ฉบับคู่มือครู

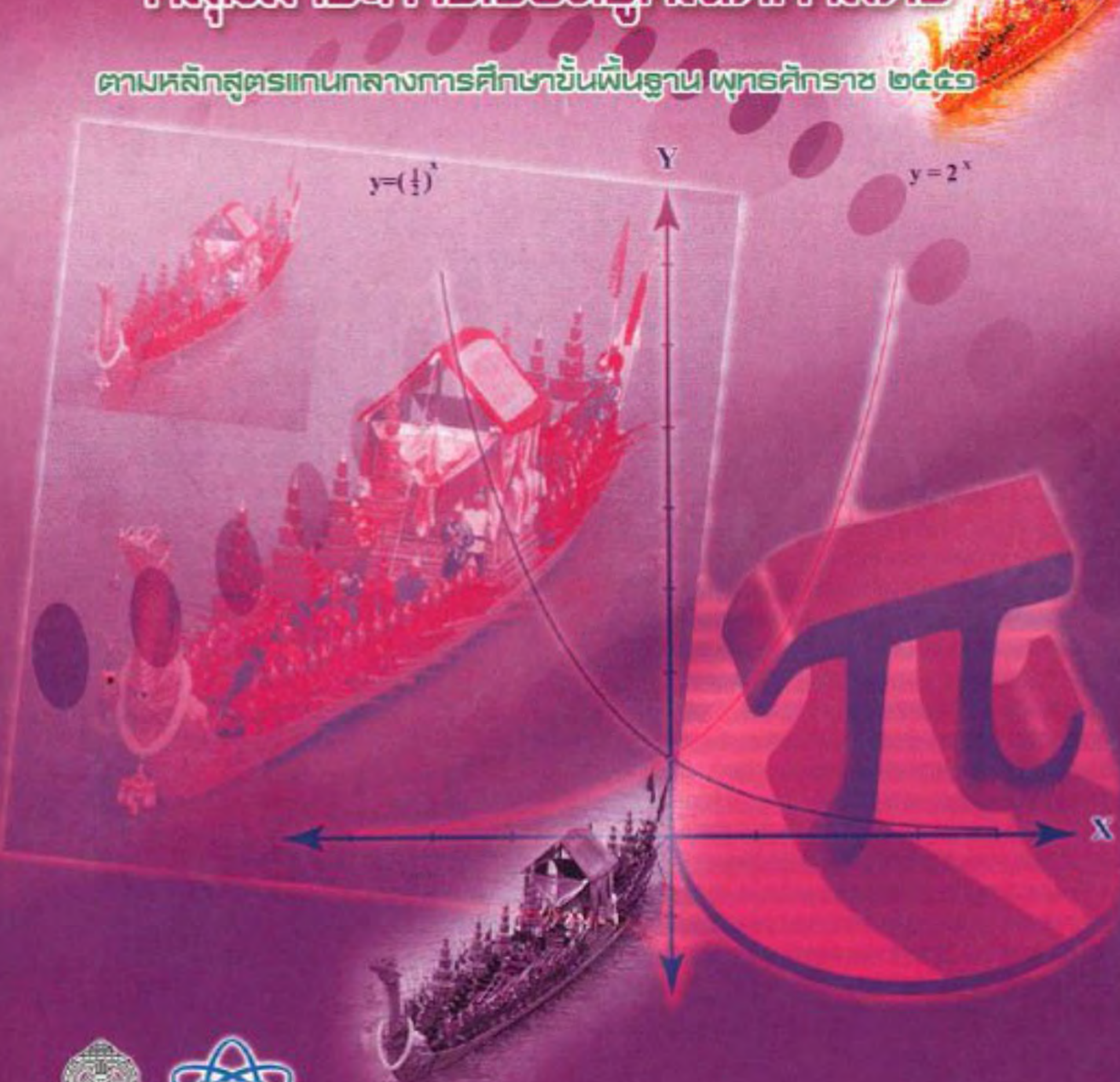
หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม

คณิตศาสตร์ เล่ม ๑

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๒

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑



กระทรวงศึกษาธิการ

๕๘.-

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม

คณิตศาสตร์ เล่ม ๑

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๒

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑

จัดทำโดย

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

กระทรวงศึกษาธิการ

ISBN 978 - 974 - 01 - 9504 - 7

พิมพ์ครั้งที่หนึ่ง ๕๐๐,๐๐๐ เล่ม

พ.ศ. ๒๕๕๔

องค์การค้าของ สกสค. จัดพิมพ์จำหน่าย

พิมพ์ที่โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว

๒๒๔๙ ถนนลาดพร้าว วังทองหลาง กรุงเทพมหานคร

ประกาศสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน
เรื่อง อนุญาตให้ใช้สื่อการเรียนรู้ในสถานศึกษา

ด้วยสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน ได้มอบหมายให้ สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีจัดทำโครงสร้างหลักสูตร รายวิชาเพิ่มเติม และจัดทำหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม ๑ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๒ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐานได้พิจารณาแล้ว อนุญาตให้ใช้ในสถานศึกษาได้

ประกาศ ณ วันที่ ๑๕ ธันวาคม พ.ศ. ๒๕๕๓

(นายชินภัทร ภูมิรัตน)
เลขาธิการคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน

คำนำ

หนังสือเรียน รายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม ๑ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๒ นี้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ จัดทำขึ้นโดยสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ซึ่งได้จัดทำโครงสร้างหลักสูตรรายวิชาเพิ่มเติม ที่ประกอบด้วย โครงสร้างรายวิชาเพิ่มเติมและคำอธิบายรายวิชาที่มีทั้งผลการเรียนรู้และสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม เพื่อให้สถานศึกษาได้เทียบเคียงกับหลักสูตรของสถานศึกษา และพิจารณาเลือกใช้หนังสือนี้ประกอบการจัดการเรียนรู้ ให้สอดคล้องกับหลักสูตรสถานศึกษาของตนได้ตามความเหมาะสม ซึ่งสถานศึกษาสามารถใช้เป็นแนวทางในการออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้ ให้ความรู้ความเข้าใจผู้เรียนนำไปสู่ทักษะการคิดวิเคราะห์ สังเคราะห์ ตามความสามารถและความแตกต่างระหว่างบุคคลของผู้เรียนได้ในการจัดทำหนังสือเล่มนี้ ได้รับความช่วยเหลือจากคณาจารย์ ผู้ทรงคุณวุฒิ ผู้เชี่ยวชาญด้านคณิตศาสตร์จากสถาบันต่างๆ ทั้งภาครัฐและเอกชนเป็นอย่างดี

สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน หวังเป็นอย่างยิ่งว่าหนังสือเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการจัดการเรียนรู้ เพื่อประยุกต์ใช้พัฒนาการเรียนรู้ของผู้เรียนได้อย่างเหมาะสม ขอขอบคุณสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ตลอดจนบุคคลและหน่วยงานที่มีส่วนเกี่ยวข้องในการจัดทำหนังสือไว้ ณ โอกาสนี้

(นายชินภัทร ภูมิรัตน)
เลขาธิการคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน
๑๕ ธันวาคม ๒๕๕๓

