5)$ เมื่อ $a \neq 0$	14) $\dfrac{m^n \times m^{2n}}{m^0 \times m^{3n}}$ เมื่อ $m \neq 0$ และ n แทนจำนวนเต็มบวก

2. จงหาผลลัพธ์ต่อไปนี้ในรูปที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก

1) 2×2^{-4}	2) $3^{-8} \div 3^2$
3) $\dfrac{3^5 \times 3^{-7}}{(-3)^0}$	4) $m^{-4} \div m^{-1}$ เมื่อ $m \neq 0$
5) $(a^3 \times a^{-8}) \div (a^0 \times a^2)$ เมื่อ $a \neq 0$	6) $(x^{-10} \div x^{-1}) \times x^{-3}$ เมื่อ $x \neq 0$

3. ถ้า $5^x = 1$ แล้ว x คือจำนวนใด
4. ถ้า n แทนจำนวนใด ๆ มีจำนวนใดบ้างที่ทำให้

   1) $n^2 = n$ 2) $n^2 < n$
5. เด็กชายศิระนำแท่งลูกบาศก์ไม้ขนาด 5^3 ลูกบาศก์เซนติเมตร มาจัดวางเป็นลูกบาศก์ขนาดใหญ่ที่มีความยาวของแต่ละด้านเป็น 125 เซนติเมตร จงหาเลขยกกำลังที่แทนปริมาตรของลูกบาศก์ขนาดใหญ่นี้
6. อากาศที่ระดับน้ำทะเลจะมีความหนาแน่นมากที่สุดมีโมเลกุลของอากาศอัดแน่นกันอยู่ประมาณ 27×10^{18} โมเลกุลต่อปริมาตรของอากาศ 1 ลูกบาศก์เซนติเมตร อากาศที่อยู่เหนือระดับน้ำทะเลขึ้นไปจะมีความหนาแน่นน้อยลงตามระดับความสูง ที่ระดับความสูงประมาณ 240 กิโลเมตรเหนือระดับน้ำทะเลมีโมเลกุลของอากาศเหลือประมาณ 3×10^6 โมเลกุลต่อปริมาตรของอากาศ 1 ลูกบาศก์เซนติเมตร จงหาว่าความหนาแน่นของอากาศที่ระดับน้ำทะเลเป็นกี่เท่าของความหนาแน่นของอากาศที่ระดับความสูงประมาณ 240 กิโลเมตร
7. น้ำตกไนแอการาเป็นน้ำตกขนาดใหญ่สวยงามมาก อยู่ตรงพรมแดนระหว่างประเทศสหรัฐอเมริกากับประเทศแคนาดา น้ำตกไนแอการาเป็นตอนหนึ่งของแม่น้ำไนแอการา ซึ่งเป็นแม่น้ำสายสั้น ๆ เชื่อมต่อระหว่างทะเลสาบอีรี (Erie) กับทะเลสาบออนตาริโอ (Ontario) ปริมาณน้ำที่ไหลผ่านขอบหน้าผาของน้ำตกไนแอการาประมาณวันละ 7×10^{10} ลิตร น้ำจากแม่น้ำไนแอการาเป็นแหล่งน้ำใหญ่ที่หล่อเลี้ยงรัฐนิวยอร์กของประเทศสหรัฐอเมริกา ที่รัฐนิวยอร์กมีอ่างเก็บน้ำมากกว่า 20 แห่งที่สามารถรองรับน้ำจากน้ำตกไนแอการาได้มากกว่า 10^{12} ลิตร จงหาว่าอ่างเก็บน้ำเหล่านั้นต้องรองรับน้ำจากน้ำตกไนแอการาประมาณกี่วันจึงจะได้น้ำ 10^{12} ลิตร

8. เมื่อปี พ.ศ. 2543 กระทรวงมหาดไทยได้สำรวจประชากรของประเทศไทย พบว่ามีประชากรที่มีอายุ 100 ปีขึ้นไปประมาณ 35,340 คน จากจำนวนประชากรทั่วประเทศซึ่งมีอยู่ประมาณ 62 ล้านคน จงหาว่าจำนวนประชากรที่มีอายุ 100 ปีขึ้นไปคิดเป็นเศษส่วนเท่าใดของจำนวนประชากรทั้งประเทศ โดยเขียนคำตอบให้อยู่ในรูป $A \times 10^n$ เมื่อ A เป็นจำนวนนับที่น้อยที่สุดและ n เป็นจำนวนเต็ม

น่าคิดนะ

ตามมาตรวัดโบราณของไทย เมื่อนึกถึงจำนวนที่มีค่ามาก ๆ จะนึกถึงหน่วย โกฏิ และอสงไขย คนเก่าแก่มักจะพูดกันเปรย ๆ ว่า "โกรธกันนานเป็นโกฏิปี" หรือในหนังสือวรรณคดีของไทยเรื่อง กามนิต ก็มีการกล่าวถึงกามนิตว่า "จะได้ขึ้นไปเสวยสุขบนสรวงสวรรค์นานนับหลายโกฏิปี"

1 โกฏิ เท่ากับ 10 ล้าน

1 อสงไขย เท่ากับ โกฏิยกกำลังยี่สิบ

ทราบหรือไม่ว่า 1 อสงไขย เท่ากับกี่ล้าน

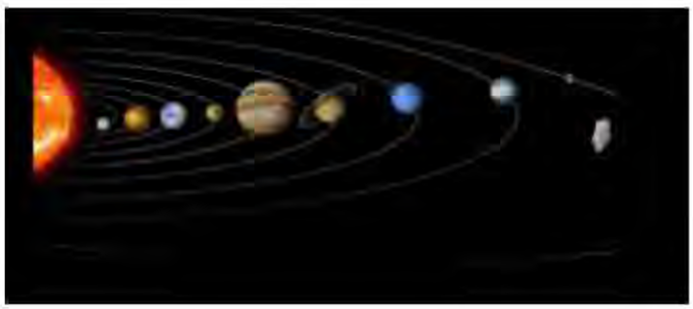
3.3 การนำไปใช้

ในหนังสือเกี่ยวกับวิทยาศาสตร์หรือดาราศาสตร์ จะพบการใช้เลขยกกำลังแสดงจำนวนที่มีค่ามาก ๆ หรือมีค่าน้อย ๆ เช่น

ดวงอาทิตย์มีมวลประมาณ 2×10^{30} กิโลกรัม

โลกเป็นดาวเคราะห์ดวงหนึ่งซึ่งโคจรรอบดวงอาทิตย์และโคจรระหว่างดาวศุกร์กับดาวอังคาร โลกอยู่ห่างจากดวงอาทิตย์ประมาณ 1.5×10^{8} กิโลเมตรและมีมวลประมาณ 6×10^{24} กิโลกรัม

ในสุญญากาศแสงเคลื่อนที่ได้ระยะทาง 1 กิโลเมตร ในเวลาประมาณ 3.3×10^{-6} วินาที



จะเห็นว่า 1.5×10^{8}, 6×10^{24}, 2×10^{30} และ 3.3×10^{-6} ข้างต้นนี้เป็นตัวอย่างการใช้สัญลักษณ์แทนจำนวนอีกรูปแบบหนึ่ง ซึ่งเขียนอยู่ในรูปการคูณของเลขยกกำลังที่มีฐานเป็นสิบและเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม มีรูปทั่วไปเป็น $A \times 10^{n}$ เมื่อ $1 \leq A < 10$ และ n เป็นจำนวนเต็ม เรียกว่า การเขียนจำนวนในรูป **สัญกรณ์วิทยาศาสตร์** (scientific notation)

เรานิยมเขียนจำนวนที่มีค่ามาก ๆ หรือมีค่าน้อย ๆ ในรูปสัญกรณ์วิทยาศาสตร์

การเขียนจำนวนที่มีค่ามาก ๆ ให้อยู่ในรูปสัญกรณ์วิทยาศาสตร์

พิจารณาการเขียนจำนวนในรูปสัญกรณ์วิทยาศาสตร์ต่อไปนี้

1. $50{,}000 = 5 \times 10{,}000$
   $= 5 \times 10^4$

2. $2{,}810{,}000 = 281 \times 10{,}000$
   $= (2.81 \times 100) \times 10^4$
   $= 2.81 \times 10^2 \times 10^4$
   $= 2.81 \times (10^2 \times 10^4)$
   $= 2.81 \times 10^6$

3. 

ในความเวิ้งว้างกว้างไกลของฟากฟ้า กลุ่มดาวหรือดวงดาวแต่ละดวงจะอยู่ห่างกันมาก หน่วยวัดระยะทางที่ใช้อยู่บนโลก เช่น เมตร กิโลเมตร เป็นหน่วยที่เล็กเกินไปที่จะใช้วัดระยะทางในท้องฟ้า ทางดาราศาสตร์นิยมใช้หน่วยวัดระยะทางเป็นปีแสง โดยกำหนดว่าระยะ 1 ปีแสง คือระยะที่แสงเคลื่อนที่ไปได้ในเวลา 1 ปี

ในการหาว่า 1 ปีแสงเป็นระยะประมาณกี่กิโลเมตร สามารถคำนวณโดยใช้อัตราเร็วของแสงดังต่อไปนี้ อัตราเร็วของแสงประมาณ 300,000 กิโลเมตรต่อวินาที หรือประมาณ 3×10^5 กิโลเมตรต่อวินาที

1 ปี $= 365 \times 24 \times 60 \times 60$ วินาที

ดังนั้น 1 ปีแสง ประมาณ $(365 \times 24 \times 60 \times 60) \times (3 \times 10^5)$ กิโลเมตร

$= 365 \times 24 \times 6 \times 10 \times 6 \times 10 \times 3 \times 10^5$ กิโลเมตร

$= (365 \times 24 \times 6 \times 6 \times 3) \times (10^2 \times 10^5)$ กิโลเมตร

$= 946{,}080 \times 10^7$

$= \quad 9.4608 \times 10^5 \times 10^7$

$= \quad 9.4608 \times 10^{12}$ กิโลเมตร

1 ปีแสงเป็นระยะประมาณ 9.4608×10^{12} กิโลเมตร

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียน 562,300,000 ให้อยู่ในรูปสัญกรณ์วิทยาศาสตร์

วิธีทำ

$$562{,}300{,}000 = 5{,}623 \times 100{,}000$$
$$= 5.623 \times 10^3 \times 10^5$$
$$= 5.623 \times 10^8$$

ตอบ 5.623×10^8

ตัวอย่างที่ 2 ในเขตเมืองขนาดใหญ่พบว่ามีปัญหาเกี่ยวกับการกำจัดและทำลายขยะมูลฝอยในแต่ละวัน กรุงเทพมหานครเป็นเมืองหนึ่งที่มีประชากรหนาแน่น จากข้อมูลทางสถิติปี พ.ศ. 2551 มีประชากรประมาณ 5.71×10^6 คน มีขยะให้ต้องจัดเก็บประมาณวันละ 9.34×10^3 ตัน จงหาว่าโดยเฉลี่ยแต่ละคนทิ้งขยะประมาณวันละกี่กิโลกรัม

วิธีทำ จำนวนประชากรในกรุงเทพฯ ประมาณ 5.71×10^6 คน

แต่ละวันมีขยะที่ต้องจัดเก็บประมาณ 9.34×10^3 ตัน

น้ำหนัก 1 ตัน เท่ากับ 10^3 กิโลกรัม

ในแต่ละวันมีขยะที่ต้องจัดเก็บ $9.34 \times 10^3 \times 10^3$ กิโลกรัม

$= \quad 9.34 \times 10^6$ กิโลกรัม

ดังนั้นแต่ละคนทิ้งขยะโดยเฉลี่ยประมาณวันละ $\dfrac{9.34 \times 10^6}{5.71 \times 10^6}$ กิโลกรัม

$\approx \quad 1.6357$ กิโลกรัม

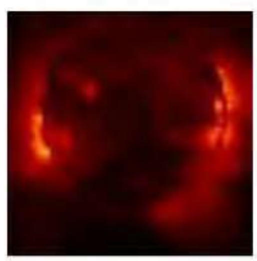
$\approx \quad 1.6$ กิโลกรัม

ตอบ ประมาณวันละ 1.6 กิโลกรัม

แบบฝึกหัด 3.3 ก

1. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ในรูปสัญกรณ์วิทยาศาสตร์
    1) 70,000
    2) 210,000
    3) 56,700,000
    4) 8,000,000,000
    5) 490,000,000,000
    6) 24,500,000,000,000
2. จงเขียนจำนวนในแต่ละข้อต่อไปนี้ในรูปสัญกรณ์วิทยาศาสตร์
    1) โลกมีรูปร่างใกล้เคียงกับทรงกลมและมีรัศมียาวประมาณ 6,380,000 เมตร

    2) เส้นผ่านศูนย์กลางของดวงอาทิตย์ยาวประมาณ 1,400,000 กิโลเมตร



3) ดาวเคราะห์น้อยอีรอส (Eros) 433 มีรูปร่างคล้ายหัวมันฝรั่ง โคจรอยู่ในอวกาศด้วยความเร็วประมาณ 60,000 กิโลเมตรต่อชั่วโมง และอยู่ห่างจากโลกประมาณ 322,000,000 กิโลเมตร

4) ดวงจันทร์ไททัน (Titan) เป็นดวงจันทร์ที่ใหญ่ที่สุดในบรรดาบริวารของดาวเสาร์ซึ่งโคจรห่างจากดาวเสาร์ประมาณ 1,200,000 กิโลเมตร และอยู่ห่างจากดวงอาทิตย์ประมาณ 1,500,000,000 กิโลเมตร

5) ดาวเสาร์มีเส้นผ่านศูนย์กลางยาวประมาณ 113,000,000 เมตร และอยู่ห่างจากดวงอาทิตย์ประมาณ 1,430,000,000 กิโลเมตร

3. สัญกรณ์วิทยาศาสตร์ในแต่ละข้อต่อไปนี้แทนจำนวนใด

   1) 4×10^5 2) 3.8×10^6

   3) 1.45×10^9 4) 8.257×10^4

   5) 5.06×10^9 6) 6.05×10^{11}

4. จงเขียนตัวเลขแทนจำนวนในแต่ละข้อต่อไปนี้โดยไม่ใช้เลขยกกำลัง

   1) ทะเลทรายซาฮาราเป็นทะเลทรายที่ใหญ่ที่สุดในโลกมีพื้นที่ประมาณ 8.96×10^7 ตารางกิโลเมตร

   2) ดาวยูเรนัสโคจรรอบดวงอาทิตย์ อยู่ห่างจากดวงอาทิตย์ 3×10^9 กิโลเมตร ใช้เวลาโคจรรอบดวงอาทิตย์ 1 รอบ เท่ากับเวลาที่ใช้บนโลกถึง 84 ปี

   3) ไฮโดรเจน 1 กรัม มีจำนวนโมเลกุลอยู่ประมาณ 6.0238×10^{23} โมเลกุล

   4) เขื่อนศรีนครินทร์ (เขื่อนเจ้าเณร) กั้นแม่น้ำแควใหญ่ที่ตำบลท่ากระดาน อำเภอศรีสวัสดิ์จังหวัดกาญจนบุรี เป็นเขื่อนที่สามารถกักเก็บน้ำได้มากที่สุดในประเทศไทยถึงประมาณ 1.77×10^{10} ลูกบาศก์เมตร

5. จงแสดงวิธีทำและเขียนคำตอบในรูปสัญกรณ์วิทยาศาสตร์

   1) โลกมีมวลประมาณ 6×10^{24} กิโลกรัม ดวงอาทิตย์มีมวลประมาณ 4×10^5 เท่าของโลก จงหามวลของดวงอาทิตย์

   2) โลกหมุนรอบดวงอาทิตย์ในอัตราเร็วประมาณ 3.85×10^7 กิโลเมตรต่อวินาที จงหาอัตราเร็วต่อชั่วโมง

3) ทางช้างเผือกมีเส้นผ่านศูนย์กลางยาวประมาณ 100,000 ปีแสง จงหาว่าเส้นผ่านศูนย์กลางทางช้างเผือกยาวประมาณกี่กิโลเมตร

(1 ปีแสงเป็นระยะประมาณ 9.46×10^{12} กิโลเมตร)

4) ประมาณกันว่าในปี ค.ศ. 2060 โลกจะมีประชากรมากกว่า 10,000,000,000 คน ถ้าพื้นโลกส่วนที่อยู่อาศัยได้มีพื้นที่ประมาณ 15×10^{7} ตารางกิโลเมตร จงหาความหนาแน่นของประชากรโลกโดยเฉลี่ยต่อพื้นที่ 1 ตารางกิโลเมตร

5) ผลการจัดเก็บรายได้ของรัฐบาลในปี พ.ศ. 2551 เป็นเงิน 1.834×10^{12} บาท และในปี พ.ศ. 2550 เป็นเงิน 1.704×10^{12} อยากทราบว่ารัฐบาลจัดเก็บรายได้เพิ่มขึ้นจากการจัดเก็บรายได้ในปี พ.ศ. 2550 ร้อยละเท่าไร

