หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม

คณิตศาสตร์ เล่ม ๒

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๑

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑

กระทรวงศึกษาธิการ

๓๑.-

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม
คณิตศาสตร์ เล่ม ๒
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๑

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑

จัดทำโดย

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

กระทรวงศึกษาธิการ

ISBN 978 - 974 - 01 - 6230 - 8

พิมพ์ครั้งที่หนึ่ง ๘๐๐,๐๐๐ เล่ม

พ.ศ. ๒๕๕๒

องค์การค้าของ สกสค. จัดพิมพ์จำหน่าย

พิมพ์ที่โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว

๒๒๔๘ ถนนลาดพร้าว วังทองหลาง กรุงเทพมหานคร

มีลิขสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติ

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึ่งกระทำ บ้างไม่พึ่งกระทำ

ประกาศกระทรวงศึกษาธิการ
เรื่อง อนุญาตให้ใช้หนังสือในสถานศึกษา

ด้วยสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน กระทรวงศึกษาธิการได้มอบหมายให้สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี จัดทำหนังสือเรียน รายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม ๒ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๑ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช ๒๕๕๑ สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐานได้พิจารณาแล้ว อนุญาตให้ใช้หนังสือเล่มนี้ในสถานศึกษาได้

ประกาศ ณ วันที่ ๑๑ ธันวาคม พ.ศ. ๒๕๕๒

(นายชินภัทร ภูมิรัตน)
เลขาธิการคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

คำนำ

หนังสือเรียน รายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม ๒ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๑ นี้ จัดทำขึ้นตามตัวชี้วัดและมาตรฐานการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ สำหรับให้สถานศึกษาเลือกใช้ประกอบการเรียนการสอนและใช้เป็นแนวทางในการออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้ ให้ความรู้ความเข้าใจผู้เรียนนำไปสู่ทักษะการคิดวิเคราะห์ สังเคราะห์ ตามความสามารถและความแตกต่างระหว่างบุคคลของผู้เรียนได้ ในการจัดทำหนังสือเล่มนี้ ได้รับความช่วยเหลือจากคณาจารย์ ผู้ทรงคุณวุฒิ ผู้เชี่ยวชาญด้านคณิตศาสตร์จากสถาบันต่างๆ ทั้งภาครัฐและเอกชนเป็นอย่างดี

สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน หวังเป็นอย่างยิ่งว่าหนังสือเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการจัดการเรียนรู้ เพื่อประยุกต์ใช้พัฒนาการเรียนรู้ของผู้เรียนได้อย่างเหมาะสม ขอขอบคุณสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ตลอดจนบุคคลและหน่วยงานที่มีส่วนเกี่ยวข้องในการจัดทำหนังสือไว้ ณ โอกาสนี้

(นายชินภัทร ภูมิรัตน)
เลขาธิการคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน
๑๑ ธันวาคม ๒๕๕๒

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

คำชี้แจง

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้รับมอบหมายจากกระทรวงศึกษาธิการ ให้พัฒนาหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ กลุ่มสาระการเรียนรู้วิทยาศาสตร์ รวมทั้งสาระการออกแบบและ เทคโนโลยีและสาระเทคโนโลยีสารสนเทศในกลุ่มสาระการเรียนรู้การงานอาชีพและเทคโนโลยี ตลอดจนจัดทำสื่อการเรียนรู้ตามหลักสูตรดังกล่าว

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ สำหรับระดับมัธยมศึกษาตอนต้น มีด้วยกันทั้งหมด 6 เล่ม จัดทำขึ้นเพื่อให้ผู้เรียนสามารถเรียนรู้และพัฒนาตนเอง นำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปพัฒนาชีวิต และเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตลอดจนศาสตร์อื่นๆ ในระดับที่สูงขึ้น ทั้งนี้สถานศึกษาสามารถปรับใช้เนื้อหาจากหนังสือเรียนทั้ง 6 เล่มนี้ เพื่อจัดการเรียนการสอนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ได้ตามความเหมาะสม

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ประกอบด้วย เรื่อง การเตรียมความพร้อมในการให้เหตุผล พหุนามและการประยุกต์ 2 ซึ่งเป็นเนื้อหาสาระตามมาตรฐานการเรียนรู้ตามที่กำหนดไว้ในหลักสูตร อย่างไรก็ตามผู้สอนสามารถปรับบทเรียนให้เหมาะสมกับศักยภาพของผู้เรียนแต่ละกลุ่ม

การจัดทำหนังสือเรียนคณิตศาสตร์เล่มนี้ สสวท. ได้รับความร่วมมืออย่างดียิ่งจากคณาจารย์ ผู้ทรงคุณวุฒิ นักวิชาการ และครูผู้สอน จากหลายหน่วยงาน ทั้งภาครัฐและเอกชน สสวท. จึงขอขอบคุณทุกท่านไว้ ณ ที่นี้ และหวังเป็นอย่างยิ่งว่าหนังสือเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการศึกษาคณิตศาสตร์ อันเป็นรากฐานสำคัญของการพัฒนาทรัพยากรมนุษย์ของชาติต่อไป

หากมีข้อเสนอแนะใดที่จะทำให้หนังสือเรียนเล่มนี้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น โปรดแจ้งให้สาขาคณิตศาสตร์มัธยมศึกษา สสวท. ทราบด้วย จักขอบคุณยิ่ง

(นางสาวนารี วงศ์สิโรจน์กุล)
รองผู้อำนวยการ รักษาการแทน
ผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

สารบัญ

	หน้า
บทที่ 1 การเตรียมความพร้อมในการให้เหตุผล	**1**
1.1 ข้อความคาดการณ์	1
1.2 ประโยคเงื่อนไข	10
1.3 บทกลับของประโยคเงื่อนไข	13
1.4 การให้เหตุผล	18
บทที่ 2 พหุนาม	**33**
2.1 เอกนาม	33
2.2 การบวกและการลบเอกนาม	37
2.3 พหุนาม	45
2.4 การบวกและการลบพหุนาม	51
2.5 การคูณพหุนาม	61
2.6 การหารพหุนาม	65
บทที่ 3 การประยุกต์ 2	**73**
3.1 แบบรูปของจำนวน	73
3.2 ข่ายงาน	90
3.3 การประยุกต์ของเศษส่วนและทศนิยม	103

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

สารบัญ

	หน้า
บรรณานุกรม	112
ภาคผนวก	114
บัญชีศัพท์	114
บัญชีสัญลักษณ์	116

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

บทที่ 1

การเตรียมความพร้อมในการให้เหตุผล

1.1 ข้อความคาดการณ์

นักเรียนเคยสังเกตหรือไม่ว่า การเรียนรู้ของมนุษย์มักจะเริ่มจากการพบเห็นเหตุการณ์หรือสถานการณ์ที่เกิดขึ้นซ้ำ ๆ กัน แล้วตั้งข้อสรุปเกี่ยวกับเหตุการณ์หรือสถานการณ์นั้นเป็นความรู้ใหม่ และถ้าสามารถแสดงได้ว่าข้อสรุปที่ได้เป็นจริง ก็จะใช้สำหรับอ้างอิงได้ต่อไป

ให้นักเรียนพิจารณากระบวนการ ซึ่งทำให้ได้ข้อสรุปของสถานการณ์โดยใช้ผลจากการสังเกตหรือการทดลอง รวบรวมข้อมูลและค้นหาความสัมพันธ์หรือแบบรูปจากสถานการณ์ต่อไปนี้

สถานการณ์ 1

โรงเรียนก้าวหน้าวิทยาเป็นโรงเรียนประจำตำบลแห่งหนึ่งที่ทำการเกษตรเพื่อโครงการอาหารกลางวัน

นนท์เป็นนักเรียนของโรงเรียนนี้ เขาสังเกตเห็นว่าทุกวันศุกร์ที่ผ่านมา 5 สัปดาห์แล้ว เขาได้รับประทานแกงส้มมะละกอและไข่เจียวเป็นอาหารกลางวัน เขาจึงสรุปว่า *ทุก ๆ วันศุกร์ เขาจะได้รับประทานแกงส้มมะละกอและไข่เจียวเป็นอาหารกลางวัน*

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึ่งกระทำ บ้างไม่พึ่งกระทำ

สถานการณ์ 2

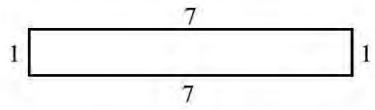
มุกดาสังเกตเห็นว่าในช่วงโรงเรียนเปิดเทอม ครูศจีเพื่อนบ้านที่อยู่ท้ายซอยจะขับรถผ่านบ้านมุกดาไปโรงเรียนทุกเช้าประมาณ 7.00 น. แต่วันนี้สายแล้ว มุกดายังไม่เห็นครูศจีขับรถไปโรงเรียน จึงสรุปว่า *วันนี้เป็นวันที่โรงเรียนหยุด*

สถานการณ์ 3

นทีสังเกตจำนวนที่เรียงตามลำดับ ดังต่อไปนี้ 2, 3, 5, 8, 12, ... และเห็นว่ามีแบบรูปของความสัมพันธ์ดังแผนภาพ $\underset{+1\ +2\ +3\ +4}{2\quad 3\quad 5\quad 8\quad 12}$ นทีจึงสรุปว่า *จำนวนที่ 8 คือ 30*

สถานการณ์ 4

สุดาต้องการสร้างรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากขนาดต่าง ๆ ที่มีความยาวรอบรูปเท่ากับ 16 เซนติเมตร และความยาวของแต่ละด้านเป็นจำนวนเต็มเซนติเมตร เช่น ถ้ากำหนดความกว้างเป็น 1 เซนติเมตร จะได้ความยาว 7 เซนติเมตร ดังรูป



สุดาคำนวณหาพื้นที่พร้อมทั้งบันทึกข้อมูลในตารางไว้ดังนี้

ความกว้าง (เซนติเมตร)	ความยาว (เซนติเมตร)	พื้นที่ (ตารางเซนติเมตร)
1	7	7
2	6	12
3	5	15
4	4	16

หลังจากสุดาลองคำนวณหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ได้ในตาราง สุดาสังเกตว่าเมื่อให้ความกว้างเพิ่มขึ้น พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจะเพิ่มขึ้นด้วย จึงสรุปว่า *พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ได้จะเพิ่มขึ้นเมื่อความกว้างเพิ่มขึ้น*

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

ตัวอย่างสถานการณ์ทั้งสี่ข้างต้น แสดงถึงกระบวนการที่ใช้การสังเกตหรือการทดลองหลาย ๆ ครั้ง แล้วรวบรวมข้อมูลเพื่อหาแบบรูปที่จะนำไปสู่ข้อสรุปซึ่งเชื่อว่า มีความเป็นไปได้มากที่สุด แต่ยังไม่ได้พิสูจน์ว่าเป็นจริง เรียกข้อสรุปนั้นว่า **ข้อความคาดการณ์** และถ้าต้องการยืนยันว่าข้อความคาดการณ์นั้นเป็นจริง ก็ต้องสืบเสาะค้นหาข้อมูลมาสนับสนุนให้มากพอหรือแสดงเหตุผลที่ทำให้ยอมรับได้ว่าข้อความคาดการณ์นั้นเป็นจริง

ให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่างการตรวจสอบข้อความคาดการณ์ของสถานการณ์ทั้งสี่ข้างต้น

สถานการณ์ 1

ถ้านนท์ต้องการทราบว่า ข้อความคาดการณ์ของตนเป็นจริงหรือไม่ นนท์อาจต้องหาข้อมูลเกี่ยวกับรายการอาหารกลางวันของโรงเรียนเพิ่มเติม จากแม่ครัวหรือครูก็ได้

ถ้าแม่ครัวตอบว่า รายการอาหารกลางวันทุกวันศุกร์ โรงเรียนกำหนดไว้เป็นแกงส้มมะละกอและไข่เจียว ข้อความคาดการณ์ของนนท์ก็เป็นจริง แต่ถ้าแม่ครัวตอบว่า รายการอาหารวันศุกร์หน้าจะเป็นข้าวผัดกะเพราไก่และไข่ดาว ข้อความคาดการณ์ของนนท์ก็ไม่เป็นจริง

สถานการณ์ 2

ถ้ามุกดาต้องการทราบว่า ข้อความคาดการณ์ของตนเป็นจริงหรือไม่ มุกดาอาจต้องหาข้อมูลจากครูศจี

สถานการณ์ 3

นทีสามารถตรวจสอบว่า ข้อความคาดการณ์ของตนเป็นจริงหรือไม่ โดยพิจารณาจากแบบรูปที่เขาสังเกตเห็น ซึ่งจะได้ว่าจำนวนที่ 6 คือ $12 + 5 = 17$

จำนวนที่ 7 คือ $17 + 6 = 23$

ดังนั้น จำนวนที่ 8 คือ $23 + 7 = 30$ ดังที่ได้สรุปไว้

สถานการณ์ 4

ถ้าสุดาต้องการตรวจสอบว่า ข้อความคาดการณ์ของตนเป็นจริงหรือไม่ สุดาจะต้องหาความกว้างและความยาวของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากให้ครบทุกขนาด ซึ่งพบว่า เมื่อเพิ่มความกว้างเป็น 5 เซนติเมตร จะได้ความยาวลดลงเป็น 3 เซนติเมตร และพื้นที่ก็ลดลงเป็น 15 ตารางเซนติเมตร ดังนั้นข้อความคาดการณ์ของสุดาจึงไม่เป็นจริง

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

ช่วยกันคิด

ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้

กิจกรรม 1

ต้นและเตยขับรถไปตามถนนรังสิต – นครนายก เขาพบว่าตลอดเส้นทางมีร้านขายก๋วยเตี๋ยวเรือหลายร้านที่เขายังไม่เคยลองรับประทาน

ต้น : เตยเราแวะกินก๋วยเตี๋ยวเรือกันเถอะ
เตย : เอาซิ แล้วร้านไหนล่ะที่อร่อย
ต้น : เอาร้านนั้นไหมล่ะ มีรถจอดหลายคันเลย
เตย : คนกินแน่นร้านด้วย
ต้น : งั้นเลือกร้านนี้ล่ะนะ
เตย : ตกลง

ต้นและเตยมีเหตุผลอย่างไรจึงเลือกรับประทานก๋วยเตี๋ยวร้านนั้น จงอธิบาย

กิจกรรม 2

กุ้งทราบว่า "จำนวนคู่คือ จำนวนเต็มที่หารด้วย 2 ลงตัว" ซึ่งได้แก่ ... -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, ... เมื่อกุ้งนำจำนวนคู่มาลองเขียนในรูปการคูณของ 2 กับจำนวนเต็ม ได้ผลดังตารางข้างล่าง

...	-6	-4	-2	0	2	4	6	...
...	$2 \times (-3)$	$2 \times (-2)$	$2 \times (-1)$	2×0	2×1	2×2	2×3	...

1. นักเรียนคิดว่า จำนวนคู่แต่ละจำนวนสามารถเขียนให้อยู่ในรูปการคูณของ 2 กับจำนวนเต็มจำนวนหนึ่งได้หรือไม่
2. ถ้าให้ n แทนจำนวนเต็มจำนวนหนึ่ง จำนวนในรูป $2n$ เป็นจำนวนคู่หรือไม่
3. ให้นักเรียนเขียนข้อสรุปที่ได้ในข้อ 1 และข้อ 2 เติมในข้อความต่อไปนี้ให้สมบูรณ์

"จำนวนคู่คือจำนวนที่เขียนได้ในรูป ..... เมื่อ n แทนจำนวนเต็มจำนวนหนึ่ง"

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

กิจกรรม 3

ให้นักเรียนสังเกตแบบรูปแล้วเติมจำนวนที่คาดว่าเป็นไปได้มากที่สุดลงในช่องว่างที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1) $1 \cdot 1 = 1$

$11 \cdot 11 = 121$

$111 \cdot 111 = 12321$

$1111 \cdot 1111 = 1234321$

$11111 \cdot 11111 =$ .....

2) $6 \cdot 7 = 42$

$66 \cdot 67 = 4422$

$666 \cdot 667 = 444222$

$6666 \cdot 6667 = 44442222$

$66666 \cdot 66667 =$ .....

3) $(9 \cdot 0) + 1 = 1$

$(9 \cdot 1) + 2 = 11$

$(9 \cdot 2) + 3 = 21$

$(9 \cdot 3) + 4 =$ .....

..... = 41

4) $1 + (9 \cdot 0) = 1$

$2 + (9 \cdot 1) = 11$

$3 + (9 \cdot 12) = 111$

$4 + (9 \cdot 123) =$ .....

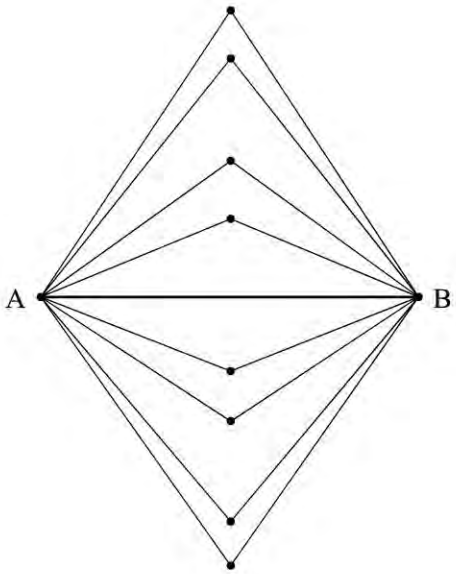
..... = 11111

นักเรียนมีวิธีหาจำนวนในแต่ละข้ออย่างไร จงอธิบาย

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

กิจกรรม 4

ธีระสร้างรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วบนฐาน AB หลาย ๆ รูป โดยให้ด้านประกอบมุมยอดมีความยาวต่าง ๆ กัน ดังตัวอย่าง



ธีระน่าจะสร้างข้อความคาดการณ์เกี่ยวกับจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วทั้งหลายที่มีฐานเดียวกันอย่างไร

แบบฝึกหัด 1.1

1. จงสังเกตแบบรูปและค้นหาความสัมพันธ์ของจำนวนแล้วเขียนข้อความคาดการณ์ในช่องว่างของแต่ละข้อให้สมบูรณ์

   1) $4 + 12 = 16$ $\quad$ $26 + (-20) = 6$

      $(-10) + 8 = -2$ $\quad$ $(-14) + (-24) = -38$

      $0 + 22 = 22$ $\quad$ $(-32) + (-8) = -40$

      ข้อความคาดการณ์ : ผลบวกของจำนวนคู่สองจำนวนเป็น.....

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

2) $3 + 5 = 8$ $(-13) + 17 = 4$

$3 + (-5) = -2$ $29 + 31 = 60$

$(-7) + (-11) = -18$ $35 + (-41) = -6$

ข้อความคาดการณ์ : ผลบวกของจำนวนคี่สองจำนวนเป็น.....

3) $(-3) + 6 = 3$ $9 + 12 = 21$

$11 + (-18) = -7$ $(-22) + (-17) = -39$

$26 + (-13) = 13$ $(-34) + 23 = -11$

ข้อความคาดการณ์ : ผลบวกของจำนวนคู่และจำนวนคี่เป็น.....

4) $6 \times 8 = 48$ $24 \times (-2) = -48$

$(-6) \times (10) = -60$ $0 \times (-84) = 0$

$(-12) \times (-8) = 96$ $(-10) \times 8 = -80$

ข้อความคาดการณ์ : ผลคูณของ.....

5) $(-5) \times (-3) = 15$ $21 \times (-1) = -21$

$7 \times (-11) = -77$ $(-43) \times (-5) = 215$

$(-13) \times 9 = -117$ $37 \times 9 = 333$

ข้อความคาดการณ์ : ผลคูณของ.....

6) $8 \times 9 = 72$ $21 \times (-12) = -252$

$12 \times (-13) = -156$ $(-135) \times 0 = 0$

$(-10) \times (-15) = 150$ $(-29) \times 30 = -870$

ข้อความคาดการณ์ : ผลคูณของ.....

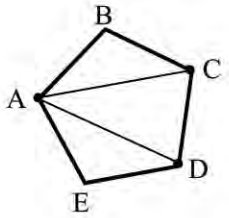
Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

2. นักเรียนทราบมาแล้วว่า จำนวนคี่ ได้แก่ ...-7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, ...
ให้นักเรียนสังเกตแบบรูปแสดงจำนวนคี่ ในแต่ละช่องต่อไปนี้

...	-5	-3	-1	1	3	5	...
...	[2×(-3)]+ 1	[2× (-2)]+1	[2 × (-1)] + 1	[2 × 0] + 1	[2 × 1] + 1	[2 × 2] + 1	...

จงเขียนข้อความคาดการณ์ของแบบรูปแสดงจำนวนคี่ ต่อไปนี้ให้สมบูรณ์
"จำนวนคี่คือจำนวนที่เขียนได้ในรูป.....เมื่อ n แทนจำนวนเต็มจำนวนหนึ่ง"

3. สำหรับรูปห้าเหลี่ยม ABCDE เมื่อลากเส้นทแยงมุมจากจุดยอดจุดหนึ่ง ในที่นี้คือจุดยอด A ไปยังจุดยอดอื่น เพื่อทำให้เกิดรูปสามเหลี่ยม ดังตัวอย่าง จะได้ว่า มีเส้นทแยงมุม 2 เส้น และมีรูปสามเหลี่ยมเกิดขึ้น 3 รูป

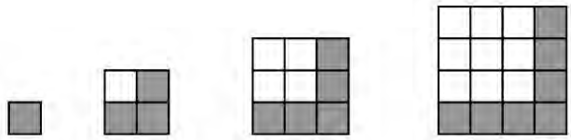


ให้นักเรียนเขียนรูปหลายเหลี่ยมต่างๆและลากเส้นทแยงมุมตามตัวอย่างข้างต้น แล้วเติมจำนวนในตารางให้สมบูรณ์

จำนวนด้านของรูปหลายเหลี่ยม	3	4	5	6	...	20	...	n
จำนวนเส้นทแยงมุม			2		...		...	
จำนวนรูปสามเหลี่ยมที่เกิดจากการลากเส้นทแยงมุม			3		...		...	

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

4. จงพิจารณาหาแบบรูปเพื่อแสดงจำนวนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่แรเงาและพื้นที่ทั้งหมดของรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ และเขียนจำนวนที่ได้ในช่องว่างของตารางข้างล่างนี้



รูปที่ 1 2 3 4

รูปที่	1	2	3	4	…	10	…	n
จำนวนรูปที่แรเงา	1	3	5	7	…		…	
พื้นที่ทั้งหมด	1	4	9	16	…		…	

5. ให้นักเรียนสร้าง $\overline{AB}$ และ $\overline{DC}$ ที่ยาวเท่ากันและขนานกันหลาย ๆ คู่ และแต่ละคู่ให้ลาก $\overline{AD}$ และ $\overline{BC}$ จงเขียนข้อความคาดการณ์ แสดงความเกี่ยวข้องระหว่าง $\overline{AD}$ และ $\overline{BC}$

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

1.2 ประโยคเงื่อนไข

จากที่กล่าวมาแล้วนักเรียนได้เห็นการสรุปข้อความคาดการณ์ แต่ยังไม่มีการยืนยันว่าข้อความคาดการณ์เหล่านั้นเป็นจริง ในทางคณิตศาสตร์จะต้องใช้การพิสูจน์ซึ่งต้องใช้ความรู้เพิ่มเติมบางประการดังจะกล่าวต่อไปนี้

ในชีวิตประจำวันและในวิชาคณิตศาสตร์ นักเรียนอาจพบข้อความต่อไปนี้มาบ้างแล้ว เช่น

1. **ถ้า**แดงอยู่ที่จังหวัดเชียงใหม่ **แล้ว**แดงอยู่ที่ภาคเหนือของประเทศไทย
2. **ถ้า**สมชายขาดเรียนเกิน 20 เปอร์เซ็นต์ **แล้ว**สมชายจะไม่ได้เข้าสอบ
3. **ถ้า** ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก **แล้ว** ΔABC มีมุม ๆ หนึ่งเป็นมุมฉาก
4. **ถ้า**จำนวนเต็มใดหารด้วย 2 ลงตัว **แล้ว**จำนวนนั้นเป็นจำนวนคู่

ข้อความดังกล่าวมีรูปแบบเดียวกันคือ ประกอบด้วยข้อความ 2 ข้อความที่เชื่อมต่อกันด้วย **ถ้า... แล้ว...**

เรียกข้อความในลักษณะเช่นนี้ว่า **ประโยคเงื่อนไข**

เรียกข้อความที่ตามหลัง **ถ้า** ว่า **เหตุ**

เรียกข้อความที่ตามหลัง **แล้ว** ว่า **ผล**

จากประโยคเงื่อนไข *ถ้าแดงอยู่ที่จังหวัดเชียงใหม่ แล้วแดงอยู่ที่ภาคเหนือของประเทศไทย*

ข้อความ *แดงอยู่ที่จังหวัดเชียงใหม่* เป็น **เหตุ**

ข้อความ *แดงอยู่ที่ภาคเหนือของประเทศไทย* เป็น **ผล**

ให้นักเรียนบอกข้อความที่เป็นเหตุและข้อความที่เป็นผลในข้อ 2 – 4 ข้างต้น

ประโยคเงื่อนไขในภาษาไทยที่เราใช้กันอยู่ อาจไม่ปรากฏในรูป ถ้า... แล้ว... เช่น

น้ำเน่า ยุงจึงชุม	ยุงชุมเพราะน้ำเน่า
การที่น้ำเน่าทำให้ยุงชุม	ยุงชุมเกิดจากน้ำเน่า

ข้อความดังกล่าวสามารถเขียนให้อยู่ในรูปประโยค ถ้า... แล้ว... ได้ดังนี้

ถ้าน้ำเน่า แล้วยุงชุม

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

ถ้า... แล้ว...

ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้

1. แต่งประโยคเงื่อนไขที่มีสาระทางคณิตศาสตร์มา 4 ประโยคให้อยู่ในรูป ถ้า... แล้ว...
2. จงเขียนข้อความต่อไปนี้ให้เป็นประโยคใหม่โดยอยู่ในรูป ถ้า... แล้ว...
   1) คนที่ทำงานหนักเป็นคนขยัน
   2) เดือนเมษายนอากาศจะร้อน
   3) มุมภายในของรูปสามเหลี่ยมมีขนาดรวมกันเป็น 180 องศา
   4) รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีมุมภายในแต่ละมุมเป็นมุมฉาก
3. ยกตัวอย่างประโยคเงื่อนไขที่ไม่มีคำว่า ถ้า... แล้ว... มา 2 ประโยค
4. เขียนข้อความในข้อ 3 ให้อยู่ในรูป ถ้า... แล้ว...