คำชี้แจง

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้รับมอบหมายจากกระทรวงศึกษาธิการ ให้พัฒนาหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ กลุ่มสาระการเรียนรู้วิทยาศาสตร์ รวมทั้งสาระการออกแบบและ เทคโนโลยีและสาระเทคโนโลยีสารสนเทศในกลุ่มสาระการเรียนรู้การงานอาชีพและเทคโนโลยี ตลอดจนจัดทำสื่อการเรียนรู้ตามหลักสูตรดังกล่าว

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ สำหรับระดับมัธยมศึกษาตอนต้น มีด้วยกันทั้งหมด 6 เล่ม จัดทำขึ้นเพื่อให้ผู้เรียนสามารถเรียนรู้และพัฒนาตนเอง นำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปพัฒนาชีวิต และเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตลอดจนศาสตร์อื่นๆ ในระดับที่สูงขึ้น ทั้งนี้สถานศึกษาสามารถปรับใช้เนื้อหาจากหนังสือเรียนทั้ง 6 เล่มนี้ เพื่อจัดการเรียนการสอนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ได้ตามความเหมาะสม

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ประกอบด้วยเรื่องสมบัติของเลขยกกำลัง พหุนามและเศษส่วนของพหุนาม การประยุกต์เกี่ยวกับอัตราส่วนและร้อยละ และการประยุกต์ของการแปลงทางเรขาคณิต ซึ่งเป็นเนื้อหาสาระตามมาตรฐานการเรียนรู้ตามที่กำหนดไว้ในหลักสูตร อย่างไรก็ตามผู้สอนสามารถปรับบทเรียนให้เหมาะสมกับศักยภาพของผู้เรียนแต่ละกลุ่ม

การจัดทำหนังสือเรียนคณิตศาสตร์เล่มนี้ สสวท. ได้รับความร่วมมืออย่างดียิ่งจากคณาจารย์ ผู้ทรงคุณวุฒิ นักวิชาการ และครูผู้สอน จากหลายหน่วยงาน ทั้งภาครัฐและเอกชน สสวท. จึงขอขอบคุณทุกท่านไว้ ณ ที่นี้ และหวังเป็นอย่างยิ่งว่าหนังสือเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการศึกษาคณิตศาสตร์ อันเป็นรากฐานสำคัญของการพัฒนาทรัพยากรมนุษย์ของชาติต่อไป หากมีข้อเสนอแนะใดที่จะทำให้หนังสือเรียนเล่มนี้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น โปรดแจ้งให้สาขาคณิตศาสตร์มัธยมศึกษา สสวท. ทราบด้วย จักขอบคุณยิ่ง

(นางพรพรรณ ไวทยางกูร)
ผู้อำนวยการ
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

สารบัญ

บทที่ 1

สมบัติของเลขยกกำลัง

1.1 สมบัติของเลขยกกำลัง

นักเรียนเคยเรียนเรื่องเลขยกกำลังและรู้ความหมายของเลขยกกำลังมาแล้ว ดังนี้

1. $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ ตัว}}$ *เมื่อ a แทนจำนวนใด ๆ และ n แทนจำนวนเต็มบวก*

เรียก a^n ว่า เลขยกกำลัง ที่มี a เป็นฐาน และ n เป็นเลขชี้กำลัง

ตัวอย่าง 7^4 เป็นเลขยกกำลังที่มี 7 เป็นฐานและ 4 เป็นเลขชี้กำลัง

$$7^4 = 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 2,401$$

$(-0.2)^3$ เป็นเลขยกกำลังที่มี -0.2 เป็นฐานและ 3 เป็นเลขชี้กำลัง

$$(-0.2)^3 = (-0.2) \times (-0.2) \times (-0.2) = -0.008$$

2. $a^0 = 1$ *เมื่อ a แทนจำนวนใด ๆ ที่ไม่ใช่ศูนย์*

ตัวอย่าง $9^0 = 1$

$(-0.16)^0 = 1$

3. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ *เมื่อ a แทนจำนวนใด ๆ ที่ไม่ใช่ศูนย์ และ n แทนจำนวนเต็มบวก*

ตัวอย่าง $5^{-3} = \frac{1}{5^3}$

$(-2)^{-5} = \frac{1}{(-2)^5}$

เมื่อนำเลขยกกำลังมาคูณกันหรือหารกัน ผลคูณหรือผลหารที่ได้เป็นไปตามสมบัติของเลขยกกำลัง ดังนี้

สมบัติของการคูณเลขยกกำลัง

เมื่อ a แทนจำนวนใด ๆ m และ n แทนจำนวนเต็มบวก

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

ตัวอย่าง $5^4 \times 5^2 = 5^{4+2}$

$= 5^6$

สมบัติของการหารเลขยกกำลัง

เมื่อ a แทนจำนวนใด ๆ ที่ไม่ใช่ศูนย์ m และ n แทนจำนวนเต็มบวก

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

ตัวอย่าง $(-3)^8 \div (-3)^3 = (-3)^{8-3}$

$= (-3)^5$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลลัพธ์ $\dfrac{3^0 \times 3^{-4} \times 3^7}{(-3)^8 \times 3^{-3}}$

วิธีทำ $\dfrac{3^0 \times 3^{-4} \times 3^7}{(-3)^8 \times 3^{-3}} = \dfrac{1 \times \frac{1}{3^4} \times 3^7}{3^8 \times \frac{1}{3^3}}$

$(-3)^8 = 3^8$

$= \dfrac{3^{7-4}}{3^{8-3}}$

$= \dfrac{3^3}{3^5}$

$= 3^{3-5}$

$= 3^{-2}$

$= \dfrac{1}{3^2}$

$= \dfrac{1}{9}$

ตอบ $\dfrac{1}{9}$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลลัพธ์ $(2^{5n} \times 2^{2n}) \div (2^{0} \times 2^{3n})$ เมื่อ n แทนจำนวนเต็มบวก

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
(2^{5n} \times 2^{2n}) \div (2^{0} \times 2^{3n}) &= \frac{2^{5n} \times 2^{2n}}{2^{0} \times 2^{3n}} \\
&= \frac{2^{5n+2n}}{1 \times 2^{3n}} \\
&= \frac{2^{7n}}{2^{3n}} \\
&= 2^{7n-3n} \\
&= 2^{4n}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2^{5n+2n} &= 2^{(5+2)n} \\
&= 2^{7n}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2^{7n-3n} &= 2^{(7-3)n} \\
&= 2^{4n}
\end{aligned}
$$

ตอบ 2^{4n}

นักเรียนเคยทราบมาแล้วว่า จำนวนบวกที่มีค่ามาก ๆ หรือมีค่าน้อย ๆ ในทางวิทยาศาสตร์นิยมเขียนจำนวนดังกล่าวในรูป***สัญกรณ์วิทยาศาสตร์*** ซึ่งมีรูปทั่วไปเป็น *$A \times 10^{n}$ เมื่อ $1 \le A < 10$ และ n แทนจำนวนเต็ม* เช่น