การเขียนจำนวนที่มีค่าน้อย ๆ ให้อยู่ในรูปสัญกรณ์วิทยาศาสตร์

พิจารณาการเขียนจำนวนต่อไปนี้ในรูปสัญกรณ์วิทยาศาสตร์

1) $$0.03 = \frac{3}{100} = \frac{3}{10^2} = 3 \times \frac{1}{10^2} = 3 \times 10^{-2}$$

2) $$0.00972 = \frac{972}{100,000} = \frac{9.72 \times 10^2}{10^5} = 9.72 \times 10^{2-5} = 9.72 \times 10^{-3}$$

3) $$0.0008 = \frac{8}{10,000} = \frac{8}{10^4} = 8 \times 10^{-4}$$

4) $$0.00045 = \frac{45}{100,000} = \frac{4.5 \times 10}{10^5} = 4.5 \times 10^{1-5} = 4.5 \times 10^{-4}$$

5) $$0.000063 = \frac{6.3}{100,000} = \frac{6.3}{10^5} = 6.3 \times 10^{-5}$$

6) $$0.00000096 = 9.6 \times 10^{-7}$$

ตัวอย่างที่ 1 เชื้อไวรัสที่ทำให้เกิดโรคหวัดแต่ละตัวยาวประมาณ 5×10^{-7} เมตร ถ้าไวรัสชนิดนี้เรียงต่อกันเป็นสายยาว 6×10^{-3} เมตร จงหาว่ามีไวรัสอยู่ประมาณกี่ตัว

วิธีทำ ไวรัสเรียงต่อกันเป็นสายยาวประมาณ 6×10^{-3} เมตร

ถ้าไวรัสแต่ละตัวยาวประมาณ 5×10^{-7} เมตร

จะมีไวรัสที่เรียงต่อกันอยู่ประมาณ $\frac{6\times10^{-3}}{5\times10^{-7}} = \frac{6\times10^{7}}{5\times10^{3}}$ ตัว

$$= \frac{60\times10^{6}}{5\times10^{3}}$$

$$= 12 \times 10^{6-3}$$

$$= 12 \times 10^{3} \text{ ตัว}$$

ดังนั้นมีไวรัสที่เรียงต่อกันอยู่ประมาณ 12,000 ตัว

ตอบ ประมาณ 12,000 ตัว

แบบฝึกหัด 3.3 ข

1. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ในรูปสัญกรณ์วิทยาศาสตร์

1) 0.002　　2) 0.00013

3) 0.000005　　4) 0.0000076

5) 0.0000000819　　6) 0.000000000465

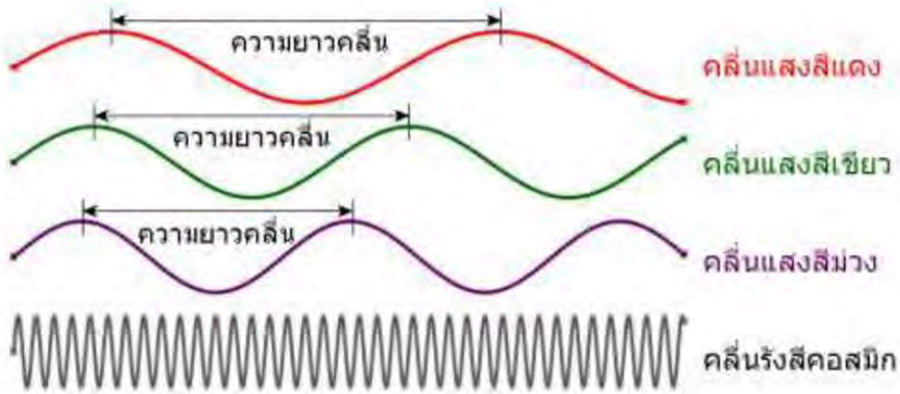
2. สัญกรณ์วิทยาศาสตร์แต่ละข้อต่อไปนี้แทนจำนวนใด

1) 5×10^{-4}　　2) 9×10^{-6}

3) 1.2×10^{-5}　　4) 6.82×10^{-7}

5) 5.413×10^{-7}　　6) 8.9×10^{-9}

3. จงเขียนความยาวของคลื่นแสงต่อไปนี้ในรูปสัญกรณ์วิทยาศาสตร์



1) คลื่นแสงสีแดงยาวประมาณ 0.000064 เซนติเมตร
2) คลื่นแสงสีเขียวยาวประมาณ 0.000053 เซนติเมตร
3) คลื่นแสงสีม่วงยาวประมาณ 0.000045 เซนติเมตร
4) คลื่นรังสีคอสมิกยาวประมาณ 0.0000000000000000003 เซนติเมตร

4. จงเขียนตัวเลขแทนจำนวนต่อไปนี้โดยไม่ให้อยู่ในรูปเลขยกกำลัง
1) แมลงที่เล็กที่สุดในโลกยาวประมาณ 3×10^{-2} เซนติเมตร
2) แบคทีเรียขนาดใหญ่ยาวประมาณ 3×10^{-4} เซนติเมตร
3) ไวรัสมีความยาวเฉลี่ยประมาณ 9.15×10^{-7} เซนติเมตร
4) อะตอมของออกซิเจนมีรัศมีประมาณ 6.6×10^{-11} เมตร

5. โดยเฉลี่ยแล้วน้ำหนักสมองของคนเป็น 1.9×10^{-2} เท่าของน้ำหนักตัว จงหาว่าสมองของนักเรียนหนักประมาณเท่าใด

6. เส้นลวดในสายไฟฟ้าชนิดหนึ่ง มีหน้าตัดเป็นรูปวงกลม มีรัศมียาว 3.5×10^{-4} เมตร ถ้าสายไฟฟ้ายาว 5.8×10^{3} เมตร จงหาปริมาตรของลวดเส้นนี้
(กำหนด $\pi \approx 3.14$ และปริมาตรของทรงกระบอก = พื้นที่ฐาน × ความสูง)

น่าคิด

ในสมัยพระบาทสมเด็จพระจุลจอมเกล้าเจ้าอยู่หัว รัชกาลที่ 5 แห่งกรุงรัตนโกสินทร์ทรงมีพระราชดำริในการผลิตเหรียญกษาปณ์แทนเงินพดด้วงที่ใช้กันอยู่ก่อนเพื่อให้การซื้อขายแลกเปลี่ยนกับต่างประเทศสะดวกและคล่องตัวขึ้น การแลกเปลี่ยนเงินไทยสมัยนั้นมีอัตราการแลกเปลี่ยนเงินหลายหน่วย ตั้งแต่เงินปลีกย่อยที่สุด เรียกว่า โสพส นิยมใช้เงิน 16 โสพสแลกเงินเฟื้องซึ่งแลกได้ 1 เฟื้อง และหน่วยใหญ่ คือ ชั่ง ซึ่งเงิน 1 ชั่ง แลกเงินบาทได้ 80 บาท มาตราเงินของไทยในสมัยนั้นจึงเป็นดังนี้

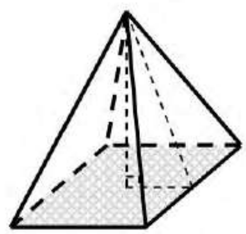
2 โสพส	เป็น	1 อัฐ
2 อัฐ	เป็น	1 ไพ หรือเสี้ยว
2 เสี้ยว	เป็น	1 ซีก
2 ซีก	เป็น	1 เฟื้อง
2 เฟื้อง	เป็น	1 สลึง
4 สลึง	เป็น	1 บาท
4 บาท	เป็น	1 ตำลึง
20 ตำลึง	เป็น	1 ชั่ง

จงหาว่า 1 โสพส เป็นกี่ตำลึง (เขียนคำตอบในรูปเลขยกกำลัง)

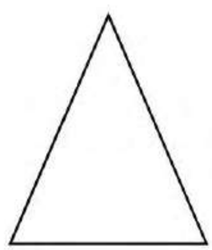
บทที่ 4

พื้นฐานทางเรขาคณิต

มนุษย์สร้างรูปเรขาคณิตขึ้นมาโดยการเลียนแบบจากสิ่งแวดล้อมรอบตัว แล้วศึกษาสมบัติของรูปเรขาคณิตเหล่านั้น เพื่อนำไปแก้ปัญหาและอธิบายปรากฏการณ์ต่าง ๆ รูปเรขาคณิตที่เป็นพื้นฐานของการศึกษาเรขาคณิตซึ่งจะกล่าวถึง ได้แก่ จุด เส้นตรง ส่วนของเส้นตรง รังสี และมุม

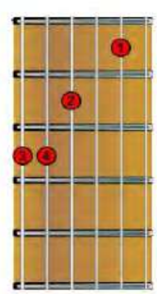








4.1 จุด เส้นตรง ส่วนของเส้นตรง รังสี และมุม

กีตาร์



คอร์ดกีตาร์

ในคณิตศาสตร์มีคำบางคำที่ใช้เป็นพื้นฐานในการสื่อความหมายโดยไม่ต้องให้นิยาม คำเหล่านี้เป็นคำอนิยาม ในเรขาคณิตถือว่า **จุด เส้นตรง** และ**ระนาบ** เป็นคำอนิยาม

จุด

ในชีวิตจริงเราใช้คำว่า **จุด** ในความหมายต่าง ๆ เช่น จุดนัดพบ จุดเริ่มต้นการแข่งขัน ในแผนที่ เราใช้จุดแสดงตำแหน่งของสถานที่ และในแผนภาพคอร์ดกีตาร์เราใช้จุดแสดงตำแหน่งการวางนิ้วมือบนสายกีตาร์ จุดที่ใช้อาจมีขนาดและรูปร่างต่าง ๆ กัน แต่ในทางเรขาคณิตเราจะใช้จุดเพื่อแสดงตำแหน่งเท่านั้น

เราใช้ • เป็นสัญลักษณ์แทนจุด และเขียนตัวอักษรกำกับไว้ เมื่อต้องการระบุชื่อจุด เช่น

• แทน จุด A
A

เส้นตรง

เราถือว่า**เส้นตรง**มีความยาวไม่จำกัด และไม่คำนึงถึงความกว้างของเส้นตรง เมื่อต้องการเขียนสัญลักษณ์แทนเส้นตรง AB จะเขียนดังนี้

เส้นตรง AB เขียนแทนด้วย $\overleftrightarrow{AB}$

เส้นตรง AB อาจเรียกว่า เส้นตรง BA และเขียนแทนด้วย $\overleftrightarrow{BA}$

ให้สังเกตสัญลักษณ์ของเส้นตรง จะเห็นว่ามีหัวลูกศรทั้งสองข้าง หัวลูกศรนี้แสดงว่าเส้นตรงมีความยาวไม่จำกัด เราสามารถต่อเส้นตรงออกไปในทิศทางของหัวลูกศรทั้งสองข้างโดยไม่มีที่สิ้นสุด

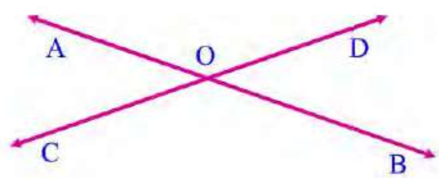
ในทางปฏิบัติอาจเขียนรูปแทนเส้นตรงโดยไม่จำเป็นต้องเขียนสัญลักษณ์ • บนเส้นตรง เช่น

หมายถึง

สมบัติของจุดและเส้นตรงมีดังนี้

1. มีเส้นตรงเพียงเส้นเดียวเท่านั้นที่ลากผ่านจุดสองจุดที่กำหนดให้

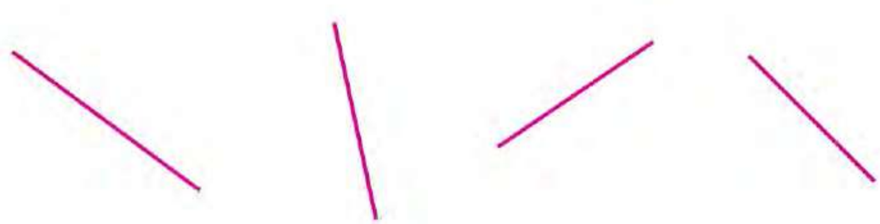
2. ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกันแล้วจะมีจุดตัดเพียงจุดเดียวเท่านั้น



เราใช้จุดและเส้นตรงในการให้นิยามรูปเรขาคณิตพื้นฐาน เช่น ส่วนของเส้นตรง รังสี และมุม

ส่วนของเส้นตรง

รูปต่อไปนี้เป็นรูป**ส่วนของเส้นตรง**ที่มีความยาวต่าง ๆ



บทนิยาม **ส่วนของเส้นตรง** คือส่วนหนึ่งของเส้นตรงที่มีจุดปลายสองจุด

ในการเขียนส่วนของเส้นตรง เราต้องกำหนดจุดปลายสองจุด เช่น

ส่วนของเส้นตรง AB เขียนแทนด้วย $\overline{AB}$

A และ B เป็นจุดปลายของ $\overline{AB}$

ส่วนของเส้นตรง AB อาจเรียกว่าส่วนของเส้นตรง BA และเขียนแทนด้วย $\overline{BA}$

ในทางปฏิบัติอาจเขียนรูปแทนส่วนของเส้นตรงโดยไม่จำเป็นต้องเขียนสัญลักษณ์ • แทนจุดปลายบนส่วนของเส้นตรง เช่น

หมายถึง

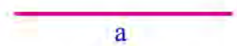
ความยาวของ $\overline{AB}$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $m\overline{AB}$ หรือ AB เช่น ความยาวของส่วนของเส้นตรง AB เท่ากับ 5 เซนติเมตร

เขียนแทนด้วย $m\overline{AB} = 5$ เซนติเมตร

หรือ $AB = 5$ เซนติเมตร

เมื่อกล่าวถึงระยะห่างจากจุด A ถึงจุด B จะหมายถึงความยาวของ $\overline{AB}$ เขียนแทนด้วย AB

บางครั้งเราใช้อักษรตัวพิมพ์เล็กในภาษาอังกฤษแทนความยาวของส่วนของเส้นตรง เช่น



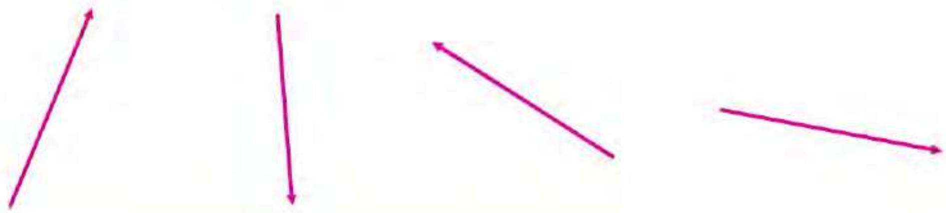
หมายถึง ส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้มีความยาว a หน่วย

การเปรียบเทียบความยาวของส่วนของเส้นตรงสองเส้น อาจทำได้โดยกางวงเวียนให้มีรัศมียาวเท่ากับความยาวของส่วนของเส้นตรงเส้นหนึ่ง แล้วนำไปเปรียบเทียบกับความยาวของส่วนของเส้นตรงอีกเส้นหนึ่ง เช่น ถ้าต้องการเปรียบเทียบความยาวของ $\overline{AB}$ และความยาวของ $\overline{CD}$ ทำได้ดังนี้

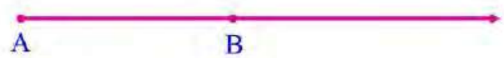
1. กางวงเวียนให้ปลายเหล็กแหลมอยู่ที่จุด A และให้ปลายดินสออยู่ที่จุด B จะได้รัศมียาวเท่ากับ AB
2. ใช้ C เป็นจุดศูนย์กลางรัศมียาวเท่ากับ AB เขียนส่วนโค้ง
   ถ้ามีส่วนโค้งตัด $\overline{CD}$ ที่จุด D พอดี แสดงว่า AB = CD
   ถ้ามีส่วนโค้งตัด $\overline{CD}$ ที่จุดอื่น ๆ ที่ไม่ใช่จุด D แสดงว่า AB < CD
   ถ้าส่วนโค้งไม่ตัด $\overline{CD}$ แสดงว่า AB > CD

รังสี

รูปต่อไปนี้เป็นรูปรังสีที่มีทิศทางต่าง ๆ



บทนิยาม **รังสี** คือส่วนหนึ่งของเส้นตรงซึ่งมีจุดปลายเพียงจุดเดียว



รังสีที่มีจุด A เป็นจุดปลายและมีจุด B เป็นจุดจุดหนึ่งอยู่บนรังสี เรียกว่ารังสี AB เขียนแทนด้วย $\overrightarrow{AB}$

เขียนแทนรังสี AB ด้วย $\overrightarrow{BA}$ ไม่ได้ เพราะ $\overrightarrow{BA}$ แทนรังสี BA ที่มีจุด B เป็นจุดปลาย $\overrightarrow{AB}$ กับ $\overrightarrow{BA}$ จึงไม่ใช่รังสีเดียวกัน $\overrightarrow{BA}$ มีรูปดังนี้