ให้นักเรียนพิจารณาข้อความต่อไปนี้

1. *ถ้าใครเกิดเป็นคน แล้วคนนั้นต้องตาย*

ประโยคนี้มี เหตุคือ ใครเกิดเป็นคน

ผลคือ คนนั้นต้องตาย

จะเห็นว่า ถ้าเหตุเป็นจริง คือ ใครก็ตามที่เกิดเป็นคน

จะได้ว่า คนนั้นต้องตายแน่นอน คือ ผลเป็นจริงด้วย

นั่นคือ เมื่อยอมรับว่า เหตุเป็นจริง เหตุนั้นทำให้เกิดผลเป็นจริงเสมอ ประโยคเงื่อนไขในลักษณะเช่นนี้ เป็น **ประโยคที่เป็นจริง**

ตัวอย่างประโยคเงื่อนไขที่เป็นจริงในคณิตศาสตร์ เช่น

ถ้า Δ ABC *เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว แล้ว* Δ ABC *มีด้านยาวเท่ากัน 2 ด้าน*

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

2. *ถ้า* $a > 1$ *แล้ว* $a = 2$ *(เมื่อ* a *แทนจำนวนใดๆ)*

ประโยคนี้มี เหตุคือ $a > 1$

ผลคือ $a = 2$

จะเห็นว่า ถ้าเหตุเป็นจริง คือ $a > 1$ อาจสรุปได้ว่า $a = 1.5$ ก็ได้

ดังนั้น การจะสรุปว่า $a = 2$ จึงไม่เป็นจริงเสมอไป

นั่นคือ เมื่อยอมรับว่าเหตุเป็นจริง เหตุนั้นไม่ทำให้เกิดผลเป็นจริงเสมอไป ประโยคเงื่อนไขในลักษณะเช่นนี้ เป็น **ประโยคที่ไม่เป็นจริง**

3. *ถ้า* p *เป็นจำนวนเฉพาะ แล้ว* p *เป็นจำนวนคี่*

ประโยคนี้มี เหตุคือ p เป็นจำนวนเฉพาะ

ผลคือ p เป็นจำนวนคี่

จะเห็นว่า ถ้าเหตุเป็นจริงคือ p เป็นจำนวนเฉพาะ แล้ว p อาจเป็น $2, 3, 5, 7, \ldots$

จะเห็นว่า p อาจเป็น 2 ซึ่งเป็นจำนวนคู่

ดังนั้น การจะสรุปว่า p เป็นจำนวนคี่ จึงไม่เป็นจริงเสมอไป

นั่นคือ ประโยคเงื่อนไขในลักษณะเช่นนี้ เป็นประโยคที่ไม่เป็นจริง

ให้สังเกตว่าเมื่อมีกรณีแม้เพียงกรณีเดียวที่แสดงว่า ประโยคเงื่อนไขนั้นมีเหตุเป็นจริงและเหตุนั้นไม่ทำให้เกิดผลเป็นจริง ถือว่าประโยคเงื่อนไขนั้นไม่เป็นจริง

สำหรับในชั้นนี้ ประโยคเงื่อนไข ถ้า... แล้ว... จะพิจารณาเฉพาะกรณีต่อไปนี้

1. ประโยคเงื่อนไขเป็นจริง *เมื่อเหตุเป็นจริง แล้วทำให้เกิดผลที่เป็นจริงเสมอ*
หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งว่า *เหตุทำให้เกิดผลที่ระบุไว้เสมอ*

2. ประโยคเงื่อนไขไม่เป็นจริง *เมื่อเหตุที่เป็นจริง แล้วไม่ทำให้เกิดผลที่เป็นจริงเสมอ*
หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งว่า *เหตุไม่ทำให้เกิดผลที่ระบุไว้เสมอ*

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดต่อไปนี้

1. ประโยคเงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริงหรือไม่เป็นจริง เพราะเหตุใด
   1) ถ้า $a^2 = 4$ แล้ว $a = 2$
   2) ถ้า ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า แล้ว ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
   3) ถ้า ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว แล้ว ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า
   4) ถ้า ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก แล้ว ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า
   5) ถ้า 1 เป็น ห.ร.ม. ของ a และ b แล้วทั้ง a และ b ต้องเป็นจำนวนเฉพาะ
2. ให้นักเรียนแต่งประโยคเงื่อนไขในรูป ถ้า... แล้ว... ที่เป็นจริง 2 ประโยค และแต่งประโยคเงื่อนไขในรูป ถ้า... แล้ว... ที่ไม่เป็นจริง 2 ประโยค

1.3 บทกลับของประโยคเงื่อนไข

ให้นักเรียนพิจารณาประโยคต่อไปนี้

"**ถ้า**แดงอยู่ที่จังหวัดเชียงใหม่ **แล้ว**แดงอยู่ที่ภาคเหนือของประเทศไทย"

ให้ P แทนข้อความ *แดงอยู่ที่จังหวัดเชียงใหม่*

Q แทนข้อความ *แดงอยู่ที่ภาคเหนือของประเทศไทย*

สามารถเขียนประโยคข้างต้นได้สั้น ๆ ว่า

"ถ้า P **แล้ว** Q"

ประโยคเงื่อนไขนี้ มี P เป็น**เหตุ** และ Q เป็น**ผล** ถ้าสลับที่ P และ Q ในประโยคนี้จะได้

"ถ้า Q แล้ว **P"**

เรียกประโยค **"ถ้า** Q แล้ว P" ว่า **บทกลับของประโยคเงื่อนไข** "ถ้า P แล้ว Q"

นั่นคือ *ในการเขียนบทกลับของประโยคเงื่อนไขใด ๆ เรานำผลของประโยคนั้นมาเป็นเหตุ และนำเหตุของประโยคนั้นมาเป็นผล*

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึ่งกระทำ บ้างไม่พึ่งกระทำ

ถ้าประโยคเงื่อนไขใดเป็นจริง แล้วบทกลับของประโยคนั้นอาจเป็นจริงหรือไม่เป็นจริงก็ได้ ดังในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 ประโยค : *ถ้าแดงอยู่ที่จังหวัดเชียงใหม่ แล้วแดงอยู่ที่ภาคเหนือของประเทศไทย* **เป็นจริง**

บทกลับ : *ถ้าแดงอยู่ที่ภาคเหนือของประเทศไทย แล้วแดงอยู่ที่จังหวัดเชียงใหม่* **ไม่เป็นจริง**

จะเห็นว่าบทกลับนี้ไม่เป็นจริง เพราะ*การที่แดงอยู่ที่ภาคเหนือของประเทศไทย แดงอาจอยู่ที่จังหวัดเชียงรายก็ได้*

นั่นคือ เหตุที่ว่า *แดงอยู่ที่ภาคเหนือของประเทศไทย* มิได้ทำให้เกิดผลว่า *แดงอยู่ที่จังหวัดเชียงใหม่เสมอไป*

ตัวอย่างที่ 2 ประโยค : *ถ้า* Δ ABC *เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก แล้ว* Δ ABC *จะมีมุม ๆ หนึ่งเป็นมุมฉาก* **เป็นจริง**

บทกลับ : *ถ้า* Δ ABC *มีมุม ๆ หนึ่งเป็นมุมฉาก แล้ว* Δ ABC *จะเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก* **เป็นจริง**

เมื่อเปรียบเทียบบทกลับของตัวอย่างที่ 1 และตัวอย่างที่ 2 จะเห็นว่า บทกลับของตัวอย่างที่ 1 ไม่เป็นจริง แต่บทกลับของตัวอย่างที่ 2 เป็นจริง

ในทางคณิตศาสตร์เมื่อประโยคเงื่อนไขเป็นจริงและมีบทกลับเป็นจริง อาจเขียนเป็นประโยคเดียวกันโดยใช้คำว่า **ก็ต่อเมื่อ** เชื่อมประโยคทั้งสองนั้นได้ เช่น ตัวอย่างที่ 2 ข้างต้นเขียนได้เป็น

"Δ ABC *เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก* ***ก็ต่อเมื่อ*** Δ ABC *มีมุม ๆ หนึ่งเป็นมุมฉาก*"

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

ตัวอย่างที่ 3 ประโยค : *ถ้ารูปสามเหลี่ยมใดเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว แล้วรูปสามเหลี่ยมนั้นมีด้านยาวเท่ากันสองด้าน* **เป็นจริง**

บทกลับ : *ถ้ารูปสามเหลี่ยมใดมีด้านยาวเท่ากันสองด้าน แล้วรูปสามเหลี่ยมนั้นเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว* **เป็นจริง**

จะเห็นว่าประโยคทั้งสองเป็นจริง เขียนเป็นประโยคเดียวกันได้ดังนี้

" รูปสามเหลี่ยมใดเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ***ก็ต่อเมื่อ*** *รูปสามเหลี่ยมนั้นมีด้านยาวเท่ากันสองด้าน "*

โดยทั่วไปในคณิตศาสตร์เมื่อมีประโยคเงื่อนไข "ถ้า P แล้ว Q" เป็นจริง และบทกลับ "ถ้า Q แล้ว P" เป็นจริง เรานิยมเขียนเป็น **"P ก็ต่อเมื่อ Q"** และประโยคนี้เป็นจริง

ในทางกลับกัน เมื่อมีประโยค "P ก็ต่อเมื่อ Q" ก็สามารถนำมาเขียนเป็นประโยคเงื่อนไขในรูป "ถ้า P แล้ว Q" และ "ถ้า Q แล้ว P" และทั้งสองประโยคเป็นจริง เช่น

ทฤษฎีบทที่กล่าวว่า

"เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่นี้ขนานกัน ***ก็ต่อเมื่อ*** *มุมแย้งที่เกิดขึ้นมีขนาดเท่ากัน"*

ทฤษฎีบทนี้สามารถเขียนเป็นประโยคเงื่อนไขและบทกลับ ได้ดังนี้

1. *เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ถ้าเส้นตรงคู่นี้ขนานกัน แล้วมุมแย้งที่เกิดขึ้นมีขนาดเท่ากัน*
2. *เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ถ้ามุมแย้งที่เกิดขึ้นมีขนาดเท่ากัน แล้วเส้นตรงคู่นี้ขนานกัน*

ในคณิตศาสตร์ เมื่อเริ่มต้นกล่าวถึงเนื้อหาสาระใด จะต้องให้ความหมายของคำต่าง ๆ ที่เกี่ยวกับเนื้อหาสาระนั้น ๆ เช่น เมื่อกล่าวถึงตัวประกอบ จำนวนคู่ รังสี มุม ฯลฯ ก็จะให้ความหมายของคำดังกล่าว ข้อความที่กำหนดความหมายที่แน่นอนของคำเรียกว่า **บทนิยาม** เช่น

บทนิยามของจำนวนคู่กล่าวว่า *จำนวนคู่ คือจำนวนเต็มที่หารด้วย 2 ลงตัว*

บทนิยามของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วกล่าวว่า *รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว คือรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาวเท่ากันสองด้าน*

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

ข้อความในบทนิยามทุกบทนิยาม เขียนให้อยู่ในรูป "P ก็ต่อเมื่อ Q" ได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

บทนิยาม *จำนวนคู่ คือ จำนวนเต็มที่หารด้วย 2 ลงตัว*

เขียนในรูป "P ก็ต่อเมื่อ Q" ได้ดังนี้

"จำนวนเต็มใดเป็นจำนวนคู่ ***ก็ต่อเมื่อ*** *จำนวนนั้นหารด้วย 2 ลงตัว"*

เขียนในรูปประโยคเงื่อนไข ถ้า... แล้ว... ได้สองประโยคที่เป็นจริงดังนี้

1. *ถ้าจำนวนเต็มใดเป็นจำนวนคู่ แล้วจำนวนนั้นหารด้วย 2 ลงตัว*
2. *ถ้าจำนวนเต็มใดหารด้วย 2 ลงตัว แล้วจำนวนนั้นเป็นจำนวนคู่*

บทนิยาม *รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาวเท่ากันสองด้าน* เขียนในรูป "P ก็ต่อเมื่อ Q" ได้ดังนี้

"รูปสามเหลี่ยมใดเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ***ก็ต่อเมื่อ*** *รูปสามเหลี่ยมนั้นมีด้านยาวเท่ากันสองด้าน"*

เขียนในรูปประโยคเงื่อนไข ถ้า... แล้ว... ได้สองประโยคที่เป็นจริงดังนี้

1. *ถ้ารูปสามเหลี่ยมใดเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว แล้วรูปสามเหลี่ยมนั้นมีด้านยาวเท่ากันสองด้าน*
2. *ถ้ารูปสามเหลี่ยมใดมีด้านยาวเท่ากันสองด้าน แล้วรูปสามเหลี่ยมนั้นเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว*

จากการตีความบทนิยามข้างต้น ทำให้สามารถนำบทนิยามไปใช้ในการให้เหตุผลเพื่อสรุป เช่น ในกรณีบทนิยามของจำนวนคู่

ถ้าทราบว่า 500 เป็นจำนวนคู่ ก็จะสรุปได้ทันทีว่า *500 หารด้วย 2 ลงตัว*

และ *ถ้าทราบว่า 324 หารด้วย 2 ลงตัว* ก็จะสรุปได้ทันทีว่า *324 เป็นจำนวนคู่*

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

บทกลับ

ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดต่อไปนี้

1. กำหนดประโยคเงื่อนไข *ถ้าเธอออกกำลังกายทุกวัน แล้วเธอจะแข็งแรง* ให้นักเรียนเขียนบทกลับ และให้ตรวจสอบว่าบทกลับนั้น เป็นจริงหรือไม่เป็นจริง

2. ประโยคเงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริงและมีบทกลับเป็นจริง ให้นักเรียนเขียนบทกลับ และเชื่อมประโยคเหล่านั้นด้วย ... ก็ต่อเมื่อ ...
   1) ประโยคเงื่อนไข : *ถ้า* ABCD *เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก แล้ว* ABCD *มีมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก*
   2) ประโยคเงื่อนไข : *ถ้า* $a \times b = 0$ *แล้ว* a *หรือ* b *อย่างน้อยหนึ่งจำนวนต้องเท่ากับ* 0

3. จงแยกประโยค $a > b$ *ก็ต่อเมื่อ* $a = b + c$ *(เมื่อ* a , b *และ* c *เป็นจำนวนนับ)* ออกเป็นสองประโยคที่อยู่ในรูป "ถ้า P แล้ว Q" และบทกลับ "ถ้า Q แล้ว P"

4. ให้นักเรียนเขียนบทนิยามต่อไปนี้ในรูป ... ก็ต่อเมื่อ ...
   1) *จำนวนคี่ คือจำนวนเต็มที่หารด้วย* 2 *ไม่ลงตัว*
   2) *ตัวประกอบของจำนวนนับใด คือจำนวนนับที่หารจำนวนนับนั้นลงตัว*
   3) *เมื่อ* a *แทนจำนวนใด ๆ ที่ไม่ใช่ศูนย์* $a^0 = 1$

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึ่งกระทำ บ้างไม่พึ่งกระทำ

1.4 การให้เหตุผล

การพิสูจน์

ข้อความทางคณิตศาสตร์ส่วนใหญ่อยู่ในรูปประโยคเงื่อนไข ในการพิสูจน์ว่าประโยคเงื่อนไข เป็นจริงหรือไม่นั้น จะต้องใช้เหตุผลเพื่อแสดงว่าเมื่อ**เหตุ**เป็นจริงแล้ว **เหตุ**นั้นทำให้เกิด**ผล**ที่เป็นจริงเสมอหรือไม่โดยใช้ความรู้ต่าง ๆ เช่น บทนิยาม สมบัติเกี่ยวกับจำนวน และสมบัติทางเรขาคณิตมาประกอบ *ถ้าเหตุทำให้เกิดผลที่เป็นจริงเสมอ ก็จะเป็นการพิสูจน์ได้ว่าประโยคเงื่อนไขนั้นเป็นจริง แต่ถ้าเหตุไม่ได้ทำให้เกิดผลที่เป็นจริงเสมอ ก็จะเป็นการพิสูจน์ได้ว่าประโยคเงื่อนไขนั้นไม่เป็นจริง*

ตัวอย่างที่ 1 จงพิสูจน์ว่า *รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว*

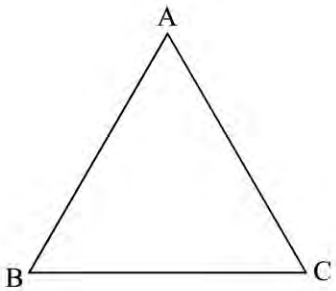
แนวคิดในการพิสูจน์ ข้อความที่จะต้องพิสูจน์เขียนในรูปประโยคเงื่อนไขได้ว่า

ถ้า*รูปสามเหลี่ยมใดเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า* ***แล้ว****รูปสามเหลี่ยมนั้นเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว*

ในการพิสูจน์ข้อความนี้ อาจให้ ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปหนึ่ง ซึ่งเป็นตัวแทนของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าใด ๆ แล้วพิสูจน์ว่า ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว โดยใช้**บทนิยามของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า** ซึ่งกล่าวว่า *รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าคือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาวเท่ากันสามด้าน* และ**บทนิยามของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว** ซึ่งกล่าวว่า *รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วคือรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาวเท่ากันสองด้าน*

จากแนวคิดในการพิสูจน์ เขียนการพิสูจน์ได้ดังนี้

กำหนดให้ ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า



Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

ต้องการพิสูจน์ว่า Δ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

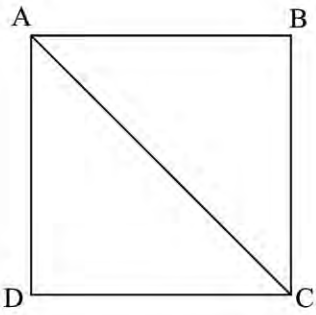
พิสูจน์ เนื่องจาก Δ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า (กำหนดให้)

ดังนั้น AB = BC = CA (บทนิยามของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า)

เนื่องจาก BC = CA

ดังนั้น ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว (บทนิยามของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว)

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส จงพิสูจน์ว่า Δ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว



แนวคิดในการพิสูจน์ ตัวอย่างนี้ต้องการให้พิสูจน์ว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

ถ้า ABCD *เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส แล้ว* Δ ABC *เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว*

ในการพิสูจน์จะใช้ **บทนิยามของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส** ซึ่งกล่าวว่า*รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส คือ รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านยาวเท่ากันสี่ด้าน* และใช้**บทนิยามของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว**

จากแนวคิดในการพิสูจน์ เขียนการพิสูจน์ได้ดังนี้

กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

ต้องการพิสูจน์ว่า Δ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

พิสูจน์ เนื่องจาก ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส (กำหนดให้)

จะได้ว่า AB = BC (บทนิยามของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส)

ทำให้ $\overline{AB}$ และ $\overline{BC}$ เป็นด้านที่ยาวเท่ากันของ ΔABC

ดังนั้น ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว (บทนิยามของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว)

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึ่งกระทำ บ้างไม่พึ่งกระทำ

ตัวอย่างที่ 3 จากรูป กำหนดให้ B เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AC}$ และ C เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{BD}$ จงพิสูจน์ว่า AB = CD

แนวคิดในการพิสูจน์ ตัวอย่างนี้ต้องการให้พิสูจน์ว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

ถ้า B *เป็นจุดกึ่งกลางของ* $\overline{AC}$ *และ* C *เป็นจุดกึ่งกลางของ* $\overline{BD}$ *แล้ว* AB = CD

ในการพิสูจน์จะใช้ **สมบัติของจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง** ซึ่งกล่าวว่า *จุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรงใด คือ จุดบนส่วนของเส้นตรงที่แบ่งส่วนของเส้นตรงนั้นออกเป็นสองส่วนที่ยาวเท่ากัน* และใช้**สมบัติของการเท่ากัน**

จากแนวคิดในการพิสูจน์ เขียนการพิสูจน์ได้ดังนี้

กำหนดให้ B เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AC}$ และ C เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{BD}$

ต้องการพิสูจน์ว่า AB = CD

พิสูจน์ เนื่องจาก B เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AC}$

ดังนั้น AB = BC (สมบัติของจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง)

เนื่องจาก C เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{BD}$

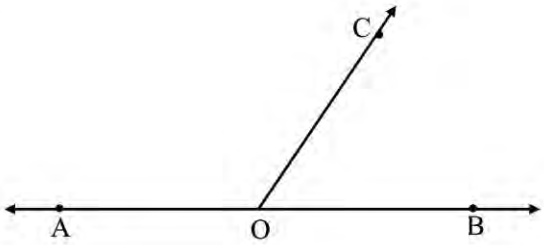
ดังนั้น BC = CD (สมบัติของจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง)

จาก AB = BC และ BC = CD

จะได้ AB = CD (สมบัติของการเท่ากัน)

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

ให้นักเรียนพิจารณารูปต่อไปนี้



จากรูป $\overrightarrow{OC}$ พบกับ $\overleftrightarrow{AB}$ ที่จุด O ทำให้เกิดมุมประชิดซึ่งได้แก่ $A\hat{O}C$ และ $C\hat{O}B$ ที่มีจุด O เป็นจุดยอดมุมเดียวกันและ $\overrightarrow{OC}$ เป็นแขนร่วมของมุม

เนื่องจาก $A\hat{O}B$ เป็นมุมตรง ดังนั้น $A\hat{O}B = 180^\circ$

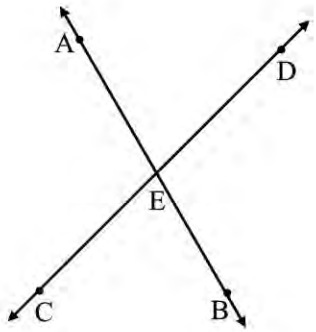
และเนื่องจาก $A\hat{O}C + C\hat{O}B = A\hat{O}B$

ดังนั้น $A\hat{O}C + C\hat{O}B = 180^\circ$

การสรุปข้างต้นเป็นการพิสูจน์**ทฤษฎีบท**ซึ่งกล่าวว่า *"ส่วนของเส้นตรงเส้นหนึ่งตั้งอยู่บนเส้นตรงอีกเส้นหนึ่งทำให้เกิดมุมประชิดที่มีขนาดของมุมรวมกันเท่ากับสองมุมฉาก"*

นักเรียนเคยทำแบบฝึกหัดหาขนาดของมุมตรงข้ามที่เกิดจาก $\overleftrightarrow{AB}$ ตัดกับ $\overleftrightarrow{CD}$ ที่จุด E มาแล้ว จากการตรวจสอบด้วยการวัด นักเรียนพบว่ามุมตรงข้ามที่เกิดขึ้นมีขนาดเท่ากัน ข้อสรุปนี้สามารถพิสูจน์ได้ดังในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 4 จงพิสูจน์ว่า ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกัน แล้วมุมตรงข้ามที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากัน



Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึ่งกระทำ บ้างไม่พึ่งกระทำ

แนวคิดในการพิสูจน์ ตัวอย่างนี้ต้องการให้พิสูจน์ว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

ถ้า $\overleftrightarrow{AB}$ *ตัดกับ* $\overleftrightarrow{CD}$ *ที่จุด* E *แล้ว* $B\hat{E}D = A\hat{E}C$ *และ* $A\hat{E}D = B\hat{E}C$

ในการพิสูจน์จะใช้**ทฤษฎีบท**ซึ่งกล่าวว่า *ส่วนของเส้นตรงเส้นหนึ่งตั้งอยู่บนเส้นตรงอีกเส้นหนึ่งทำให้เกิดมุมประชิดที่มีขนาดรวมกันเท่ากับสองมุมฉาก* และใช้**สมบัติของการเท่ากัน**

จากแนวคิดในการพิสูจน์ เขียนการพิสูจน์ได้ดังนี้

กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB}$ ตัดกับ $\overleftrightarrow{CD}$ ที่จุด E

ต้องการพิสูจน์ว่า $B\hat{E}D = A\hat{E}C$ และ $A\hat{E}D = B\hat{E}C$

พิสูจน์ เนื่องจาก $\overline{ED}$ พบกับ $\overleftrightarrow{AB}$ ที่จุด E

จะได้ $A\hat{E}D + B\hat{E}D = 180^\circ$ (ทฤษฎีบท : ส่วนของเส้นตรงเส้นหนึ่งตั้งอยู่บนเส้นตรงอีกเส้นหนึ่ง ทำให้เกิดมุมประชิดที่มีขนาดของมุมรวมกันเท่ากับสองมุมฉาก)

ทำนองเดียวกัน เนื่องจาก $\overline{EA}$ พบกับ $\overleftrightarrow{CD}$ ที่จุด E

จะได้ $A\hat{E}D + A\hat{E}C = 180^\circ$

ดังนั้น $A\hat{E}D + B\hat{E}D = A\hat{E}D + A\hat{E}C$ (สมบัติของการเท่ากัน)

นำ $A\hat{E}D$ มาลบทั้งสองข้างของสมการ

จะได้ $B\hat{E}D = A\hat{E}C$

ในทำนองเดียวกันจะพิสูจน์ได้ว่า $A\hat{E}D = B\hat{E}C$

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

ตัวอย่างที่ 5 จงพิสูจน์ว่า ผลคูณของ 5 กับจำนวนคู่ เป็นจำนวนคู่

แนวคิดในการพิสูจน์

ในการให้เหตุผลต้องใช้**บทนิยามของจำนวนคู่**ที่กล่าวว่า *จำนวนคู่ คือ จำนวนเต็มที่หารด้วย 2 ลงตัว* จึงสามารถเขียน*จำนวนคู่ใด ๆ ให้อยู่ในรูปของ* 2n *เมื่อ* n *แทนจำนวนเต็มจำนวนหนึ่ง* และใช้**สมบัติการสลับที่ สมบัติการเปลี่ยนหมู่สำหรับการคูณจำนวนเต็ม**และ**สมบัติของจำนวนเต็ม** ที่กล่าวว่า *ผลคูณของจำนวนเต็มเป็นจำนวนเต็ม*

จากแนวคิดในการพิสูจน์ เขียนการพิสูจน์ได้ดังนี้

กำหนดให้ 2n เป็นจำนวนคู่ เมื่อ n แทนจำนวนเต็มจำนวนหนึ่ง

ต้องการพิสูจน์ว่า $5 \times 2n$ เป็นจำนวนคู่

พิสูจน์ เนื่องจาก $5 \times 2n = 5 \times (2 \times n)$

$= (5 \times 2) \times n$ (สมบัติการเปลี่ยนหมู่)

$= (2 \times 5) \times n$ (สมบัติการสลับที่สำหรับการคูณ)

$= 2 \times (5 \times n)$ (สมบัติการเปลี่ยนหมู่)

$= 2 \times 5n$

เนื่องจาก 5n เป็นจำนวนเต็ม (สมบัติของจำนวนเต็ม)