12,500,000,000,000 เขียนแทนด้วย 1.25×10^{13}

0.0000000037 เขียนแทนด้วย 3.7×10^{-9}

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลลัพธ์ $\frac{(4.8 \times 10^{-1}) \times (1.44 \times 10^{7})}{9.6 \times 10^{7}}$ ในรูปสัญกรณ์วิทยาศาสตร์

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
\frac{(4.8 \times 10^{-1}) \times (1.44 \times 10^{7})}{9.6 \times 10^{7}} &= \left(\frac{4.8 \times 1.44}{9.6}\right) \times \left(\frac{10^{-1} \times 10^{7}}{10^{7}}\right) \\
&= 0.72 \times (10^{-1} \times 1) \\
&= \left(7.2 \times \frac{1}{10}\right) \times 10^{-1} \\
&= 7.2 \times \left(\frac{1}{10} \times \frac{1}{10}\right) \\
&= 7.2 \times \frac{1}{10^{2}} \\
&= 7.2 \times 10^{-2}
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\overset{1}{\cancel{4.8}} \times \overset{0.72}{\cancel{1.44}}}{\cancel{9.6}_{\cancel{2}_{1}}} = 0.72
$$

ตอบ 7.2×10^{-2}

ตัวอย่างที่ 4 จงหาผลคูณ $(2 \times 10^{-16}) \times (5 \times 10^{30})$ ในรูปเลขยกกำลัง

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
(2 \times 10^{-16}) \times (5 \times 10^{30}) &= (2 \times 5) \times (10^{-16} \times 10^{30}) \\
&= 10 \times \left(\frac{1}{10^{16}} \times 10^{30} \right) \\
&= 10 \times 10^{14} \\
&= 10^{15}
\end{aligned}
$$

ตอบ 10^{15}

ตัวอย่างที่ 5 ประเทศไทยมีพื้นที่ประมาณ 5.18×10^5 ตารางกิโลเมตร เมื่อวันที่ 1 มกราคม พ.ศ. 2547 สถาบันวิจัยประชากรและสังคมของมหาวิทยาลัยมหิดล รายงานว่าประเทศไทยมีประชากร 63.514 ล้านคน จงหาว่าโดยเฉลี่ยแล้วจะมีประชากรประมาณกี่คนต่อพื้นที่ 1 ตารางกิโลเมตร

วิธีทำ ประเทศไทยมีพื้นที่ประมาณ 5.18×10^5 ตารางกิโลเมตร

มีจำนวนประชากรประมาณ 63.514 ล้านคน ซึ่งเท่ากับ 63.514×10^6 คน

ดังนั้น พื้นที่ 1 ตารางกิโลเมตรจะมีประชากรประมาณ $\dfrac{63.514 \times 10^6}{5.18 \times 10^5}$ คน

$\approx 12.26 \times 10$ คน

≈ 123 คน

ตอบ ประมาณ 123 คน

แบบฝึกหัด 1.1

1. จงหาผลลัพธ์ต่อไปนี้ในรูปเลขยกกำลัง

1) $2^3 \times 2^0 \times 2^4$
2) $(-5)^2 \times (-5)^3 \times (-5)^{-2}$
3) $(0.5)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 \times (0.5)^{-1}$
4) $81 \times (-3)^0 \times (-3)^{-2}$
5) $64 \times 2^4 \times (-2)^{-3}$
6) $\left(\frac{2}{5}\right)^4 \times \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^0$
7) $(0.0001) \times 10^{-2} \times 10^5$
8) $96 \times 2^{-3} \times (192)^{-1}$
9) $(2.5 \times 10^{-2}) \times (4 \times 10^5)$
10) $(1.25 \times 10^4) \times (8 \times 10^{-5})$
11) $a^{-3} \times a^5 \times a^0$ เมื่อ $a \neq 0$
12) $2^{-3n} \times 2^{5n} \times 2^{-n}$ เมื่อ n แทนจำนวนเต็มบวก

2. จงหาผลลัพธ์ต่อไปนี้

1) $[(-64)^0 \times (-4)^3] \div (-4)^{-1}$
2) $[(-2)^4 \times (-2)^3 \times (-2)^0] \div (-2)^5$
3) $(3^5 \times 3^{-2} \times 3^2) \div 3^4$
4) $[49 \times (-7)^3] \div (-7)^5$
5) $(6 \times 10^{-2}) \div (9 \times 10^{-3})$
6) $(6.3 \times 10^{-3}) \div 9$
7) $(3.6 \times 10^1) \div (9 \times 10^{-3})$
8) $(2.4 \times 10^{-3}) \div (8 \times 10^{-5})$
9) $a^{-3} \div (a^{-2} \times a^{-5})$ เมื่อ $a \neq 0$
10) $(4a^5b^0) \div (2a^2b^{-1})$ เมื่อ $a \neq 0$ และ $b \neq 0$
11) $(5^{4n} \times 5^{5n}) \div (5^{4n} \times 5^{2n})$ เมื่อ n แทนจำนวนเต็มบวก
12) $\dfrac{18 \times 2^{-2n} \times 2^{3n}}{9 \times 2^{-n}}$ เมื่อ n แทนจำนวนเต็มบวก

3. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ในรูปสัญกรณ์วิทยาศาสตร์

1) 290,000,000,000	2) 0.0000000073
3) 0.0000000125	4) 425.1×10^{2}
5) 0.03×10^{-3}	6) 52.2×10^{-4}
7) 617×10^{-5}	8) 0.047×10^{-7}
9) 516 ล้าน	10) 5.78 พันล้าน
11) 9.7 หมื่นล้าน	12) 25 ล้านล้าน

4. หนังสือพจนานุกรมเล่มหนึ่งวัดความหนาจากหน้า 1 ถึงหน้า 1,440 ได้ประมาณ 5.4 เซนติเมตร

จงหาว่ากระดาษหนึ่งแผ่นของพจนานุกรมเล่มนี้หนาประมาณกี่เซนติเมตร ให้เขียนคำตอบในรูปสัญกรณ์วิทยาศาสตร์

5. ดาวอังคารเป็นดาวเคราะห์ในระบบสุริยะเช่นเดียวกับโลก พื้นผิวส่วนใหญ่ประกอบด้วยหิน

และผงโลหะจำพวกเหล็ก เมื่อมองจากโลกจึงเห็นเป็นสีแดง ดาวอังคารมีมวลประมาณ 0.1074 เท่าของโลก ถ้าโลกมีมวลประมาณ 5.98×10^{24} กิโลกรัม จงหาว่าดาวอังคารมีมวลประมาณกี่กิโลกรัม ให้เขียนคำตอบในรูปสัญกรณ์วิทยาศาสตร์

6. นักดาราศาสตร์นิยมวัดระยะทางระหว่างดวงดาวเป็นปีแสง ระยะ 1 ปีแสง คือ ระยะที่แสงเคลื่อนที่ไปได้ในเวลา 1 ปี ถ้าอัตราเร็วของแสงประมาณ 186,262 ไมล์ต่อวินาที จงหาว่า 1 ปีแสง เป็นระยะประมาณกี่กิโลเมตร ให้เขียนคำตอบในรูปสัญกรณ์วิทยาศาสตร์ (กำหนด 1 ไมล์ เท่ากับ 1.609 กิโลเมตร)