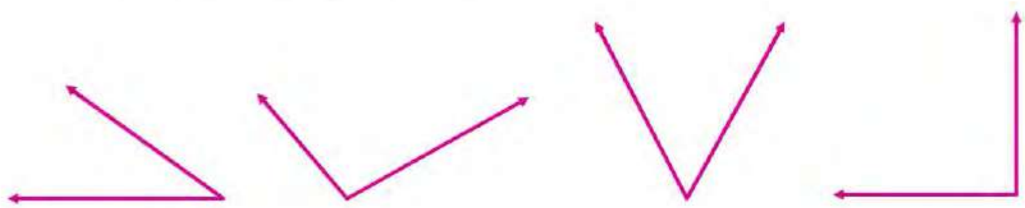
ให้สังเกตสัญลักษณ์ของรังสี จะเห็นว่ามีหัวลูกศรเพียงข้างเดียว หัวลูกศรนี้แสดงว่ารังสีมีความยาวไม่จำกัด เราสามารถต่อรังสีออกไปในทิศทางของหัวลูกศรโดยไม่มีที่สิ้นสุด

ในทางปฏิบัติอาจเขียนรูปแทนรังสีโดยไม่จำเป็นต้องเขียนสัญลักษณ์ • แทนจุดปลายและอีกจุดหนึ่งบนรังสี เช่น

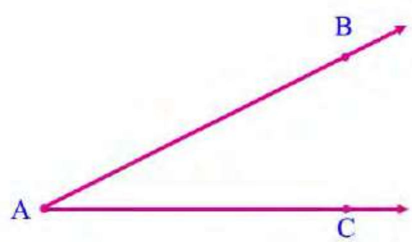
หมายถึง

มุม

รูปต่อไปนี้เป็นรูป**มุม**ที่มีขนาดต่าง ๆ

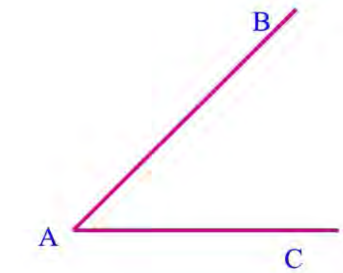


บทนิยาม มุม คือรังสีสองเส้นที่มีจุดปลายเป็นจุดเดียวกัน เรียกรังสีสองเส้นนี้ว่า **แขนของมุม** และเรียกจุดปลายที่เป็นจุดเดียวกันนี้ว่า **จุดยอดมุม**

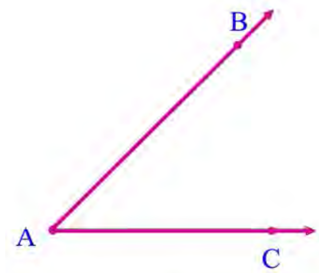


มุมที่มี $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{AC}$ เป็นแขนของมุมและมีจุด A เป็นจุดยอดมุม เรียกว่า มุม BAC เขียนแทนด้วย $B\hat{A}C$ หรือ $\angle BAC$

ในทางปฏิบัติอาจเขียนรูปแทนมุมโดยใช้ส่วนของเส้นตรงแทนแขนของมุม และไม่จำเป็นต้องเขียนสัญลักษณ์ • แทนจุดยอดมุม หรือจุดอื่น ๆ ที่เป็นจุดปลายของส่วนของเส้นตรง เช่น



หมายถึง

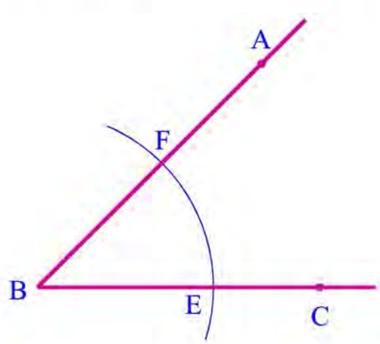


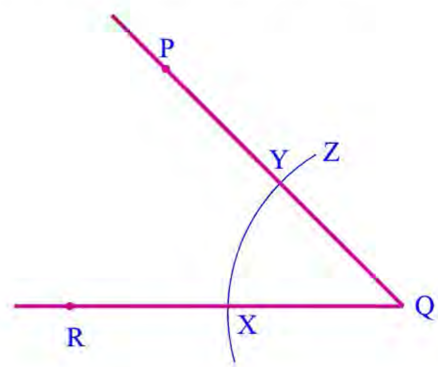
มุม BAC อาจเรียกว่า มุม CAB และเขียนแทนด้วย $C\hat{A}B$ หรือ $\angle CAB$

ขนาดของมุม BAC นิยมเขียนแทนด้วย $mB\hat{A}C$ หรือ $m\angle BAC$ เช่น $B\hat{A}C$ มีขนาดเท่ากับ 30 องศา เขียนแทนด้วย $mB\hat{A}C = 30$ องศา หรือ $m\angle BAC = 30$ องศา

เพื่อความสะดวกในการนำไปใช้เกี่ยวกับขนาดของมุม ต่อไปจะใช้ $A\hat{B}C = X\hat{Y}Z$ แทน $mA\hat{B}C$ เท่ากับ $mX\hat{Y}Z$ และเมื่อกล่าวว่าขนาดของมุม $B\hat{A}C$ เท่ากับ 30 องศา จะเขียนแทนด้วย $B\hat{A}C = 30^\circ$

การเปรียบเทียบขนาดของมุมสองมุม อาจทำได้โดยใช้วงเวียน เช่น ถ้าต้องการเปรียบเทียบขนาดของ $A\hat{B}C$ กับขนาดของ $P\hat{Q}R$ อาจทำได้ดังนี้





1. ใช้ B เป็นจุดศูนย์กลางรัศมียาวพอสมควร เขียนส่วนโค้งให้ตัด $\overrightarrow{BC}$ และ $\overrightarrow{BA}$ ที่จุด E และจุด F ตามลำดับ
2. ใช้จุด Q เป็นจุดศูนย์กลางรัศมียาวเท่ากับ BE เขียนส่วนโค้ง XZ ให้ตัด $\overrightarrow{QR}$ และ $\overrightarrow{QP}$ ที่จุด X และจุด Y ตามลำดับ
3. ใช้จุด X เป็นจุดศูนย์กลางรัศมียาวเท่ากับ EF เขียนส่วนโค้งให้ตัดส่วนโค้ง XZ

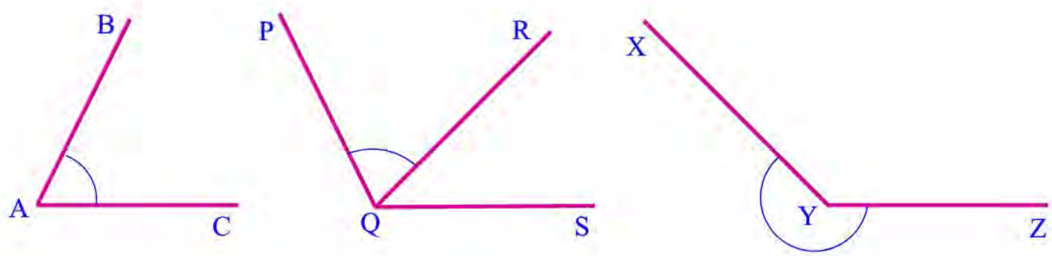
   ถ้าส่วนโค้งตัดส่วนโค้ง XZ ที่จุด Y พอดี แสดงว่า $A\hat{B}C = P\hat{Q}R$

   ถ้าส่วนโค้งตัดส่วนโค้ง XZ ที่จุดภายใน $P\hat{Q}R$ แสดงว่า $A\hat{B}C < P\hat{Q}R$

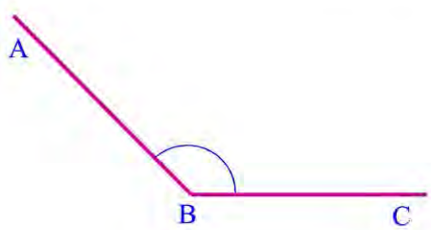
   ถ้าส่วนโค้งตัดส่วนโค้ง XZ ที่จุดภายนอก $P\hat{Q}R$ แสดงว่า $A\hat{B}C > P\hat{Q}R$

ข้อตกลงเกี่ยวกับมุม

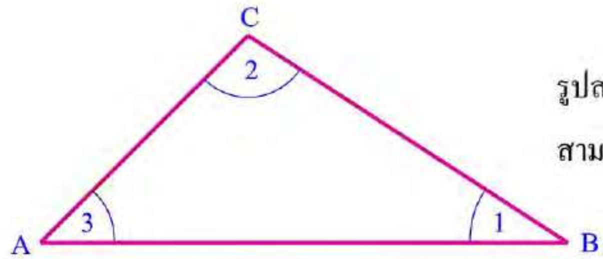
1. เราอาจเขียนเส้นโค้งที่มุมเพื่อระบุมุมที่ต้องการ เช่น



2. เมื่อมุมที่กล่าวถึงมีความชัดเจนเกี่ยวกับแขนของมุม เราอาจใช้เพียงจุดยอดมุมหรือตัวเลขเพื่อระบุชื่อมุม เช่น



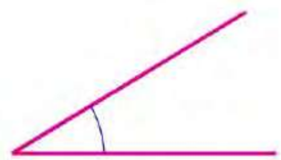
เขียนแทนด้วย $\hat{B}$



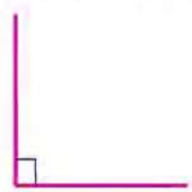
รูปสามเหลี่ยม ABC **มีมุมภายใน** สามมุมคือ $\hat{1}$, $\hat{2}$ และ $\hat{3}$

3. เราจำแนกชนิดของมุมตามขนาดของมุมได้ดังนี้

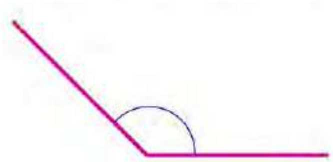
1) มุมที่มีขนาดมากกว่า 0° แต่น้อยกว่า 90° เรียกว่า **มุมแหลม**



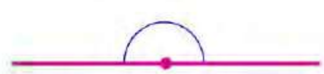
2) มุมที่มีขนาด 90° เรียกว่า **มุมฉาก** ในการเขียนรูปแสดงมุมฉาก อาจเขียนสัญลักษณ์มุมฉากที่มุมดังกล่าว



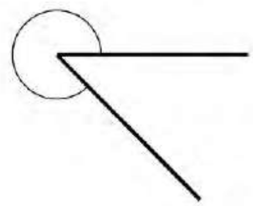
3) มุมที่มีขนาดมากกว่า 90° แต่น้อยกว่า 180° เรียกว่า **มุมป้าน**



4) มุมที่มีขนาด 180° เรียกว่า **มุมตรง**



5) มุมที่มีขนาดมากกว่า 180° แต่น้อยกว่า 360° เรียกว่า **มุมกลับ**



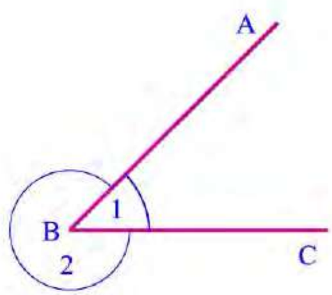
นอกจากนี้ยังมีมุมขนาดอื่น ๆ ได้แก่ มุมที่มีขนาด 0°

มุมที่มีขนาด 0°

และ มุมที่มีขนาด 360° สำหรับมุมที่มีขนาด 360° เรียกว่า **มุมรอบจุด**

มุมที่มีขนาด 360° หรือมุมรอบจุด

4. รูปมุมแต่ละรูปจะแสดงมุมสองมุม ดังนี้

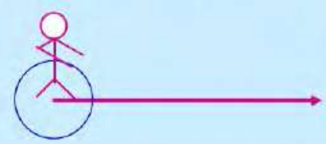


มุม ABC จะหมายถึง $\hat{1}$ และมุมกลับ ABC จะหมายถึง $\hat{2}$

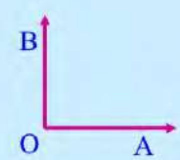
โดยทั่วไปเมื่อกล่าวถึงมุม ABC จะหมายถึงมุมที่มีขนาดมากกว่า 0° แต่น้อยกว่า 180°

เรื่องน่ารู้

การกำหนดให้มุมรอบจุดมีขนาด 360° เป็นแนวคิดของชาวบาบิโลเนีย ตั้งแต่ประมาณ 6,000 ปีมาแล้ว จำนวน 360 เป็นจำนวนที่ใกล้เคียงกับจำนวนวันในหนึ่งปี ซึ่งเป็นช่วงเวลาที่เชื่อว่าสวรรค์หมุนรอบแผ่นดินหนึ่งรอบพอดี เราอาจประมาณขนาดของมุมฉากและมุมตรงได้ดังนี้



เมื่อเรายืนอยู่แล้วหมุนรอบตัวเอง 1 รอบ จะแทนการหมุนเป็นมุมที่มีขนาด 360°



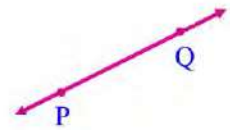
ถ้าเรายืนหันหน้าทางแนว $\overrightarrow{OA}$ แล้วหมุนตัวประมาณ $\frac{1}{4}$ รอบมาทางแนว $\overrightarrow{OB}$ เราจะได้มุมที่มีขนาดประมาณ 90° หรือ 1 มุมฉากนั่นเอง

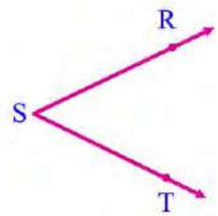
ในทำนองเดียวกัน ถ้าเรายืนหันหน้าทางแนว $\overrightarrow{OA}$ แล้วหมุนตัวประมาณ $\frac{1}{2}$ รอบมาทางแนว $\overrightarrow{OB}$ เราจะได้มุมที่มีขนาดประมาณ 180° หรือ 2 มุมฉาก ซึ่งก็คือมุมตรงนั่นเอง

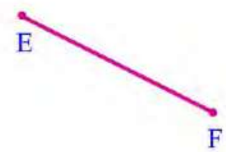
แบบฝึกหัด 4.1

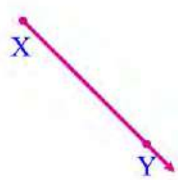
1. รูปต่อไปนี้แทนสิ่งใด

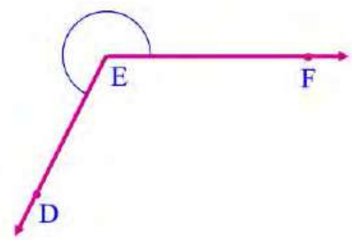
1) 

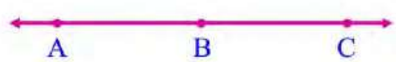
2) 

3) 

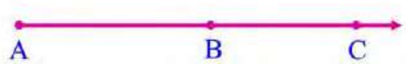
4) 

5) 

6) 

2. 

จากรูป $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$ และ $\overleftrightarrow{BC}$ เป็นเส้นตรงเดียวกันหรือไม่ เพราะเหตุใด

3. 

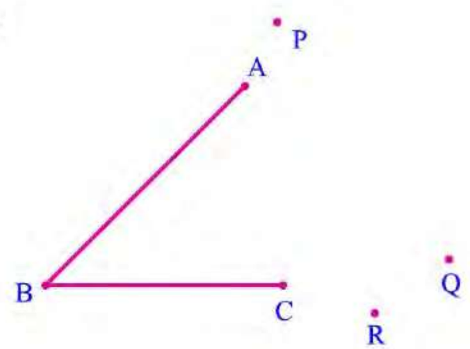
จากรูป $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ และ $\overrightarrow{BC}$ เป็นรังสีเดียวกันหรือไม่ เพราะเหตุใด

4. กำหนดจุด A ดังรูป

เราบอกได้หรือไม่ว่ามีรังสีกี่เส้นที่มีจุด A เป็นจุดปลาย เพราะเหตุใด

5. เมื่อกำหนดจุดให้สองจุด เราสามารถเขียนเส้นตรง เส้นโค้ง หรือเส้นหยักผ่านจุดสองจุดนี้ได้ จงหาว่าส่วนของเส้นที่มีจุดทั้งสองเป็นจุดปลาย ส่วนของเส้นชนิดใดสั้นที่สุด

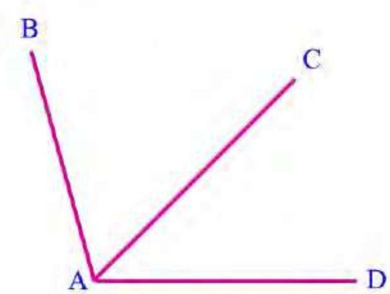
6.