ดังนั้น $2 \times 5n$ เป็นจำนวนคู่

นั่นคือ $5 \times 2n$ เป็นจำนวนคู่

ที่กล่าวมาแล้วข้างต้น เป็นการให้เหตุผลเพื่อพิสูจน์ว่า ข้อความเป็นจริง แต่ถ้าต้องการจะพิสูจน์ว่า ข้อความใด**ไม่เป็นจริง** เรามีวิธีง่าย ๆ คือ ยกตัวอย่างหรือยกกรณี**อย่างน้อยหนึ่งตัวอย่างหรือหนึ่งกรณี**ที่แสดงว่า ข้อความนั้นไม่เป็นจริง เมื่อข้อความนั้นอยู่ในรูป ถ้า P แล้ว Q ก็ต้องยกกรณีที่ P เป็นจริงแต่ Q ไม่เป็นจริง ซึ่งก็คือ การยกตัวอย่างให้เห็นว่า P ไม่ได้ทำให้เกิด Q เสมอ เราเรียกการพิสูจน์โดยยกตัวอย่างเช่นนี้ว่า **การพิสูจน์โดยใช้ตัวอย่างค้าน** ดังตัวอย่างต่อไปนี้

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

ตัวอย่างที่ 6 จงพิสูจน์ว่าข้อความต่อไปนี้***ไม่เป็นจริง***

ถ้า $x^2 = 4$ *แล้ว* $x = 2$

แนวคิดในการพิสูจน์ จากประโยคเงื่อนไข *ถ้า* $x^2 = 4$ *แล้ว* $x = 2$

เหตุคือ $x^2 = 4$ ผลคือ $x = 2$

เราจะต้องหาค่า x ที่ทำให้ เหตุเป็นจริงแต่ผลไม่เป็นจริง นั่นคือ จะต้องหาค่า x ที่ทำให้ $x^2 = 4$ จริง แต่ $x = 2$ ไม่เป็นจริง

จากแนวคิดในการพิสูจน์ เขียนการพิสูจน์ได้ดังนี้

พิสูจน์ เนื่องจาก $(-2)^2 = (-2) \times (-2) = 4$

ดังนั้นมี $x = -2$ ที่ทำให้เหตุ $x^2 = 4$ เป็นจริง แต่ผล $x = 2$ ไม่เป็นจริง

นั่นคือ ข้อความ *ถ้า* $x^2 = 4$ *แล้ว* $x = 2$ ไม่เป็นจริงเสมอไป

ดังนั้นข้อความ นี้ ไม่เป็นจริง

ตัวอย่างที่ 7 จงพิสูจน์ว่าข้อความต่อไปนี้***ไม่เป็นจริง***

รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

แนวคิดในการพิสูจน์ จะต้องหารูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ไม่ใช่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

จากแนวคิดในการพิสูจน์ เขียนการพิสูจน์ได้ดังนี้

พิสูจน์ เนื่องจากมีรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส รูปนั้นคือ รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

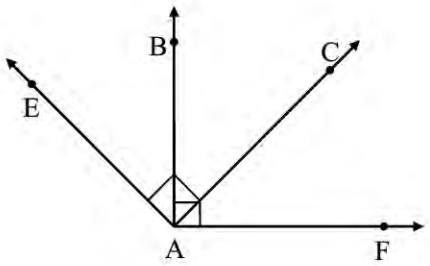
ดังนั้น ข้อความที่กล่าวว่า*รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส* ไม่เป็นจริงเสมอไป

นั่นคือ ข้อความนี้ไม่เป็นจริง

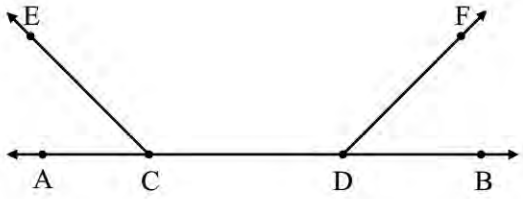
Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

แบบฝึกหัด 1.4

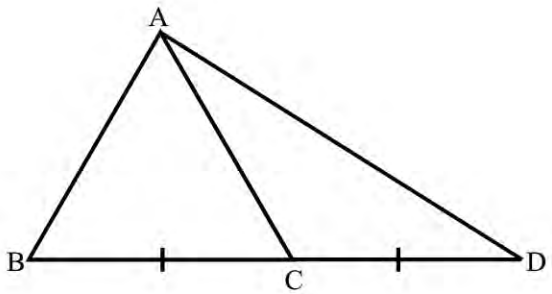
1. จงพิสูจน์ว่า *ผลคูณของ 2 กับจำนวนคี่เป็นจำนวนคู่*
2. กำหนดให้ $E\hat{A}C$ และ $B\hat{A}F$ เป็นมุมฉาก จงพิสูจน์ว่า $E\hat{A}B = C\hat{A}F$



3. กำหนดจุด C และจุด D บน $\overleftrightarrow{AB}$ สร้าง $A\hat{C}E$ และ $B\hat{D}F$ ให้มีขนาดเท่ากัน จงพิสูจน์ว่า $B\hat{C}E = A\hat{D}F$



4. กำหนด ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ต่อ $\overline{BC}$ ออกไปถึง D จงพิสูจน์ว่า ถ้า $BC = CD$ แล้ว ΔACD เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว



Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

5. จงพิสูจน์ว่า ข้อความต่อไปนี้**ไม่เป็นจริง**

   1) 3 หารจำนวนคี่ใด ๆ ลงตัว

   2) เส้นแบ่งครึ่งมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ย่อมแบ่งครึ่งฐาน

ข้อความคาดการณ์กับการพิสูจน์

ในหัวข้อ 1.1 นักเรียนได้เห็นตัวอย่างข้อความคาดการณ์ที่ยังไม่ได้พิสูจน์ว่าเป็นจริง ในหัวข้อนี้นักเรียนจะได้ทำกิจกรรมสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ว่าข้อความคาดการณ์นั้น ๆ เป็นจริงเพื่อจะได้นำไปใช้เป็นความรู้ในการอ้างอิงต่อไป

ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้

กิจกรรม 1

1.1 สำรวจหาข้อความคาดการณ์

1. เขียน $\overline{AB}$ ให้ยาวพอสมควร
2. ต่อ $\overline{AB}$ ออกไปทั้งสองข้าง ให้ AC = BD
3. วัดความยาวของ $\overline{BC}$ เปรียบเทียบกับความยาวของ $\overline{AD}$
4. ให้นักเรียนกำหนดความยาวของ $\overline{AB}$ ต่าง ๆ กันอีก 3 รูป แล้วทำกิจกรรมตามข้อ 2 และข้อ 3
5. ให้นักเรียนเขียนข้อความคาดการณ์ต่อไปนี้ให้สมบูรณ์

ข้อความคาดการณ์ : ถ้าต่อ $\overline{AB}$ ออกไปทั้งสองข้างโดยให้ AC = BD แล้ว .....

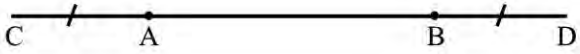
Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

1.2 พิสูจน์ข้อความคาดการณ์

ให้นักเรียนพิจารณาการพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

ถ้าต่อ $\overline{AB}$ *ออกไปทั้งสองข้างโดยให้* $AC = BD$ *แล้ว* $BC = AD$

กำหนดให้ ส่วนของเส้นตรง AB ต่อ $\overline{AB}$ ออกไปทั้งสองข้าง ให้ $AC = BD$



ต้องการพิสูจน์ว่า $BC = AD$

พิสูจน์ เนื่องจาก $AC = BD$ (กำหนดให้)

และ $BA = AB$ (ส่วนของเส้นตรงเดียวกัน)

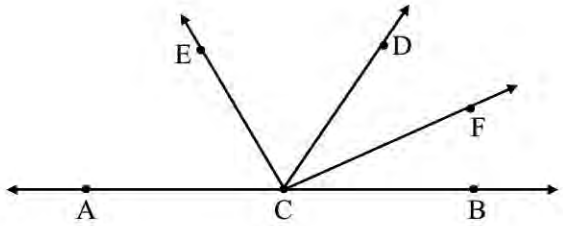
ดังนั้น $BA + AC = AB + BD$ (สมบัติของการเท่ากันสำหรับการบวก)

นั่นคือ $BC = AD$ (จุด A, B, C และ D อยู่บนส่วนของเส้นตรงเดียวกัน)

กิจกรรม 2

2.1 สำรวจหาข้อความคาดการณ์

กำหนดให้ C เป็นจุดบน $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{CD}$ ทำให้เกิด $A\hat{C}D$ และ $B\hat{C}D$ เป็นมุมประชิด ที่ $A\hat{C}D + B\hat{C}D = 180^{\circ}$



1. สร้าง $\overrightarrow{CE}$ แบ่งครึ่ง $A\hat{C}D$ และ $\overrightarrow{CF}$ แบ่งครึ่ง $B\hat{C}D$
2. วัดขนาดของ $E\hat{C}F$ ของรูปในข้อ 1
3. ให้นักเรียนสร้าง $A\hat{C}D$ และ $B\hat{C}D$ เป็นมุมประชิดที่มีขนาดต่าง ๆ กันอีก 3 รูป โดยที่ $A\hat{C}D + B\hat{C}D = 180^{\circ}$ แล้วดำเนินกิจกรรมตามข้อ 1 และข้อ 2 สังเกตผลที่ได้ในแต่ละรูป

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึ่งกระทำ บ้างไม่พึ่งกระทำ

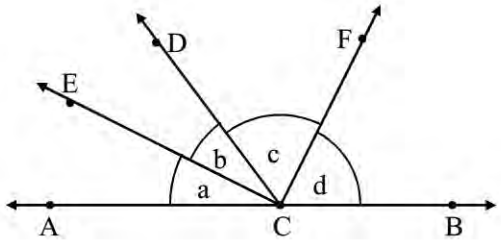
4. จากการสังเกตผลที่ได้ ให้เขียนข้อความคาดการณ์
5. ลองสำรวจข้อความคาดการณ์ของนักเรียนกับของเพื่อน ๆ ว่าเหมือนกันหรือไม่

2.2 พิสูจน์ผลข้อความคาดการณ์

ให้นักเรียนพิจารณาการพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

เส้นตรงที่แบ่งครึ่งมุมประชิดที่มีผลบวกของขนาดของมุมเป็น 180° จะตั้งฉากกัน

กำหนดให้ $A\hat{C}D$ และ $B\hat{C}D$ เป็นมุมประชิดที่ $A\hat{C}D + B\hat{C}D = 180^\circ$
$\overrightarrow{CE}$ และ $\overrightarrow{CF}$ เป็นเส้นแบ่งครึ่ง $A\hat{C}D$ และ $B\hat{C}D$ ตามลำดับ
ให้ a, b, c และ d แทน $A\hat{C}E$, $E\hat{C}D$, $D\hat{C}F$ และ $F\hat{C}B$ ตามลำดับ
ดังรูป



ต้องการพิสูจน์ว่า $\overrightarrow{CE}$ ตั้งฉากกับ $\overrightarrow{CF}$

พิสูจน์

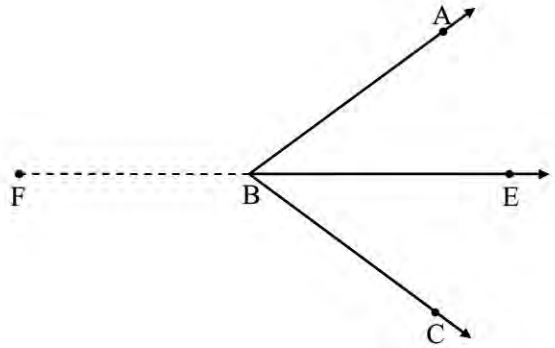
1. เนื่องจาก $\overrightarrow{CE}$ แบ่งครึ่ง $A\hat{C}D$ จะได้ $a = b$ (กำหนดให้)
2. ดังนั้น $a + b = 2b$ (สมบัติของการเท่ากัน)
3. เนื่องจาก $\overrightarrow{CF}$ แบ่งครึ่ง $B\hat{C}D$ จะได้ $d = c$ (กำหนดให้)
4. ดังนั้น $c + d = 2c$ (สมบัติของการเท่ากัน)
5. เนื่องจาก $(a + b) + (c + d) = 180$ (กำหนดให้)
6. ดังนั้น $2b + 2c = 180$ (สมบัติของการเท่ากัน)
7. จะได้ $b + c = 90$ (สมบัติของการเท่ากัน)
8. ดังนั้น $E\hat{C}F = 90^\circ$ ($E\hat{C}F = b + c$)
9. นั่นคือ $\overrightarrow{CE}$ ตั้งฉากกับ $\overrightarrow{CF}$

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

ค้นหาความรู้

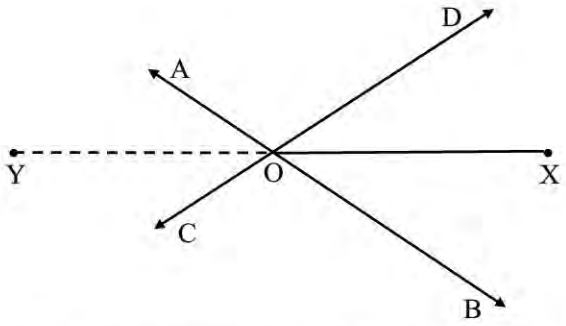
ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้

1. กำหนด $A\hat{B}C$ สร้าง $\overrightarrow{BE}$ แบ่งครึ่ง $A\hat{B}C$ และต่อ $\overline{EB}$ ไปทาง B ถึงจุด F ดังรูป



จงสำรวจขนาดของ $A\hat{B}F$ และขนาดของ $C\hat{B}F$ เมื่อกำหนดให้ $A\hat{B}C$ มีขนาดต่าง ๆ กัน แล้วเขียนข้อความคาดการณ์เกี่ยวกับเส้นแบ่งครึ่งมุมและมุมกลับของมุมนั้น พร้อมทั้งพิสูจน์ข้อความคาดการณ์นั้น

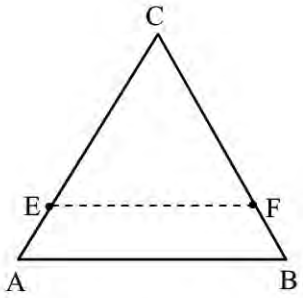
2. กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB}$ ตัดกับ $\overleftrightarrow{CD}$ ที่จุด O สร้าง $\overrightarrow{OX}$ แบ่งครึ่ง $B\hat{O}D$ และต่อ $\overline{XO}$ ไปทาง O ถึงจุด Y ดังรูป



จงสำรวจขนาดของ $A\hat{O}Y$ และขนาดของ $C\hat{O}Y$ เมื่อกำหนดให้ $B\hat{O}D$ มีขนาดต่าง ๆ กัน แล้วเขียนข้อความคาดการณ์เกี่ยวกับเส้นแบ่งครึ่งมุมและมุมตรงข้ามของมุมนั้น พร้อมทั้งพิสูจน์ข้อความคาดการณ์นั้น

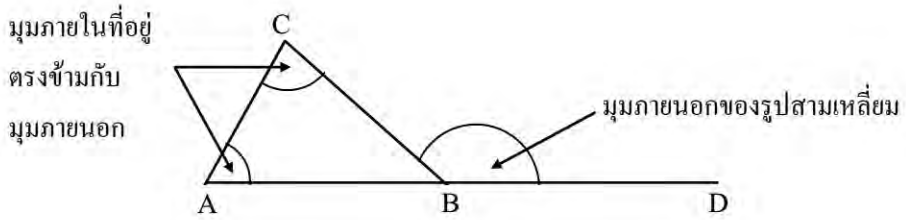
Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึ่งกระทำ บ้างไม่พึ่งกระทำ

3. กำหนดให้ ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มี $\overline{AB}$ เป็นฐาน E และ F เป็นจุดใด ๆ บน $\overline{AC}$ และ $\overline{BC}$ ตามลำดับ ซึ่งทำให้ AE = BF



จงสำรวจว่า ΔCEF เป็นรูปสามเหลี่ยมชนิดใด เมื่อขนาดของ ΔABC เปลี่ยนไป แล้วเขียนข้อความคาดการณ์เกี่ยวกับชนิดของ ΔCEF พร้อมทั้งพิสูจน์ข้อความคาดการณ์นั้น

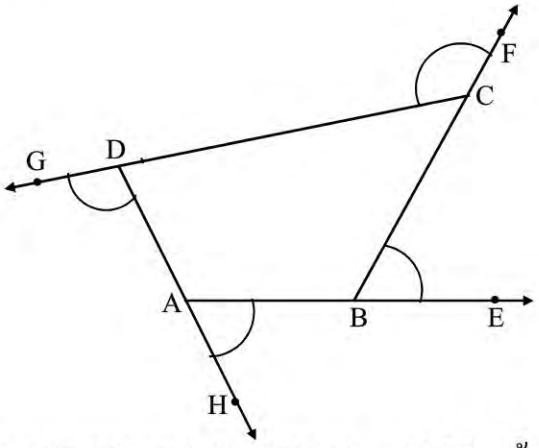
4. กำหนด ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ต่อ $\overline{AB}$ ไปทาง B ถึงจุด D ดังรูป



จงสำรวจขนาดของมุมภายนอกกับขนาดของมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามกับมุมภายนอกนั้น แล้วเขียนข้อความคาดการณ์เกี่ยวกับมุมภายนอกและมุมภายในของรูปสามเหลี่ยม พร้อมทั้งพิสูจน์ข้อความคาดการณ์นั้น

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

5. กำหนด ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ต่อ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ และ $\overline{DA}$ ไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา ดังรูป จะได้ $E\hat{B}C$, $F\hat{C}D$, $G\hat{D}A$ และ $H\hat{A}B$ เป็นมุมภายนอกของ ABCD



จงสำรวจผลบวกของขนาดของมุมภายนอกของ ABCD แล้วเขียนข้อความคาดการณ์เกี่ยวกับผลบวกของขนาดของมุมภายนอกของรูปสี่เหลี่ยม พร้อมทั้งพิสูจน์ข้อความคาดการณ์นั้น

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

ข้อความคาดการณ์ของโกลบัค

$8 = 3 + 5$

$4 = 2 + 2$

$9 =$

คริสเตียน โกลบัค (Christian Goldbach) นักคณิตศาสตร์ชาวรัสเซียซึ่งมีชีวิตอยู่ในช่วงปี ค.ศ. 1690 – 1764 เป็นผู้ให้ข้อความคาดการณ์ว่า

"จำนวนคู่ทุกจำนวนที่มากกว่า 2 เขียนให้อยู่ในรูปการบวกกันของจำนวนเฉพาะสองจำนวนได้เสมอ และจำนวนคี่ทุกจำนวนที่มากกว่า 7 เขียนให้อยู่ในรูปการบวกกันของจำนวนเฉพาะที่เป็นจำนวนคี่สามจำนวนได้เสมอ"

เช่น $4 = 2 + 2$ $9 = 3 + 3 + 3$

$8 = 3 + 5$ $17 = 3 + 3 + 11$

1. ให้นักเรียนเขียนจำนวนคู่ที่มากกว่า 2 สิบจำนวน ให้อยู่ในรูปการบวกกันของจำนวนเฉพาะสองจำนวน

2. ให้นักเรียนเขียนจำนวนคี่ที่มากกว่า 7 สิบจำนวน ให้อยู่ในรูปการบวกกันของจำนวนเฉพาะที่เป็นจำนวนคี่สามจำนวน

นับจนถึงปัจจุบันนี้ก็ยังไม่มีใครพิสูจน์ได้ว่า ข้อความคาดการณ์ของโกลบัคนี้เป็นจริง แต่ก็ยังไม่มีตัวอย่างที่แสดงว่าข้อความดังกล่าวไม่เป็นจริง เราจึงถือว่าข้อความคาดการณ์ของโกลบัคยังคงเป็นข้อความคาดการณ์อยู่ต่อไป

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

บทที่ 2

พหุนาม

2.1 เอกนาม

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

1. 6 คูณกับจำนวนจำนวนหนึ่ง
2. จำนวนจำนวนหนึ่งคูณกับ $-\frac{3}{2}$
3. 4 คูณกับกำลังสองของจำนวนจำนวนหนึ่ง
4. กำลังสองของจำนวนจำนวนหนึ่งคูณกับ $-\frac{9}{10}$

ข้อความในข้อ 1, 2, 3 และ 4 นี้ไม่ได้ระบุว่าจำนวนจำนวนหนึ่งที่กล่าวถึงนั้นเป็นจำนวนใด นิยมใช้ตัวอักษรภาษาอังกฤษเช่น x แทนจำนวนนั้น และเขียนข้อความทั้งสี่ข้างต้นในรูปสัญลักษณ์ได้ดังนี้

1. 6 คูณกับจำนวนจำนวนหนึ่ง เขียนในรูปสัญลักษณ์ได้เป็น

   $6 \times x$ หรือ $x \times 6$ หรือ $6x$

2. จำนวนจำนวนหนึ่งคูณกับ $-\frac{3}{2}$ เขียนในรูปสัญลักษณ์ได้เป็น

   $x \times \left(-\frac{3}{2}\right)$ หรือ $\left(-\frac{3}{2}\right) \times x$ หรือ $-\frac{3}{2}x$

3. 4 คูณกับกำลังสองของจำนวนจำนวนหนึ่ง เขียนในรูปสัญลักษณ์ได้เป็น

   $4 \times x^2$ หรือ $x^2 \times 4$ หรือ $4x^2$

4. กำลังสองของจำนวนจำนวนหนึ่งคูณกับ $-\frac{9}{10}$ เขียนในรูปสัญลักษณ์ได้เป็น

   $x^2 \times \left(-\frac{9}{10}\right)$ หรือ $\left(-\frac{9}{10}\right) \times x^2$ หรือ $-\frac{9}{10}x^2$

ข้อความที่เขียนอยู่ในรูปสัญลักษณ์ข้างต้นประกอบด้วยตัวเลขและตัวอักษร เรียกตัวเลขว่า **ค่าคงตัว** และเรียกตัวอักษรว่า **ตัวแปร** เช่น

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

$6x$ มี 6 เป็นค่าคงตัว และ x เป็นตัวแปร

$-\frac{9}{10}x^2$ มี $-\frac{9}{10}$ เป็นค่าคงตัว และ x เป็นตัวแปร

ถ้าให้ x และ y เป็นตัวแปร ข้อความที่เขียนอยู่ในรูปสัญลักษณ์เช่น 3, 7^2, $2x$, $x+4$, $\frac{x}{5}$, $x-7$, x^8, $\frac{x+2}{3x-1}$, $x+y-6$ เรียกว่า **นิพจน์**

สำหรับตัวแปรต่าง ๆ ที่จะกล่าวถึงในนิพจน์ต่อไปนี้ หมายถึงตัวแปรที่ใช้แทนจำนวนเท่านั้น

ในทางคณิตศาสตร์ นอกจากใช้ x เป็นตัวแปรแล้ว อาจใช้ตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวอื่น ๆ เช่น y, z, s, t เป็นตัวแปรด้วย

เราสามารถเขียนการคูณระหว่างค่าคงตัวและตัวแปรหลาย ๆ ตัวได้หลายแบบ เช่น $(-5)\times x\times x\times y$ เขียนในรูป $(-5)\cdot x\cdot x\cdot y$ หรือ $(-5)\cdot x^2\cdot y$ หรือ $(-5)(x^2)(y)$ หรือ $-5x^2y$ แต่นิยมเขียนในรูป $-5x^2y$ ซึ่งเป็นรูปที่สั้นและกะทัดรัด

การเขียนการคูณระหว่างค่าคงตัวและตัวแปร นิยมเขียนดังนี้

1. กรณีที่มีค่าคงตัวมากกว่าหนึ่งตัว ให้หาผลคูณของค่าคงตัวก่อน แล้วจึงเขียนในรูปการคูณระหว่างค่าคงตัวกับตัวแปร และเขียนค่าคงตัวไว้หน้าตัวแปร เช่น

$2\times 3\times 4\times x$ เขียนเป็น $24x$

2. กรณีที่มีตัวแปรหลายตัว ให้เขียนเรียงตามลำดับตัวอักษรโดยเขียนเรียงชิดกันและใช้สัญลักษณ์เลขยกกำลังในกรณีที่เป็นไปได้ เช่น

$\frac{7}{5}\times x\times x\times y$ เขียนเป็น $\frac{7}{5}x^2y$

$3\times x\times y\times x\times y\times z\times 4$ เขียนเป็น $12x^2y^2z$

3. กรณีที่ค่าคงตัวเป็น 1 ไม่ต้องเขียน ถ้าค่าคงตัวเป็น -1 ให้เขียนเฉพาะเครื่องหมายลบหน้าตัวแปรทั้งหมด เช่น

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

$1 \times x \times y$ เขียนเป็น xy

$(-1) \times y \times z \times x$ เขียนเป็น $-xyz$

นิพจน์ที่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปการคูณของค่าคงตัวกับตัวแปรตั้งแต่หนึ่งตัวขึ้นไป และเลขชี้กำลังของตัวแปรแต่ละตัวเป็นศูนย์หรือจำนวนเต็มบวกเรียกว่า **เอกนาม**

ตัวอย่างของเอกนาม

$2x$, $-3z^7$, $\frac{1}{5}xy^3$, 8 , 0

$2x$ มี 2 เป็นค่าคงตัว x เป็นตัวแปรที่มีเลขชี้กำลังเป็น 1

$-3z^7$ มี -3 เป็นค่าคงตัว z เป็นตัวแปรที่มีเลขชี้กำลังเป็น 7

$\frac{1}{5}xy^3$ มี $\frac{1}{5}$ เป็นค่าคงตัว x เป็นตัวแปรที่มีเลขชี้กำลังเป็น 1 และ y เป็นตัวแปรที่มีเลขชี้กำลังเป็น 3

8 เป็นเอกนามเพราะสามารถเขียน 8 ได้เป็น $8 \cdot x^0$ มี 8 เป็นค่าคงตัว x เป็นตัวแปรที่มีเลขชี้กำลังเป็น 0

0 เป็นเอกนามเพราะสามารถเขียน 0 ได้เป็น $0 \cdot x^0$ มี 0 เป็นค่าคงตัว x เป็นตัวแปรที่มีเลขชี้กำลังเป็น 0

นิพจน์ต่อไปนี้ไม่เป็นเอกนาม

$7x^{-1}$, $\frac{4x}{y}$, $2 - 5x^2$, $2x + 5y + z$

$7x^{-1}$ ไม่เป็นเอกนาม เพราะเลขชี้กำลังของตัวแปร x เป็น -1 ซึ่งไม่ใช่ศูนย์หรือจำนวนเต็มบวก

$\frac{4x}{y}$ ไม่เป็นเอกนาม เพราะเมื่อเขียน $\frac{4x}{y}$ ในรูปการคูณ จะได้ $4xy^{-1}$ มีเลขชี้กำลังของ y เป็น -1 ซึ่งไม่ใช่ศูนย์หรือจำนวนเต็มบวก

$2 - 5x^2$ ไม่เป็นเอกนาม เพราะไม่สามารถเขียนนิพจน์นี้ให้อยู่ในรูปการคูณของค่าคงตัวกับตัวแปร