7. เมื่อมีจำนวนบวกสองจำนวนซึ่งแต่ละจำนวนอยู่ในรูปสัญกรณ์วิทยาศาสตร์ นักเรียนจะทราบได้อย่างไรว่าจำนวนใดมากกว่า จงอธิบาย

มีหรือไม่

มีจำนวนเต็มใดบ้างที่แทน x ด้วยจำนวนนั้น แล้วทำให้ $(x-2)^{x-3}$ ไม่มีความหมายทางคณิตศาสตร์

คำนำหน้าหน่วย

เมื่อมีปริมาณที่มีค่ามาก ๆ หรือมีค่าน้อย ๆ เช่น 6,000,000 โวลต์ หรือ 0.000000592 เมตร เราสามารถเขียนปริมาณเหล่านี้ให้อยู่ในรูป $A \times 10^{n}$ เมื่อ n แทนจำนวนเต็มได้ดังนี้

6,000,000 โวลต์ = 6×10^{6} โวลต์ หรือ 0.000000592 เมตร = 592×10^{-9} เมตร

ในกรณีเช่นนี้เราอาจใช้*คำนำหน้าหน่วย* การวัดหรือ*คำอุปสรรค* แทน 10^{6} และ 10^{-9} ได้ กล่าวคือ

ใช้คำว่า เมกะ แทน 10^{6} จะได้ 6,000,000 โวลต์ เท่ากับ 6×10^{6} โวลต์ หรือ 6 เมกะโวลต์ และใช้คำว่า นาโน แทน 10^{-9} จะได้ 0.000000592 เมตร เท่ากับ 592×10^{-9} เมตร หรือ 592 นาโนเมตร

คำนำหน้าหน่วยที่ใช้แทน 10^{n} เมื่อ n แทนจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ศูนย์ มีดังนี้

10^{n}	คำนำหน้าหน่วย ชื่อ
10^{18}	เอกซะ (exa)
10^{15}	เพตะ (peta)
10^{12}	เทระ (tera)
10^{9}	จิกะ (giga)
10^{6}	เมกะ (mega)
10^{3}	กิโล (kilo)
10^{2}	เฮกโต (hecto)
10^{1}	เดคา (deca)

10^{n}	คำนำหน้าหน่วย ชื่อ
10^{-1}	เดซิ (deci)
10^{-2}	เซนติ (centi)
10^{-3}	มิลลิ (milli)
10^{-6}	ไมโคร (micro)
10^{-9}	นาโน (nano)
10^{-12}	พิโก (pico)
10^{-15}	เฟมโต (femto)
10^{-18}	อัตโต (atto)

คำนำหน้าหน่วยเหล่านี้ ใช้เขียนนำหน้า*หน่วยรากฐาน* และ*หน่วยอนุพัทธ์*ของระบบ SI

หมายเหตุ 1. การใช้คำนำหน้าหน่วยแต่ละคำควรใช้เพียงครั้งเดียว ไม่นิยมเขียนคำนำหน้าหน่วยซ้อนกัน เช่น ไม่ควรเขียนแทน 10^{-9} วินาที ด้วย 1 มิลลิไมโครวินาที แต่ควรเขียนเป็น 1 นาโนวินาที

2. หน่วยรากฐานของระบบ SI ได้กล่าวถึงไว้แล้วในบทที่ 2 ของหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้พื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ส่วนหน่วยอนุพัทธ์ของระบบ SI เป็นหน่วยที่มีหน่วยรากฐานหลายหน่วยมาเกี่ยวเนื่องกัน เช่น หน่วยของอัตราเร็วเป็น เมตร/ วินาที

1.2 การดำเนินการของเลขยกกำลัง

การคูณเลขยกกำลัง

นักเรียนเคยหาผลคูณของเลขยกกำลังมาแล้วโดยใช้สมบัติดังนี้

เมื่อ a แทนจำนวนใด ๆ m และ n แทนจำนวนเต็มบวก

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

ต่อไปนี้เราจะพิจารณาสมบัติดังกล่าว เมื่อ m และ n แทนจำนวนเต็มใด ๆ

ให้นักเรียนพิจารณาการหาผลคูณ $a^m \times a^n$ เมื่อ $a \neq 0$ และกำหนด m และ n ดังต่อไปนี้

1. กำหนด $m = 0,\ n = 2$

$$a^m \times a^n = a^0 \times a^2$$

$$a^0 \times a^2 = 1 \times a^2$$

$$= a^2 \text{ หรือ } a^{0+2}$$

$2 = 0 + 2$

2. กำหนด $m = -5,\ n = 0$

$$a^m \times a^n = a^{-5} \times a^0$$

$$a^{-5} \times a^0 = \frac{1}{a^5} \times 1$$

$$= \frac{1}{a^5}$$

$$= a^{-5} \text{ หรือ } a^{-5+0}$$

$-5 = -5 + 0$

3. กำหนด $m = 4,\ n = -7$

$$a^m \times a^n = a^4 \times a^{-7}$$

$$a^4 \times a^{-7} = a^4 \times \frac{1}{a^7}$$

$$= a^{4-7}$$

$$= a^{-3} \text{ หรือ } a^{4+(-7)}$$

$-3 = 4 + (-7)$

4. กำหนด $m = -8$, $n = -2$

$$a^m \times a^n = a^{-8} \times a^{-2}$$

$$a^{-8} \times a^{-2} = \frac{1}{a^8} \times \frac{1}{a^2}$$

$$= \frac{1}{a^{10}}$$

$$= a^{-10} \text{ หรือ } a^{-8+(-2)}$$

$-10 = -8 + (-2)$

จากการหาผลคูณข้างต้น จะสังเกตเห็นว่าเลขชี้กำลังของผลคูณหาได้จากผลบวกของเลขชี้กำลังของเลขยกกำลังทั้งสองที่คูณกัน ซึ่งเป็นไปตามสมบัติของการคูณเลขยกกำลัง ดังนี้

เมื่อ a แทนจำนวนใด ๆ ที่ไม่ใช่ศูนย์ m และ n แทนจำนวนเต็ม

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลคูณ $5^{-10} \times 125$ ในรูปเลขยกกำลัง

วิธีทำ

$$5^{-10} \times 125 = 5^{-10} \times 5^3$$

$$= 5^{-10+3}$$

$$= 5^{-7}$$

$125 = 5 \times 5 \times 5$

$= 5^3$

ตอบ 5^{-7}

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลคูณ $(-3)^{-4} \times 3^{-5}$ ในรูปเลขยกกำลัง

วิธีทำ

$$(-3)^{-4} \times 3^{-5} = \frac{1}{(-3)^4} \times 3^{-5}$$

$$= \frac{1}{3^4} \times 3^{-5}$$

$$= 3^{-4} \times 3^{-5}$$

$$= 3^{-4+(-5)}$$

$$= 3^{-9}$$

$(-3)^4 = 3^4$

ตอบ 3^{-9}

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลคูณ $(-3)^{-5} \times (-81) \times 3^{3}$ ในรูปเลขยกกำลัง