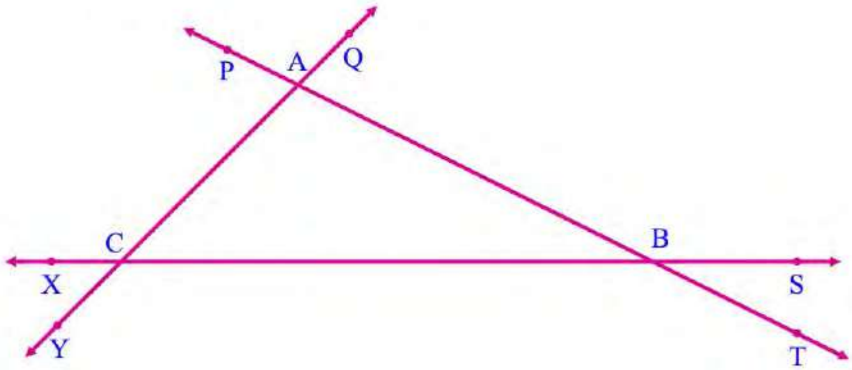
จากรูปจุดใดอยู่ภายใน $A\hat{B}C$

และจุดใดอยู่ภายนอก $A\hat{B}C$

7. จงบอกชื่อมุมทุกมุมในรูปที่กำหนดให้



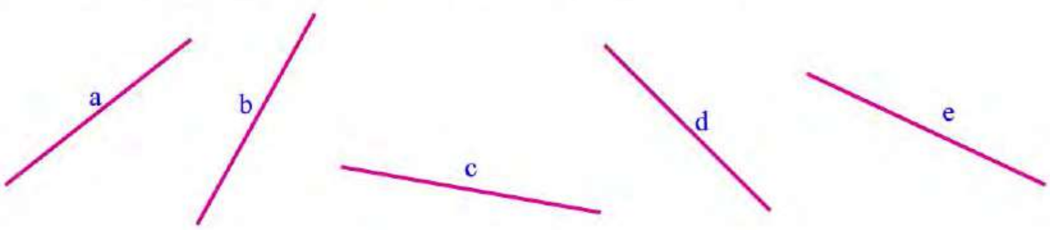
8. กำหนดรูปดังนี้



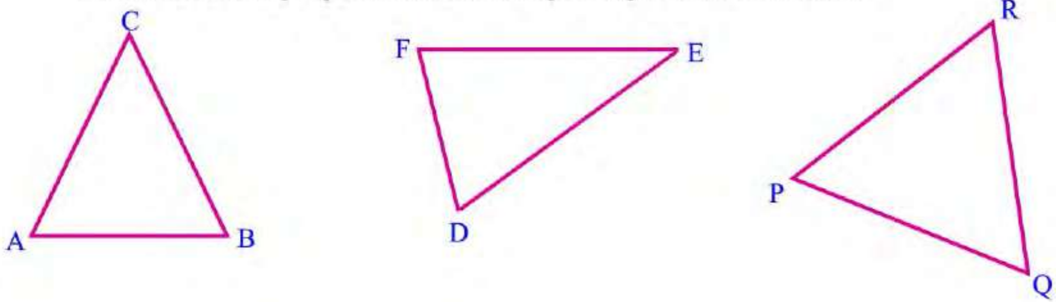
จงบอกชื่อมุมต่อไปนี้

1) มุมตรงที่มีจุด A เป็นจุดยอดมุม
2) มุมภายในของรูปสามเหลี่ยม ABC
3) มุมทุกมุมที่มีจุด A เป็นจุดยอดมุม แต่ไม่ใช่มุมตรง

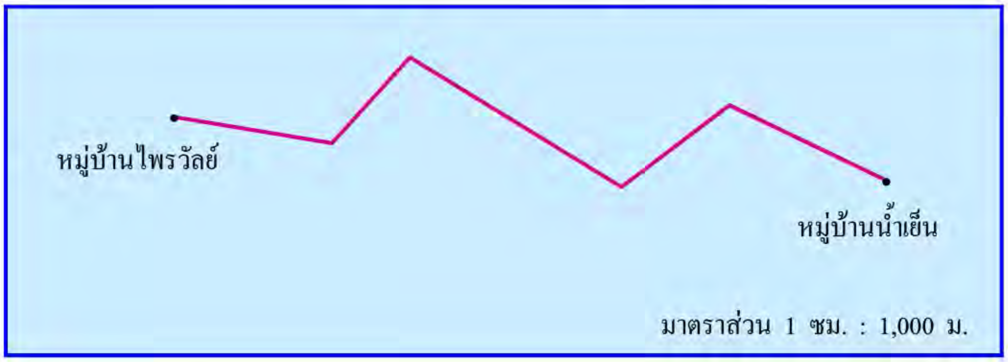
9. จงใช้วงเวียนตรวจสอบดูว่าส่วนของเส้นตรงคู่ใดยาวเท่ากันบ้าง



10. เราสามารถจำแนกชนิดของรูปสามเหลี่ยมโดยพิจารณาความยาวของด้าน จงใช้วงเวียนตรวจสอบดูว่ารูปสามเหลี่ยมแต่ละรูปเป็นรูปสามเหลี่ยมชนิดใด



11. แผนที่แสดงเส้นทางจากหมู่บ้านไพรวัลย์ไปยังหมู่บ้านน้ำเย็น



จงหาว่า 1) ระยะทางตามเส้นทางในแผนที่จากหมู่บ้านไพรวัลย์ถึงหมู่บ้านน้ำเย็นยาวเท่าไร

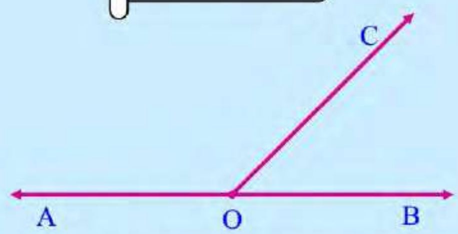
2) ระยะห่างระหว่างสองหมู่บ้านนี้เป็นเท่าไร

12. มีทฤษฎีบทที่กล่าวว่า "ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกัน แล้ว**มุมตรงข้าม**ที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากัน" ให้นักเรียนเขียน $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ตัดกันที่จุด E แล้วตรวจสอบว่า มุมตรงข้ามที่เกิดขึ้นมีขนาดเท่ากันจริง ตามทฤษฎีบทที่กล่าวข้างต้นหรือไม่

13. นักบินใช้หน้าปัดนาฬิกาเป็นเครื่องมือในการบอกทิศทาง ให้คิดถึงว่าตัวเราอยู่ที่จุดศูนย์กลางของหน้าปัดนาฬิกา หันหน้าไปทางตัวเลข 12 ถ้ามีวัตถุ ณ ตำแหน่ง 3 นาฬิกา แสดงว่าวัตถุนั้นทำมุมขนาด 90° (วัดตามเข็มนาฬิกา) กับแนว 12 นาฬิกาดังรูป จงหาขนาดของมุมที่วัตถุ ณ แต่ละตำแหน่งต่อไปนี้ทำกับแนว 12 นาฬิกา

1) 1 นาฬิกา	2) 4 นาฬิกา
3) 6 นาฬิกา	4) 7 นาฬิกา
5) 9 นาฬิกา	6) 10 นาฬิกา

เรื่องน่ารู้

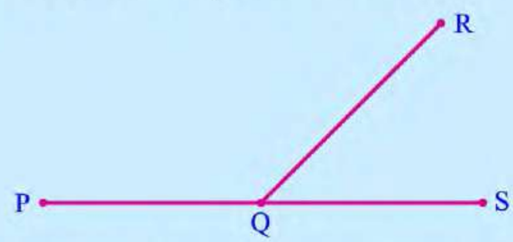


จากรูป $\overrightarrow{OC}$ พบกับ $\overleftrightarrow{AB}$ ที่จุด O ทำให้เกิด**มุมประชิด**ซึ่งได้แก่ $A\hat{O}C$ และ $C\hat{O}B$ ที่มีจุด O เป็นจุดยอดมุมเดียวกันและ $\overrightarrow{OC}$ เป็นแขนร่วมของมุม จะได้ว่า $A\hat{O}C + C\hat{O}B = 180^\circ$ ทั้งนี้เป็นไปตามทฤษฎีบทที่ว่า

"ส่วนของเส้นตรงเส้นหนึ่งตั้งอยู่บนเส้นตรงอีกเส้นหนึ่งทำให้เกิดมุมประชิดที่มีขนาดของมุมรวมกันเท่ากับสองมุมฉาก"

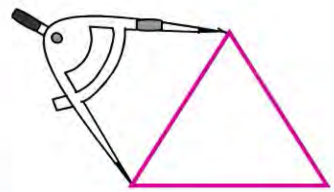
บทกลับของทฤษฎีบทนี้ก็เป็นจริง กล่าวคือ

"ถ้าส่วนของเส้นตรงเส้นที่หนึ่งพบกับส่วนของเส้นตรงเส้นที่สองที่จุดปลายข้างหนึ่งของส่วนของเส้นตรงเส้นที่สามทำให้เกิดมุมประชิดที่มีส่วนของเส้นตรงเส้นที่สามเป็นแขนร่วมและขนาดของมุมประชิดรวมกันเท่ากับสองมุมฉาก แล้วส่วนของเส้นตรงเส้นที่หนึ่งและเส้นที่สองย่อมอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน"



จากรูป $\overline{PQ}$ พบกับ $\overline{QS}$ ที่ Q ซึ่งเป็นจุดปลายข้างหนึ่งของ $\overline{QR}$ และ $P\hat{Q}R + R\hat{Q}S = 180^\circ$ จะได้ว่า $\overline{PQ}$ และ $\overline{QS}$ อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน ซึ่งสามารถตรวจสอบได้โดยพิจารณาว่า $\overline{PQ}$ และ $\overline{QS}$ มีผลรวมของความยาวเท่ากับความยาวของ $\overline{PS}$ หรือไม่

4.2 การสร้างพื้นฐาน



เรามีวิธีการหลายวิธีในการเขียนรูปให้เหมือนกับรูปที่กำหนดให้ เช่น เราอาจใช้วิธีวางกระดาษบาง ๆ ทาบบนรูปต้นแบบแล้วลอกตามแบบ หรือใช้เครื่องมือเขียนแบบเขียนรูป ในเรขาคณิตการเขียนรูปโดยใช้เครื่องมือเพียงสองชนิด คือ สันตรงและวงเวียนเรียกว่า **การสร้าง** สันตรงในที่นี้หมายถึง เครื่องมือที่มีลักษณะเหมือนไม้บรรทัดแต่ไม่มีมาตราวัดความยาวกำกับอยู่ ในกรณีที่ต้องใช้ไม้บรรทัดแทนสันตรงจะใช้เพื่อลากเส้นเท่านั้น และรูปที่ได้จากการสร้างจะต้องมีร่องรอยการสร้างให้เห็นอย่างชัดเจน

การสร้างรูปเรขาคณิตโดยใช้เครื่องมืออย่างจำกัดเพียงสันตรงและวงเวียนนั้นเปรียบเสมือนการเล่นเกมที่ท้าทายภายใต้กติกาที่กำหนดให้ เราถือว่าการสร้างดังกล่าวเป็นมรดกทางปัญญาอันเป็นวิธีการดั้งเดิมที่มนุษย์ใช้มาตั้งแต่สมัยโบราณและสามารถนำมาใช้ประโยชน์ได้ในปัจจุบัน

การสร้างรูปเรขาคณิตต้องอาศัยความรู้ในการสร้างพื้นฐานต่อไปนี้คือ

1. การสร้างส่วนของเส้นตรงให้ยาวเท่ากับความยาวของส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้
2. การแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้
3. การสร้างมุมให้มีขนาดเท่ากับขนาดของมุมที่กำหนดให้

4. การแบ่งครึ่งมุมที่กำหนดให้
5. การสร้างเส้นตั้งฉากจากจุดภายนอกมายังเส้นตรงที่กำหนดให้
6. การสร้างเส้นตั้งฉากที่จุดจุดหนึ่งบนเส้นตรงที่กำหนดให้

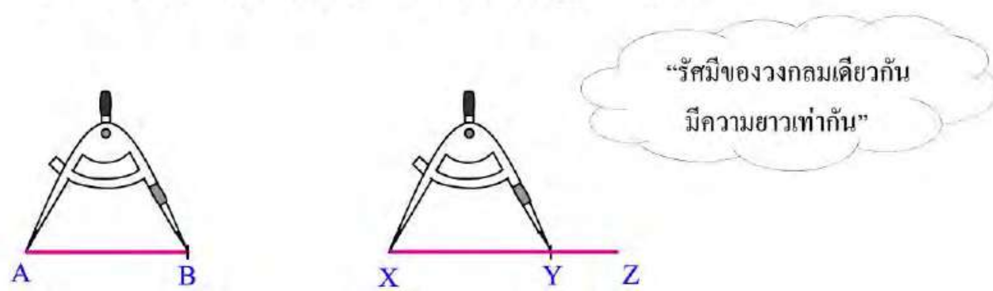
การสร้างเกี่ยวกับส่วนของเส้นตรง

กิจกรรมในชีวิตประจำวันหลายอย่าง เราต้องอาศัยการสร้างส่วนของเส้นตรงให้มีความยาวเท่ากับความยาวของส่วนของเส้นตรงที่กำหนด เช่น การตัดไม้ให้ยาวเท่ากับความยาวที่กำหนดให้ และการตัดเสื้อผ้าตามขนาดที่วัดไว้

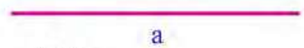
การสร้างส่วนของเส้นตรงให้ยาวเท่ากับความยาวของส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้

กำหนด $\overline{AB}$ ให้ดังรูป

การสร้าง $\overline{XY}$ ให้ยาวเท่ากับความยาวของ $\overline{AB}$ ทำได้ดังนี้

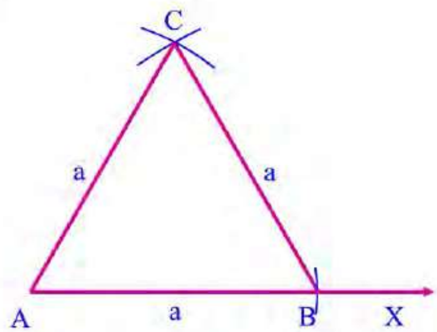


1. ลาก $\overrightarrow{XZ}$
2. ใช้จุด X เป็นจุดศูนย์กลาง กำหนดรัศมียาวเท่ากับ AB เขียนส่วนโค้งให้ตัด $\overrightarrow{XZ}$ ที่จุด Y จะได้ $\overline{XY}$ ยาวเท่ากับความยาวของ $\overline{AB}$ ตามต้องการ

ตัวอย่าง กำหนด a แทนความยาวของส่วนของเส้นตรง 

จงสร้างรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ABC ให้มีด้านแต่ละด้านยาวเท่ากับ a

การสร้างทำได้ดังนี้



1. ลาก $\overrightarrow{AX}$
2. ใช้จุด A เป็นจุดศูนย์กลาง กำหนดรัศมียาวเท่ากับ a เขียนส่วนโค้งให้ตัด $\overrightarrow{AX}$ ที่จุด B
3. ใช้จุด A และจุด B เป็นจุดศูนย์กลาง กำหนดรัศมียาวเท่ากับ a เขียนส่วนโค้งให้ตัดกันที่จุด C
4. ลาก $\overline{BC}$ และ $\overline{AC}$

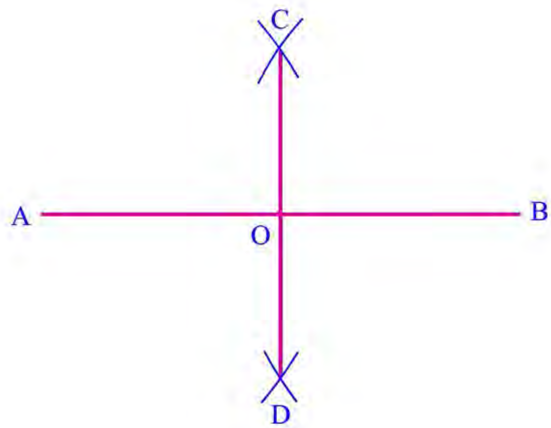
จะได้รูปสามเหลี่ยม ABC ซึ่งมีด้านแต่ละด้านยาวเท่ากับ a ตามต้องการ

การแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้

การแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรง ทำได้โดยการหาจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้

กำหนด $\overline{AB}$ ให้ดังรูป

วิธีหาจุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}$ วิธีหนึ่งทำได้ดังนี้

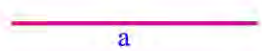


1. ใช้จุด A และจุด B เป็นจุดศูนย์กลาง กำหนดรัศมียาวเท่ากัน และคะเนให้ยาวเกินกว่าครึ่งหนึ่งของความยาว $\overline{AB}$ เขียนส่วนโค้งให้ตัดกันที่จุด C และจุด D
2. ลาก $\overline{CD}$ ตัด $\overline{AB}$ ที่จุด O จะได้จุด O เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}$ ที่ทำให้ AO = OB

เราสามารถตรวจสอบว่า $\overline{AO}$ และ $\overline{OB}$ ยาวเท่ากันโดยใช้วงเวียน

แบบฝึกหัด 4.2 ก

1. กำหนด a แทนความยาวของส่วนของเส้นตรงดังรูป



จงสร้างส่วนของเส้นตรงให้ยาวเท่ากับ 2a

2. กำหนด a และ b แทนความยาวของส่วนของเส้นตรงสองเส้นดังรูป

จงสร้างส่วนของเส้นตรงเส้นหนึ่งให้มีความยาวเท่ากับ $a+b$ และอีกเส้นหนึ่งให้ยาวเท่ากับ $a-b$