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึ่งกระทำ บ้างไม่พึ่งกระทำ

$2x + 5y + z$ ไม่เป็นเอกนาม เพราะไม่สามารถเขียนนิพจน์นี้ให้อยู่ในรูปการคูณของค่าคงตัวกับตัวแปร

จากที่กล่าวมาจะเห็นว่า เอกนามประกอบด้วยสองส่วน คือ ส่วนที่เป็นค่าคงตัว และส่วนที่อยู่ในรูปของตัวแปรหรือการคูณกันของตัวแปร เรียกส่วนที่เป็นค่าคงตัวว่า **สัมประสิทธิ์** ของเอกนาม และเรียกผลบวกของเลขชี้กำลังของตัวแปรแต่ละตัวในเอกนามว่า **ดีกรี**ของเอกนาม

ตัวอย่าง

เอกนาม	สัมประสิทธิ์	ผลบวกของเลขชี้กำลังของตัวแปรแต่ละตัว	ดีกรี
$2x$	2	1	1
$-5xy^2$	-5	$1+2 = 3$	3
$\frac{1}{4}x^2z^4$	$\frac{1}{4}$	$2+4 = 6$	6
$-x^5$	-1	5	5

สำหรับเอกนาม 0 ไม่สามารถบอกดีกรีได้แน่นอน เพราะสามารถเขียน 0 ให้อยู่ในรูป $0 \cdot x^n$ ไม่ว่า n เป็นศูนย์หรือจำนวนเต็มบวกใด ๆ ดังนั้นจะไม่กล่าวถึงดีกรีของเอกนาม 0 หรือกล่าวว่าดีกรีของเอกนาม 0 หาไม่ได้

เอกนามที่เป็นค่าคงตัวที่ไม่ใช่ศูนย์ จะมีดีกรีเป็น 0 เช่น 3 มีดีกรีเป็น 0 เพราะสามารถเขียน 3 ให้อยู่ในรูป $3 \cdot x^0$

แบบฝึกหัด 2.1

1. จงบอกสัมประสิทธิ์และดีกรีของเอกนามต่อไปนี้

1) -1
2) 1
3) x
4) -0.17
5) $\frac{8}{3}x^4$
6) $-5x$
7) $-\frac{x}{3}$
8) $2yz^2$

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

9) $-t^2y$ 10) $3^2y^7z^2$

11) $-\frac{1}{5}x^2y^3$ 12) x^3y

13) $-yz$ 14) $-x^2z^2$

15) $\frac{13}{6}s^3t^4$ 16) $-4x^3y^3$

17) $\frac{7qr}{3}$ 18) $-2^{-3}x^3$

2. จงเขียนเอกนามที่มีตัวแปรหนึ่งตัว แต่มีสัมประสิทธิ์และดีกรีต่าง ๆ กันสามเอกนาม

3. จงเขียนเอกนามที่มีตัวแปรสองตัว และมีสัมประสิทธิ์เป็น -3 ดีกรีเป็น 4

2.2 การบวกและการลบเอกนาม

พิจารณาเอกนามต่อไปนี้

$3xy$, $4xy$

จะเห็นว่าเอกนามทั้งสองนี้ต่างกันเฉพาะสัมประสิทธิ์เท่านั้น ส่วนที่เป็นตัวแปรเหมือนกันคือ xy เรากล่าวว่าเอกนาม $3xy$ และ $4xy$ เป็นเอกนามที่**คล้ายกัน**

> เอกนามสองเอกนาม**คล้ายกัน**ก็ต่อเมื่อ
> 1. เอกนามทั้งสองมีตัวแปรชุดเดียวกัน
> และ 2. เลขชี้กำลังของตัวแปรตัวเดียวกันในแต่ละเอกนามเท่ากัน

ตัวอย่างของเอกนามที่คล้ายกัน

$7x$	คล้ายกันกับ	$10x$
$-2x^3$	คล้ายกันกับ	$5x^3$
$\frac{1}{2}x^2y$	คล้ายกันกับ	$-4x^2y$
84	คล้ายกันกับ	-39

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึ่งกระทำ บ้างไม่พึ่งกระทำ

ตัวอย่างของเอกนามที่ไม่คล้ายกัน

$7s$ ไม่คล้ายกันกับ $7t$

$24x^2y^4$ ไม่คล้ายกันกับ $16x^2y$

$3s^2t^3$ ไม่คล้ายกันกับ $-4s^3t^2$

ให้นักเรียนเลือกเอกนามที่คล้ายกันจากเอกนามที่กำหนดให้ต่อไปนี้

$8xy^2$, $-12x^2y$, $-\frac{16}{45}xy^2$, $51xy^2$, $\frac{4}{3}xy$, $\frac{2}{3}x^2y$, $-xy$

การบวกเอกนาม

การบวกเอกนามที่คล้ายกัน เช่น $5x$ กับ $3x$ และ $-7x$ กับ $4x$ ใช้สมบัติการแจกแจงได้ดังนี้

$$5x + 3x = (5 + 3)x$$
$$= 8x$$
$$-7x + 4x = (-7 + 4)x$$
$$= (-3)x$$
$$= -3x$$

จะเห็นว่าผลบวกของเอกนามที่คล้ายกันยังคงเป็นเอกนาม

ให้นักเรียนใช้สมบัติการแจกแจงหาผลบวกของเอกนามที่คล้ายกันในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $23x$ กับ $18x$
2. $4xy$ กับ $7xy$
3. $-2x^2$ กับ $4x^2$
4. $14x^2y$ กับ $-10x^2y$

การหาผลบวกของเอกนามที่คล้ายกัน ใช้หลักเกณฑ์ดังนี้

ผลบวกของเอกนามที่คล้ายกัน

= (ผลบวกของสัมประสิทธิ์) × (ส่วนที่อยู่ในรูปของตัวแปรหรือการคูณกันของตัวแปร)

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

สำหรับเอกนามที่ไม่คล้ายกัน เช่น xy กับ $2y^3$ นั้นไม่สามารถเขียนผลบวกในรูปเอกนามได้ แต่เขียนผลบวกในรูปการบวกได้ดังนี้ $xy + 2y^3$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลบวกต่อไปนี้

1. $x + (-5x)$
2. $-5s + (-3s)$
3. $7xy^2 + 2xy^2$

วิธีทำ 1. $x + (-5x) = [1 + (-5)]\, x$

$= (-4)\, x$

$= -4x$

ตอบ $-4x$

2. $-5s + (-3s) = [(-5) + (-3)]\, s$

$= (-8)\, s$

$= -8s$

ตอบ $-8s$

3. $7xy^2 + 2xy^2 = (7 + 2)\, xy^2$

$= 9xy^2$

ตอบ $9xy^2$

เนื่องจากในที่นี้เอกนามแทนจำนวน ดังนั้นจึงใช้**สมบัติการสลับที่สำหรับการบวก สมบัติการเปลี่ยนหมู่สำหรับการบวก สมบัติการบวกด้วยศูนย์** และ**สมบัติการคูณด้วยศูนย์** มาใช้ในการหาผลบวกของเอกนาม ดังตัวอย่าง

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลบวกต่อไปนี้

1. $-2y^3 + 9y^3 + (-3y^3)$
2. $4x^2 + (-2x^3) + (-4x^2)$

วิธีทำ 1. $-2y^3 + 9y^3 + (-3y^3) = (-2y^3 + 9y^3) + (-3y^3)$

$= [(-2) + 9]\, y^3 + (-3y^3)$

$= 7y^3 + (-3y^3)$

$= [7 + (-3)]\, y^3$

$= 4y^3$

ตอบ $4y^3$

หรือ $-2y^3 + 9y^3 + (-3y^3) = -2y^3 + [9y^3 + (-3y^3)]$

$= -2y^3 + [9 + (-3)]\, y^3$

$= -2y^3 + 6y^3$

$= [(-2) + 6]\, y^3$

$= 4y^3$

ตอบ $4y^3$

หรือ $-2y^3 + 9y^3 + (-3y^3) = [(-2) + 9 + (-3)]\, y^3$

$= 4y^3$

ตอบ $4y^3$

2. $4x^2 + (-2x^3) + (-4x^2) = 4x^2 + (-4x^2) + (-2x^3)$

$= [4x^2 + (-4x^2)] + (-2x^3)$

$= [4 + (-4)]\, x^2 + (-2x^3)$

$= 0 \cdot x^2 + (-2x^3)$

$= 0 + (-2x^3)$

$= -2x^3$

สังเกตว่า

$4x^2 + (-4x^2) = 0$

ตอบ $-2x^3$

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

การลบเอกนาม

การลบเอกนามที่คล้ายกันใช้หลักการเช่นเดียวกับการลบจำนวนสองจำนวนตามข้อตกลงดังนี้

$a - b = a + (-b)$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนใด ๆ และ $-b$ เป็นจำนวนตรงข้ามของ b

นั่นคือ การลบเอกนามสองเอกนามที่คล้ายกัน จะเขียนการลบนั้นให้อยู่ในรูปการบวกของเอกนาม แล้วใช้หลักเกณฑ์ที่ได้จากการบวกเอกนามที่คล้ายกันหาผลลัพธ์ต่อไป

เช่น ต้องการหาผลลบของเอกนาม $8x$ กับ $3x$ โดยให้ $8x$ เป็นตัวตั้ง จะได้

$$\begin{aligned} 8x - 3x &= 8x + (-3x) \\ &= [8 + (-3)]\,x \\ &= 5x \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลลบต่อไปนี้

1. $5x^2 - 2x^2$
2. $3st - 10st$
3. $2y - (-5y)$

วิธีทำ 1. $5x^2 - 2x^2 = 5x^2 + (-2x^2)$

$$\begin{aligned} &= [5 + (-2)]\,x^2 \\ &= (5 - 2)\,x^2 \\ &= 3x^2 \end{aligned}$$

ตอบ $3x^2$

2. $3st - 10st = 3st + (-10st)$

$$\begin{aligned} &= [3 + (-10)]\,st \\ &= (3 - 10)\,st \\ &= -7st \end{aligned}$$

ตอบ $-7st$

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

3. $2y - (-5y) = 2y + 5y$

$= (2 + 5)\, y$

$= 7y$

ตอบ 7y

จากวิธีทำในตัวอย่างที่ 3 ข้างต้น อาจเขียนวิธีทำสั้น ๆ ได้ดังนี้

1. $5x^2 - 2x^2 = (5 - 2)\, x^2$

$= 3x^2$

2. $3st - 10st = (3 - 10)\, st$

$= -7st$

3. $2y - (-5y) = (2 + 5)\, y$

$= 7y$

การหาผลลบของเอกนามที่คล้ายกัน ใช้หลักเกณฑ์ดังนี้

ผลลบของเอกนามที่คล้ายกัน

= (ผลลบของสัมประสิทธิ์) × (ส่วนที่อยู่ในรูปของตัวแปรหรือการคูณกันของตัวแปร)

สำหรับเอกนามที่ไม่คล้ายกัน เช่น -4x กับ 5xy นั้น ไม่สามารถเขียนผลลบในรูปเอกนามได้ แต่เขียนผลลบในรูปการลบได้ดังนี้ $-4x - 5xy$

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

ตัวอย่างที่ 4 จงหาผลลบต่อไปนี้

1. $3x - 5x$
2. $-3xy^3 - 5xy^3$
3. $[7y - (-2y)] - y$

วิธีทำ 1. $3x - 5x = (3 - 5)x$

$= -2x$

ตอบ $-2x$

2. $-3xy^3 - 5xy^3 = (-3 - 5)xy^3$

$= -8xy^3$

ตอบ $-8xy^3$

3. $[7y - (-2y)] - y = (7 + 2)y - y$

$= 9y - y$

$= (9 - 1)y$

$= 8y$

ตอบ $8y$

สำหรับข้อ 3 ในตัวอย่างที่ 4 เราอาจหาผลลบได้ดังนี้

$[7y - (-2y)] - y = 7y - (-2y) - y$

$= (7 + 2 - 1)y$

$= 8y$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาผลลัพธ์ต่อไปนี้

1. $-9x - 4x - (-8x)$
2. $6x + (-10x) - (-5x) + (-x)$

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

วิธีทำ 1. $-9x - 4x - (-8x) = (-9 - 4 + 8)\,x$

$= -5x$

ตอบ $-5x$

2. $6x + (-10x) - (-5x) + (-x) = (6 - 10 + 5 - 1)\,x$

$= 0 \cdot x$

$= 0$

ตอบ 0

แบบฝึกหัด 2.2

1. จงบอกว่าเอกนามที่กำหนดให้แต่ละคู่คล้ายกันหรือไม่

   1) $4x$ กับ $-9x$
   2) $8y$ กับ $10y$
   3) $6x$ กับ $6y$
   4) -12 กับ 35
   5) $3x^2$ กับ $2x^2$
   6) $5yz$ กับ $-2yz$
   7) $2x^2y$ กับ xy^2
   8) $2y^5$ กับ $2y^5$
   9) $-7x^4y$ กับ $-7xy^4$
   10) $-4tx^3$ กับ $3tx^3$

2. จงหาผลบวกของเอกนามแต่ละคู่ในข้อ 1
3. จงหาผลลบของเอกนามแต่ละคู่ในข้อ 1 โดยให้เอกนามแรกเป็นตัวตั้ง
4. จงหาผลบวกของเอกนามที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้

   1) $10x$, $-7x$
   2) $-9y$, $-14y$
   3) $15x$, $-12x$, $3x$
   4) $-4y$, $-8y$, $-6y$
   5) $-12u$, $5u$, $13u$
   6) $-4w^2$, $3w^2$, $4w^2$
   7) $17r^2s$, $-2r^2s$, $-3r^2s$
   8) $2x$, $-3x$, $-2x$, $3x$
   9) $2x^2$, $-3y^2$, $6z^3$
   10) $10st$, $-8s^2t^2$, $-st$, $12s^2t^2$

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

5. จงหาผลลัพธ์ต่อไปนี้

1) $5x - 8x + 3x$
2) $-7y + 9y + 2y$
3) $10z - 4z - z$
4) $14y^2 - 8y^2 + 7y^2$
5) $6x^2 + (-2x^2) - 3x^2$
6) $z^2 - (-5z^2) - 6z^2$
7) $-3s^3 - 5s^3 - 9s^3$
8) $16uv - 7uv - 9uv$
9) $24xy - 10xy + (-8xy)$
10) $4xy^2 - (-3xy^2) + xy^2$
11) $\frac{5}{4}yz + \frac{15}{4}yz - 6yz$
12) $-12s^2t + 4s^2t - 13s^2t + (-8s^2t)$

2.3 พหุนาม

พิจารณานิพจน์ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. 9
2. $7y + 1$
3. $3x + (-2y) + x^2$
4. $4x^3 + (-3x^2) + (-6x) + 2$

จะเห็นว่า

นิพจน์ในข้อ 1 เป็นเอกนาม

นิพจน์ในข้อ 2 เขียนอยู่ในรูปการบวกเอกนามสองเอกนาม

นิพจน์ในข้อ 3 เขียนอยู่ในรูปการบวกเอกนามสามเอกนาม

นิพจน์ในข้อ 4 เขียนอยู่ในรูปการบวกเอกนามสี่เอกนาม

นิพจน์เช่นในข้อ 1, 2, 3 และ 4 เรียกว่า **พหุนาม**

นิพจน์ที่อยู่ในรูปเอกนาม หรือเขียนอยู่ในรูปการบวกของเอกนามตั้งแต่สองเอกนามขึ้นไป เรียกว่า **พหุนาม**

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

ตัวอย่างของพหุนาม

$-\frac{3}{4}$

$8s$

$5y + 7$

$x^2 + 3$

$6xy + 7y^3 + (-5x^3)$

นิพจน์ $10x - 3$ และ $8x^2 - 9x + 4$ เป็นพหุนามเช่นกัน ทั้งนี้เพราะ

$10x - 3 = 10x + (-3)$ และ $8x^2 - 9x + 4 = 8x^2 + (-9x) + 4$

สำหรับพหุนามใด ๆ จะเรียกแต่ละเอกนามที่อยู่ในพหุนามนั้นว่า **พจน์**ของพหุนาม ในกรณีที่พหุนามนั้นมีเอกนามที่คล้ายกัน จะเรียกเอกนามที่คล้ายกันว่า **พจน์ที่คล้ายกัน**

ตัวอย่าง

พหุนาม 2 มีพจน์คือ 2

พหุนาม $10x - 3$ มีพจน์คือ $10x$ และ -3

พหุนาม $8x^2 - 9x + 4$ มีพจน์คือ $8x^2$, $-9x$ และ 4

พหุนาม $-4x^3 + 3x^2 - 2x + x^2$ มีพจน์คือ $-4x^3$, $3x^2$, $-2x$ และ x^2 โดยที่ $3x^2$ และ x^2 เป็นพจน์ที่คล้ายกัน

ในกรณีที่พหุนามมีพจน์บางพจน์เป็นพจน์ที่คล้ายกัน เราสามารถรวมพจน์ที่คล้ายกันเข้าด้วยกันเพื่อทำให้เป็นพหุนามในรูปที่ไม่มีพจน์ที่คล้ายกันเลย ดังตัวอย่างต่อไปนี้

1. $4x + x - 5 = (4x + x) - 5$

$= 5x - 5$

2. $-3x + 14 + 7x = (-3x + 7x) + 14$

$= 4x + 14$

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

3. $x^2 - x + 2 + 3x - x^2 + 11 = x^2 + (-x) + 2 + 3x + (-x^2) + 11$

$= [x^2 + (-x^2)] + [(-x) + 3x] + (2 + 11)$

$= 0 + 2x + 13$

$= 2x + 13$

เรียกพหุนามที่ไม่มีพจน์ที่คล้ายกันเลยว่า **พหุนามในรูปผลสำเร็จ** เมื่อเขียนพหุนามให้อยู่ในรูปพหุนามในรูปผลสำเร็จแล้ว จะเรียกดีกรีสูงสุดของพจน์ของพหุนามในรูปผลสำเร็จว่า **ดีกรี**ของพหุนาม

ตัวอย่างการหาดีกรีของพหุนาม

1. $x^3 - 3x + 4$ เป็นพหุนามในรูปผลสำเร็จ ที่มี
   ดีกรีของพจน์ x^3 เท่ากับ 3
   ดีกรีของพจน์ $-3x$ เท่ากับ 1
   ดีกรีของพจน์ 4 เท่ากับ 0
   ดังนั้นดีกรีของพหุนาม $x^3 - 3x + 4$ เท่ากับ 3

2. $-x + 6xy - 2yz$ เป็นพหุนามในรูปผลสำเร็จ ที่มี
   ดีกรีของพจน์ $-x$ เท่ากับ 1
   ดีกรีของพจน์ $6xy$ เท่ากับ 2
   ดีกรีของพจน์ $-2yz$ เท่ากับ 2
   ดังนั้นดีกรีของพหุนาม $-x + 6xy - 2yz$ เท่ากับ 2

3. 0 เป็นพหุนามในรูปผลสำเร็จที่เป็นเอกนาม และไม่กล่าวถึงดีกรีของเอกนาม 0
   ดังนั้นจึงไม่กล่าวถึงดีกรีของพหุนาม 0

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึ่งกระทำ บ้างไม่พึ่งกระทำ

ให้นักเรียนบอกดีกรีของพหุนามต่อไปนี้

1) 8
2) $-\frac{1}{2}$
3) $-\frac{1}{3}x$
4) $3x + 1$
5) $-6x^2 + 15$
6) $-\frac{3}{4}s + t$
7) $24xz - 9z$
8) $xy + y^2 - x$

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนพหุนามในแต่ละข้อต่อไปนี้ให้เป็นพหุนามในรูปผลสำเร็จและบอกดีกรีของพหุนาม

1. $-4x + 20 + 3x - 8$
2. $7x^2 + 9x - 5x^2 - 2x + 6$
3. $4xy - 8xy - 10x - y$

วิธีทำ 1. $-4x + 20 + 3x - 8 = (-4x + 3x) + (20 - 8)$

$= -x + 12$

ตอบ พหุนามในรูปผลสำเร็จคือ $-x + 12$ และดีกรีของพหุนามเท่ากับ 1

2. $7x^2 + 9x - 5x^2 - 2x + 6 = (7x^2 - 5x^2) + (9x - 2x) + 6$

$= 2x^2 + 7x + 6$

ตอบ พหุนามในรูปผลสำเร็จคือ $2x^2 + 7x + 6$ และดีกรีของพหุนามเท่ากับ 2

3. $4xy - 8xy - 10x - y = (4xy - 8xy) - 10x - y$

$= -4xy - 10x - y$

ตอบ พหุนามในรูปผลสำเร็จคือ $-4xy - 10x - y$ และดีกรีของพหุนามเท่ากับ 2

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึ่งกระทำ บ้างไม่พึ่งกระทำ

ตัวอย่างที่ 2 จงบอกดีกรีของพหุนามต่อไปนี้

1. $2a + 19 - 2a - 20$
2. $-x + 2x + 3$
3. $x^3 - 2x^2 + x + 5 - x^3 - 5x$

วิธีทำ 1. $2a + 19 - 2a - 20 = (2a - 2a) + (19 - 20)$

$= 0 + (-1)$

$= -1$

ตอบ ดีกรีเท่ากับ 0

2. $-x + 2x + 3 = (-x + 2x) + 3$

$= x + 3$

ตอบ ดีกรีเท่ากับ 1

3. $x^3 - 2x^2 + x + 5 - x^3 - 5x = (x^3 - x^3) - 2x^2 + (x - 5x) + 5$

$= 0 - 2x^2 + (-4x) + 5$

$= -2x^2 - 4x + 5$

ตอบ ดีกรีเท่ากับ 2

ตัวอย่างที่ 3 จงเขียนพหุนามในแต่ละข้อต่อไปนี้โดยเรียงพจน์ของพหุนามจากดีกรีมากไปน้อย

1. $4 - 5x$
2. $17x + 2x^2 - 1$
3. $x^3 + 6 - x^2 - 3x$

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

วิธีทำ 1. $4 - 5x = -5x + 4$

ตอบ $-5x + 4$

2. $17x + 2x^2 - 1 = 2x^2 + 17x - 1$

ตอบ $2x^2 + 17x - 1$

3. $x^3 + 6 - x^2 - 3x = x^3 - x^2 - 3x + 6$

ตอบ $x^3 - x^2 - 3x + 6$

แบบฝึกหัด 2.3

1. จงเขียนพหุนามในแต่ละข้อต่อไปนี้ให้เป็นพหุนามในรูปผลสำเร็จ
   1) $-5x + 1 + 7x - 11$
   2) $4z^2 + 18 - z^2 - 18$
   3) $6x^3 - 2x^2 - 3x^3$
   4) $x - xy + 4 + x$
   5) $2x^2y + y^2 - 3 + x^2y + 9$
2. จงบอกดีกรีของพหุนามแต่ละพหุนามในข้อ 1
3. จงเขียนพหุนามในแต่ละข้อต่อไปนี้โดยเรียงพจน์ของพหุนามจากพจน์ที่มีดีกรีน้อยไปพจน์ที่มีดีกรีมาก
   1) $3 + 2x$
   2) $x^2 + 5 - 3x$
   3) $-2x^2 + 6x - 5$
   4) $7x + 4 - x^3$
   5) $8x^2 + 1 - x + 4x^3$

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึ่งกระทำ บ้างไม่พึ่งกระทำ

4. จงเขียนพหุนามในแต่ละข้อต่อไปนี้ให้เป็นพหุนามในรูปผลสำเร็จและเรียงพจน์ของพหุนามจากพจน์ที่มีดีกรีมากไปพจน์ที่มีดีกรีน้อย

   1) $4x + 5x - x + 3$

   2) $7y^2 - 2y - 10y^2 + 8y$

   3) $z^2 - z^3 + 3z^2 - 12z^3 - 14z^2$

   4) $-6z - 7z^3 + z + 2z^3 - 4z^2$

   5) $5x^3 - 9x + x^2 - 5x^3 + 2x - 2$

2.4 การบวกและการลบพหุนาม

การบวกพหุนาม

พิจารณาพหุนามสองพหุนามต่อไปนี้

$3x - 6$ และ $2x + 9$

เขียนพหุนามทั้งสองนี้ในรูปการบวกดังนี้

$(3x - 6) + (2x + 9)$

เมื่อทำพหุนาม $(3x - 6) + (2x + 9)$ ให้เป็นพหุนามในรูปผลสำเร็จ จะได้ดังนี้

$$\begin{aligned}(3x - 6) + (2x + 9) &= 3x - 6 + 2x + 9 \\ &= (3x + 2x) + (-6 + 9) \\ &= 5x + 3\end{aligned}$$

เรียกพหุนาม $5x + 3$ ว่าผลบวกของพหุนาม $3x - 6$ และ $2x + 9$

นั่นคือ $(3x - 6) + (2x + 9) = 5x + 3$

การหาผลบวกของพหุนามใช้หลักเกณฑ์ดังนี้

> การหาผลบวกของพหุนามทำได้โดยนำพหุนามมาเขียนในรูปการบวกและถ้ามีพจน์ที่คล้ายกัน ให้บวกพจน์ที่คล้ายกันเข้าด้วยกัน

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึ่งกระทำ บ้างไม่พึ่งกระทำ

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลบวกของพหุนามในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $-4x + 7$ และ $x - 5$
2. $3x - 8$ และ $y - 6z$
3. $6x^2 + 10$ และ $-5x^2 - x + 1$

วิธีทำ 1. $(-4x + 7) + (x - 5) = -4x + 7 + x - 5$

$= (-4x + x) + (7 - 5)$

$= -3x + 2$

ตอบ $-3x + 2$

2. $(3x - 8) + (y - 6z) = 3x - 8 + y - 6z$

$= 3x + y - 6z - 8$

ตอบ $3x + y - 6z - 8$

3. $(6x^2 + 10) + (-5x^2 - x + 1) = 6x^2 + 10 - 5x^2 - x + 1$

$= (6x^2 - 5x^2) - x + (10 + 1)$

$= x^2 - x + 11$

ตอบ $x^2 - x + 11$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลบวกของ $8x - 1$, $-x^2 - 9x$ และ $x^2 + 4$

วิธีทำ $(8x - 1) + (-x^2 - 9x) + (x^2 + 4) = 8x - 1 - x^2 - 9x + x^2 + 4$

$= (-x^2 + x^2) + (8x - 9x) + (-1 + 4)$

$= -x + 3$

ตอบ $-x + 3$

เราอาจหาผลบวกของพหุนามซึ่งมีพจน์ที่คล้ายกันด้วยการเขียนการบวกในแนวตั้งโดยให้พจน์ที่คล้ายกันอยู่ตรงกันแล้วจึงบวกพจน์ที่คล้ายกันนั้น ดังตัวอย่างต่อไปนี้

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลบวกของ $8x + xy - 6$ และ $3x - 5xy + 2$