$-81 = (-3) \times 27$

$= (-3) \times 3^{3}$

วิธีทำ

$$(-3)^{-5} \times (-81) \times 3^{3} = (-3)^{-5} \times (-3) \times 3^{3} \times 3^{3}$$

$$= (-3)^{-4} \times 3^{6}$$

$$= 3^{-4} \times 3^{6}$$

$(-3)^{-4} = 3^{-4}$

$$= 3^{-4+6}$$

$$= 3^{2}$$

ตอบ 3^{2}

ตัวอย่างที่ 4 จงหาผลลัพธ์ $3^{7} \times a^{-3} \times 3^{-5} \times a^{-2}$ เมื่อ $a \neq 0$ ในรูปอย่างง่าย

วิธีทำ

$$3^{7} \times a^{-3} \times 3^{-5} \times a^{-2} = (3^{7} \times 3^{-5}) \times (a^{-3} \times a^{-2})$$

$$= 3^{2} \times a^{-5}$$

$$= 3^{2}a^{-5} \text{ หรือ } 9a^{-5}$$

ตอบ $3^{2}a^{-5}$ หรือ $9a^{-5}$

ตัวอย่างที่ 5 ท่อนาโน (nanotube) เป็นท่อกลวงที่เกิดจากการเรียงตัวของคาร์บอน

มีโครงสร้างเป็นตาข่ายร่างแหขนาดเล็กและแข็งแรง แต่มีน้ำหนักเบามาก สามารถนำไปใช้ประโยชน์ได้มากมาย เช่น ใช้ในการผลิตสายไฟระดับโมเลกุล หรือกล่องบรรจุยาฝังในร่างกาย เพื่อให้ออกฤทธิ์อย่างช้า ๆ เมื่อมีอาการของโรค ในปี ค.ศ. 2001 นักวิจัยชาวจีนได้มีการพัฒนาท่อนาโนคาร์บอนที่มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางได้เล็กถึง 33×10^{-7} เท่าของขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของเส้นผม ถ้าเส้นผมมีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 100×10^{-6} เมตร ท่อนาโนที่นักวิจัยชาวจีนพัฒนาขึ้นจะมีเส้นผ่านศูนย์กลางยาวกี่เมตร

วิธีทำ เส้นผมมีเส้นผ่านศูนย์กลาง 100×10^{-6} เมตร

ท่อนาโนมีเส้นผ่านศูนย์กลางยาวเป็น 33×10^{-7} เท่าของเส้นผ่านศูนย์กลางของเส้นผม

ดังนั้นท่อนาโนมีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว

$$(33 \times 10^{-7}) \times (100 \times 10^{-6}) = 33 \times 10^{-7} \times 10^{-4} \text{ เมตร}$$

$$= 33 \times 10^{-11} \text{ เมตร}$$ $33 = 0.33 \times 10^{2}$

$$= 0.33 \times 10^{-9} \text{ เมตร}$$

หรือ 0.33 นาโนเมตร

ตอบ 33×10^{-11} เมตร หรือ 0.33 นาโนเมตร

แบบฝึกหัด 1.2 ก

1. จงหาผลลัพธ์ในรูปเลขยกกำลัง

1) $4^{5} \times 5^{0} \times 4^{7}$
2) $2^{3} \times 4^{-1}$
3) $3^{-4} \times 3^{-2} \times 81$
4) $(-2)^{4} \times (-2)^{-2} \times (-2)^{-2}$
5) $3^{-5} \times 3^{5} \times 3^{4} \times (-3)^{-4}$
6) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \times (0.5)^{-2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{4}$
7) $(0.25)(0.5)^{-3}$
8) $16 \times (-4)^{3} \times (-4)^{-5}$
9) $(-343) \times 7^{-4} \times (-7)^{-1}$
10) $(-3a)^{4} \times (-3a)^{-3} \times (-3a)^{2}$ เมื่อ $a > 0$
11) $(-8) \times (-2)^{-n} \times (-2)^{4n}$
เมื่อ n แทนจำนวนเต็ม
12) $a^{5n} \times a^{-3n} \times a^{0}$
เมื่อ $a \neq 0$ และ n แทนจำนวนเต็ม

2. จงหาผลลัพธ์ในรูปสัญกรณ์วิทยาศาสตร์

1) $(4 \times 10^{3}) \times (6 \times 10^{5})$
2) $(2.4 \times 10^{-4}) \times (2 \times 10^{4})$
3) $(2.5 \times 10^{-4}) \times (4 \times 10^{-3})$
4) $(1.2 \times 10^{3}) \times (5 \times 10^{-2})$

3. จงหาผลลัพธ์ในรูปอย่างง่าย

1) $4^2 \times a^{-2} \times 4^{-1}$ เมื่อ $a \neq 0$ 　　2) $2^{-2} \times a^4 \times a^{-5}$ เมื่อ $a \neq 0$

3) $3^{-7} \times y^2 \times 3^8 \times y^{-1}$ เมื่อ $y \neq 0$ 　　4) $(-3b^2)(2b^3)(-b^{-2})$ เมื่อ $b \neq 0$

5) $3^{-7} \times a^2 \times 3^8 \times a^{-1}$ เมื่อ $a \neq 0$ 　　6) $(-2a^3)(5a^{-5})(-a^2)$ เมื่อ $a \neq 0$

4. จงหาจำนวนมาแทน a แล้วทำให้ประโยคต่อไปนี้เป็นจริง

1) $2^{-15} \times a = \frac{1}{2^{10}}$ 　　2) $0.25 \times 10^{-4} = a \times 10^{-2}$

5. ในปี พ.ศ. 2553 ราคาข้าวหอมมะลิในตลาดโลกโดยเฉลี่ยตันละ 950 ดอลลาร์สหรัฐฯ สมาคมส่งข้าวออกรายงานว่าประชากรทั่วโลกมีความต้องการบริโภคข้าวสารประมาณ 436.84 ล้านตัน จงหาว่ามูลค่าข้าวสารเหล่านี้ในตลาดโลกคิดเป็นเงินไทยประมาณกี่บาท ถ้า 1 เหรียญสหรัฐฯ ประมาณ 30 บาท

6. ดาววีกา (Vega) เป็นหนึ่งในสิบของอันดับดาวฤกษ์ที่สว่างที่สุด และอยู่ใกล้โลกที่สุด สามารถ

มองเห็นได้ด้วยตาเปล่าในเวลากลางคืน ถ้าวีกาอยู่ห่างจากโลกประมาณ 378.4 ล้านล้านกิโลเมตร วีกาจะอยู่ห่างจากโลกกี่ปีแสง (กำหนดให้ 1 ปีแสงเท่ากับ 9.46×10^{12} กิโลเมตร)

7. โดยปกติ สาหร่ายทะเลชนิดหนึ่งจะมีกิ่งคล้ายขนเล็ก ๆ หนึ่งกิ่งประมาณทุก ๆ 0.25×10^{-3} เมตร ถ้าสาหร่ายทะเลชนิดนี้ต้นหนึ่งมี 190 กิ่ง จงหาความสูงโดยประมาณของสาหร่ายทะเลต้นนี้เป็นเมตร