3. กำหนด a, b และ c แทนความยาวของส่วนของเส้นตรงสามเส้นดังรูป

จงสร้างรูปสามเหลี่ยม ABC ให้มีด้านทั้งสามยาวเท่ากับ a, b และ c

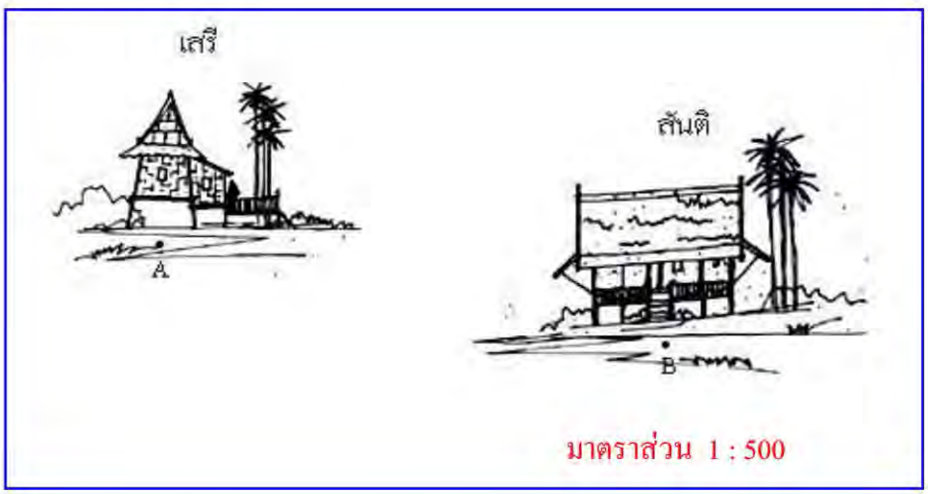
4. ให้ a และ b แทนความยาวของส่วนของเส้นตรงที่กำหนดดังรูป จงสร้างรูปสามเหลี่ยม ABC ที่ $BC = a$ และ $AB = AC = b$ รูปที่ได้เป็นรูปสามเหลี่ยมชนิดใด

5. ใช้ความยาว a และ b ที่กำหนดให้ในข้อ 4 สร้างรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ABC ให้ $BC = \frac{b}{2}$ และ $AB = AC = a$

6. จงกำหนดส่วนของเส้นตรงให้มีความยาวเท่ากับ a ตามใจชอบ
   1) จงสร้างรูปสามเหลี่ยมให้ด้านทั้งสามยาวเท่ากับ 2a, 3a และ 4a
   2) เราสามารถสร้างรูปสามเหลี่ยมให้ด้านทั้งสามยาวเท่ากับ a, 2a และ 3a ได้หรือไม่ เพราะเหตุใด

7. จงแบ่ง $\overline{AB}$ ที่กำหนดให้ออกเป็นสี่ส่วนที่ยาวเท่ากัน

8. ถ้าเราต้องการแบ่งส่วนของเส้นตรงเป็นส่วน ๆ ให้แต่ละส่วนมีความยาวเท่ากัน โดยการแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรงซ้ำหลาย ๆ ครั้ง
    1) เราสามารถแบ่งเป็นส่วนที่ยาวเท่ากันได้กี่ส่วนบ้าง
    2) เราสามารถแบ่งเป็น 3 ส่วน 5 ส่วน หรือ 6 ส่วนที่ยาวเท่ากันได้หรือไม่ เพราะเหตุใด
9. เสรีและสันติมีบ้านอยู่ใกล้กัน ดังแสดงในแผนผังด้วยจุด A และจุด B ตามลำดับ ทั้งสองคนตกลงกันว่าจะช่วยกันขุดบ่อน้ำในตำแหน่งที่อยู่ห่างจากบ้านทั้งสองหลังเป็นระยะเท่ากันและอยู่ใกล้บ้านที่สุด เขาควรขุดบ่อน้ำที่ตำแหน่งใด จงเขียนตำแหน่งของบ่อน้ำในแผนผังและหาระยะห่างจากบ้านของเสรีถึงบ่อน้ำว่าห่างกันกี่เมตร



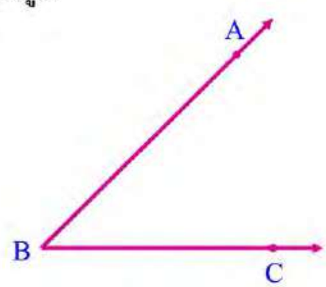
10. เราจะมีวิธีแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรงที่มีความยาวมาก ๆ ได้อย่างไร

การสร้างเกี่ยวกับมุม

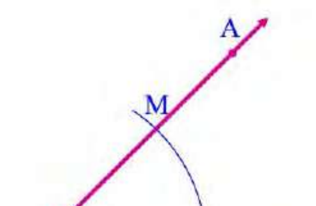
ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการสร้างพื้นฐานเกี่ยวกับมุม ได้แก่การสร้างมุมให้มีขนาดเท่ากับขนาดของมุมที่กำหนดให้และการแบ่งครึ่งมุม

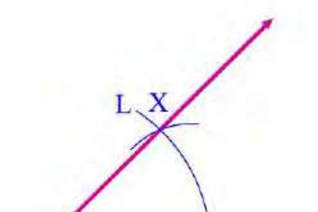
การสร้างมุมให้มีขนาดเท่ากับขนาดของมุมที่กำหนดให้

กำหนด $A\hat{B}C$ ให้ดังรูป



การสร้าง $X\hat{Y}Z$ ให้มีขนาดเท่ากับขนาดของ $A\hat{B}C$ โดยใช้สันตรงและวงเวียนทำได้ดังนี้

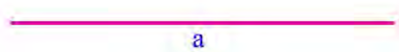


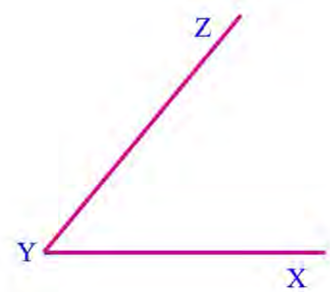


1. ลาก $\overrightarrow{YZ}$
2. ใช้จุด B เป็นจุดศูนย์กลาง กำหนดรัศมียาวพอสมควร เขียนส่วนโค้งให้ตัด $\overrightarrow{BC}$ และ $\overrightarrow{BA}$ ที่จุด N และจุด M ตามลำดับ
3. ใช้จุด Y เป็นจุดศูนย์กลาง กำหนดรัศมียาวเท่ากับ BN เขียนส่วนโค้ง QL ตัด $\overrightarrow{YZ}$ ที่จุด P
4. ใช้จุด P เป็นจุดศูนย์กลาง กำหนดรัศมียาวเท่ากับ NM เขียนส่วนโค้งให้ตัดส่วนโค้ง QL ที่จุด X ลาก $\overrightarrow{YX}$

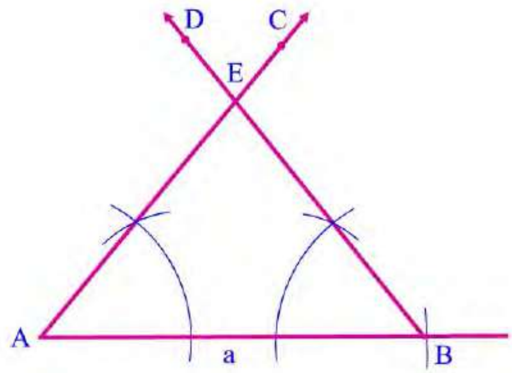
จะได้ $X\hat{Y}Z$ ซึ่งมีขนาดเท่ากับ $A\hat{B}C$ ตามต้องการ

ตัวอย่าง จงสร้างรูปสามเหลี่ยมให้มีฐานยาว a และมุมที่ฐานทั้งสองมุมมีขนาดเท่ากับ $X\hat{Y}Z$





วิธีสร้าง
1. สร้าง $\overline{AB}$ ให้ยาวเท่ากับ a
2. ที่จุด A สร้าง $B\hat{A}C$ ให้มีขนาดเท่ากับขนาดของ $X\hat{Y}Z$
3. ที่จุด B สร้าง $A\hat{B}D$ ให้มีขนาดเท่ากับขนาดของมุม $X\hat{Y}Z$ ให้ E เป็นจุดตัดของ $\overrightarrow{BD}$ และ $\overrightarrow{AC}$

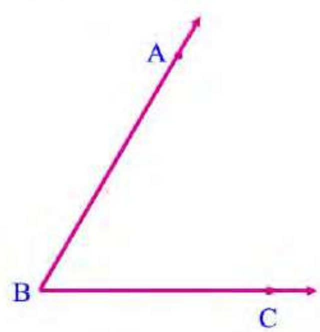


จะได้รูปสามเหลี่ยม ABE เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีลักษณะตามต้องการ

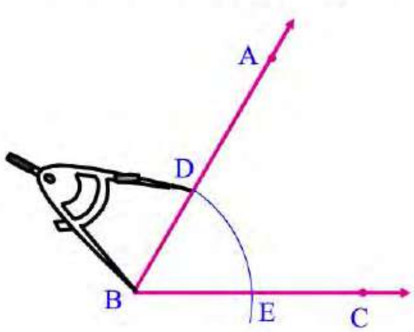
การแบ่งครึ่งมุม

การแบ่งครึ่งมุม ทำได้โดยการหาเส้นแบ่งครึ่งมุมที่กำหนดให้

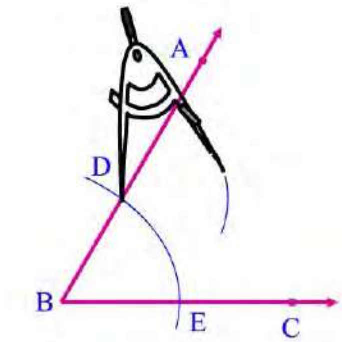
กำหนด $A\hat{B}C$ ให้ดังรูป



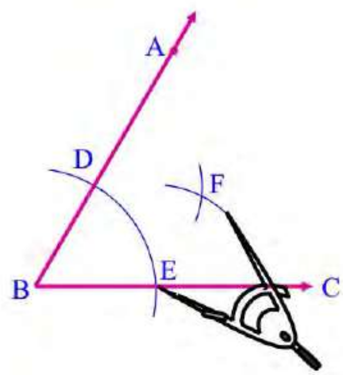
วิธีหาเส้นแบ่งครึ่ง $A\hat{B}C$ ทำได้ดังนี้



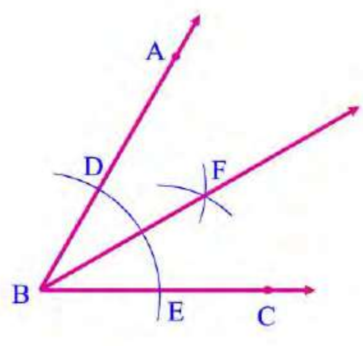
1. ใช้จุด B เป็นจุดศูนย์กลาง กำหนดรัศมียาวพอสมควรเขียนส่วนโค้งให้ตัด $\overrightarrow{BA}$ และ $\overrightarrow{BC}$ ที่จุด D และจุด E ตามลำดับ



2. ใช้จุด D เป็นจุดศูนย์กลาง กำหนดรัศมียาวพอสมควรเขียนส่วนโค้ง



3. ใช้จุด E เป็นจุดศูนย์กลาง กำหนดรัศมียาวเท่ากับความยาวของรัศมีในข้อ 2 เขียนส่วนโค้งให้ตัดส่วนโค้งในข้อ 2 ที่จุด F



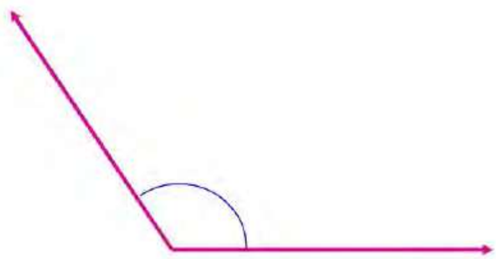
4. ลาก $\overrightarrow{BF}$

จะได้ $\overrightarrow{BF}$ แบ่งครึ่ง $A\hat{B}C$ ที่ทำให้ $A\hat{B}F = C\hat{B}F$ ตามต้องการ

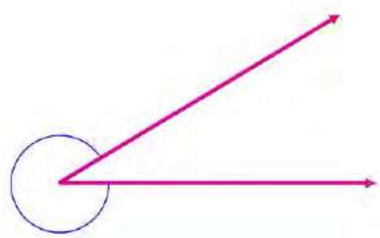
เราสามารถตรวจสอบว่า $A\hat{B}F$ มีขนาดเท่ากับขนาดของ $C\hat{B}F$ โดยใช้วงเวียน

แบบฝึกหัด 4.2 ข

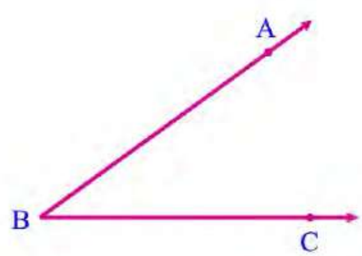
1. จงสร้าง $A\hat{B}C$ ให้มีขนาดเท่ากับขนาดของมุมที่กำหนดให้



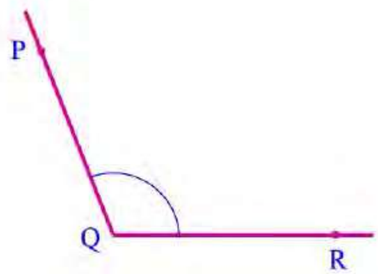
2. จงสร้าง $A\hat{B}C$ ให้มีขนาดเท่ากับขนาดของมุมกลับที่กำหนดให้

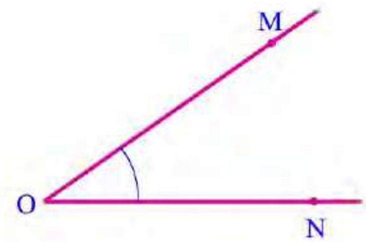


3. จงสร้างมุมให้มีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของ $A\hat{B}C$ ที่กำหนดให้

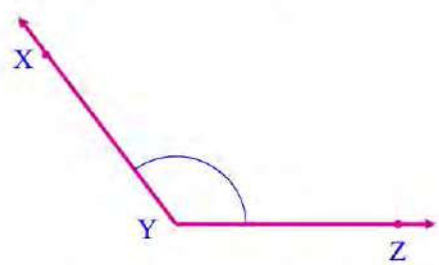


4. จงสร้างมุมให้มีขนาดเท่ากับผลต่างของขนาดของ $P\hat{Q}R$ และขนาดของ $M\hat{O}N$ ที่กำหนดให้



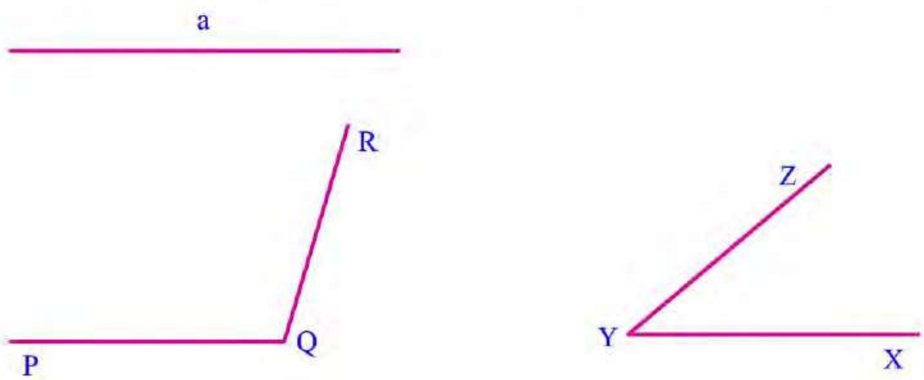


5. จงสร้าง $A\hat{B}C$ ให้มีขนาดน้อยกว่า 180 องศา
   1) จงสร้างเส้นแบ่งครึ่งมุม ABC
   2) จงสร้างเส้นแบ่งครึ่งมุมกลับ ABC
   3) เส้นแบ่งครึ่งมุมในข้อ 1) และ 2) เกี่ยวข้องกันอย่างไร
6. กำหนด $X\hat{Y}Z$ จงสร้างมุมให้มีขนาดเท่ากับขนาดของ $X\hat{Y}Z$ แล้วแบ่งมุมที่สร้างขึ้นออกเป็นมุมที่มีขนาดเท่ากัน 4 มุม

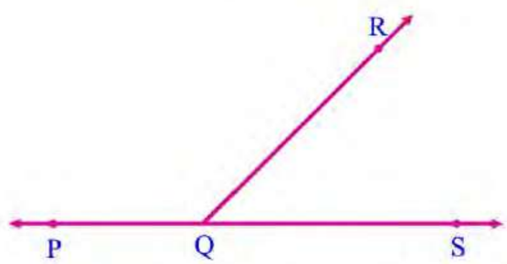


   1) เราสามารถแบ่ง $X\hat{Y}Z$ ออกเป็น 3 มุม 5 มุม หรือ 6 มุม ที่มีขนาดเท่ากันได้หรือไม่
   2) โดยอาศัยการแบ่งครึ่งมุม เราสามารถแบ่ง $X\hat{Y}Z$ ออกเป็นมุมที่มีขนาดเท่ากันได้กี่มุมบ้าง