วิธีทำ

$$\begin{array}{r} 8x + xy - 6 \\ + \\ \underline{3x - 5xy + 2} \\ 11x - 4xy - 4 \end{array}$$

ตอบ $11x - 4xy - 4$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาผลบวกของ $x^2 - 2x - 4$ และ $-4x^2 + 5$

วิธีทำ

$$\begin{array}{r} x^2 - 2x - 4 \\ + \\ \underline{-4x^2 \quad + 5} \\ -3x^2 - 2x + 1 \end{array}$$

ตอบ $-3x^2 - 2x + 1$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาผลบวกของ $-6r + 7s - 8t$, $5r + 13t$ และ $-4s - 9t$

วิธีทำ

$$\begin{array}{r} -6r + 7s - 8t \\ 5r \quad + 13t \quad + \\ \underline{\quad -4s - 9t} \\ -r + 3s - 4t \end{array}$$

ตอบ $-r + 3s - 4t$

แบบฝึกหัด 2.4 ก

1. จงหาผลบวกของพหุนามในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $-12x + 15$ และ $5x$
2) -8 และ $x - 6$
3) $-9x + 4$ และ $5y$
4) $3z^2$ และ $4z^2 + 3z - 10$
5) $12x - 1$ และ $6x^2$
6) $3s + 5st$ และ $-9s - 3st$
7) $7xy - st$ และ $-10st + 3xy$
8) $2x^2 - 3x + 7$ และ $-x^2 + x - 8$
9) $13r - 2t - 2s$ และ $-14r + 11s - 7t$
10) $3x + 9y - 15$ และ $2 + 8y - z$
11) $7y$, $-16y + 2$ และ $y^2 + 6y$
12) $2x$, $3r - 4x$ และ $r - y$

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

2. จงหาผลบวกต่อไปนี้โดยการบวกในแนวตั้ง

1) $(-3x + 4y) + (5x - 6y)$

2) $(9x - 4y + 10) + (2x + 8y + 7)$

3) $(4x - 3) + (-x + y - 5)$

4) $(-z^2 + 11z - 2) + (19z^2 - z + 3)$

5) $(-7x^2 + 9) + (-3x - 1)$

6) $(2x^2 - x - 1) + (6x - 10)$

7) $(-8x^2 + x - 4) + (x^2 + 12)$

8) $(3x^2 - x - 9) + (-x^2 - x)$

9) $[(x + 9) + (4x - 7)] + (-2x - 6)$

10) $[(5r + 6s + 7t) + (r - s - t)] + (-12r + s)$

11) $[(x^2 - 3x - 2) + (10x - 8)] + (1 + 14x - x^2)$

12) $(-9x - 14) + [(3 - 7x - 5x^2) + (2x^2 - 6)]$

การลบพหุนาม

การลบพหุนามทำได้ในทำนองเดียวกันกับการลบเอกนามโดยเขียนพหุนามในรูปการลบให้อยู่ในรูปการบวกของพหุนาม ซึ่งต้องใช้**พหุนามตรงข้าม**

พิจารณาพหุนาม $x - 4$

เราจะหาพหุนามที่นำมาบวกกับพหุนาม $x - 4$ แล้วได้พหุนาม 0

เนื่องจาก $(x - 4) + (-x + 4) = x - 4 - x + 4$

$= 0$

ดังนั้นพหุนาม $-x + 4$ เป็นพหุนามที่นำมาบวกกับพหุนาม $x - 4$ แล้วได้พหุนาม 0

เรียกพหุนาม $-x + 4$ ว่า **พหุนามตรงข้าม**ของพหุนาม $x - 4$

เขียนแทนพหุนามตรงข้ามของพหุนาม $x - 4$ ด้วย $-(x - 4)$

นั่นคือ $-(x - 4) = -x + 4$

และเมื่อพิจารณาแต่ละพจน์ของพหุนาม $-x + 4$ กับ $x - 4$ จะเห็นว่า

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

$-x + x = 0$ เรียก $-x$ ว่า **พจน์ตรงข้าม**ของ x

และ $4 + (-4) = 0$ เรียก 4 ว่า **พจน์ตรงข้าม**ของ -4

จึงกล่าวได้ว่า พหุนามตรงข้ามของ $x - 4$ คือผลบวกของพจน์ตรงข้ามของแต่ละพจน์ของ $x - 4$

โดยทั่วไป เราสามารถแสดงได้ว่า *พหุนามตรงข้ามของพหุนามใดเท่ากับผลบวกของพจน์ตรงข้ามของแต่ละพจน์ของพหุนามนั้น*

ตัวอย่าง

พหุนาม	พหุนามตรงข้าม
2	-2
$-3x$	$3x$
$-5x + 8$	$-(-5x + 8)$ หรือ $5x + (-8)$ หรือ $5x - 8$
$10x^2 + 16x + 1$	$-(10x^2 + 16x + 1)$ หรือ $(-10x^2) + (-16x) + (-1)$ หรือ $-10x^2 - 16x - 1$
$x^2 - 7xy - 6$	$-(x^2 - 7xy - 6)$ หรือ $-x^2 + 7xy + 6$

การหาผลลบของพหุนามสองพหุนาม ทำตามข้อตกลงดังนี้

พหุนามตัวตั้ง – พหุนามตัวลบ = พหุนามตัวตั้ง + พหุนามตรงข้ามของพหุนามตัวลบ

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

ตัวอย่างที่ 6 จงหาผลลบ $(2x - 13) - (-9x)$

วิธีทำ $(2x - 13) - (-9x) = (2x - 13) + 9x$

$= 2x - 13 + 9x$

$= 11x - 13$

ตอบ $11x - 13$

ตัวอย่างที่ 7 จงหาผลลบ $8x - (10x - 5)$

วิธีทำ $8x - (10x - 5) = 8x + [-(10x - 5)]$

$= 8x + (-10x + 5)$

$= 8x - 10x + 5$

$= -2x + 5$

ตอบ $-2x + 5$

เนื่องจากพหุนามตรงข้ามของพหุนามตัวลบ เท่ากับผลบวกของพจน์ตรงข้ามของแต่ละพจน์ของพหุนามตัวลบนั้น

ดังนั้น ในทางปฏิบัติการลบพหุนามสามารถใช้หลักเกณฑ์ดังนี้

> การลบพหุนามด้วยพหุนามทำได้โดยบวกพหุนามตัวตั้งด้วยพจน์ตรงข้ามของแต่ละพจน์ของพหุนามตัวลบ

ตัวอย่างที่ 8 จงหาผลลบ $(15x + 2) - (x^2 + 12x - 6)$

วิธีทำ $(15x + 2) - (x^2 + 12x - 6) = (15x + 2) + (-x^2) + (-12x) + 6$

$= 15x + 2 + (-x^2) + (-12x) + 6$

$= -x^2 + 3x + 8$

ตอบ $-x^2 + 3x + 8$

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึ่งกระทำ บ้างไม่พึ่งกระทำ

ตัวอย่างที่ 9 จงหาผลลบ $(3x^2 - 5x - 10) - (3x^2 - 14x - 15)$

วิธีทำ $(3x^2 - 5x - 10) - (3x^2 - 14x - 15) = 3x^2 - 5x - 10 + (-3x^2) + 14x + 15$

$= 9x + 5$

ตอบ $9x + 5$

พิจารณาการหาผลลัพธ์ในตัวอย่างที่ 9 โดยใช้วิธีการถอดวงเล็บเช่นเดียวกับการบวกและการลบจำนวนเต็ม ดังนี้

$(3x^2 - 5x - 10) - (3x^2 - 14x - 15) = 3x^2 - 5x - 10 - 3x^2 + 14x + 15$

$= 9x + 5$

จะเห็นว่าได้ผลลัพธ์เท่ากัน

ดังนั้น การบวกและการลบพหุนามสามารถใช้วิธีการถอดวงเล็บเช่นเดียวกับการบวกและการลบจำนวนเต็ม

ตัวอย่างที่ 10 จงหาผลลบ $(4x^2 + 7x - 12) - (5x^2 - 6x + 11)$

วิธีทำ $(4x^2 + 7x - 12) - (5x^2 - 6x + 11) = 4x^2 + 7x - 12 - 5x^2 + 6x - 11$

$= -x^2 + 13x - 23$

ตอบ $-x^2 + 13x - 23$

เพื่อความสะดวกในการหาผลลบของพหุนามซึ่งมีพจน์ที่คล้ายกัน อาจใช้วิธีเขียนการลบในแนวตั้ง เช่น $5x^2 - 11x + 3$ ลบด้วย $3x^2 - x - 14$ จะเขียนวิธีการลบได้เป็น

$5x^2 - 11x + 3$ ⟵ ตัวตั้ง

$3x^2 - x - 14$ ⟵ ตัวลบ (−)

จากหลักการของการลบพหุนาม จะบวกพหุนามที่เป็นตัวตั้งด้วยพจน์ตรงข้ามของแต่ละพจน์ของพหุนามที่เป็นตัวลบ ซึ่งเขียนได้ดังนี้

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึ่งกระทำ บ้างไม่พึ่งกระทำ

$5x^2 - 11x + 3$ ⟵ ตัวตั้ง

$-3x^2 + x + 14$ $+$ ⟵ พจน์ตรงข้ามของแต่ละพจน์ของพหุนามที่เป็นตัวลบ

$2x^2 - 10x + 17$ ⟵ ผลลัพธ์ที่ได้จากการลบ $5x^2 - 11x + 3$ ด้วย $3x^2 - x - 14$

ดังนั้น การลบ $5x^2 - 11x + 3$ ด้วย $3x^2 - x - 14$ โดยใช้วิธีเขียนการลบในแนวตั้ง จะเขียนวิธีทำได้ดังนี้

$5x^2 - 11x + 3$ ⟵ ตัวตั้ง

$3x^2 - x - 14$ $-$ ⟵ ตัวลบ

$2x^2 - 10x + 17$ ⟵ ผลลบ

ตัวอย่างที่ 11 จงลบ $-6x^2 - 13x - 15$ ด้วย $x^2 + 2x - 12$

วิธีทำ

$-6x^2 - 13x - 15$

$x^2 + 2x - 12$ $-$

$-7x^2 - 15x - 3$

ตอบ $-7x^2 - 15x - 3$

แนวคิด

$-6x^2 - 13x - 15$

$-x^2 - 2x + 12$ $+$

$-7x^2 - 15x - 3$

ตัวอย่างที่ 12 จงลบ $2x^2 + 18$ ด้วย $-3 - 19x$

วิธีทำ

$2x^2 + 18$

$-19x - 3$ $-$

$2x^2 + 19x + 21$

ตอบ $2x^2 + 19x + 21$

แนวคิด

$2x^2 + 18$

$19x + 3$ $+$

$2x^2 + 19x + 21$

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

แบบฝึกหัด 2.4 ข

1. จงหาผลลบต่อไปนี้

   1) $6x - (4x + 7)$
   2) $(-14x - 1) - (6x - 12)$
   3) $(18x - 2) - (18x - 2)$
   4) $(3 + 5x + x^2) - (8x^2 - 9x)$
   5) $(-x^2 + x - 1) - (x^2 + 3x + 9)$
   6) $(7x^2 - 8x - 11) - (-2x^2 + 10x - 1)$

2. จงหาผลบวกและผลลบของพหุนามในแต่ละข้อต่อไปนี้โดยใช้พหุนามแรกที่กำหนดให้เป็นตัวตั้ง

   1) $-15xy + 2y$ กับ $3x + 8xy - y$
   2) $4z^2 + 7z - 5$ กับ $9z + 1$
   3) $x^2 - 6x$ กับ $-x^2 + 4x - 21$
   4) $13s - 8t$ กับ $6r + 3s - 2t$
   5) $5x^2 + 6x - 4$ กับ $3x^2 - 12x - 1$
   6) $x^2 - \frac{2}{3}x + 2$ กับ $\frac{1}{2}x^2 - x + 10$

3. กำหนดให้ A แทนพหุนาม $2x^2 + x - 8$

   B แทนพหุนาม $-8x^2 - 3x + 6$

   C แทนพหุนาม $7x^2 - 9x - 12$

   จะได้ $A + B = (2x^2 + x - 8) + (-8x^2 - 3x + 6)$

   $= 2x^2 + x - 8 - 8x^2 - 3x + 6$

   $= -6x^2 - 2x - 2$

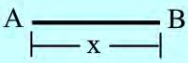
   จงหาพหุนามต่อไปนี้

   1) $A + C$
   2) $B + C$
   3) $A - C$
   4) $B - C$
   5) $(A - C) + B$
   6) $A - (B + C)$

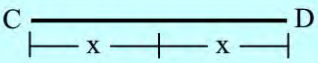
Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึ่งกระทำ บ้างไม่พึ่งกระทำ

พหุนามกับความยาว

ถ้า $\overline{AB}$ เป็นส่วนของเส้นตรงเส้นหนึ่งที่มีความยาวเท่ากับจำนวนจำนวนหนึ่ง เราจะแทนความยาวของ $\overline{AB}$ ด้วย x และเขียนรูปแสดง $\overline{AB}$ ได้ดังนี้



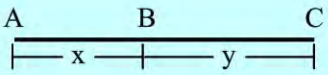
ดังนั้น ถ้า $\overline{CD}$ เป็นส่วนของเส้นตรงที่ยาวเป็น 2 เท่าของความยาวของ $\overline{AB}$ จะได้ $\overline{CD}$ ยาว 2x หน่วย และเขียนรูปแสดงได้ดังนี้



จากรูป ความยาวของ $\overline{CD}$ $= x + x$

ดังนั้น $x + x = 2x$

ถ้า $\overline{AB}$ ยาว x หน่วย และ $\overline{BC}$ ยาว y หน่วย ดังรูป



จะได้ ความยาวของ $\overline{AB}$ + ความยาวของ $\overline{BC}$ $= x + y$ หน่วย

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

2.5 การคูณพหุนาม

เนื่องจากในที่นี้เอกนามแทนจำนวน ดังนั้นเราสามารถนำ**สมบัติการสลับที่ สมบัติการเปลี่ยนหมู่ สมบัติการแจกแจง สมบัติการคูณด้วยหนึ่ง** และ**สมบัติการคูณด้วยศูนย์** มาใช้ในการหาผลคูณระหว่างเอกนามกับเอกนาม และผลคูณระหว่างเอกนามกับพหุนาม

การคูณระหว่างเอกนามกับเอกนาม

พิจารณาการหาผลคูณระหว่างเอกนามกับเอกนาม ต่อไปนี้

1. $(7x)(5y) = (7 \times 5)(x \times y)$
   $= 35xy$

2. $(9x^3)(-x^2) = (9)(-1)(x^3 \cdot x^2)$
   $= -9x^5$

3. $(3x^2y^2)(-8xy^2) = (3)(-8)(x^2 \cdot x)(y^2 \cdot y^2)$
   $= -24x^3y^4$

จะเห็นว่า *ในการหาผลคูณระหว่างเอกนามกับเอกนามนั้น จะนำค่าคงตัวในแต่ละเอกนามมาคูณกัน และนำตัวแปรในแต่ละเอกนามมาคูณกัน โดยใช้สมบัติของเลขยกกำลัง*

ตัวอย่างของการคูณระหว่างเอกนามกับเอกนาม

1. $(2)(5x) = 10x$
2. $(-4x)(7x) = -28x^2$
3. $(6xy)(y) = 6xy^2$
4. $(-x^2y)(-10xy) = 10x^3y^2$
5. $(-3)(9x)(y) = -27xy$

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

การคูณระหว่างเอกนามกับพหุนาม

พิจารณาการหาผลคูณระหว่างเอกนามกับพหุนามซึ่งทำได้โดยใช้สมบัติการแจกแจง และใช้หลักการคูณเอกนาม ดังต่อไปนี้

1. $7(x+2) = (7)(x) + (7)(2)$ ← ใช้สมบัติการแจกแจง
   $= 7x + 14$ ← ใช้การคูณระหว่างเอกนามกับเอกนาม

2. $(2x)(x+3) = (2x)(x) + (2x)(3)$ ← ใช้สมบัติการแจกแจง
   $= 2x^2 + 6x$ ← ใช้การคูณระหว่างเอกนามกับเอกนาม

3. $(9-4x)(-x) = [9+(-4x)](-x)$
   $= (9)(-x) + (-4x)(-x)$ ← ใช้สมบัติการแจกแจง
   $= -9x + 4x^2$ ← ใช้การคูณระหว่างเอกนามกับเอกนาม

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลคูณ $(-3x)(2x^2 - 7x)$

วิธีทำ $(-3x)(2x^2 - 7x) = (-3x)[2x^2 + (-7x)]$
$= (-3x)(2x^2) + (-3x)(-7x)$
$= -6x^3 + 21x^2$

ตอบ $-6x^3 + 21x^2$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลคูณ $(4x^2)(8x^2 + 5x - 6)$

วิธีทำ $(4x^2)(8x^2 + 5x - 6) = (4x^2)[8x^2 + 5x + (-6)]$
$= (4x^2)(8x^2) + (4x^2)(5x) + (4x^2)(-6)$
$= 32x^4 + 20x^3 - 24x^2$

ตอบ $32x^4 + 20x^3 - 24x^2$

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

แบบฝึกหัด 2.5

1. จงหาผลคูณต่อไปนี้

1) $(2x)(3x)$
2) $(-x)(-y)$
3) $(9xy)(3)$
4) $\left(\frac{1}{2}x\right)(8x^2)$
5) $(-2xy)(-y)$
6) $(0)(12xz^2)$
7) $(-4x)(-13xy)$
8) $(-9xy^2)(11xy)$
9) $(-3xy)(4x^3)$
10) $(10x^2y)(-6xy^2)$
11) $(-14y^2)(2yz^2)$
12) $(8y^2z^2)(-7y^2z^2)$

2. จงหาผลคูณต่อไปนี้

1) $6(5x + 2)$
2) $\frac{1}{2}(4x + 6)$
3) $x(x - 1)$
4) $(-7x)(-8x + 9)$
5) $(10x + 9)(2x)$
6) $(-4)(x^2 - 6x)$
7) $(-5x)(x^2 + 8)$
8) $2(3x^2 - 4x - 7)$
9) $(9x)(x^2 + 2x - 3)$
10) $(-7x^2 + 10x)(-x^2)$
11) $(-3x)(2x^3 - x + 6)$
12) $(8x)(-6x^3 + 5x^2 - 11x)$

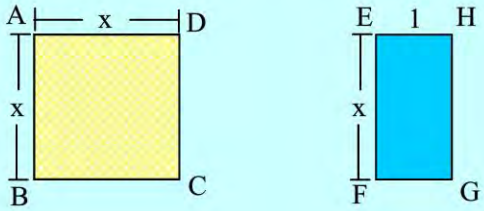
ชวนคิด

1. ดีกรีของผลบวกของพหุนามเท่ากับดีกรีของพหุนามที่เป็นตัวตั้งหรือดีกรีของพหุนามที่เป็นตัวบวกอย่างใดอย่างหนึ่งหรือไม่
2. ดีกรีของผลคูณระหว่างเอกนามกับพหุนามมีความเกี่ยวข้องกับดีกรีของเอกนามและดีกรีของพหุนามที่นำมาคูณกันอย่างไร

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

พหุนามกับพื้นที่

ให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีด้านยาวเท่ากับ x EFGH เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีด้านยาวยาวเท่ากับ x หน่วย ด้านกว้างยาวเท่ากับ 1 หน่วย ดังรูป



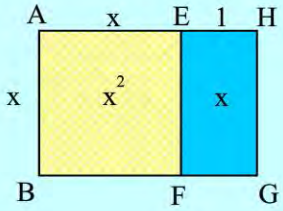
ดังนั้น พื้นที่ของ ABCD เท่ากับ $x \times x = x^2$ ตารางหน่วย

และ พื้นที่ของ EFGH เท่ากับ $1 \times x = x$ ตารางหน่วย

เมื่อเลื่อน ABCD และ EFGH มาต่อกันโดยให้ $\overline{EF}$ ทับกับ $\overline{DC}$

จะได้ ABGH เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ที่มีด้านยาว ยาวเท่ากับ $x+1$ หน่วย

ด้านกว้างยาวเท่ากับ x หน่วย ดังรูป



ดังนั้น พื้นที่ของ ABGH = $x(x+1)$ ตารางหน่วย

แต่ พื้นที่ของ ABGH = พื้นที่ของ ABCD + พื้นที่ของ EFGH

$= x^2 + x$ ตารางหน่วย

ดังนั้น $x(x+1) = x^2 + x$

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

2.6 การหารพหุนาม

ในการหารพหุนาม มีข้อตกลงว่า *เอกนามหรือพหุนามที่เป็นตัวหารต้องไม่เป็นศูนย์*

การหารเอกนามด้วยเอกนาม

พิจารณาการหารเอกนามด้วยเอกนามในแต่ละข้อต่อไปนี้ซึ่งทำได้โดยใช้สมบัติของเลขยกกำลัง

1. $x^3y^2 \div xy = \frac{x^3y^2}{xy}$

$= x^{3-1}y^{2-1}$

$= x^2y$

2. $15x^2y \div 3xy = \frac{15x^2y}{3xy}$

$= \frac{15}{3}x^{2-1}y^{1-1}$

$= 5xy^0$

$= 5x(1)$

$= 5x$

การหารข้างต้นนี้มีตัวตั้ง ตัวหาร และผลหาร ดังนี้

ข้อ	ตัวตั้ง	ตัวหาร	ผลหาร
1	x^3y^2	xy	x^2y
2	$15x^2y$	$3xy$	$5x$

จะเห็นว่าผลหารที่ได้เป็นเอกนาม และเมื่อนำตัวหารคูณกับผลหารจะได้เท่ากับตัวตั้ง ดังนี้

$(xy)(x^2y) = x^3y^2$

$(3xy)(5x) = 15x^2y$

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

ในการหารเอกนามด้วยเอกนามนั้น จะนำค่าคงตัวในแต่ละเอกนามมาหารกัน และนำตัวแปรในแต่ละเอกนามมาหารกันโดยใช้สมบัติของเลขยกกำลัง และเมื่อได้ผลหารเป็นเอกนาม จะกล่าวว่าการหารนั้นเป็น**การหารลงตัว** ซึ่งเป็นไปตามความสัมพันธ์ดังนี้

ตัวหาร × ผลหาร = ตัวตั้ง

ดังนั้น การหารเอกนามด้วยเอกนาม เมื่อได้ผลหารเป็นเอกนาม เราสามารถตรวจสอบผลหาร โดยนำตัวหารคูณกับผลหาร ถ้ามีผลลัพธ์เท่ากับตัวตั้ง แสดงว่าผลหารที่ได้ถูกต้อง

ในที่นี้ จะกล่าวถึงการหารเอกนามด้วยเอกนามที่มีผลหารเป็นเอกนามเท่านั้น

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลหารต่อไปนี้

1. $\frac{x^5}{x^2}$
2. $\frac{2x^{10}}{x^3}$
3. $\frac{21x^2y^3}{7y}$
4. $\frac{18x^4y^2}{-10x^2y}$

วิธีทำ 1. $\frac{x^5}{x^2} = x^{5-2}$

$= x^3$

ตอบ x^3

ตรวจสอบผลหาร

$(x^2)(x^3) = x^5$

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

2. $\frac{2x^{10}}{x^3} = \left(\frac{2}{1}\right)x^{10-3}$

$= 2x^7$

ตรวจสอบผลหาร

$(x^3)(2x^7) = 2x^{10}$

ตอบ $2x^7$

3. $\frac{21x^2y^3}{7y} = \left(\frac{21}{7}\right)x^2y^{3-1}$

$= 3x^2y^2$

ตรวจสอบผลหาร

$(7y)(3x^2y^2) = 21x^2y^3$

ตอบ $3x^2y^2$

4. $\frac{18x^4y^2}{-10x^2y} = \left(\frac{18}{-10}\right)x^{4-2}y^{2-1}$

$= -\frac{9}{5}x^2y$

ตรวจสอบผลหาร

$(-10x^2y)(-\frac{9}{5}x^2y) = 18x^4y^2$

ตอบ $-\frac{9}{5}x^2y$

แบบฝึกหัด 2.6 ก

จงหาผลหารต่อไปนี้

1. $\frac{-10x}{5}$
2. $\frac{10x^2}{2x}$
3. $\frac{x^2}{3x}$
4. $\frac{8y^4}{16y^2}$
5. $\frac{20xy}{5x}$
6. $\frac{3xy^2}{2y}$
7. $\frac{12x^2y}{-3y}$
8. $\frac{-27x^2y^2}{-9xy}$

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

9. $\frac{15x^3y}{12xy}$

10. $\frac{-x^4y^3}{x^2y^2}$

11. $\frac{6x^3y^4}{x^3y^2}$

12. $\frac{4x^4y^4}{8x^2y^3}$

การหารพหุนามด้วยเอกนาม

พิจารณาการหารพหุนามด้วยเอกนามในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $(2x+6) \div 2 = \frac{2x+6}{2}$

$= \frac{2x}{2} + \frac{6}{2}$

$= x + 3$

2. $(4-x) \div 5 = \frac{4-x}{5}$

$= \frac{4}{5} - \frac{x}{5}$

3. $(9x^2 + 12x) \div 3x = \frac{9x^2+12x}{3x}$

$= \frac{9x^2}{3x} + \frac{12x}{3x}$

$= 3x + 4$

ใช้หลักเกณฑ์ของการบวกเศษส่วน เช่น

$\frac{5}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5+1}{2}$

นั่นคือ $\frac{5+1}{2} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}$

จึงเขียน $\frac{2x+6}{2} = \frac{2x}{2} + \frac{6}{2}$

การหารข้างต้นนี้มีตัวตั้ง ตัวหาร และผลหาร ดังนี้

ข้อ	ตัวตั้ง	ตัวหาร	ผลหาร
1	$2x + 6$	2	$x + 3$
2	$4 - x$	5	$\frac{4}{5} - \frac{x}{5}$
3	$9x^2 + 12x$	$3x$	$3x + 4$

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

จะเห็นว่าผลหารที่ได้เป็นพหุนาม และเมื่อนำตัวหารคูณกับผลหารจะได้เท่ากับตัวตั้ง ดังนี้

$$2 \times (x + 3) = 2x + 6$$

$$5 \times \left(\frac{4}{5} - \frac{x}{5}\right) = 4 - x$$

$$(3x)(3x + 4) = 9x^2 + 12x$$

ในการหารพหุนามด้วยเอกนามนั้น จะหารแต่ละพจน์ของพหุนามด้วยเอกนาม แล้วนำผลหารเหล่านั้นมาบวกกัน และเมื่อได้ผลหารเป็นพหุนาม จะกล่าวว่าการหารนั้นเป็น**การหารลงตัว** ซึ่งเป็นไปตามความสัมพันธ์ดังนี้