น่ารู้

เมื่อเราไม่สบายมีอาการเจ็บป่วยไม่มากนัก เรามักจะรับประทานยาเพื่อรักษาตัวเอง ตามปกติร่างกายของเรามีกระบวนการขับยาที่รับประทานเข้าไปให้ออกจากร่างกายในรูปการเผาผลาญพลังงานและการขับถ่ายของเสีย

ถ้ารับประทานยาชนิดหนึ่ง 100 มิลลิกรัม และร่างกายสามารถขับยาออกไปครึ่งหนึ่งของที่มีอยู่ในร่างกายทุก 6 ชั่วโมง เมื่อครบ 24 ชั่วโมงหลังรับประทานยานี้ จะมียาเหลืออยู่ในร่างกายกี่มิลลิกรัม

การหารเลขยกกำลัง

นักเรียนเคยหาผลหารของเลขยกกำลังมาแล้ว โดยใช้สมบัติดังนี้

เมื่อ a แทนจำนวนใด ๆ ที่ไม่ใช่ศูนย์ m และ n แทนจำนวนเต็มบวก

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

ต่อไปนี้เราจะพิจารณาสมบัติดังกล่าว เมื่อ m และ n แทนจำนวนเต็มใด ๆ

ให้นักเรียนพิจารณาการหาผลหาร $a^m \div a^n$ เมื่อ $a \neq 0$ และกำหนด m และ n ดังต่อไปนี้

1. กำหนด $m = 0, n = 3$

$$a^m \div a^n = a^0 \div a^3$$
$$a^0 \div a^3 = \frac{a^0}{a^3} = \frac{1}{a^3} = a^{-3} \text{ หรือ } a^{0-3}$$

$-3 = 0 - 3$

2. กำหนด $m = -5, n = 0$

$$a^m \div a^n = a^{-5} \div a^0$$
$$a^{-5} \div a^0 = \frac{a^{-5}}{a^0} = \frac{a^{-5}}{1} = a^{-5} \text{ หรือ } a^{-5-0}$$

$-5 = -5 - 0$

3. กำหนด $m = 4, n = -2$

$$a^m \div a^n = a^4 \div a^{-2}$$
$$a^4 \div a^{-2} = \frac{a^4}{a^{-2}} = \frac{a^4}{\frac{1}{a^2}} = a^4 \times a^2 = a^6 \text{ หรือ } a^{4-(-2)}$$

$6 = 4 - (-2)$

4. กำหนด m = -7, n = -3

$$a^m \div a^n = a^{-7} \div a^{-3}$$

$$a^{-7} \div a^{-3} = \frac{a^{-7}}{a^{-3}}$$

$$= \frac{a^{-7}}{\frac{1}{a^3}}$$

$$= a^{-7} \times a^3$$

$$= a^{-4} \text{ หรือ } a^{-7-(-3)}$$

$-4 = -7 - (-3)$

จากการหาผลหารข้างต้น จะสังเกตเห็นว่าเลขชี้กำลังของผลหารหาได้จากเลขชี้กำลังของตัวตั้งลบด้วยเลขชี้กำลังของตัวหาร ซึ่งเป็นไปตามสมบัติของการหารเลขยกกำลัง ดังนี้

เมื่อ a แทนจำนวนใด ๆ ที่ไม่ใช่ศูนย์ m และ n แทนจำนวนเต็ม

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

นักเรียนเคยทราบมาแล้วว่า

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ เมื่อ a แทนจำนวนใด ๆ ที่ไม่ใช่ศูนย์ และ n แทนจำนวนเต็มบวก

จากสมบัติของการหารเลขยกกำลังข้างต้น เราสามารถแสดงได้ว่า $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ เมื่อ n แทนจำนวนเต็ม ได้ดังนี้

จากสมบัติ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ เมื่อ $a \neq 0$ ถ้า m = 0 และ n แทนจำนวนเต็ม

จะได้ $\frac{a^0}{a^n} = a^{0-n}$

$$= a^{-n}$$

และ $\frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}$

ดังนั้น $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

จึงสรุปได้ว่า

เมื่อ a แทนจำนวนใด ๆ ที่ไม่ใช่ศูนย์ และ n แทนจำนวนเต็ม

$$\mathbf{a^{-n} = \frac{1}{a^{n}}}$$

ผลที่ได้ตามมาคือ $a^{n} = \frac{1}{a^{-n}}$

ตัวอย่างที่ 6 จงหาผลลัพธ์ $\frac{125 \times 5^{-4}}{5^{-7} \times 5^{-2}}$ ในรูปเลขยกกำลัง

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\frac{125 \times 5^{-4}}{5^{-7} \times 5^{-2}} &= \frac{5^{3} \times 5^{-4}}{5^{-7} \times 5^{-2}} \\
&= \frac{5^{3+(-4)}}{5^{-7+(-2)}} \\
&= \frac{5^{-1}}{5^{-9}} \\
&= 5^{-1-(-9)} \\
&= 5^{-1+9} \\
&= 5^{8}
\end{aligned}$$

ตอบ 5^{8}

ตัวอย่างที่ 7 จงหาผลลัพธ์ $\frac{a^{3}b^{-2}}{a^{-2}b^{-4}}$ เมื่อ $a \neq 0$ และ $b \neq 0$ ในรูปอย่างง่าย

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\frac{a^{3}b^{-2}}{a^{-2}b^{-4}} &= a^{3-(-2)}b^{-2-(-4)} \\
&= a^{3+2}b^{-2+4} \\
&= a^{5}b^{2}
\end{aligned}$$

ตอบ $a^{5}b^{2}$

ตัวอย่างที่ 8 จงหาผลลัพธ์ $\frac{5^{-6n} \times 5^{4n}}{5^{3n} \times 5^{-n}}$ เมื่อ n แทนจำนวนเต็ม ในรูปอย่างง่าย

วิธีทำ

$$\frac{5^{-6n} \times 5^{4n}}{5^{3n} \times 5^{-n}} = \frac{5^{-6n+4n}}{5^{3n+(-n)}}$$

$$= \frac{5^{-2n}}{5^{2n}}$$

$$= 5^{-4n} \text{ หรือ } \frac{1}{5^{4n}}$$

ตอบ 5^{-4n} หรือ $\frac{1}{5^{4n}}$

ตัวอย่างที่ 9 ถ้าน้ำ 1 โมเลกุล มีมวล 3.0×10^{-16} กิโลกรัม จงหาว่าน้ำที่มีมวล 1 กรัม จะมีกี่โมเลกุล ให้เขียนคำตอบในรูปสัญกรณ์วิทยาศาสตร์