7. จงสร้างรูปสามเหลี่ยม ABC ให้ $AB = a$ $\quad A\hat{B}C = P\hat{Q}R$ และ $B\hat{A}C = X\hat{Y}Z$



8. จากรูปจงสร้าง $\overrightarrow{QX}$ แบ่งครึ่ง $P\hat{Q}R$ และ $\overrightarrow{QY}$ แบ่งครึ่ง $R\hat{Q}S$



จงตอบคำถามต่อไปนี้

1) ผลบวกของ $P\hat{Q}R$ กับ $R\hat{Q}S$ มีขนาดเท่าไร
2) ผลบวกระหว่างครึ่งหนึ่งของ $P\hat{Q}R$ กับครึ่งหนึ่งของ $R\hat{Q}S$ มีขนาดเท่าไร
3) $X\hat{Q}Y$ มีขนาดเท่าไร เพราะเหตุใด

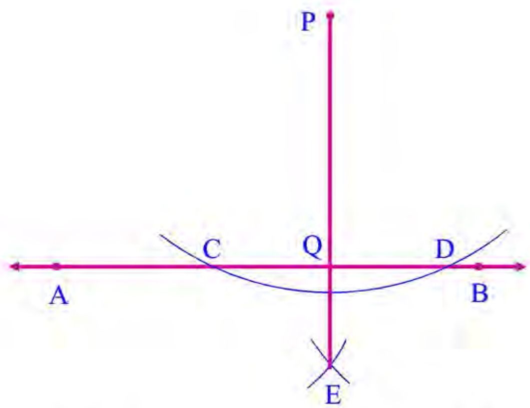
การสร้างเกี่ยวกับเส้นตั้งฉาก

ในสิ่งแวดล้อมรอบตัวเรามีตัวอย่างของการใช้เส้นตั้งฉากมากมาย เช่น ขาโต๊ะตั้งฉากกับพื้นห้อง เสาบ้านตั้งฉากกับคาน การสร้างเส้นตั้งฉากเป็นการสร้างพื้นฐานที่สำคัญของการสร้างรูปเรขาคณิตและรูปอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการสร้างเส้นตั้งฉากจากจุดภายนอกมายังเส้นตรงที่กำหนดให้ และการสร้างเส้นตั้งฉากที่จุดจุดหนึ่งบนเส้นตรงที่กำหนดให้

การสร้างเส้นตั้งฉากจากจุดภายนอกมายังเส้นตรงที่กำหนดให้

ให้จุด P เป็นจุดที่อยู่ภายนอก $\overleftrightarrow{AB}$ ดังรูป

การสร้างส่วนของเส้นตรงจากจุด P ให้ตั้งฉากกับ $\overleftrightarrow{AB}$ ทำได้ดังนี้



1. ใช้จุด P เป็นจุดศูนย์กลาง กำหนดรัศมียาวพอสมควร เขียนส่วนโค้งให้ตัด $\overleftrightarrow{AB}$ ที่จุด C และจุด D
2. ใช้จุด C และ D เป็นจุดศูนย์กลาง กำหนดรัศมียาวเท่ากัน เขียนส่วนโค้งให้ตัดกันที่จุด E
3. ลาก $\overline{EP}$ ตัด $\overleftrightarrow{AB}$ ที่จุด Q

จะได้ $\overline{EP}$ ตั้งฉากกับ $\overleftrightarrow{AB}$ ที่จุด Q ตามต้องการ

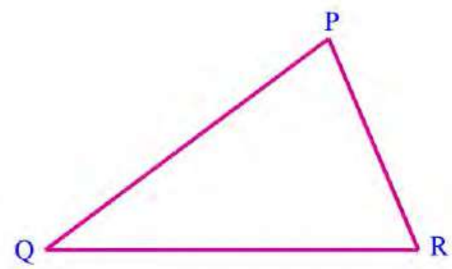
เราสามารถตรวจสอบว่า ขนาดของ $A\hat{Q}P$ เท่ากับขนาดของ $B\hat{Q}P$ และเท่ากับครึ่งหนึ่งของขนาดของมุมตรง โดยใช้วงเวียน

$\overline{PQ}$ เป็นส่วนหนึ่งของ $\overleftrightarrow{PQ}$ ที่ $\overleftrightarrow{PQ}$ เป็นเส้นตั้งฉากจากจุดภายนอก P มายัง $\overleftrightarrow{AB}$ ที่กำหนดให้

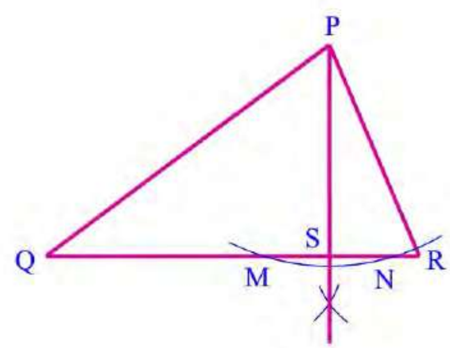
จากการที่ $\overline{PQ}$ ตั้งฉากกับ $\overleftrightarrow{AB}$ ที่จุด Q จะกล่าวว่า PQ เป็น**ระยะห่าง**ระหว่างจุด P กับ $\overleftrightarrow{AB}$

ส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดยอดมุมของรูปสามเหลี่ยมมาตั้งฉากกับฐานหรือส่วนต่อของฐานเรียกว่า **ส่วนสูง** เราสามารถใช้ความรู้เกี่ยวกับการสร้างเส้นตั้งฉากจากจุดภายนอกมายังเส้นตรงที่กำหนดให้เพื่อสร้างส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยมดังตัวอย่าง

ตัวอย่าง กำหนดรูปสามเหลี่ยม PQR จงสร้างส่วนสูงที่ลากจากจุด P มาตั้งฉากกับ $\overline{QR}$



การสร้างส่วนสูงที่ลากจากจุด P มาตั้งฉากกับ $\overline{QR}$ ทำได้โดยวิธีสร้างเส้นตั้งฉากจากจุดภายนอกมายังเส้นตรงที่กำหนดให้

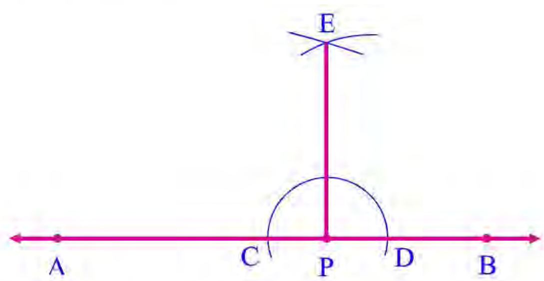


จะได้ $\overline{PS}$ เป็นส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยม PQR ที่ลากจากจุดยอด P ของรูปสามเหลี่ยมมายังฐาน QR ตามต้องการ

การสร้างเส้นตั้งฉากที่จุดจุดหนึ่งบนเส้นตรงที่กำหนดให้

ให้ P เป็นจุดบน $\overleftrightarrow{AB}$ ดังรูป

การสร้างเส้นตั้งฉากกับ $\overleftrightarrow{AB}$ ที่จุด P ทำได้โดยสร้างมุมฉากที่จุด P หรือสร้างเส้นแบ่งครึ่งมุมตรง APB ดังนี้



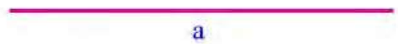
1. ใช้ P เป็นจุดศูนย์กลาง กำหนดรัศมียาวพอสมควร เขียนส่วนโค้งให้ตัด $\overleftrightarrow{AB}$ ที่จุด C และจุด D
2. ใช้ C และ D เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมียาวเท่ากัน เขียนส่วนโค้งให้ตัดกันที่จุด E
3. ลาก $\overline{PE}$

จะได้ $\overline{PE}$ ตั้งฉากกับ $\overleftrightarrow{AB}$ ที่จุด P ตามต้องการ

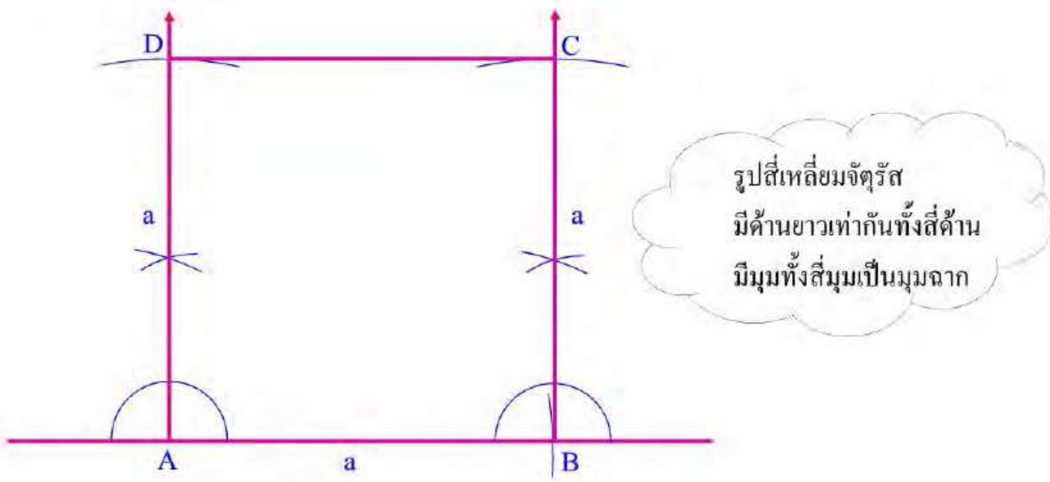
เราสามารถตรวจสอบว่าขนาดของ $A\hat{P}E$ เท่ากับขนาดของ $B\hat{P}E$ และเท่ากับครึ่งหนึ่งของขนาดของมุมตรงโดยใช้วงเวียน

$\overline{PE}$ เป็นส่วนหนึ่งของ $\overleftrightarrow{PE}$ ที่ $\overleftrightarrow{PE}$ เป็นเส้นตั้งฉากที่จุด P บน $\overleftrightarrow{AB}$ ที่กำหนดให้

ตัวอย่าง จงสร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสให้แต่ละด้านมีความยาวเท่ากับ a



การสร้างทำได้ดังนี้

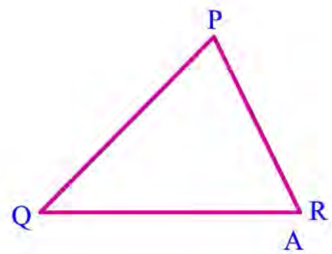


1. สร้าง $\overline{AB}$ ให้ $AB = a$
2. สร้าง $\overline{AD}$ ให้ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ ที่จุด A และให้ $AD = a$
3. สร้าง $\overline{BC}$ ให้ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ ที่จุด B และให้ $BC = a$
4. ลาก $\overline{CD}$

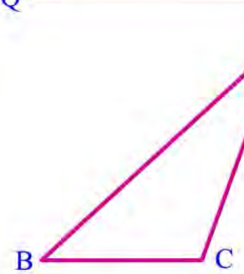
จะได้รูปสี่เหลี่ยม ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสตามต้องการ

แบบฝึกหัด 4.2 ค

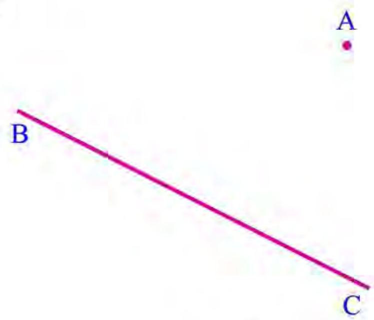
1. กำหนดรูปสามเหลี่ยม PQR จงสร้างส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยม PQR ทั้งสามเส้น



2. กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC จงสร้างส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยม ABC ทั้งสามเส้น

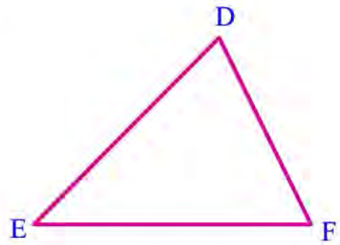


3. กำหนดจุด A เป็นตำแหน่งของบ้าน และ $\overline{BC}$ เป็นถนนสายหนึ่งดังแผนผัง จงหาว่าบ้านหลังนี้อยู่ห่างจากถนนกี่เมตร



มาตราส่วน 1 : 500

4. กำหนด $\overline{AB}$ เป็นส่วนของเส้นตรงใด ๆ
   1) จงใช้หลักการแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้ สร้าง $\overline{CD}$ ให้แบ่งครึ่ง $\overline{AB}$ ที่จุด O
   2) จงใช้วงเวียนเปรียบเทียบขนาดของ $A\hat{O}C$ กับขนาดของ $B\hat{O}C$
   3) $\overline{CD}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ ที่จุด O หรือไม่ เพราะเหตุใด
5. กำหนด $\overline{AB}$ เป็นส่วนของเส้นตรงใด ๆ
   1) จงสร้าง $\overline{CD}$ ให้แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ ที่จุด O
   2) กำหนดให้จุด P เป็นจุดใด ๆ บน $\overline{CD}$ PA และ PB เกี่ยวข้องกันอย่างไร

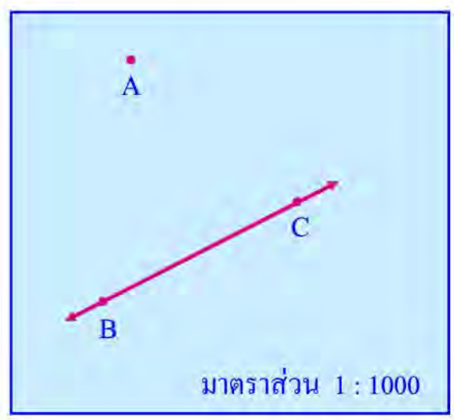
6. 

กำหนดรูปสามเหลี่ยม DEF
จงสร้างเส้นแบ่งครึ่ง และตั้งฉากกับด้านแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยม DEF

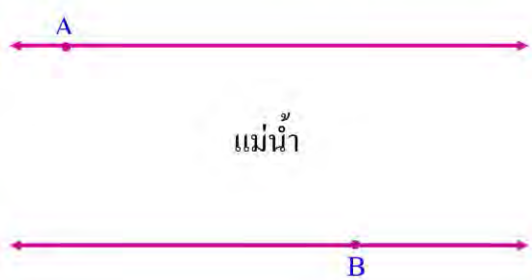
7. กำหนดจุด P เป็นจุดที่อยู่ภายในรูปสามเหลี่ยม ABC จงสร้างเส้นตั้งฉากจากจุด P ไปยังด้านแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยม ABC

8. จงสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉากให้มีด้านประกอบมุมฉากยาวเท่ากับ a และ b

9. กำหนดจุด A เป็นตำแหน่งของกวางที่ยืนอยู่กลางทุ่งหญ้า $\overleftrightarrow{BC}$ เป็นตำแหน่งของลำธารริมทุ่งหญ้า จงหาเส้นทางที่มีระยะสั้นที่สุดที่กวางจะเดินไปยังลำธาร



10. หมู่บ้านสองหมู่บ้านตั้งอยู่คนละฟากของริมฝั่งน้ำซึ่งขนานกัน ที่จุด A และจุด B ดังแผนภาพ ต้องการสร้างสะพานข้ามแม่น้ำโดยให้แนวสะพานตั้งฉากกับริมฝั่งน้ำทั้งสองและอยู่ห่างจากหมู่บ้านทั้งสองเป็นระยะเท่ากัน จงหาตำแหน่งที่จะสร้างสะพานดังกล่าว พร้อมคำอธิบาย



4.3 การสร้างรูปเรขาคณิตอย่างง่าย

ในกิจกรรมที่เกี่ยวข้องกับการสร้างรูปเรขาคณิต เช่น การสร้างรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วให้มีฐานยาว 5 เซนติเมตร และมุมที่ฐานมีขนาดเท่ากับ 45° จะต้องอาศัยความรู้เกี่ยวกับการสร้างพื้นฐานหลายข้อ เช่น การสร้างส่วนของเส้นตรงให้ยาวเท่ากับความยาวของส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้ การแบ่งครึ่งมุมที่กำหนดให้ และการสร้างมุมให้มีขนาดเท่ากับขนาดของมุมที่กำหนดให้ ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการนำความรู้เกี่ยวกับการสร้างพื้นฐานไปใช้ในการสร้างมุมที่มีขนาดต่าง ๆ การสร้างเส้นขนานและการสร้างอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง

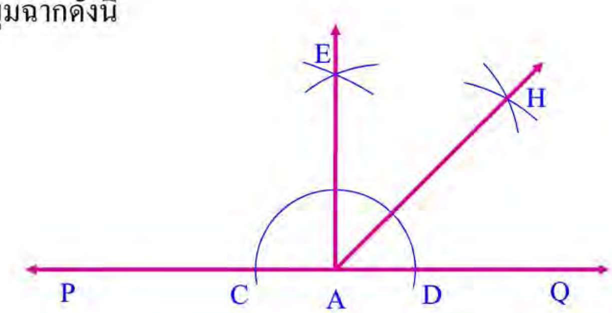
การสร้างมุมที่มีขนาดต่าง ๆ

โดยอาศัยความรู้เกี่ยวกับการสร้างพื้นฐาน ได้แก่ การสร้างมุมให้มีขนาดเท่ากับขนาดของมุมที่กำหนดให้ การแบ่งครึ่งมุมและความรู้เกี่ยวกับสมบัติของรูปเรขาคณิต เราสามารถสร้างมุมที่มีขนาดต่าง ๆ ได้มากมาย เช่น การสร้างมุมที่มีขนาดเท่ากับ 90° โดยสร้างมุมตรงแล้วแบ่งครึ่งมุมตรง