ตัวหาร × ผลหาร = ตัวตั้ง

ดังนั้น การหารพหุนามด้วยเอกนาม เมื่อได้ผลหารเป็นพหุนาม เราสามารถตรวจสอบผลหารโดยนำตัวหารคูณกับผลหาร ถ้ามีผลลัพธ์เท่ากับตัวตั้ง แสดงว่าผลหารที่ได้ถูกต้อง

ในที่นี้ จะกล่าวถึงการหารพหุนามด้วยเอกนามที่มีผลหารเป็นพหุนามเท่านั้น

ตัวอย่างที่ 2 จงหาร $18x^2 + 30x$ ด้วย $6x$

วิธีทำ

$$\frac{18x^2 + 30x}{6x} = \frac{18x^2}{6x} + \frac{30x}{6x}$$

$$= 3x + 5$$

ตอบ $3x + 5$

ตรวจสอบผลหาร

$(6x)(3x + 5) = 18x^2 + 30x$

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึ่งกระทำ บ้างไม่พึ่งกระทำ

ตัวอย่างที่ 3 จงหาร $15x^3 - 24x^2$ ด้วย $-3x$

วิธีทำ

$$\frac{15x^3 - 24x^2}{-3x} = \frac{15x^3 + (-24x^2)}{-3x}$$

$$= \frac{15x^3}{-3x} + \frac{(-24x^2)}{-3x}$$

$$= -5x^2 + 8x$$

ตอบ $-5x^2 + 8x$

ตรวจสอบผลหาร

$(-3x)(-5x^2 + 8x) = 15x^3 - 24x^2$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาผลหารต่อไปนี้

1. $(-10x^3 + 20x^2) \div 5x^2$

2. $\frac{3x^3 - 4x^2 + 8x}{2x}$

วิธีทำ

1. $(-10x^3 + 20x^2) \div 5x^2 = \frac{-10x^3 + 20x^2}{5x^2}$

$$= \frac{(-10x^3)}{5x^2} + \frac{20x^2}{5x^2}$$

$$= -2x + 4$$

ตอบ $-2x + 4$

ตรวจสอบผลหาร

$(5x^2)(-2x + 4) = -10x^3 + 20x^2$

2. $\frac{3x^3 - 4x^2 + 8x}{2x} = \frac{3x^3}{2x} + \frac{(-4x^2)}{2x} + \frac{8x}{2x}$

$$= \frac{3}{2}x^2 + (-2x) + 4$$

$$= \frac{3}{2}x^2 - 2x + 4$$

ตอบ $\frac{3}{2}x^2 - 2x + 4$

ตรวจสอบผลหาร

$(2x)(\frac{3}{2}x^2 - 2x + 4) = 3x^3 - 4x^2 + 8x$

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

แบบฝึกหัด 2.6 ข

1. จงหาผลหารต่อไปนี้

1) $(4x - 8) \div 2$
2) $(-6x + 15) \div 3$
3) $(14x^2 + 7) \div 7$
4) $(-5x^2 + 20) \div (-5)$
5) $(12x^2 - 20x) \div 4$
6) $(3x^2 + 8x) \div x$
7) $(4x^2 - 6x) \div 2x$
8) $(-12x^2 + 28x) \div (-4x)$
9) $(x^2 - 4x^3) \div x^2$
10) $(x^3 + 6x^2 - x) \div (-x)$

2. จงหาผลหารต่อไปนี้

1) $\frac{5-3x}{4}$
2) $\frac{-18x^2-36}{-9}$
3) $\frac{4x^2-x}{5x}$
4) $\frac{-15x+12x^3}{-3x}$
5) $\frac{21x+49x^3}{-7x}$
6) $\frac{8x^3-3x^2}{x^2}$
7) $\frac{-18x^3+24x^2}{6x^2}$
8) $\frac{x^2+3x^3}{-x^2}$
9) $\frac{-12x^3+10x^2-6x}{-2x}$
10) $\frac{4x^3-3x^2-8x}{4x}$

3. จงหาตัวตั้งซึ่งได้จากการหารที่มีตัวหารและผลหารดังต่อไปนี้

ข้อ	ตัวหาร	ผลหาร
1	$4x$	$x - 1$
2	$-x$	$-3x + 7$
3	$2x$	$5 - 2x^2$
4	$3x^2$	$-6x - 8$
5	$7x$	$-x^2 + 4x$
6	$-5x$	$3x^2 - x + 6$

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

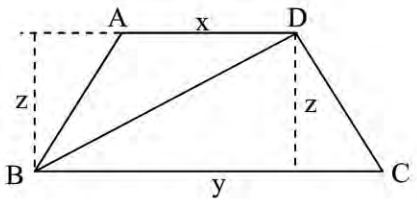
สูตรพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู

กำหนด ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู $\overline{AD}$ ขนานกับ $\overline{BC}$

ให้ AD = x หน่วย และ BC = y หน่วย

ระยะห่างระหว่างเส้นขนานเท่ากับ z หน่วย

เมื่อลากเส้นทแยงมุม BD จะได้ Δ ABD และ Δ DBC ดังรูป



จากรูป จะได้

พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมคางหมู ABCD = พื้นที่ Δ ABD + พื้นที่ Δ DBC

$$= \frac{1}{2}xz + \frac{1}{2}yz \quad \text{ตารางหน่วย}$$

$$= \frac{1}{2}z(x + y) \quad \text{ตารางหน่วย (สมบัติการแจกแจง)}$$

จากรูป $x + y$ เป็นผลบวกของความยาวของด้านคู่ขนาน และ z เป็นความสูงของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู ABCD

ดังนั้น จึงได้สูตรการหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู ดังนี้

พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู $= \frac{1}{2} \times$ ความสูง $\times$ ผลบวกของความยาวของด้านคู่ขนาน

นักเรียนจะเห็นว่า เราใช้ความรู้ในเรื่องพหุนามมาหาสูตรสำหรับหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูรูปใด ๆ ก็ได้ เมื่อทราบความสูงและความยาวของด้านคู่ขนาน

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึ่งกระทำ บ้างไม่พึ่งกระทำ

บทที่ 3

การประยุกต์ 2

3.1 แบบรูปของจำนวน

นักเรียนรู้จักจำนวนเต็ม จำนวนคู่ จำนวนคี่และจำนวนเฉพาะมาแล้ว ในจำนวนเหล่านี้มีบางจำนวนที่มีแบบรูปน่าสนใจและชวนให้ศึกษาค้นคว้า ดังต่อไปนี้

พาลินโดรม

คำหรือวลีที่สามารถเขียนตัวอักษรเรียงย้อนกลับจากหลังไปหน้า หรือจากขวาไปซ้าย แล้วยังคงอ่านออกเสียงได้เหมือนเดิม เช่น กก กนก ยาย นาน บวบ DAD MOM EYE NUN POP MADAM เรียกว่า **พาลินโดรม** คำว่าพาลินโดรมเป็นภาษากรีก แปลว่า วิ่งกลับไปที่เดิมอีก (running back again)

ให้นักเรียนยกตัวอย่างคำในภาษาไทยอื่น ๆ ที่เป็น พาลินโดรม

ในทางคณิตศาสตร์ **พาลินโดรม** เป็นจำนวนนับที่เมื่อเขียนเลขโดดเรียงย้อนกลับจากหลังไปหน้าหรือจากขวาไปซ้าย แล้วได้จำนวนเดิม เช่น 8, 22, 101 และ 252

พาลินโดรมที่มีหนึ่งหลัก ได้แก่ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 และ 9

พาลินโดรมที่มีสองหลัก ได้แก่ 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88 และ 99

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

พาลินโดรมที่มีสามหลัก

ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้

1. เขียนพาลินโดรมที่มีสามหลักทั้งหมด
2. เขียนพาลินโดรมที่มีสามหลักได้ทั้งหมดกี่จำนวน
3. พาลินโดรมที่นักเรียนเขียนได้ มีจำนวนเท่ากับของเพื่อน ๆ หรือไม่

คำตอบของนักเรียนอาจไม่ตรงกับของเพื่อน ๆ ทั้งนี้เพราะพาลินโดรมที่มีสามหลักมีจำนวนมาก ถ้านักเรียนไม่เขียนให้เป็นระบบ ก็อาจเขียนได้ไม่ครบทุกจำนวน

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างการเขียนพาลินโดรมที่มีสามหลักอย่างเป็นระบบ

101	111	121	131	141	151	161	171	181	191
202	212	222	232	242	252	262	272	282	292
303	313	323	333	343	353	363	373	383	393
404	414	424	434	444	454	464	474	484	494
					.				
					.				
					.				
909	919	929	939	949	959	969	979	989	999

4. นักเรียนคิดว่าพาลินโดรมที่มีสามหลักมีทั้งหมดกี่จำนวน
5. นักเรียนสังเกตเห็นหรือไม่ว่า การเขียนพาลินโดรมที่มีสามหลักข้างต้นมีแบบรูปของการเขียนเป็นอย่างไร

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

พาลินโดรมที่มีสี่หลัก

ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้

1. เขียนพาลินโดรมที่มีสี่หลักให้ครบทุกจำนวนอย่างเป็นระบบ
2. พาลินโดรมที่มีสี่หลัก มีทั้งหมดกี่จำนวน

กำลังของพาลินโดรม

ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้

1. เติมคำตอบในช่องว่าง แล้วสังเกตผลลัพธ์ที่ได้ว่า เป็นพาลินโดรมหรือไม่

11^2 = 121

101^2 = 10201

1001^2 = 1002001

10001^2 = ...

100001^2 = ...

1000001^2 = ...

2. จากแบบรูปของจำนวนในข้อ 1 นักเรียนคิดว่า 100000000001^2 มีผลลัพธ์เป็นเท่าใด และเป็นพาลินโดรมหรือไม่

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึ่งกระทำ บ้างไม่พึ่งกระทำ

3. เติมคำตอบในช่องว่าง แล้วสังเกตผลลัพธ์ที่ได้ว่าเป็นพาลินโดรมหรือไม่

22^2 = 484

202^2 = 40804

2002^2 = 4008004

20002^2 = ...

200002^2 = ...

2000002^2 = ...

4. จากแบบรูปของจำนวนในข้อ 3 นักเรียนคิดว่า 200000000002^2 มีผลลัพธ์เป็นเท่าใด และเป็นพาลินโดรมหรือไม่

สร้างพาลินโดรม

วิธีสร้างพาลินโดรมทางคณิตศาสตร์ที่รู้จักกันแพร่หลาย คือ เมื่อนำจำนวนนับที่มีสองหลักมาบวกกับจำนวนที่ได้จากการเขียนเลขโดดเรียงย้อนกลับจากหลังไปหน้าของจำนวนเดิม ถ้าผลลัพธ์ยังไม่เป็นพาลินโดรม ให้นำผลลัพธ์นั้นไปบวกกับจำนวนที่ได้จากการเขียนเลขโดดเรียงย้อนกลับจากหลังไปหน้าของผลลัพธ์นั้นอีก ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนกว่าจะได้พาลินโดรม เช่น

ตัวอย่าง

1. สร้างพาลินโดรมจาก 25 ทำได้ดังนี้

ครั้งที่ 1 $25 + 52 = 77$ เป็นพาลินโดรม

2. สร้างพาลินโดรมจาก 84 ทำได้ดังนี้

ครั้งที่ 1 $84 + 48 = 132$ ไม่เป็นพาลินโดรม

ครั้งที่ 2 $132 + 231 = 363$ เป็นพาลินโดรม

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึ่งกระทำ บ้างไม่พึ่งกระทำ

3. สร้างพาลินโดรมจาก 96 ทำได้ดังนี้

ครั้งที่ 1	96 + 69	=	165	ไม่เป็นพาลินโดรม
ครั้งที่ 2	165 + 561	=	726	ไม่เป็นพาลินโดรม
ครั้งที่ 3	726 + 627	=	1353	ไม่เป็นพาลินโดรม
ครั้งที่ 4	1353 + 3531	=	4884	เป็นพาลินโดรม

ให้นักเรียนสร้างพาลินโดรมจากจำนวนที่มีสองหลักอื่น ๆ ซึ่งได้จากการบวกเพียงหนึ่งครั้ง และมากกว่าหนึ่งครั้ง อย่างละ 2 จำนวน

นักเรียนคิดว่าจะสามารถสร้างพาลินโดรมจากจำนวนที่มีสองหลักทุกจำนวน ตามหลักการข้างต้นได้หรือไม่

เติมได้ไหม

จงเติมคำตอบในช่องว่างให้สมบูรณ์

1. $12345679 \times 9 = 111111111$

   $12345679 \times 18 = 222222222$

   $12345679 \times 27 = 333333333$

   $12345679 \times 36 =$ .....

   $12345679 \times$ ..... $= 555555555$

2. $8 + (9 \times 0) = 8$

   $7 + (9 \times 9) = 88$

   $6 + (9 \times 98) =$ .....

   $5 + (9 \times 987) =$ .....

   ..... $= 88888$

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

ปัญหาดั้งเดิมของฟีโบนักชี

เดือน	ครอบครัวกระต่าย	จำนวนคู่
มกราคม	1	1
กุมภาพันธ์	1	1
มีนาคม	1 2	2
เมษายน	1 3 2	3
พฤษภาคม	1 4 3 2 5	5
มิถุนายน	1 6 4 3 7 2 8 5	8
กรกฎาคม	1 9 6 10 4 3 11 7 2 12 8 5 13	13

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

ลำดับฟีโบนักชี

เลโอนาร์โดแห่งปีซา หรือ ฟีโบนักชี (Leonardo of Pisa หรือ Fibonacci) นักคณิตศาสตร์ชาวอิตาลี ซึ่งมีชีวิตอยู่ในคริสต์ศักราช 1170 – 1250 เป็นผู้นำระบบตัวเลขฮินดูอารบิกมาใช้อย่างแพร่หลายในยุโรป ด้วยการเขียนหนังสือเกี่ยวกับการคิดคำนวณชื่อ The Book of Abacus ในหนังสือเล่มนี้มีโจทย์ปัญหาข้อหนึ่งซึ่งมีชื่อเสียงมาก คือ ปัญหาจำนวนกระต่ายในทุ่งหญ้า ปัญหานี้ทำให้ได้แบบรูปของจำนวนชุดหนึ่ง ซึ่งเรียงเป็นลำดับดังนี้

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, . . .

ลำดับดังกล่าวรู้จักกันกว้างขวางต่อมาว่า **ลำดับฟีโบนักชี**

เมื่อนักเรียนพิจารณาจำนวนที่เรียงกันในลำดับฟีโบนักชี 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, . . . จะสังเกตเห็นแบบรูปของจำนวนเป็นดังนี้

จำนวนที่หนึ่ง คือ 1
จำนวนที่สอง คือ 1
จำนวนที่สาม คือ 2 ซึ่งเท่ากับผลบวกของจำนวนที่หนึ่งกับจำนวนที่สอง
จำนวนที่สี่ คือ 3 ซึ่งเท่ากับผลบวกของจำนวนที่สองกับจำนวนที่สาม
จำนวนที่ห้า คือ 5 ซึ่งเท่ากับผลบวกของจำนวนที่สามกับจำนวนที่สี่
จำนวนที่หก คือ 8 ซึ่งเท่ากับผลบวกของจำนวนที่สี่กับจำนวนที่ห้า
จำนวนที่เจ็ด คือ 13 ซึ่งเท่ากับผลบวกของจำนวนที่ห้ากับจำนวนที่หก

จำนวนอื่น ๆ ถัดไปหาได้จากผลบวกของสองจำนวนก่อนหน้า เป็นเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

ถ้านักเรียนเคยนับจำนวนของสิ่งต่าง ๆ บางชนิดในธรรมชาติ ก็จะพบจำนวนบางจำนวนในลำดับฟีโบนักชีปรากฏอยู่ เช่น จำนวนกลีบดอกไม้

ให้นักเรียนพิจารณาจำนวนกลีบดอกไม้ต่อไปนี้

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

จะเห็นว่าจำนวนกลีบดอกไม้แต่ละดอกข้างต้นเป็น 1 กลีบบ้าง 2 กลีบบ้าง 3 กลีบบ้าง ... และ 21 กลีบบ้าง จำนวนเหล่านี้เป็นจำนวนในลำดับฟีโบนักชี ให้นักเรียนนับกลีบดอกไม้อื่น ๆ รอบตัวนักเรียน แล้วพิจารณาว่าเป็นจำนวนหนึ่งในลำดับฟีโบนักชีหรือไม่

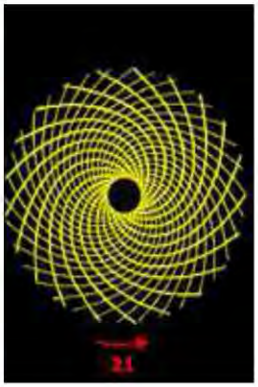
นอกจากนี้ยังมีจำนวนในลำดับฟีโบนักชีปรากฏอยู่ในธรรมชาติ เช่น

1. จำนวนแถวของตาสับปะรดเรียงตามเข็มนาฬิกา และทวนเข็มนาฬิการอบผล เป็น 8 และ 13 ตามลำดับ ดังรูป

แถวของตาเรียงตามเข็มนาฬิกา

แถวของตาเรียงทวนเข็มนาฬิกา

2. จำนวนแถวของเกสรหรือเมล็ดดอกทานตะวัน เรียงทวนเข็มนาฬิกาและตามเข็มนาฬิกาเป็น 21 และ 34 ตามลำดับ ดังรูป

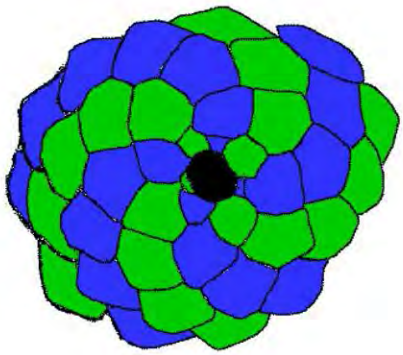


แถวของเมล็ดเรียงทวนเข็มนาฬิกา

แถวของเมล็ดเรียงตามเข็มนาฬิกา

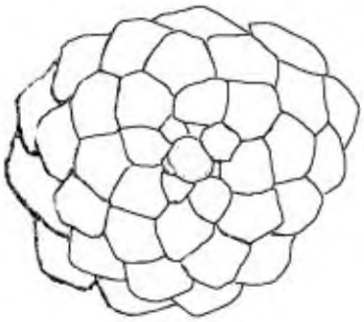
Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

3. ลูกสนชนิดหนึ่งมีจำนวนแถวของตาเรียงทวนเข็มนาฬิกาเป็น 8 ดังรูป



แถวของตาลูกสนเรียงทวนเข็มนาฬิกา

ให้นักเรียนระบายสี เพื่อหาจำนวนแถวของตาลูกสนเมื่อเรียงตามเข็มนาฬิกา แล้วพิจารณาว่าเป็นจำนวนในลำดับฟีโบนักชีหรือไม่



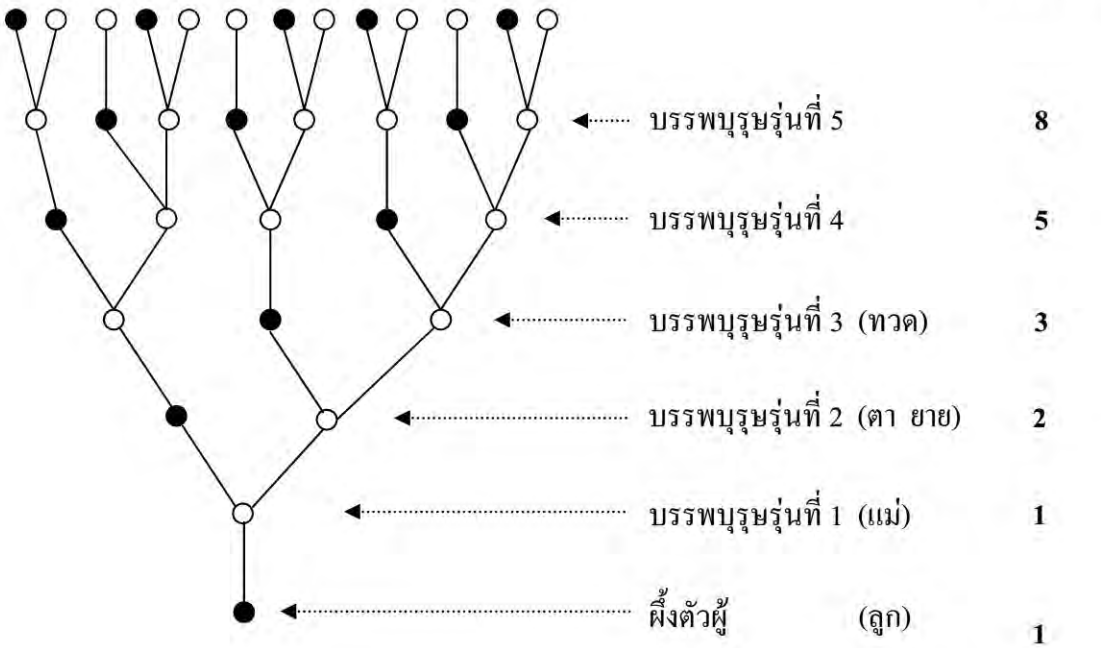
Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

เรื่องของผึ้ง

รังผึ้งแต่ละรังมีนางพญาผึ้งเพียงตัวเดียว ทำหน้าที่วางไข่ ไข่ฟองใดที่ได้รับการผสมพันธุ์จากผึ้งตัวผู้จะฟักออกเป็นผึ้งตัวเมีย แต่ไข่ฟองใดที่ไม่ได้รับการผสมพันธุ์จากผึ้งตัวผู้จะฟักออกเป็นผึ้งตัวผู้ ดังนั้นกล่าวได้ว่าผึ้งตัวเมียจะมีทั้งพ่อและแม่ แต่ผึ้งตัวผู้จะมีเพียงแม่เท่านั้น

เมื่อพิจารณาเชื้อสายของผึ้งตัวผู้ตัวหนึ่ง จะพบว่า จำนวนผึ้งและจำนวนบรรพบุรุษในแต่ละรุ่นมีแบบรูปที่น่าสนใจ ดังแผนภาพต่อไปนี้

● แทนผึ้งตัวผู้ ○ แทนผึ้งตัวเมีย



Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

เมื่อนำจำนวนผึ้งทุกรุ่นจากแผนภาพมาเขียนเรียงกัน จะได้แบบรูปของจำนวนดังนี้

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... ซึ่งเป็น **ลำดับฟีโบนักชี**

ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

1. จงหาจำนวนผึ้งที่เป็นบรรพบุรุษรุ่นที่ 6 ถึง รุ่นที่ 10
2. ให้ F_n แทนจำนวนที่ n ในลำดับฟีโบนักชี
   1) $F_{12} = 144$ และ $F_{13} = 233$ จงหา F_{14}
   2) $F_{15} = 610$ และ $F_{17} = 1,597$ จงหา F_{16}
   3) $F_{20} = 6,765$ และ $F_{21} = 10,946$ จงหา F_{19}

ปัญหาชวนคิด

ให้นักเรียนพิจารณาปัญหาต่อไปนี้

มานิตจัดเลี้ยงสังสรรค์เพื่อนฝูงร่วมรุ่นทั้งหมด 30 คน (รวมมานิตด้วย) เป็นธรรมเนียมว่า เมื่อพบกัน จะมีการจับมือทักทายซึ่งกันและกันทุกคน คู่ละหนึ่งครั้ง นักเรียนคิดว่าในการพบกันครั้งนี้มีการจับมือกันทั้งหมดกี่ครั้ง

ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

1. เจริญเป็นเพื่อนคนแรกที่มาร่วมงาน เจริญจับมือทักทายมานิต สองคนนี้มีการจับมือกันกี่ครั้ง
2. ปัญญาเข้ามาร่วมงานเพิ่มขึ้นอีก 1 คน ระหว่างสามคนนี้มีการจับมือกันกี่ครั้ง

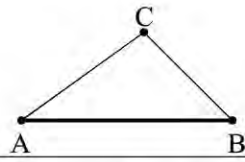
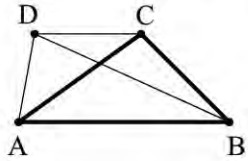
Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึ่งกระทำ บ้างไม่พึ่งกระทำ

3. นครเข้ามาร่วมงานเป็นคนที่สี่ นักเรียนบอกได้หรือไม่ว่า มีการจับมือกันกี่ครั้ง นักเรียนมีวิธีคิดอย่างไรและได้คำตอบเท่าไร จงอธิบาย
4. ถ้าต้องหาคำตอบสำหรับคนที่มาร่วมงาน 30 คน วิธีคิดของนักเรียนยังใช้ได้สะดวกหรือไม่

นักเรียนจะเห็นว่าการหาคำตอบในข้อ 4 อาจมีความยุ่งยากกว่าการหาคำตอบในข้อ 1 ข้อ 2 และข้อ 3 ซึ่งสามารถหาได้โดยใช้วิธีนับ แต่เมื่อจำนวนคนเพิ่มขึ้นเป็นจำนวนมาก การหาคำตอบโดยวิธีนับอาจต้องใช้เวลานานหรือเกิดความสับสน นับได้ไม่ถูกต้อง

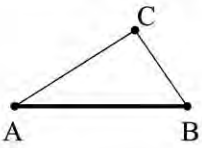
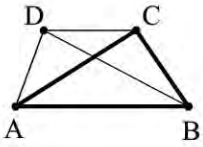
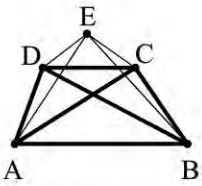
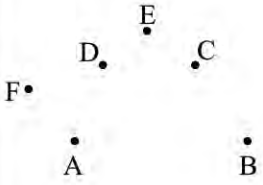
การแก้ปัญหาข้างต้น ในทางคณิตศาสตร์อาจสร้างแบบจำลองโดยใช้ความรู้ที่ว่า *ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมต่อจุดสองจุดที่กำหนดให้ มีเพียงเส้นเดียวเท่านั้น* ในที่นี้จะให้จุดแทนคนและส่วนของเส้นตรงแทนการจับมือระหว่างคนสองคน ดังนั้นจำนวนส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมต่อระหว่างจุดสองจุดใด ๆ จะเป็นจำนวนครั้งของการจับมือระหว่างคนสองคน และเพื่อป้องกันความสับสนในการนับจำนวนส่วนของเส้นตรง จะไม่กำหนดให้สามจุดใด ๆ อยู่บนแนวเส้นตรงเดียวกัน

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ดังกล่าวเป็นดังนี้

จำนวนคนที่จับมือกัน	แบบจำลองทางคณิตศาสตร์	จำนวนครั้งของการจับมือ
2		1
3		3
4		6
⋮	⋮	⋮

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

ให้นักเรียนพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนจุดและจำนวนส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมต่อจุดสองจุดใด ๆ แล้วเขียนคำตอบเติมในช่องว่างต่อไปนี้