วิธีทำ เนื่องจากมวล 1 กิโลกรัม เท่ากับ 10^{3} กรัม

มวลของน้ำ 3.0×10^{-16} กิโลกรัม เท่ากับ $3 \times 10^{-16} \times 10^{3}$ กรัม

$= 3 \times 10^{-13}$ กรัม

และมวลของน้ำ 3×10^{-13} กรัม มีจำนวนโมเลกุล 1 โมเลกุล

ดังนั้น มวลของน้ำ 1 กรัม มีจำนวนโมเลกุล $\frac{1}{3 \times 10^{-13}}$ โมเลกุล

$= \frac{1}{3} \times 10^{13}$ โมเลกุล

$\approx 0.333 \times 10^{13}$ โมเลกุล

หรือ 3.33×10^{12} โมเลกุล

ตอบ ประมาณ 3.33×10^{12} โมเลกุล

แบบฝึกหัด 1.2 ข

1. จงหาผลลัพธ์ในรูปเลขยกกำลัง

1) $\dfrac{5^3 \times 5^7}{5^4}$

2) $\dfrac{3^{-8} \times 3^2}{3^{-3}}$

3) $\dfrac{2^{-5} \times 2^3 \times 2^0}{32}$

4) $\dfrac{(-7)^4 \times (-7)^{-2}}{7^3 \times 7^0}$

5) $\dfrac{11^{-9} \times 11^{-2}}{121 \times 11^{-5}}$

6) $\dfrac{(-13)^4 \times 13^{-2}}{13^3 \times 13^{-1}}$

7) $\dfrac{(-1000) \times 10^4 \times (-10)^{-1}}{(-10)^{-3} \times (-10)^5}$

8) $\dfrac{(0.008) \times (0.2)^{-5}}{(-0.2)^2}$

9) $\dfrac{a^{-7} \times a^{10}}{a^3 \times a^{-5}}$ เมื่อ $a \neq 0$

10) $\dfrac{6^{-3n} \times 6^{5n}}{6^{-n} \times 6^{-2n}}$ เมื่อ n แทนจำนวนเต็ม

2. จงหาผลลัพธ์ในรูปสัญกรณ์วิทยาศาสตร์

1) $(2 \times 10^{-6}) \div (4 \times 10^{-3})$

2) $(2.84 \times 10^{-7}) \div (4 \times 10^5)$

3) $0.000000000081 \div 0.009$

4) $\dfrac{(2.4 \times 10^{-3}) \times (8 \times 10^{-5})}{3 \times 10^{-7}}$

3. จงหาผลลัพธ์ในรูปอย่างง่าย

1) $\dfrac{256}{2^{10}} \times \dfrac{128}{2^{-18}}$

2) $(15 \times 3^{-7}) \div (5 \times 3^2)$

3) $(-1.8 \times 5^2) \div (6 \times 5^{-1})$

4) $(7^{2n} \times 7^{-5n}) \div (7^{-3n} \times 7^n)$ เมื่อ n แทนจำนวนเต็ม

5) $\dfrac{8a^{-3}b^{-1}}{2a^{-5}b^{-4}}$ เมื่อ $a \neq 0$ และ $b \neq 0$

6) $\dfrac{26a^6b^7c^2}{2ab^3c^3}$ เมื่อ $a \neq 0, b \neq 0$ และ $c \neq 0$

4. องค์การสหประชาชาติประมาณจำนวนประชากรโลกในวันที่ 14 เมษายน 2553 ว่าโลกมีประชากรทั้งสิ้นประมาณ 6,800 ล้านคน ประมาณร้อยละ 40 ของประชากรโลก อาศัยอยู่นอกทวีปเอเชีย จงหาจำนวนประชากรที่อาศัยอยู่ในทวีปเอเชีย

5. โลกของเรามีพื้นที่ผิวที่ปกคลุมด้วยน้ำประมาณ 70 เปอร์เซ็นต์ ถ้าโลกมีเส้นผ่านศูนย์กลาง

ประมาณ 12,800 กิโลเมตร จงหาพื้นที่ผิวส่วนที่เหลือโดยประมาณ ให้เขียนคำตอบในรูปสัญกรณ์วิทยาศาสตร์ (กำหนด สูตรการหาพื้นที่ผิวของโลก = $4\pi r^2$ เมื่อ r แทนความยาวของรัศมีของโลก และ ค่าประมาณของ π เป็น 3.14)

6. เขื่อนรัชชประภามีชื่อเรียกดั้งเดิมว่า เขื่อนเชี่ยวหลานอยู่ในจังหวัดสุราษฎร์ธานี เขื่อนนี้เป็น

เขื่อนอเนกประสงค์ทั้งด้านการชลประทานและพลังงานไฟฟ้า ตัวเขื่อนสูง 94 เมตร สันเขื่อนยาว 761 เมตร เมื่อน้ำเต็มเขื่อนอ่างเก็บน้ำมีพื้นที่ประมาณ 185 ตารางกิโลเมตร จุน้ำได้ประมาณ 5,638.8 ล้านลูกบาศก์เมตร จงหาว่าเมื่อน้ำเต็มเขื่อน อ่างเก็บน้ำนี้มีความลึกโดยเฉลี่ยประมาณกี่เมตร

7. ช่วงปิดภาคเรียนติ๊กมีโอกาสไปเที่ยวเขื่อนรัชชประภา ขณะจอดเรือชมทิวทัศน์ริมเขื่อนอยู่นั้น

ติ๊กมองเห็นหน้าผาของภูเขาหินสูงตระหง่านสวยงามมาก ติ๊กอยากทราบว่าตัวเองยืนอยู่ห่างจากหน้าผาเท่าไรจึงกู่ร้องแล้วคอยจับเวลาว่าจะได้ยินเสียงสะท้อนกลับมาเมื่อใด เมื่อทำเช่นนี้หลาย ๆ ครั้ง ปรากฏว่าเวลาที่ได้ยินเสียงสะท้อนกลับมาเฉลี่ยแล้วเป็น 1 วินาที จงหาว่าติ๊กยืนอยู่ห่างจากหน้าผาประมาณกี่เมตร ถ้าเสียงมีอัตราเร็วประมาณ 1.2×10^3 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

8. บีทียู (Btu) เป็นหน่วยของพลังงานความร้อน และกิโลวัตต์ชั่วโมง (kwh) เป็นหน่วยของพลังงานไฟฟ้าที่ใช้ในการคิดค่าไฟฟ้า

   ในการอบขนมเค้กด้วยเตาอบไฟฟ้า ใช้ไฟฟ้าประมาณ 6 กิโลวัตต์ชั่วโมง ถ้าพลังงานไฟฟ้าที่ใช้ครั้งนี้เปลี่ยนเป็นพลังงานความร้อนทั้งหมด อยากทราบว่าพลังงานความร้อนที่เกิดขึ้นเป็นกี่บีทียู (กำหนดให้พลังงานความร้อน 1 บีทียู เท่ากับ พลังงานไฟฟ้า 2.93×10^{-4} กิโลวัตต์ชั่วโมง)

1.3 สมบัติอื่น ๆ ของเลขยกกำลัง

เลขยกกำลังที่มีฐานเป็นเลขยกกำลัง

นักเรียนเคยเรียนเรื่องเลขยกกำลังที่มีฐานเป็นจำนวนใด ๆ มาแล้ว เช่น

8^4 เป็นเลขยกกำลังที่มี 8 เป็นฐาน และ 4 เป็นเลขชี้กำลัง เราอาจเขียนแทน 8 ด้วย 2^3