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการสร้างมุมที่มีขนาดเท่ากับ 90°, 45° และ 60° เพื่อเป็นแนวทางในการสร้างมุมที่มีขนาดอื่น ๆ ต่อไป

การสร้างมุมที่มีขนาดเท่ากับ 90° และ 45°

การสร้างมุมที่มีขนาดเท่ากับ 90° อาศัยการสร้างเส้นตั้งฉากที่จุดจุดหนึ่งบนเส้นตรงที่กำหนดให้ ซึ่งจะได้มุมฉากและการสร้างมุมที่มีขนาดเท่ากับ 45° ก็อาศัยการแบ่งครึ่งมุมฉากดังนี้

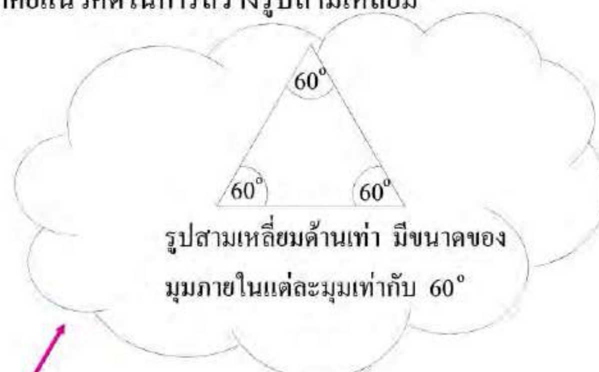


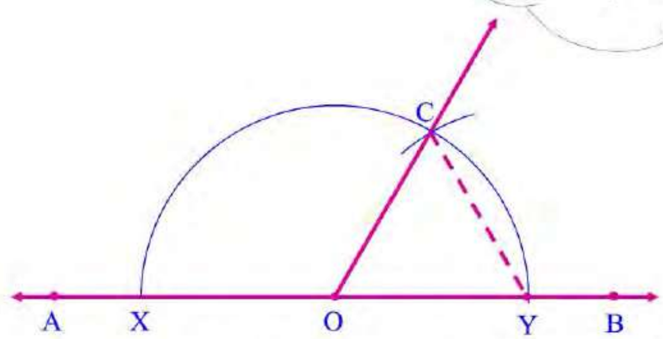
1. ลาก $\overleftrightarrow{PQ}$ และให้จุด A เป็นจุดจุดหนึ่งบน $\overleftrightarrow{PQ}$
2. ที่จุด A สร้าง $\overrightarrow{AE}$ ให้ตั้งฉากกับ $\overleftrightarrow{PQ}$ จะได้ $P\hat{A}E = Q\hat{A}E = 90^{\circ}$
3. สร้าง $\overrightarrow{AH}$ ให้แบ่งครึ่งมุมฉาก QAE

จะได้ $E\hat{A}H = Q\hat{A}H = 45^{\circ}$ ตามต้องการ

การสร้างมุมที่มีขนาดเท่ากับ 60°

การสร้างมุมที่มีขนาดเท่ากับ 60° อาศัยแนวคิดในการสร้างรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าดังนี้





1. ลาก $\overleftrightarrow{AB}$ และให้จุด O เป็นจุดจุดหนึ่งบน $\overleftrightarrow{AB}$
2. ใช้จุด O เป็นจุดศูนย์กลาง กำหนดรัศมียาวพอสมควร เขียนส่วนโค้งให้ตัด $\overleftrightarrow{AB}$ ที่จุด X และจุด Y
3. ใช้จุด Y เป็นจุดศูนย์กลาง กำหนดรัศมียาวเท่ากับ OY เขียนส่วนโค้งให้ตัดส่วนโค้ง XY ที่จุด C
4. ลาก $\overrightarrow{OC}$ จะได้รูปสามเหลี่ยม OYC เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าจะได้ $Y\hat{O}C$ มีขนาดเท่ากับ 60° ตามต้องการ

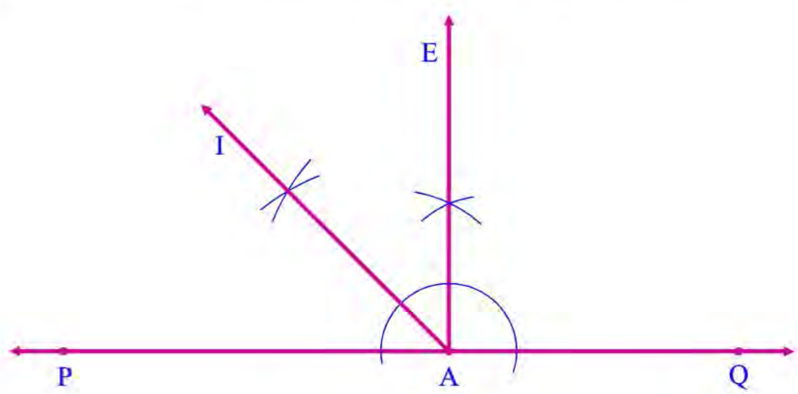
ตัวอย่าง จงสร้างมุมที่มีขนาดเท่ากับ 135°

เนื่องจาก $135^\circ = 90^\circ + 45^\circ$

หรือ $135^\circ = 180^\circ - 45^\circ$

การสร้างมุมที่มีขนาดเท่ากับ 135° จึงอาจทำได้ดังนี้

วิธีที่ 1 อาศัยแนวคิดในการสร้างมุมที่มีขนาด 90° และ 45°



1. ลาก $\overleftrightarrow{PQ}$ และให้จุด A เป็นจุดจุดหนึ่งบน $\overleftrightarrow{PQ}$
2. ที่จุด A สร้าง $\overrightarrow{AE}$ ให้ตั้งฉากกับ $\overleftrightarrow{PQ}$ จะได้ $P\hat{A}E = Q\hat{A}E = 90^\circ$
3. สร้าง $\overrightarrow{AI}$ ให้แบ่งครึ่งมุมฉาก PAE

จะได้ $Q\hat{A}I = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$ ตามต้องการ

วิธีที่ 2 อาศัยแนวคิดในการสร้างมุมที่มีขนาดเท่ากับ 180° และ 45° โดยการสร้างมุมที่มีขนาดเท่ากับ 180° แล้วหักออกด้วยมุมที่มีขนาดเท่ากับ 45° ซึ่งมีวิธีสร้างทำนองเดียวกันกับวิธีที่ 1 ข้างต้น

แบบฝึกหัด 4.3 ก

1 จงสร้างมุมที่มีขนาดต่อไปนี้

1) 30° 2) 120°

3) 150° 4) $22\frac{1}{2}^\circ$

2. จงสร้าง

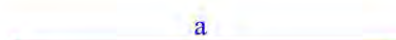
1) จงสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉากให้มีด้านประกอบมุมฉากยาว 4.5 เซนติเมตร และ 6 เซนติเมตร

2) จงสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉากให้มีด้านประกอบมุมฉากด้านหนึ่งยาว 5 เซนติเมตร และด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 12 เซนติเมตร

3. จงสร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสให้มีความยาวของแต่ละด้านเท่ากับ 5 เซนติเมตร

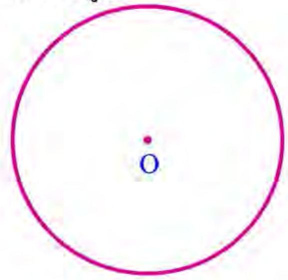
4. จงสร้างรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ABCD รูปหนึ่งแล้วสร้างเส้นแบ่งครึ่ง $A\hat{B}C$ และเส้นแบ่งครึ่ง $B\hat{A}D$ ให้เส้นแบ่งครึ่งมุมทั้งสองตัดกันที่จุด O นักเรียนคิดว่ารูปสามเหลี่ยมที่เกิดขึ้นเป็นรูปสามเหลี่ยมชนิดใดเพราะเหตุใด

5. จงสร้างรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วรูปหนึ่งให้มีฐานยาวเท่ากับ a และมุมยอดมีขนาดเท่ากับ 90°



6. จงสร้างรูปสี่เหลี่ยม ABCD ให้ $\overline{AB}$ ยาว 5 เซนติเมตร $D\hat{A}B$ และ $A\hat{B}C$ มีขนาดเท่ากับ 105° $\overline{BC}$ ยาว 3.5 เซนติเมตรและ $D\hat{C}B$ มีขนาดเท่ากับ 90°

7. กำหนด O เป็นจุดศูนย์กลางดังรูป

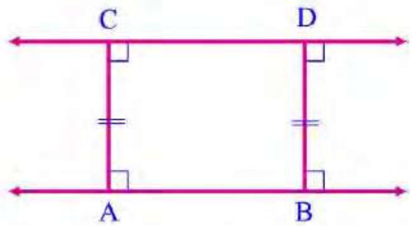


1) จงสร้างเส้นแบ่งมุมรอบจุด O ออกเป็นมุมที่มีขนาดเท่ากัน 4 มุม และจงหาว่ามุมแต่ละมุมมีขนาดเท่าไร
2) ถ้าลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมต่อจุดทั้ง 4 จุดที่เส้นแบ่งมุมทั้งสี่ตัดเส้นรอบวงรูปสี่เหลี่ยมที่ได้เป็นรูปสี่เหลี่ยมชนิดใด จงอธิบาย

8. จงสร้างรูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า
9. จงสร้างรูปแปดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

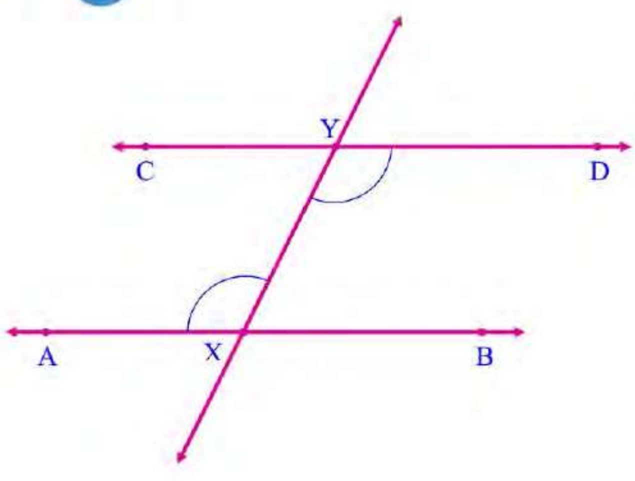
การสร้างเส้นขนาน

ในชีวิตประจำวันเราเห็นตัวอย่างของเส้นขนาน เช่น รางรถไฟ ขอบกระดานดำ และกรอบประตูหน้าต่าง เราทราบมาแล้วว่าเส้นตรงสองเส้นขนานกัน ก็ต่อเมื่อเส้นตรงสองเส้นนั้นมีระยะห่างเท่ากันเสมอ



จากรูป $\overleftrightarrow{AB}$ ขนานกับ $\overleftrightarrow{CD}$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ AC และ BD เป็นระยะห่างระหว่างเส้นขนานโดยที่ AC = BD

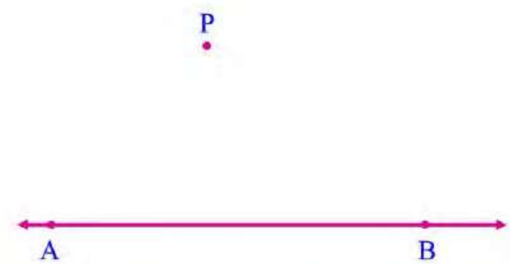
เส้นขนานมีสมบัติที่สำคัญซึ่งจะนำไปใช้ในการสร้างเส้นขนาน คือ "ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่งทำให้**มุมแย้ง**มีขนาดเท่ากัน แล้วเส้นตรงคู่นั้นจะขนานกัน"



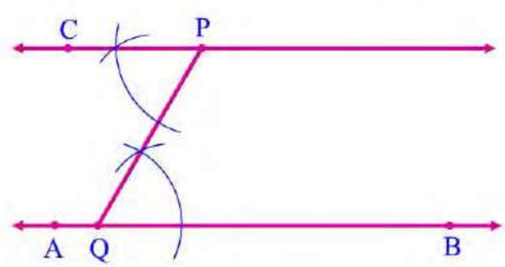
จากรูปถ้า $\overleftrightarrow{XY}$ ตัด $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ทำให้ $A\hat{X}Y = D\hat{Y}X$ แล้วจะได้ว่า $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ขนานกัน

การสร้างเส้นตรงให้ผ่านจุดจุดหนึ่งและขนานกับเส้นตรงที่กำหนดให้

กำหนดจุด P และ $\overleftrightarrow{AB}$ ดังรูป



การสร้างเส้นตรงให้ผ่านจุด P และขนานกับ $\overleftrightarrow{AB}$ ทำได้ดังนี้



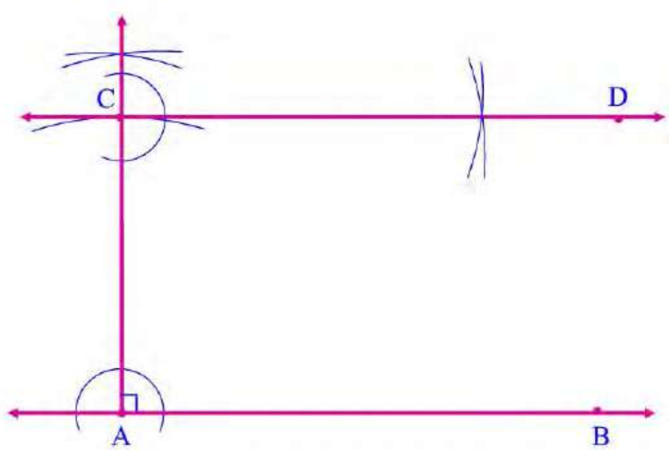
1. กำหนดจุด Q เป็นจุดจุดหนึ่งบน $\overleftrightarrow{AB}$ ลาก $\overline{PQ}$
2. สร้าง $C\hat{P}Q$ ให้มีขนาดเท่ากับขนาดของ $P\hat{Q}B$ ซึ่ง $C\hat{P}Q$ และ $P\hat{Q}B$ เป็นมุมแย้ง

จะได้ $\overleftrightarrow{CP}$ // $\overleftrightarrow{AB}$ ตามต้องการ

การสร้างเส้นตรงให้ขนานกับเส้นตรงที่กำหนดให้และมีระยะห่างตามที่กำหนด

กำหนด $\overleftrightarrow{AB}$ และส่วนของเส้นตรงที่มีความยาวเท่ากับ a ดังรูป

การสร้าง $\overleftrightarrow{CD}$ ให้ขนานกับ $\overleftrightarrow{AB}$ และมีระยะห่างกันเท่ากับ a มีวิธีสร้างดังนี้

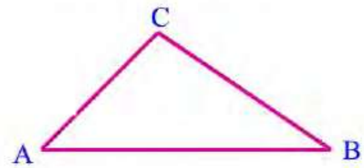


1. ที่จุด A สร้าง $\overrightarrow{AC}$ ให้ตั้งฉากกับ $\overleftrightarrow{AB}$ และสร้างให้ $\overline{AC}$ ยาวเท่ากับ a
2. ที่จุด C สร้าง $\overleftrightarrow{CD}$ ให้ตั้งฉากกับ $\overline{AC}$

จะได้ $\overleftrightarrow{CD}$ ขนานกับ $\overleftrightarrow{AB}$ และมีระยะห่างกันเท่ากับ a ตามต้องการ

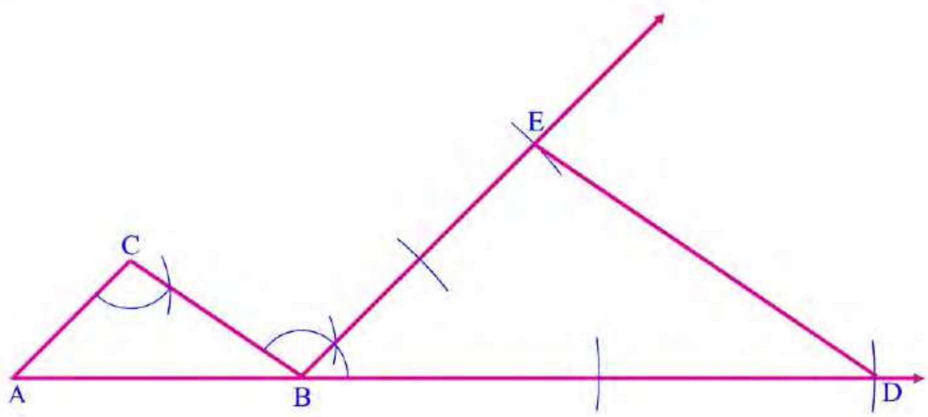
เราสามารถอธิบายว่า $\overleftrightarrow{CD}$ ขนานกับ $\overleftrightarrow{AB}$ ได้อย่างไร

ตัวอย่าง กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC ดังรูป



จงสร้างรูปสามเหลี่ยมที่มีลักษณะเป็นการขยายรูปสามเหลี่ยม ABC โดยให้ด้านแต่ละด้านมีความยาวเป็นสองเท่าของความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยม ABC

วิธีสร้าง จากรูปสามเหลี่ยม ABC ที่กำหนดให้

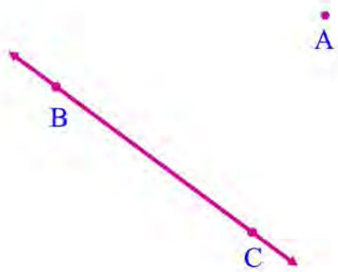


1. สร้าง $\overrightarrow{AB}$
2. บน $\overrightarrow{AB}$ สร้าง $\overline{BD}$ ให้ยาวเป็นสองเท่าของ AB
3. ที่จุด B สร้าง $\overrightarrow{BE}$ ให้ขนานกับ $\overline{AC}$ และให้ $\overline{BE}$ ยาวเป็นสองเท่าของ AC
4. ลาก $\overline{DE}$

จะได้รูปสามเหลี่ยม BDE ตามต้องการที่ BD = 2(AB), BE = 2(AC) และ DE = 2(BC)

แบบฝึกหัด 4.3 ข

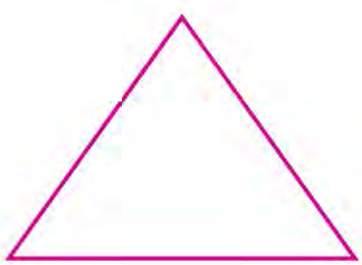
1.