จำนวนจุด	แบบจำลองทางคณิตศาสตร์	จำนวนส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมต่อจุดสองจุด
1		0 (0)
2		1 (0+1)
3		3 (0+1+2)
4		6 (0+1+2+3)
5		.....
6		.....
⋮	⋮	⋮

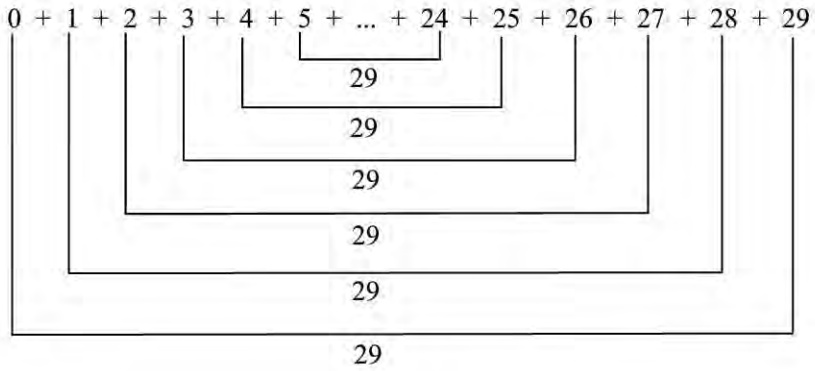
Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

1. ถ้ามีจุด 7 จุด ลากส่วนของเส้นตรงได้กี่เส้น
2. ถ้ามีจุด 10 จุด ลากส่วนของเส้นตรงได้กี่เส้น

ถ้ามีจุด 30 จุด การหาจำนวนส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมต่อระหว่างจุดสองจุดใดๆ จะได้จากการหาผลบวกของ $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + 27 + 28 + 29$

การหาผลบวกข้างต้น อาจใช้วิธี ดังแผนภาพ



จากแผนภาพผลบวกของจำนวนสองจำนวนที่เท่ากับ 29 มี 15 คู่

ดังนั้น $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + 27 + 28 + 29 = 15 \times 29$

$= 435$

ดังนั้นเมื่อกำหนดจุด 30 จุดให้ จำนวนส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมต่อระหว่างจุดสองจุดใด ๆ จึงเท่ากับ 435 เส้น

นั่นคือ ในงานเลี้ยงของมานิตที่มีคนทั้งหมด 30 คน มีการจับมือทักทายซึ่งกันและกันทุกคน รวมทั้งหมด 435 ครั้ง

การหาคำตอบข้างต้นเป็นตัวอย่างหนึ่งของการนำแบบจำลองทางคณิตศาสตร์มาใช้ในการแก้ปัญหา

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

คิดได้หรือไม่

ให้นักเรียนหาคำตอบต่อไปนี้

1. โรงเรียนรักธรรมศึกษาจัดแข่งขันฟุตบอลของนักเรียนระหว่างสีแดง สีฟ้า สีเหลือง สีเขียว และสีม่วง แบบพบกันหมดทุกสี ในการแข่งขันรอบแรกโรงเรียนจะต้องจัดแข่งขันทั้งหมดกี่ครั้ง
2. ในหมู่บ้านแห่งหนึ่ง มีโรงเรียน วัด อ่างเก็บน้ำ สหกรณ์และตลาด ต้องการสร้างทางเดินเชื่อมระหว่างสถานที่ทุก ๆ สองแห่ง เพื่อเดินไปมาหากันโดยตรง ไม่ต้องผ่านสถานที่อีกแห่งหนึ่ง จะต้องสร้างทางเดินทั้งหมดกี่ทาง
3. ร้านขายข้าวแกงในโรงอาหารของโรงเรียนมีกับข้าวดังนี้ ไข่ดาว ผัดกระเพราไก่ ปีกไก่ทอด พะแนงเนื้อ ผัดผักบุ้ง ผัดผักรวม ยำวุ้นเส้นและแกงจืดผักกาดขาว หนูนิดต้องการเลือกกับข้าว 2 อย่าง หนูนิดจะเลือกได้ทั้งหมดกี่แบบ

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

IPST Cup

ในการแข่งขันฟุตบอลชิงถ้วย IPST มีทีมเข้าแข่งขัน 8 ทีม ให้จับฉลากเพื่อจัดทีมเข้าสาย 2 สาย สายละ 4 ทีม จงหาว่าจะต้องจัดแข่งขันทั้งหมดกี่ครั้งจึงจะได้ทีมที่ชนะเลิศ ถ้าการแข่งขันมีเงื่อนไข ดังนี้

รอบที่ 1 ทุกทีมในแต่ละสายต้องพบกันหมดและคัดเลือกทีมที่มีคะแนนนำไว้ 2 ทีม

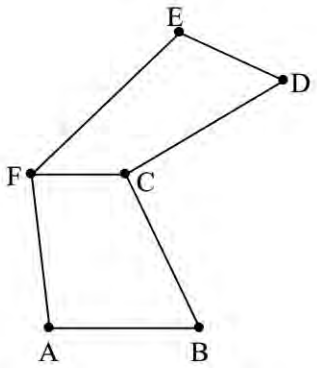
รอบที่ 2 นำทีมจากรอบที่ 1 มาแข่งกัน โดยการสลับสายให้ทีมที่ 1 ของสายหนึ่งคู่กับทีมที่ 2 ของอีกสายหนึ่ง และให้ทีมที่ชนะในแต่ละคู่ไปแข่งรอบชิงชนะเลิศ

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

3.2 ข่ายงาน

สำนักงานตำรวจแห่งชาติมีโครงการ “ฝากบ้านไว้กับตำรวจ” เพื่อรักษาความปลอดภัยของทรัพย์สินให้กับประชาชนในช่วงวันหยุดเทศกาลสงกรานต์ และเพื่อส่งเสริมให้ประชาชนไปทำบุญและเคารพญาติผู้ใหญ่ที่บ้านเกิด โดยให้ตำรวจสายตรวจแวะเวียนไปตามบ้านที่ฝากไว้เป็นระยะ ๆ

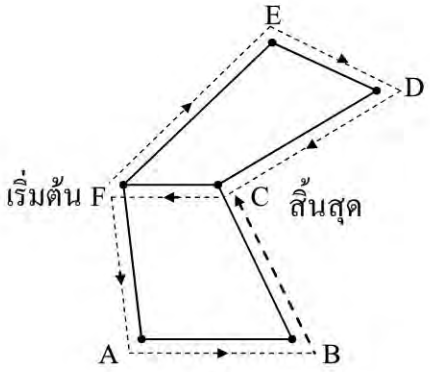
หมู่ดอนและหมู่สินได้รับคำสั่งให้ตรวจบ้านที่ฝากไว้ในตำแหน่งที่จุด A, B, C, D, E และ F ดังแผนผัง ให้ครบทุกบ้าน

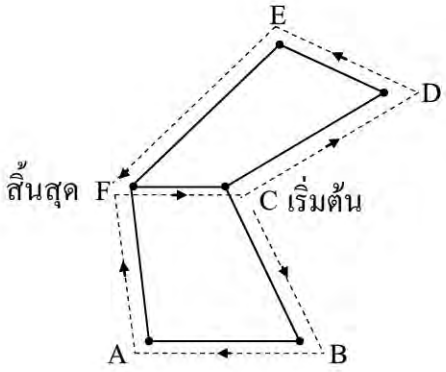


หมู่ทั้งสองต้องการวางแผนการเดินทางไปตรวจบ้านต่าง ๆ โดยไม่ซ้ำเส้นทางเดิม นักเรียนคิดว่าจะช่วยตำรวจแก้ปัญหานี้อย่างไร

ปัญหานี้อาจแก้ได้โดยลองลากเส้นทางดูหลาย ๆ แบบ ซึ่งจะพบว่า ถ้าเริ่มจากจุด F หรือจุด C ตำรวจจะสามารถเดินทางตรวจบ้านทุกบ้านได้โดยไม่ซ้ำเส้นทางเดิม ดังตัวอย่างเส้นทางต่อไปนี้

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

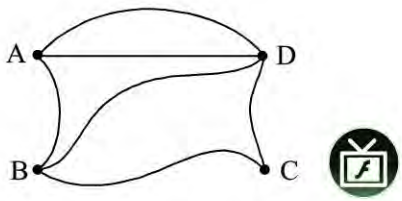




ในปัญหาข้างต้น ถ้ามีบ้านและถนนมากขึ้น การแก้ปัญหาโดยลองลากเส้นทางดูหลาย ๆ แบบจะเสียเวลาและอาจไม่พบคำตอบ

ในทางคณิตศาสตร์สามารถใช้ความรู้เรื่อง**ข่ายงาน**ที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้ มาช่วยแก้ปัญหาได้

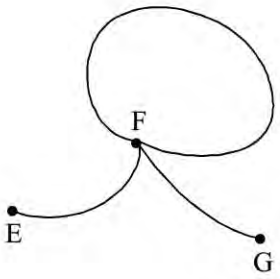
ข่ายงานมีวิวัฒนาการมาตั้งแต่คริสต์ศตวรรษที่สิบแปด โดยเลออนฮาร์ด ออยเลอร์ (Leonhard Euler) นักคณิตศาสตร์ชาวสวิส



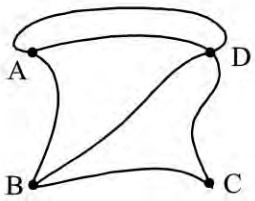
รูปข้างต้นแสดงถึงข่ายงานอันหนึ่ง ที่มีจุด A, B, C และ D เป็น**จุดยอด** จุดยอดเหล่านี้มีการเชื่อมระหว่างจุดด้วย **เส้นเชื่อม**

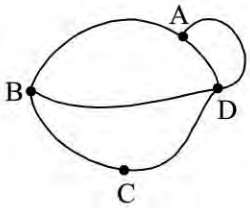
Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

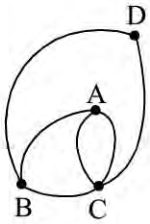
ในข่ายงานบางข่ายงาน เส้นเชื่อมอาจเกิดที่จุดเดียว เรียกเส้นเชื่อมในลักษณะนี้ว่า **รูปบ่วง** ดังตัวอย่างรูปบ่วงที่จุด F ต่อไปนี้

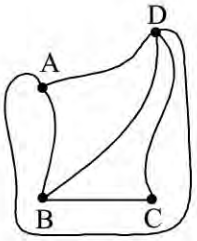


ในข่ายงาน จะไม่คำนึงถึงระยะห่างระหว่างจุดยอด และเส้นเชื่อมจะเป็นเส้นแบบใดก็ได้ เราจึงอาจเขียนข่ายงานหนึ่ง ๆ ได้หลายแบบ เช่น ข่ายงานทั้งสี่ต่อไปนี้เป็นข่ายงานเดียวกัน





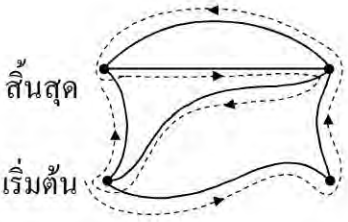




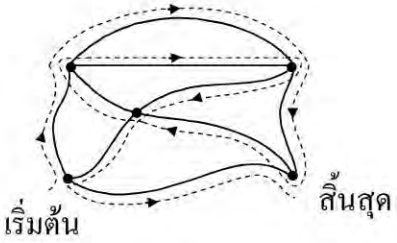
ข่ายงานที่สามารถลากตามเส้นเชื่อมทุกเส้นได้โดยตลอดอย่างต่อเนื่อง และไม่ซ้ำเส้นเดิม เรียกว่า **ข่ายงานที่ผ่านได้**

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

รูป ก และรูป ข ต่อไปนี้แสดงตัวอย่างของข่ายงานที่ผ่านได้

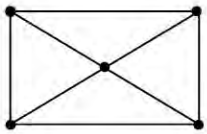


รูป ก



รูป ข

รูป ค เป็นตัวอย่างของข่ายงานที่**ไม่เป็น**ข่ายงานที่ผ่านได้ เพราะไม่สามารถลากตามเส้นเชื่อมทุกเส้นได้โดยตลอดอย่างต่อเนื่อง และไม่ซ้ำเส้นเดิม



รูป ค

การพิจารณาว่าข่ายงานที่กำหนดให้เป็นข่ายงานที่ผ่านได้หรือไม่ นอกจากจะทำโดยการลองลากตามเส้นเชื่อมทุกเส้นตามเงื่อนไขแล้ว เพื่อความสะดวกและรวดเร็ว เราสามารถพิจารณาจากจุดยอดของข่ายงาน

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

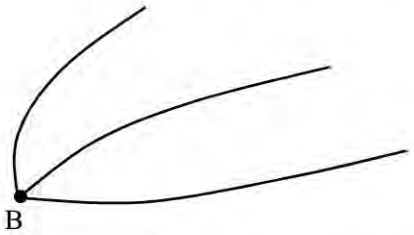
จุดยอดของข่ายงานมี 2 ชนิด คือ **จุดยอดคี่** และ **จุดยอดคู่**

จุดยอดของข่ายงานเป็น **จุดยอดคี่** เมื่อจำนวนเส้นเชื่อมที่มาพบกัน ณ จุดยอดนั้นเป็นจำนวนคี่

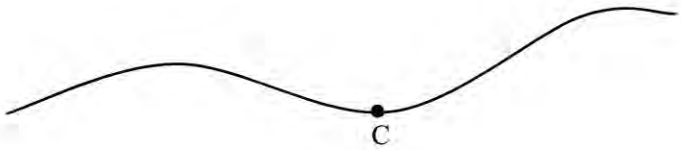
จุดยอดของข่ายงานเป็น **จุดยอดคู่** เมื่อจำนวนเส้นเชื่อมที่มาพบกัน ณ จุดยอดนั้นเป็นจำนวนคู่

ในกรณีที่มีรูปบ่วง ให้นับรูปบ่วงแต่ละรูปเป็นสองเส้นเชื่อม

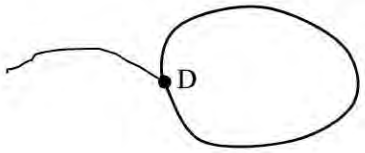
พิจารณาจุดยอด B, C และ D ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของข่ายงานดังต่อไปนี้



จากรูป จุดยอด B เป็นจุดยอดคี่ เพราะมีเส้นเชื่อม 3 เส้นมาพบกันที่จุดยอด B



จากรูป จุดยอด C เป็นจุดยอดคู่ เพราะมีเส้นเชื่อม 2 เส้นมาพบกันที่จุดยอด C



จากรูป จุดยอด D เป็นจุดยอดคี่ เพราะมีเส้นเชื่อม 3 เส้นมาพบกันที่จุดยอด D

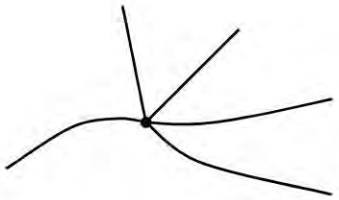
Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

จุดยอดคี่หรือจุดยอดคู่

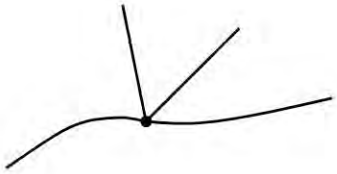
ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

1. จุดยอดในข้อต่อไปนี้เป็นจุดยอดคี่หรือจุดยอดคู่

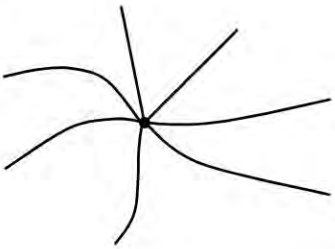
1)



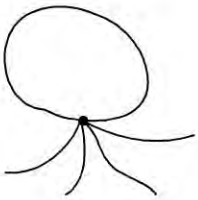
2)



3)

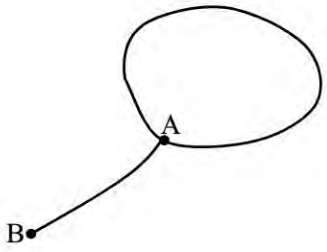


4)

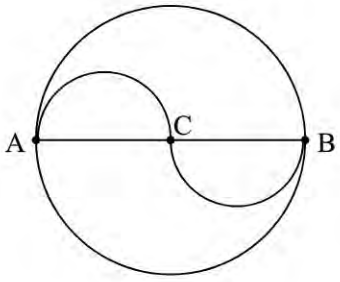


2. ในแต่ละข่ายงานต่อไปนี้ จุดยอดใดเป็นจุดยอดคี่ จุดยอดใดเป็นจุดยอดคู่

1)

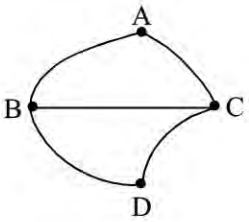


2)

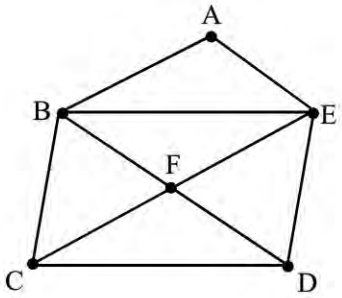


Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

3)



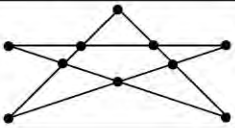
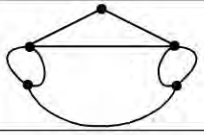
4)



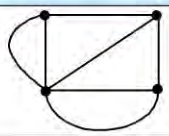
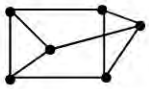
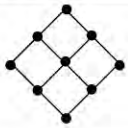
ผ่านได้หรือไม่

ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้

1. สำหรับแต่ละข่ายงานในตารางต่อไปนี้ จงนับจำนวนของจุดยอดคี่ในข่ายงาน แล้วเติมลงในตารางให้สมบูรณ์

ข่ายงาน	จำนวนจุดยอดคี่	ชนิดของข่ายงาน
1)		เป็นข่ายงานที่ผ่านได้
2) 		เป็นข่ายงานที่ผ่านได้
3)		เป็นข่ายงานที่ผ่านได้
4) 		เป็นข่ายงานที่ผ่านได้
5)		เป็นข่ายงานที่ผ่านได้

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

ข่ายงาน	จำนวนจุดยอดคี่	ชนิดของข่ายงาน
(6) 		ไม่เป็นข่ายงานที่ผ่านได้
(7) 		ไม่เป็นข่ายงานที่ผ่านได้
(8) 		ไม่เป็นข่ายงานที่ผ่านได้

2. ข่ายงานที่ผ่านได้ในข้อ 1 มีจำนวนจุดยอดคี่เป็นเท่าใด

คำตอบที่นักเรียนได้ในข้อ 2 เป็นไปตามหลักเกณฑ์ ดังนี้

ข่ายงาน จะเป็นข่ายงานที่ผ่านได้ ก็ต่อเมื่อจำนวนของจุดยอดคี่ในข่ายงานนั้นเป็น 0 หรือ 2

3. สำหรับข่ายงานที่ผ่านได้ในข้อ 1 ให้นักเรียนลากเส้นเพื่อแสดงให้เห็นว่าข่ายงานดังกล่าวเป็นข่ายงานที่ผ่านได้จริง โดยแยกเป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 ถ้าจำนวนจุดยอดคี่เป็น 0 ให้ลากเส้นจากจุดยอดใดก็ได้ แล้วหาว่าจะกลับมาที่จุดยอดเดิมได้หรือไม่

กรณีที่ 2 ถ้าจำนวนจุดยอดคี่เป็น 2 ให้ลากเส้นจากจุดยอดคี่ใดก็ได้ แล้วหาว่าจะกลับมาที่จุดยอดเดิมได้หรือไม่

ผลที่ได้จากข้อ 3 เป็นไปตามสมบัติของข่ายงานที่ผ่านได้คือ

ถ้าจำนวนจุดยอดคี่เป็น 0 จะเริ่มต้นลากเส้นจากจุดยอดใดก็ได้ และจะไปสิ้นสุดที่จุดยอดเดิม ถ้าจำนวนจุดยอดคี่เป็น 2 จะเริ่มต้นลากเส้นจากจุดยอดคี่ใดก็ได้ และจะไปสิ้นสุดที่จุดยอดคี่อีกจุดหนึ่ง

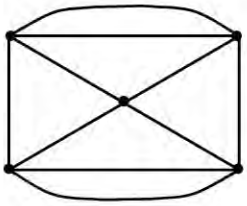
Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

แบบฝึกหัด 3.2

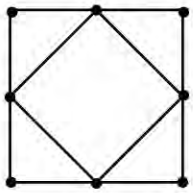
1. สำหรับแต่ละข่ายงานต่อไปนี้ จงหาจำนวนจุดยอดคี่และให้พิจารณาว่าเป็นข่ายงานที่ผ่านได้หรือไม่ ถ้าเป็นข่ายงานที่ผ่านได้ก็จงแสดงให้เห็นจริงด้วยการลากเส้น

1)

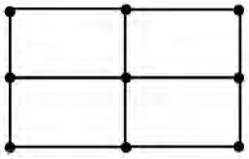
2)



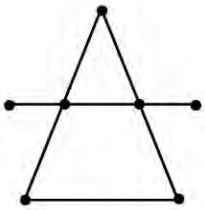
3)



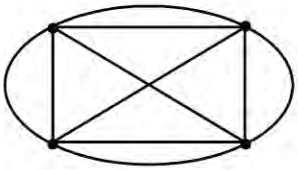
4)



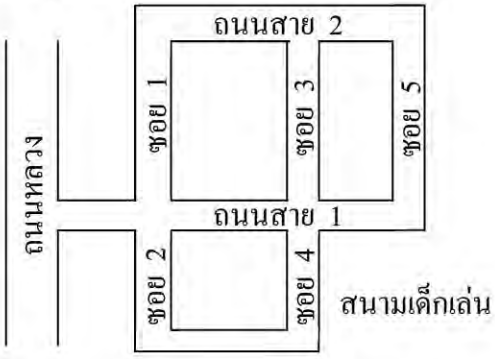
5)



6)



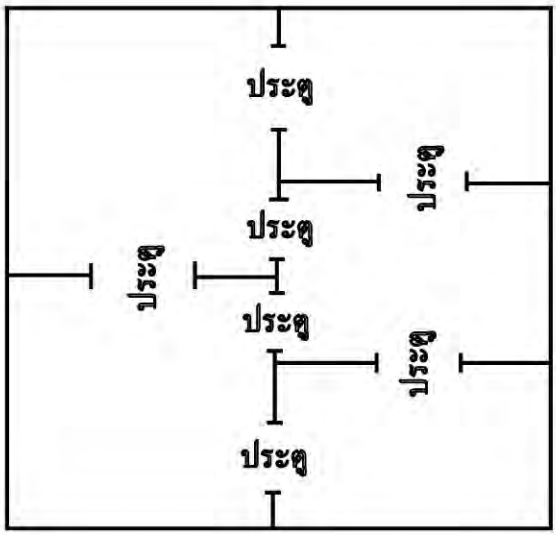
2. บุญเลิศเป็นบุรุษไปรษณีย์ มีหน้าที่ส่งจดหมายและพัสดุภัณฑ์ในหมู่บ้านเอื้ออาทร 15 มีถนนและซอยเชื่อมภายในหมู่บ้าน ดังแผนภาพ



Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

ให้นักเรียนช่วยบุญเลิศวางแผนการเดินทางส่งจดหมายและพัสดุภัณฑ์ในหมู่บ้านนี้ โดยไม่ต้องวนซ้ำเส้นทางเดิม

3. บ้านหลังหนึ่งมีห้อง และประตูเชื่อมระหว่างห้อง ดังแผนผัง



นักเรียนสามารถผ่านประตูเชื่อมทุกประตู โดยผ่านแต่ละประตูเพียงหนึ่งครั้งได้หรือไม่ ถ้าได้ จงแสดงเส้นทางเดินมาด้วย

4. เดิมในเขตกรุงเทพมหานครมีสะพานเชื่อมสองฝั่งแม่น้ำเจ้าพระยาจากฝั่งธนบุรีและฝั่งพระนครจำนวน 9 สะพาน ดังนี้

1) สะพานพระพุทธยอดฟ้า
2) สะพานกรุงธน (ซังฮี้)
3) สะพานกรุงเทพ
4) สะพานพระราม 3
5) สะพานสมเด็จพระปิ่นเกล้า
6) สะพานสมเด็จพระเจ้าตากสินมหาราช
7) สะพานพระปกเกล้า
8) สะพานพระราม 7
9) สะพานพระราม 9

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

สะพานพระราม 8

ในปี พ.ศ. 2543 – 2546 กรุงเทพมหานครได้สร้างสะพานใหม่เพิ่มขึ้นอีกสะพานหนึ่ง คือ สะพานพระราม 8 เป็นสะพานขึงแบบอสมมาตรเสาเดี่ยว รวมมีสะพานข้ามแม่น้ำเจ้าพระยาในเขตกรุงเทพมหานครสิบสะพาน

1) นักเรียนสามารถเดินผ่านสะพานทั้งสิบนี้ สะพานละหนึ่งครั้ง ได้หรือไม่
2) ถ้านักเรียนเริ่มต้นที่ฝั่งธนบุรี จะสามารถเดินผ่านสะพานทั้งสิบนี้ สะพานละหนึ่งครั้ง แล้วกลับมาที่ฝั่งธนบุรี ได้หรือไม่
3) ถ้าสร้างสะพานที่สิบเอ็ดเชื่อมสองฝั่งแม่น้ำเจ้าพระยาขึ้นมาใหม่อีกสะพานหนึ่ง นักเรียนสามารถเดินผ่านสะพานทั้งสิบเอ็ดนี้ สะพานละหนึ่งครั้ง ได้หรือไม่
4) ในกรณีที่มีสิบเอ็ดสะพานเชื่อมสองฝั่งแม่น้ำเจ้าพระยา ถ้านักเรียนเริ่มต้นที่ฝั่งพระนคร จะสามารถเดินผ่านสะพานทั้งสิบเอ็ดนี้ สะพานละหนึ่งครั้ง แล้วกลับมาที่ฝั่งพระนคร ได้หรือไม่

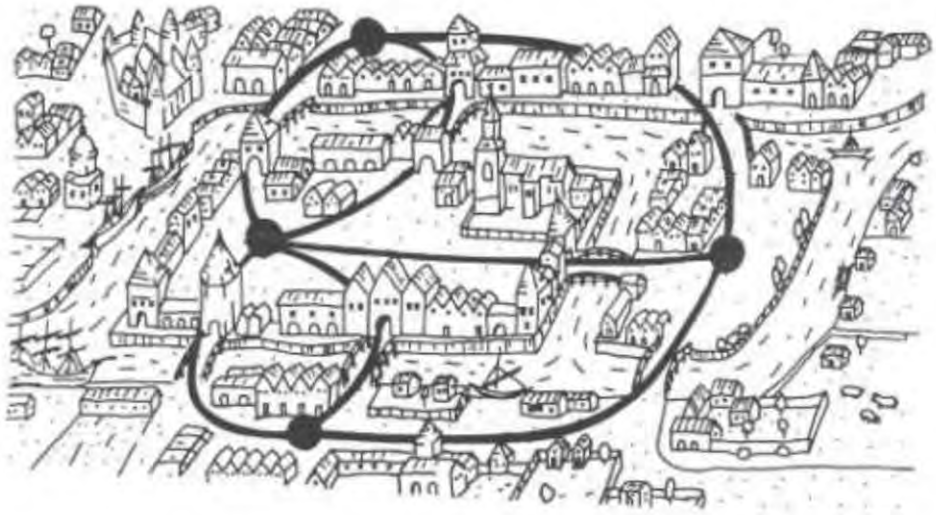
Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