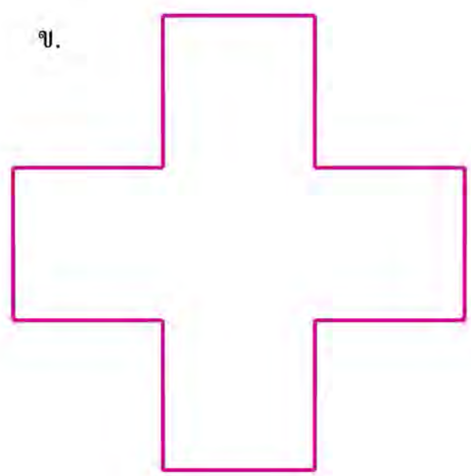
กำหนด $\overleftrightarrow{BC}$ เป็นแนวคลองชลประทาน ต้องการสร้างถนนให้ตรงโดยผ่านจุด A และขนานกับแนวคลองชลประทาน จงสร้างแนวถนน

2. จงสร้างเส้นขนานคู่หนึ่งให้มีระยะห่างระหว่างเส้นขนาน 3 เซนติเมตร
3. จงสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีด้านด้านหนึ่งยาว 5 เซนติเมตร อีกด้านหนึ่งยาว 3 เซนติเมตรและมุมมุมหนึ่งมีขนาดเท่ากับ 60 องศา
4. จงสร้างรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนที่แต่ละด้านยาว 4 เซนติเมตรและมุมมุมหนึ่งมีขนาดเท่ากับ 135 องศา
5. จงสร้างรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีขนาดของด้านกว้างและด้านยาวเป็น 4 เซนติเมตร และ 6 เซนติเมตร ตามลำดับ
6. กำหนดรูปดังนี้

ก.



ข.



ในแต่ละข้อจงสร้างรูปที่มีสมบัติดังนี้

6.1 เป็นรูปที่ขยายจากรูปเดิม โดยให้แต่ละด้านมีความยาวเป็นสองเท่าของความยาวของด้านของรูปเดิม

6.2 เป็นรูปที่ย่อจากรูปเดิม โดยให้แต่ละด้านมีความยาวเป็นครึ่งหนึ่งของความยาวของด้านของรูปเดิม

7. กำหนด $\overleftrightarrow{EF}$ เป็นเส้นตรงใด ๆ
   1) จงสร้าง $\overleftrightarrow{AB}$ ให้ขนานกับ $\overleftrightarrow{EF}$
   2) จงสร้าง $\overleftrightarrow{CD}$ ให้ต่างจาก $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ขนานกับ $\overleftrightarrow{EF}$
   3) $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ เกี่ยวข้องกันอย่างไร จงอธิบาย

8. กำหนด $\overleftrightarrow{AB}$ เป็นเส้นตรงใด ๆ
   1) จงสร้าง $\overleftrightarrow{CD}$ ให้ขนานกับ $\overleftrightarrow{AB}$
   2) จงสร้างรูปสามเหลี่ยมอย่างน้อยสามรูป ที่แต่ละรูปมีฐานบน $\overleftrightarrow{AB}$ และมีจุดยอดบน $\overleftrightarrow{CD}$
   3) รูปสามเหลี่ยมทั้งหลายที่สร้างมาในข้อ 2) มีความเกี่ยวข้องกันอย่างไร จงอธิบาย
   4) ถ้ารูปสามเหลี่ยมทั้งหลายที่สร้างมาในข้อ 2) มีฐานยาวเท่ากันหมด แล้วพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมเหล่านี้เกี่ยวข้องกันอย่างไร จงอธิบาย

9. กำหนด ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ
   1) จงหาจุดกึ่งกลาง E ของ $\overline{AB}$
   2) จงสร้าง $\overline{EF}$ ให้ขนานกับ $\overline{BC}$ และ $\overline{EF}$ ตัดกับ $\overline{AC}$ ที่จุด F
   3) AF และ CF เกี่ยวข้องกันอย่างไร
   4) ส่วนสูงที่ลากจากจุด A ของ ΔAEF และ ΔABC เกี่ยวข้องกันอย่างไร
   5) ฐาน EF ของ ΔAEF และฐาน BC ของ ΔABC เกี่ยวข้องกันอย่างไร
   6) พื้นที่ของ ΔAEF และพื้นที่ของ ΔABC เกี่ยวข้องกันอย่างไร

เรื่องน่ารู้

ยุคลิดและหนังสือเอลเลเมนตส์

เรขาคณิตที่เราศึกษาอยู่นี้เป็นเรขาคณิตที่มีชื่อเรียกอย่างเป็นทางการว่า **เรขาคณิตแบบยุคลิด** (Euclidean geometry) พัฒนาจากเรขาคณิตในหนังสือเอลเลเมนตส์ (Elements) ของยุคลิดแห่งอะเล็กซานเครีย (Euclid of Alexandria ประมาณ 325 – 265 ปีก่อนคริสต์ศักราช) ยุคลิดเป็นอาจารย์ทางคณิตศาสตร์ ณ มหาวิทยาลัยแห่งอะเล็กซานเครีย มีหลักฐานว่าท่านเคยศึกษาคณิตศาสตร์จากสำนักเพลโตนิก (Platonic School) ที่มีชื่อเสียงทางวิชาการในสมัยกรีกโบราณ ยุคลิดมีผลงานทั้งด้านคณิตศาสตร์ ฟิสิกส์และดาราศาสตร์

นักคณิตศาสตร์ถือว่าหนังสือเอลเลเมนตส์ เป็นผลงานทางคณิตศาสตร์ของยุคลิดที่มีชื่อเสียงที่สุดและเป็นมรดกทางปัญญาที่มีคุณค่าอย่างยิ่ง มีอิทธิพลต่อการพัฒนาวิชาคณิตศาสตร์และการนำไปใช้ประโยชน์ในชีวิตจริงของมนุษย์อย่างแพร่หลายจนถึงปัจจุบัน ต้นฉบับของหนังสือเป็นภาษากรีก มีผู้แปลเป็นภาษาอาหรับและภาษาละตินตามความเจริญของแต่ละยุคจนกระทั่ง ค.ศ. 1570 (พ.ศ. 2113) จึงแปลเป็นภาษาอังกฤษเป็นครั้งแรก ได้มีการพิมพ์หนังสือเอลเลเมนตส์เผยแพร่อย่างกว้างขวาง ประมาณกันว่ามีปริมาณการพิมพ์เป็นที่สองรองจากพระคัมภีร์ไบเบิล มีการแปลเป็นภาษาต่าง ๆ เพื่อใช้เป็นตำราเรียนทั่วโลกจนถึงปลายคริสต์ศตวรรษที่ 19

นักคณิตศาสตร์ยอมรับว่าหนังสือเอลเลเมนตส์เป็นตำราทางคณิตศาสตร์ชุดแรกที่มีการนำเสนอเนื้อหาสาระอย่างเป็นระบบ ใช้วิธีเขียนแบบสังเคราะห์จากสิ่งที่รู้ไปสู่สิ่งใหม่ที่ซับซ้อนขึ้น ถือเป็นต้นแบบของการเขียนหนังสือคณิตศาสตร์ในปัจจุบัน

ยุคลิดได้นำผลงานของนักปราชญ์ในสมัยโบราณก่อนหน้ามาเรียบเรียงอย่างเป็นระบบและเป็นลำดับเหตุผลโดยเริ่มต้นจากข้อตกลงเบื้องต้น 10 ประการ เรียกว่า สัจพจน์ แล้วใช้การให้เหตุผลสร้างข้อสรุปได้ถึง 465 ทฤษฎีบท หนังสือเอลเลเมนตส์มีทั้งหมด 13 เล่ม เนื้อหาส่วนใหญ่เป็นเนื้อหาทางเรขาคณิต และยังกล่าวถึงเนื้อหาเกี่ยวกับทฤษฎีจำนวนและพีชคณิตเชิงเรขาคณิตอีกด้วย

บรรณานุกรม

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2541). **คู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์ รายวิชา ค ๑๐๑ คณิตศาสตร์ ๑ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่หนึ่ง หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช ๒๕๒๑ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๓๓).** พิมพ์ครั้งที่ 4. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2537). **คู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์ รายวิชา ค ๒๐๓ คณิตศาสตร์ ๓ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่สอง หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช ๒๕๒๑ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๓๓).** พิมพ์ครั้งที่ 5. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2541). **คู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์ รายวิชา ค ๒๐๔ คณิตศาสตร์ ๔ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่สอง หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช ๒๕๒๑ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๓๓).** พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2545). **คู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์ รายวิชา ค ๐๑๑ ชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช ๒๕๒๑ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๓๓).** พิมพ์ครั้งที่ 5. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2545). **หนังสือเรียน วิชาคณิตศาสตร์ เสริมทักษะคณิตศาสตร์ ๑ ค ๐๓๑ ชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น** พิมพ์ครั้งที่ 12. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว

ศึกษาธิการ, กระทรวง. (2525). **หนังสือประกอบการสอนวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่หนึ่ง.** กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว

Bolster, Carey L., and others. (1996). **Exploring Mathematics Teacher's Edition Grade 6 : Teacher's Edition.** Illinois, U.S.A. : Scott, Foresman and Company.

Charles, Randall I., and others. (1995). **Addison – Wesley Mathematics Teacher's Edition Grade 7.** New York, U.S.A. : Addison – Wesley Publishing Company, Inc.

Eichoiz, Robert E., and others. (1995) . **Addison – Wesley Mathematics Teacher's Edition Grade 6.** New York, U.S.A. : Addison – Wesley Publishing Company, Inc.

Fey, James T., and others. (1998). **Accentuate the Negative : Integers.** U.S.A. : Dale Seymour Publications.

Fey, James T., and others. (1998). **Bits and Pieces I : Understanding Rationnal Numbers.** U.S.A. : Dale Seymour Publications.

Forster, lan and Thomson Sue. (2001). **Access to General Maths :** HSC. Australia. : Person Education Australia Pty Limited.

Jackson, Audrey L., and other. (1996) **Mathematics in Action Teacher's Edition – Part** 2.

Jurgensen, Ray C, Brown Richard G, and Jurgensen John W. (1994). **Geometry.** Boston, MA**.** U.S.A. : Houghton Mifflin Company.

Serra, Michael. (1993). **Discovering Geometry An Inductive Approach :** Berkeley, U.S.A. : Key Curriculum Press.

ภาคผนวก

บัญชีศัพท์

บทที่ 1

จำนวนนับ	counting number
ตัวหาร	divisor
ตัวประกอบ	factor
ตัวประกอบร่วม	common factor
จำนวนเฉพาะ	prime number
ตัวประกอบเฉพาะ	prime factor
ตัวหารร่วมมาก (ห.ร.ม.)	greatest common divisor (G.C.D.)
ตัวคูณร่วมน้อย	least common multiple (L.C.M.)

บทที่ 2

จำนวนเต็ม	integer
จำนวนเต็มบวก	positive integer
จำนวนเต็มลบ	negative integer
เส้นจำนวน	number line
ค่าสัมบูรณ์	absolute value
สมบัติการสลับที่	commutative property
สมบัติการเปลี่ยนหมู่	associative property
จำนวนตรงข้าม	inverse number (for addition)
สมบัติการแจกแจง	distributive property
จำนวนคู่	even number
จำนวนคี่	odd number

บทที่ 3

เลขยกกำลัง	power
เลขชี้กำลัง	exponent
ฐาน	base
สัญกรณ์วิทยาศาสตร์	scientific notation

บทที่ 4

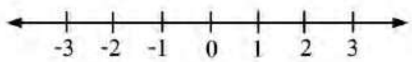
จุด	point
เส้นตรง	straight line
ส่วนของเส้นตรง	line segment
จุดปลาย	end point
รังสี	ray
มุม	angle
จุดยอดมุม	vertex
ขนาดของมุม	measure of an angle
มุมภายใน	interior angle
มุมแหลม	acute angle
มุมฉาก	right angle
มุมป้าน	obtuse angle
มุมตรง	straight angle
มุมกลับ	reflex angle
มุมรอบจุด	round angle หรือ perigon
มุมตรงข้าม	vertical angles
มุมประชิด	adjacent angles
มุมแย้ง	alternate angles
ส่วนสูง	altitude

บัญชีสัญลักษณ์

บทที่ 1

=	เท่ากับ เท่ากัน

บทที่ 2

	เส้นจำนวน
>	มากกว่า
<	น้อยกว่า

บทที่ 3

a^n	เลขยกกำลังที่มี a เป็นฐาน และ n เป็นเลขชี้กำลัง
$\neq$	ไม่เท่ากับ ไม่เท่ากัน

บทที่ 4

•	จุด
$\overleftrightarrow{AB}$	เส้นตรง AB
$\overline{AB}$	ส่วนของเส้นตรง AB
$m(\overline{AB})$ หรือ AB	ความยาวของส่วนของเส้นตรง AB
$\overrightarrow{AB}$	รังสี AB
$A\hat{B}C$ หรือ $\angle ABC$	มุม ABC
$m(B\hat{A}C)$ หรือ $m(\angle BAC)$	ขนาดของมุม BAC
//	ขนานกับ ขนานกัน

คณะกรรมการจัดทำสื่อการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

นางปิยรัตน์ จาตุรันตบุตร	สถาบันราชภัฏสวนดุสิต
นางสาวลัดดาวัลย์ เพ็ญสุภา	มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์
นายปรีชา เนาว์เย็นผล	มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช
นางสาวสาคร บุญดาว	มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช
นายสมนึก บุญพาไสว	มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานคร
นางจรรยา ภูอุดม	โรงเรียนดอนเมืองจาตุรจินดา
นางยุพิน พิพิธกุล	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางจารุนี สูตะบุตร	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นายสมพล เล็กสกุล	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางอารียา สุวรรณคำ	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางเจริญศรี จันไพบูลย์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวจันทร์เพ็ญ ชุมคช	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวจารุวรรณ แสงทอง	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวปานทอง กุลนาถศิริ	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางชุลีพร สุภธีระ	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางชมัยพร ตั้งตน	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวรจนา รัตนานิคม	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาววันดี ตีระสหกุล	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวคนิตา ชื่นอารมณ์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวพิลาลักษณ์ ทองทิพย์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

คณะบรรณาธิการ

นางยุพิน พิพิธกุล	นางปิยรัตน์ จาตุรันตบุตร
นางจารุนี สูตะบุตร	นางสาวจารุวรรณ แสงทอง
นายสมพล เล็กสกุล	นางชุลีพร สุภธีระ

คณะบรรณาธิการดำเนินงานปรับปรุงหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์

นายดนัย ยังคง

นางสาวอัมพร ม้าคนอง

นางสาวลัดดาวัลย์ เพ็ญสุภา

นางสุวรรณา คล้ายกระแส

นางชมัยพร ตั้งตน

นายปรีชา เนาว์เย็นผล

นายสมนึก บุญพาไสว

ภาพ

นางวรพรรณ ทิณพงษ์

นางสาวดนพร จรัสแสงสกุล

ผู้จัดพิมพ์ต้นฉบับ

นางสาวเสาวนีย์ ประมูลทรัพย์

สสวท

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

พฐ.คณิตฯล.1ม.1

9 789740 162216

ราคา 37.00 บาท

ศึกษาภัณฑ์พาณิชย์

พิมพ์ที่โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว

นายชินภัทร ภูมิรัตน ผู้พิมพ์และผู้โฆษณา

๕๓๐๐๐๓๕

องค์การค้าของ สกสค.

www.suksapan.or.th