สะพานทั้งเจ็ดของเมืองเคอนิกส์เบิร์ก

เมืองเคอนิกส์เบิร์ก (Königsberg) ในอดีตเป็นเมืองในเยอรมนี แต่ปัจจุบันมีชื่อว่าเมืองคาลินินกราด (Kaliningrad) อยู่ในรัสเซีย ตัวเมืองเคอนิกส์เบิร์กในอดีตตั้งอยู่บนสองฝั่งและบนเกาะทั้งสองของแม่น้ำเพรเกล (Pregel) และมีสะพานเชื่อมพื้นดินทั้งหมดเจ็ดสะพาน ดังรูป

ชาวเมืองเคอนิกส์เบิร์กในอดีต มีความสงสัยว่าสามารถจะเดินผ่านสะพานทั้งเจ็ดสะพานละหนึ่งครั้งได้หรือไม่ ออยเลอร์ตอบข้อสงสัยนี้ได้ในปี ค.ศ. 1736 ด้วยการสร้างข่ายงานอันหนึ่งขึ้นมาแทนแผนที่ของเมืองเคอนิกส์เบิร์ก โดยให้จุดยอดแทนส่วนที่เป็นพื้นดินและเส้นเชื่อมแทนสะพาน

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึ่งกระทำ บ้างไม่พึ่งกระทำ



ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

1. ข่ายงานที่ออยเลอร์สร้างขึ้นมามีจำนวนจุดยอดคี่กี่จุด
2. ข่ายงานนี้เป็นข่ายงานที่ผ่านได้หรือไม่
3. ชาวเมืองเคอนิกส์เบิร์ก สามารถเดินผ่านสะพานทั้งเจ็ด สะพานละหนึ่งครั้งได้หรือไม่

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

3.3 การประยุกต์ของเศษส่วนและทศนิยม

นักเรียนเคยใช้ความรู้เกี่ยวกับการใส่วงเล็บและถอดวงเล็บมาช่วยในการคำนวณจำนวนเต็มมาแล้ว ในเรื่องของเศษส่วนและทศนิยมเราก็สามารถนำความรู้เกี่ยวกับการใส่วงเล็บและถอดวงเล็บมาช่วยในการคำนวณได้เช่นกัน

ให้นักเรียนพิจารณาการใส่วงเล็บและถอดวงเล็บในการบวกและการลบเศษส่วนต่อไปนี้

การใส่วงเล็บ

1. $\frac{1}{2}+3\frac{1}{4}+\frac{3}{4} = \frac{1}{2}+\left(3\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)$
2. $\frac{1}{2}+3\frac{1}{4}-\frac{3}{4} = \frac{1}{2}+\left(3\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right)$
3. $\frac{1}{2}-3\frac{1}{4}-\frac{3}{4} = \frac{1}{2}-\left(3\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)$
4. $\frac{1}{2}-3\frac{1}{4}+\frac{3}{4} = \frac{1}{2}-\left(3\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right)$

ถ้าต้องการให้เครื่องหมายลบอยู่หน้าวงเล็บ ให้เปลี่ยนเครื่องหมายที่จะอยู่ในวงเล็บเป็นตรงกันข้าม

การถอดวงเล็บ

1. $\frac{3}{4}+\left(2\frac{1}{5}-1\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}+2\frac{1}{5}-1\frac{1}{4}$
2. $\frac{3}{4}+\left(2\frac{1}{5}+1\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}+2\frac{1}{5}+1\frac{1}{4}$
3. $\frac{3}{4}-\left(2\frac{1}{5}+1\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}-2\frac{1}{5}-1\frac{1}{4}$
4. $\frac{3}{4}-\left(2\frac{1}{5}-1\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}-2\frac{1}{5}+1\frac{1}{4}$

เมื่อมีเครื่องหมายลบอยู่หน้าวงเล็บ ถ้าต้องการถอดวงเล็บออก ให้เปลี่ยนเครื่องหมายที่เคยอยู่ในวงเล็บเป็นตรงกันข้าม

ในการบวกลบทศนิยม เราสามารถใช้หลักการใส่วงเล็บและถอดวงเล็บได้เช่นเดียวกันกับการบวกและการลบเศษส่วน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

การใส่วงเล็บ

1. $1.5 + 0.3 + 2.7 = 1.5 + (0.3 + 2.7)$
2. $1.5 + 2.8 - 1.3 = 1.5 + (2.8 - 1.3)$
3. $1.5 - 1.9 - 2.1 = 1.5 - (1.9 + 2.1)$
4. $1.5 - 3.8 + 4.3 = 1.5 - (3.8 - 4.3)$

การถอดวงเล็บ

1. $8.6 + (10.4 + 7.5) = 8.6 + 10.4 + 7.5$
2. $8.6 + (10.4 - 7.5) = 8.6 + 10.4 - 7.5$
3. $8.6 - (10.4 + 7.5) = 8.6 - 10.4 - 7.5$
4. $8.6 - (10.4 - 7.5) = 8.6 - 10.4 + 7.5$

ให้นักเรียนพิจารณาการหาผลลัพธ์ต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลลัพธ์ $\left(-3\frac{4}{5}\right) + 2\frac{3}{10}$

วิธีทำ

$$\left(-3\frac{4}{5}\right) + 2\frac{3}{10} = \left[-3+\left(-\frac{4}{5}\right)\right] + \left(2 + \frac{3}{10}\right)$$

$$= [(-3) + 2] + \left[\left(-\frac{4}{5}\right)+\frac{3}{10}\right]$$

$$= (-1) + \left[\frac{(-4)(2)+3}{10}\right]$$

$$= (-1) + \left(-\frac{5}{10}\right)$$

$$= (-1) + \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= -1\frac{1}{2}$$

สมบัติการสลับที่และสมบัติการเปลี่ยนหมู่

ความหมายของจำนวนคละที่เป็นจำนวนลบ

$$-3\frac{4}{5} = -\left(3\frac{4}{5}\right)$$
$$= -\left(3+\frac{4}{5}\right)$$
$$= -3-\frac{4}{5}$$
$$= -3+\left(-\frac{4}{5}\right)$$

ตอบ $-1\frac{1}{2}$

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

นักเรียนเคยบวกลบเศษส่วนที่เป็นจำนวนคละโดยวิธีทำจำนวนคละให้เป็นเศษเกินก่อนแล้วจึงหาผลบวกหรือผลลบ วิธีนี้อาจไม่สะดวกเมื่อต้องหาผลบวกหรือผลลบของจำนวนคละที่จำนวนเต็มมีค่าสัมบูรณ์มากเช่น $81 - 46\frac{2}{5}$ ซึ่งต้องทำ $46\frac{2}{5}$ ให้เป็น $\frac{232}{5}$ ก่อน

ในกรณีเช่นนี้เราอาจหาผลบวกหรือผลลบโดยใช้วิธีการทำนองเดียวกันกับตัวอย่างที่ 1 ดังนี้

$$
\begin{aligned}
81 - 46\frac{2}{5} &= 81 + \left(-46\frac{2}{5}\right) \\
&= 81 + \left[(-46) + \left(-\frac{2}{5}\right)\right] \\
&= [81 + (-46)] + \left(-\frac{2}{5}\right) \\
&= 35 + \left(-\frac{2}{5}\right) \\
&= (34 + 1) + \left(-\frac{2}{5}\right) \\
&= 34 + \left[1 + \left(-\frac{2}{5}\right)\right] \\
&= 34 + \frac{3}{5} \\
&= 34\frac{3}{5}
\end{aligned}
$$

ข้อควรระวัง

$35 + \left(-\frac{2}{5}\right) \neq \left(-35\frac{2}{5}\right)$

ดังนั้น $81 - 46\frac{2}{5} = 34\frac{3}{5}$

ข้อสังเกต

ในขั้นตอน $35 + \left(-\frac{2}{5}\right)$ ซึ่งทำเป็น $(34 + 1) + \left(-\frac{2}{5}\right) = 34 + \left[1 + \left(-\frac{2}{5}\right)\right]$ เป็นการนำสมบัติการเปลี่ยนหมู่มาช่วยในการคำนวณซึ่งจะทำให้สะดวกและง่ายต่อการคำนวณ

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

ในทำนองเดียวกัน ถ้าต้องการหาผลลัพธ์ของ $(-35)+\frac{2}{5}$ ก็สามารถใช้วิธีดังกล่าวนี้ช่วยในการคำนวณได้ดังนี้

$$(-35)+\frac{2}{5} = [(-34)+(-1)]+\frac{2}{5}$$

$$= (-34)+\left[(-1)+\frac{2}{5}\right]$$

$$= (-34)+\left(-\frac{3}{5}\right)$$

$$= -34\frac{3}{5}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลลัพธ์ $\left(15\frac{3}{7}\times\frac{14}{15}\right)-37\frac{3}{5}$

วิธีทำ

$$\left(15\frac{3}{7}\times\frac{14}{15}\right)-37\frac{3}{5} = \left[\left(15+\frac{3}{7}\right)\times\frac{14}{15}\right]+\left(-37\frac{3}{5}\right)$$

$$= \left[\left(15\times\frac{14}{15}\right)+\left(\frac{3}{7}\times\frac{14}{15}\right)\right]+\left[(-37)+\left(-\frac{3}{5}\right)\right]$$

$$= \left(14+\frac{2}{5}\right)+\left[(-37)+\left(-\frac{3}{5}\right)\right]$$

$$= (14-37)+\left(\frac{2}{5}-\frac{3}{5}\right)$$

$$= (-23)+\left(-\frac{1}{5}\right)$$

$$= -23\frac{1}{5}$$

ตอบ $-23\frac{1}{5}$

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

ตัวอย่างที่ 3 ป้ามาลีทำขนมทองหยิบ ทองหยอด และฝอยทองขาย ป้ามาลีซื้อน้ำตาลทราย 24 กิโลกรัม ราคากิโลกรัมละ 23.50 บาทและไข่เป็ด 125 ฟอง ราคาฟองละ 2.80 บาท จงหาว่าป้ามาลีต้องจ่ายเงินทั้งหมดเท่าไร

วิธีทำ

วิธีที่ 1 ป้ามาลีซื้อน้ำตาลทราย 24 กิโลกรัม ราคากิโลกรัมละ 23.50 บาท

ต้องจ่ายเงินค่าน้ำตาลทราย $24 \times 23.50 = (12 \times 2) \times 23.50$

$= 12 \times (2 \times 23.50)$

$= 12 \times 47$

$= 12 \times (40 + 7)$

$= 480 + 84$

$= 564$ บาท

ซื้อไข่เป็ด 125 ฟอง ราคาฟองละ 2.80 บาท

ต้องจ่ายเงินค่าไข่เป็ด $125 \times 2.80 = (100 + 25) \times \frac{14}{5}$

$= 100 \times \frac{14}{5} + 25 \times \frac{14}{5}$

$= 280 + 70$

$= 350$ บาท

ดังนั้น ป้ามาลีต้องจ่ายเงินทั้งหมด $564 + 350 = 914$ บาท

ตอบ 914 บาท

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

วิธีที่ 2 ป้ามาลีซื้อน้ำตาลทราย 24 กิโลกรัม ราคากิโลกรัมละ 23.50 บาท

ต้องจ่ายเงินค่าน้ำตาลทราย $24 \times 23.50 = 24 \times \left(23 + \frac{1}{2}\right)$

$= (24 \times 23) + \left(24 \times \frac{1}{2}\right)$

$= 552 + 12$

$= 564$ บาท

ซื้อไข่เป็ด 125 ฟอง ราคาฟองละ 2.80 บาท

ต้องจ่ายเงินค่าไข่เป็ด $125 \times 2.80 = 125 \times \left(2 + \frac{4}{5}\right)$

$= (125 \times 2) + \left(125 \times \frac{4}{5}\right)$

$= 250 + 100$

$= 350$ บาท

ดังนั้น ป้ามาลีต้องจ่ายเงินทั้งหมด $564 + 350 = 914$ บาท

ตอบ 914 บาท

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

แบบฝึกหัด 3.3

1. ให้นักเรียนนำสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับจำนวนมาช่วยในการหาผลลัพธ์ต่อไปนี้

1) $27 - 31\frac{1}{4}$

2) $18\frac{3}{5} + 46\frac{7}{10}$

3) $\left(-36\frac{1}{2}\right) + 19\frac{3}{4}$

4) $46 - 23\frac{3}{8}$

5) $\left(-20\frac{2}{3}\right) - 25\frac{5}{6}$

6) $11\frac{1}{4} + 7\frac{1}{3} + 9\frac{5}{6}$

7) $12\frac{1}{2} - 13\frac{1}{3} - 14\frac{1}{4}$

8) $5\frac{3}{10} + 18\frac{1}{5} - 12\frac{2}{5}$

9) $\left(-15\frac{1}{4}\right) + 40\frac{1}{2} - 20\frac{1}{4}$

10) $30\frac{2}{5} - 54\frac{7}{10} + 24\frac{3}{4}$

11) $2\frac{3}{5} + 5\frac{1}{2} + 6.4 + 3.25$

12) $\left(12\frac{3}{5} \times 15\right) + (13.75 \times 24)$

13) $\left(49.3 \times \frac{2}{7}\right) - \left(45.8 \times \frac{2}{7}\right)$

14) $(18.25 \times 0.44) + (1.75 \times 0.44)$

2. สีรุ้งซื้อปลากระป๋องทูน่าแซนวิชในน้ำมันพืช 2 กระป๋องกระป๋องละ 29 บาท โยเกิต 2 ถ้วย ถ้วยละ 12.50 บาท นมสด 2 ขวด ขวดละ 17.75 บาท ปีกไก่ 0.5 กิโลกรัม กิโลกรัมละ 59 บาท และแครอท 0.5 กิโลกรัม กิโลกรัมละ 45 บาท จงหาว่าสีรุ้งต้องจ่ายเงินทั้งหมดกี่บาท

3. ศักดิ์ขับรถยนต์ไปพบสิทธิ์ ณ ที่นัดหมายแห่งหนึ่ง เขาเริ่มออกเดินทางเมื่อเวลา 7.45 น. หน้าปัดแสดงระยะทางในรถยนต์ปรากฏตัวเลข 48,106.4 กิโลเมตร เขาขับรถไปโดยไม่หยุดพักและไปถึงที่หมายเมื่อเวลา 11.30 น. ตัวเลขแสดงระยะทางที่หน้าปัดเปลี่ยนเป็น 48,434.9 กิโลเมตร จงหาว่าในการเดินทางครั้งนี้ ศักดิ์ขับรถยนต์โดยเฉลี่ยชั่วโมงละกี่กิโลเมตร

4. เมื่อวันที่ 11 ธันวาคม 2552 นายเดวิด นักท่องเที่ยวชาวอเมริกันมาท่องเที่ยวเมืองไทย เขานำเงิน 235 ดอลลาร์สหรัฐและเงิน 240 ยูโรมาแลกซื้อเป็นเงินไทย อยากทราบว่าเดวิดแลกซื้อเงินไทยได้กี่บาท ถ้าอัตราแลกเปลี่ยนเงินตราในวันนั้นเป็นดังนี้

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึ่งกระทำ บ้างไม่พึ่งกระทำ

สกุลเงิน	ซื้อ	ขาย
บาท / ดอลลาร์สหรัฐ	32.29	33.36
บาท / ปอนด์สเตอร์ลิง	53.03	54.76
บาท / ยูโร	48.20	49.33

5. ใน พ.ศ. 2510 มณีซื้อทองคำไว้ 227.4 กรัม ในราคาบาทละ 400 บาท พ.ศ. 2532 มณีขายทองคำที่เก็บไว้ไป $\frac{2}{5}$ ของที่มีอยู่ ในราคาบาทละ 4,580 บาท และ พ.ศ. 2552 มณีขายทองคำที่เหลือไปทั้งหมดในราคาบาทละ 17,495 บาท จงหาว่ามณีขายทองคำทั้งหมดได้กำไรกี่บาท (*ทองคำหนัก 1 บาท เทียบเท่ากับ 15.16 กรัม*)

6. โรงไฟฟ้าชีวมวลจะนำเศษวัสดุต่าง ๆ ที่เหลือใช้จากโรงงานอุตสาหกรรมและเกษตรกรรมมาผลิตไฟฟ้าแทนที่จะใช้เชื้อเพลิงที่ต้องซื้อด้วยเงินตราต่างประเทศ ดังนี้

   ชานอ้อย 14,000 ตัน สามารถผลิตไฟฟ้าได้ 1 เมกะวัตต์

   เหง้ามันสำปะหลัง 9,000 ตัน สามารถผลิตไฟฟ้าได้ 1 เมกะวัตต์

   แกลบ 14,687 ตัน สามารถผลิตไฟฟ้าได้ 1 เมกะวัตต์

   ประเทศไทยมีชานอ้อยเหลือทิ้งประมาณปีละ 13 ล้านตัน เหง้ามันสำปะหลังประมาณปีละ 1.7 ล้านตัน และแกลบประมาณปีละ 5 ล้านตัน จงหาว่าเศษวัสดุเหล่านี้สามารถนำไปผลิตไฟฟ้าได้ประมาณกี่เมกะวัตต์

7. แม่ค้าซื้อไข่มาจำนวนหนึ่งราคาฟองละ 2.40 บาท แล้วขายไข่ที่เหลือไปฟองละ 2.70 บาทให้เพื่อนบ้านไป 12 ฟอง ได้กำไร 39 บาท จงหาว่าแม่ค้าซื้อไข่มาทั้งหมดกี่ฟอง

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

ทำอย่างไร

1. ป้าน้อยจะทำขนมสามชนิด ซึ่งต้องใช้นมสด 5 ถ้วย $3\frac{2}{3}$ ถ้วย และ $2\frac{1}{6}$ ถ้วย ตามลำดับ ถ้าป้าน้อยมีถ้วยตวงขนาด $\frac{1}{2}$ ถ้วยและ $\frac{1}{3}$ ถ้วย จงหาว่าป้าน้อยจะใช้ถ้วยตวงทั้งสองนี้ตวงนมสดอย่างไรจึงจะได้นมสดตามต้องการ

2. กระดาษอย่างหนาแผ่นหนึ่งกว้าง 0.75 เมตร ยาว 1.25 เมตร นำมาตัดเป็นบัตรให้มีขนาดกว้าง 6 เซนติเมตรและยาว 9 เซนติเมตร จะตัดได้มากที่สุดกี่แผ่น จงเขียนภาพแสดงการตัดเป็นบัตรประกอบคำตอบด้วย
3. เจริญมีแผ่นไม้รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากขนาดต่าง ๆ กัน 7 แผ่น ดังนี้

ขนาด $5\frac{1}{2} \times 5\frac{1}{4}$ ตารางเซนติเมตร จำนวน 2 แผ่น

ขนาด $5\frac{1}{4} \times 5\frac{1}{4}$ ตารางเซนติเมตร จำนวน 2 แผ่น

ขนาด $12\frac{1}{2} \times 10\frac{3}{4}$ ตารางเซนติเมตร จำนวน 1 แผ่น

ขนาด $10\frac{1}{2} \times 5\frac{1}{4}$ ตารางเซนติเมตร จำนวน 1 แผ่น

ขนาด $12\frac{1}{2} \times 5\frac{1}{4}$ ตารางเซนติเมตร จำนวน 1 แผ่น

เมื่อเจริญนำแผ่นไม้ทั้ง 7 แผ่นเก็บใส่กล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากใบหนึ่ง พบว่าสามารถจัดเรียงไม้วางในก้นกล่องได้เต็มหนึ่งชั้นพอดี จงเขียนภาพแสดงการวางแผ่นไม้ของเจริญ และหาขนาดความกว้างและความยาวของก้นกล่องใบนี้

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

บรรณานุกรม

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2541). **คู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์ รายวิชา ค ๑๐๑ คณิตศาสตร์ ๑ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่หนึ่ง หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช ๒๕๒๑ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๓๓).** พิมพ์ครั้งที่ 4. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2541). **คู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์ รายวิชา ค ๑๐๒ คณิตศาสตร์ ๒ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่หนึ่ง หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช ๒๕๒๑ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๓๓).** พิมพ์ครั้งที่ 4. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2537). **คู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์ รายวิชา ค ๒๐๓ คณิตศาสตร์ ๓ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่สอง หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช ๒๕๒๑ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๓๓).** พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2540). **คู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์ รายวิชา ค ๒๐๔ คณิตศาสตร์ ๔ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่สอง หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช ๒๕๒๑ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๓๓).** พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2540). **คู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์ รายวิชา ค ๐๑๑ ชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช ๒๕๒๑ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๓๓).** พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2540). **หนังสืออ่านเพิ่มเติม วิชาคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษา เรื่อง ทอพอโลยี.** พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

Charles, Randall I., and others. (1995). **Addison – Wesley Mathematics Teacher's Edition Grade 7.** New York, U.S.A. : Addison – Wesley Publishing Company, Inc.

Eichoiz, Robert E., and others. (1995) . **Addison – Wesley Mathematics Teacher's Edition Grade 6.** New York, U.S.A. : Addison – Wesley Publishing Company, Inc.

Fey, James T., and others. (1998). **Thinking with Mathematical Models.** U.S.A. : Dale Seymour Publications.

Jurgensen, Ray C, Brown Richard G, and Jurgensen John W. (1994). **Geometry.** Boston, MA. U.S.A. : Houghton Mifflin Company.

Munem, M.A., and Joulis D.J., (1982). **College Algebra with Application.** New York, U.S.A. : Worth Publishers, Inc.

Rising, Gerald R., and other. (1989). **Houghton Mifflin Unified Mathematics, Book 2.** Boston, MA. U.S.A. : Houghton Mifflin Company.

Serra, Michael. (1993). **Discovering Geometry An Inductive Approach :** Berkeley, U.S.A. : Key Curriculum Press.

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

ภาคผนวก

บัญชีศัพท์

บทที่ 1

ข้อความคาดการณ์	conjecture
ประโยคเงื่อนไข	conditional statement
ถ้า... แล้ว...	if … then…
บทกลับ	converse
ก็ต่อเมื่อ	if and only if
บทนิยาม	definition
รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า	equilateral triangle
รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	isosceles triangle
รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก	right triangle
รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก	rectangle
รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า	oblong
รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส	square
รูปห้าเหลี่ยม	pentagon
มุมแย้ง	alternate – interior angles
มุมตรงข้าม	vertical angles
มุมประชิด	adjacent angles
มุมภายนอก	exterior angles
สมบัติของการเท่ากัน	properties of equality

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

บทที่ 2

พหุนาม	polynomial
เอกนาม	monomial
ค่าคงตัว	constant
ตัวแปร	variable
นิพจน์	expression
เลขชี้กำลัง	exponent
สัมประสิทธิ์	coefficient
ดีกรี	degree
พจน์	term
พจน์ที่คล้ายกัน	like terms
พหุนามในรูปผลสำเร็จ	polynomial in the simplest form
พหุนามตรงข้าม	inverse polynomial (for addition)
พจน์ตรงข้าม	inverse term (for addition)

บทที่ 3

พาลินโดรม	palindrome
ลำดับฟีโบนักชี	Fibonacci sequence
ข่ายงาน	network
จุดยอด	vertex
เส้นเชื่อม	edge
รูปบ่วง	loop
ข่ายงานที่ผ่านได้	traversable network
จุดยอดคี่	odd vertex
จุดยอดคู่	even vertex

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

บัญชีสัญลักษณ์

$=$	เท่ากับ เท่ากัน
$\overline{AB}$	ส่วนของเส้นตรง AB
AB	ความยาวของส่วนของเส้นตรง AB
$\overrightarrow{AB}$	รังสี AB
$\overleftrightarrow{AB}$	เส้นตรง AB
$A\hat{B}C$	มุม ABC
ΔABC	รูปสามเหลี่ยม ABC
$ABCD$	รูปสี่เหลี่ยม ABCD

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

คณะกรรมการจัดทำสื่อการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

นางปิยรัตน์ จาตุรันตบุตร	สถาบันราชภัฏสวนดุสิต
นางสาวลัดดาวัลย์ เพ็ญสุภา	มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์
นายปรีชา เนาว์เย็นผล	มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช
นางสาวสาคร บุญดาว	มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช
นายสมนึก บุญพาไสว	มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานคร
นางจรรยา ภูอุดม	โรงเรียนดอนเมืองจาตุรจินดา
นางยุพิน พิพิธกุล	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางจารุนี สูตะบุตร	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นายสมพล เล็กสกุล	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางอารียา สุวรรณคำ	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางเจริญศรี จันไพบูลย์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวจันทร์เพ็ญ ชุมคช	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวจารุวรรณ แสงทอง	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวปานทอง กุลนาถศิริ	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางชุลีพร สุภธีระ	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางชมัยพร ตั้งตน	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวรจนา รัตนานิคม	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาววันดี ตีระสหกุล	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวดนิตา ชื่นอารมณ์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวพิลาลักษณ์ ทองทิพย์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

คณะบรรณาธิการ

นางยุพิน พิพิธกุล	นางปิยรัตน์ จาตุรันตบุตร
นางจารุนี สูตะบุตร	นางสาวจารุวรรณ แสงทอง
นายสมพล เล็กสกุล	นางชุลีพร สุภธีระ

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

คณะบรรณาธิการดำเนินงานปรับปรุงหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์

นายดนัย ยังคง
นางสาวอัมพร ม้าคนอง
นางสาวลัดดาวัลย์ เพ็ญสุภา
นางสุวรรณา คล้ายกระแส
นางชมัยพร ตั้งตน
นายปรีชา เนาว์เย็นผล
นายสมนึก บุญพาไสว

ภาพ

นางวรพรรณ ทิณพวย์
นางสาวดนพร จรัสแสงสกุล

ผู้จัดพิมพ์ต้นฉบับ

นางสาวเสาวนีย์ ประมูลทรัพย์

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ

สสวท

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

พค.คณิตฯม.1ล.2
9 789740 162308
ราคา 31.00 บาท

ศึกษาภัณฑ์พาณิชย์
พิมพ์ที่โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว
นายชินภัทร ภูมิลัดน ผู้พิมพ์และผู้โฆษณา
๕๓๐๐๐๕๖
www.suksapan.or.th

Inw Tong Physics
ลูกผู้ชายมีบ้างพึงกระทำ บ้างไม่พึงกระทำ