ดังนั้น 8^4 อาจเขียนแทนด้วย $(2^3)^4$

$(2^3)^4$ เป็นเลขยกกำลังที่มี 2^3 เป็นฐาน และ 4 เป็นเลขชี้กำลัง

ให้นักเรียนพิจารณาความหมายของเลขยกกำลังที่มีฐานเป็นเลขยกกำลังต่อไปนี้

1. $(5^2)^4$ เป็นเลขยกกำลังที่มี 5^2 เป็นฐาน และ 4 เป็นเลขชี้กำลัง

$$(5^2)^4 = 5^2 \times 5^2 \times 5^2 \times 5^2$$
$$= 5^{2+2+2+2}$$

จะได้ $(5^2)^4 = 5^8$ หรือ $5^{2 \times 4}$

$8 = 2 \times 4$

2. $((-2)^{-3})^5$ เป็นเลขยกกำลังที่มี $(-2)^{-3}$ เป็นฐาน และ 5 เป็นเลขชี้กำลัง

$$((-2)^{-3})^5 = (-2)^{-3} \times (-2)^{-3} \times (-2)^{-3} \times (-2)^{-3} \times (-2)^{-3}$$
$$= (-2)^{(-3)+(-3)+(-3)+(-3)+(-3)}$$

จะได้ $((-2)^{-3})^5 = (-2)^{-15}$ หรือ $(-2)^{(-3) \times 5}$

$-15 = (-3) \times 5$

3. $(7^2)^{-3}$ เป็นเลขยกกำลังที่มี 7^2 เป็นฐาน และ -3 เป็นเลขชี้กำลัง

$$(7^2)^{-3} = \frac{1}{\left(7^2\right)^3}$$
$$= \frac{1}{7^2 \times 7^2 \times 7^2}$$
$$= \frac{1}{7^6}$$

จะได้ $(7^2)^{-3} = 7^{-6}$ หรือ $7^{2 \times (-3)}$

$-6 = 2 \times (-3)$

4. $(5^{-3})^{-2}$ เป็นเลขยกกำลังที่มี 5^{-3} เป็นฐานและ -2 เป็นเลขชี้กำลัง

$$
\begin{aligned}
(5^{-3})^{-2} &= \frac{1}{(5^{-3})^{2}} \\
&= \frac{1}{5^{-3} \times 5^{-3}} \\
&= \frac{1}{5^{(-3)+(-3)}} \\
&= \frac{1}{5^{-6}}
\end{aligned}
$$

จะได้ $(5^{-3})^{-2} = 5^{6}$ หรือ $5^{(-3)\times(-2)}$

$6 = (-3) \times (-2)$

จากการหาผลลัพธ์ของเลขยกกำลังข้างต้น จะสังเกตเห็นว่าเลขชี้กำลังของผลลัพธ์หาได้จากผลคูณของเลขชี้กำลังของฐานกับเลขชี้กำลังของเลขยกกำลังนั้น ซึ่งเป็นไปตามสมบัติของเลขยกกำลัง ดังนี้

เมื่อ a แทนจำนวนใด ๆ ที่ไม่ใช่ศูนย์ m และ n แทนจำนวนเต็ม

$$(a^{m})^{n} = a^{mn}$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลคูณ $625^{3} \times (5^{4})^{2}$ ในรูปเลขยกกำลังที่มี 25 เป็นฐาน

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
625^{3} \times (5^{4})^{2} &= (25^{2})^{3} \times (25^{2})^{2} \\
&= 25^{6} \times 25^{4} \\
&= 25^{10}
\end{aligned}
$$

ตอบ 25^{10}

เลขยกกำลังที่มีฐานอยู่ในรูปการคูณของจำนวนหลาย ๆ จำนวน

นักเรียนเคยทราบมาแล้วว่า 14^{3} เป็นเลขยกกำลังที่มี 14 เป็นฐาน และ 3 เป็นเลขชี้กำลัง เราอาจเขียนแทน 14 ด้วย 2×7

ดังนั้น 14^{3} อาจเขียนแทนด้วย $(2 \times 7)^{3}$

$(2 \times 7)^{3}$ เป็นเลขยกกำลังที่มี 2×7 เป็นฐาน และ 3 เป็นเลขชี้กำลัง

ให้นักเรียนพิจารณาความหมายของเลขยกกำลังที่มีฐานอยู่ในรูปการคูณของจำนวนหลาย ๆ จำนวนต่อไปนี้

1. $(2 \times 5)^3$ เป็นเลขยกกำลังที่มี 2×5 เป็นฐาน และ 3 เป็นเลขชี้กำลัง

$$\begin{aligned} (2 \times 5)^3 &= (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5) \\ &= (2 \times 2 \times 2) \times (5 \times 5 \times 5) \\ &= 2^3 \times 5^3 \end{aligned}$$

จะได้ $(2 \times 5)^3 = 2^3 \times 5^3$

2. $(2 \times 5)^{-2}$ เป็นเลขยกกำลังที่มี 2×5 เป็นฐาน และ -2 เป็นเลขชี้กำลัง

$$\begin{aligned} (2 \times 5)^{-2} &= \frac{1}{(2 \times 5)^2} \\ &= \frac{1}{(2 \times 5) \times (2 \times 5)} \\ &= \frac{1}{(2 \times 2) \times (5 \times 5)} \\ &= \frac{1}{2^2 \times 5^2} \\ &= \frac{1}{2^2} \times \frac{1}{5^2} \\ &= 2^{-2} \times 5^{-2} \end{aligned}$$

จะได้ $(2 \times 5)^{-2} = 2^{-2} \times 5^{-2}$

3. $(2 \times 5)^0$ เป็นเลขยกกำลังที่มี 2×5 เป็นฐาน และ 0 เป็นเลขชี้กำลัง

$$\begin{aligned} (2 \times 5)^0 &= 10^0 \\ &= 1 \text{ หรือ } 2^0 \times 5^0 \end{aligned}$$

ผลที่ได้ข้างต้นเป็นไปตามสมบัติของเลขยกกำลัง ดังนี้

เมื่อ a และ b แทนจำนวนใด ๆ ที่ไม่ใช่ศูนย์ และ n แทนจำนวนเต็ม

$$(ab)^n = a^n b^n$$

ตัวอย่างที่ 2 จงเขียน 15^3 ในรูปการคูณของเลขยกกำลังที่มีฐานเป็นจำนวนเฉพาะ

วิธีทำ

$$15^3 = (3 \times 5)^3$$

$$= 3^3 \times 5^3$$

ตอบ $3^3 \times 5^3$

เลขยกกำลังที่มีฐานอยู่ในรูปการหารของจำนวนหลาย ๆ จำนวน

ให้นักเรียนพิจารณาความหมายของเลขยกกำลังต่อไปนี้

1. $\left(\frac{2}{7}\right)^3$ เป็นเลขยกกำลังที่มี $\frac{2}{7}$ เป็นฐาน และ 3 เป็นเลขชี้กำลัง

$$\left(\frac{2}{7}\right)^3 = \frac{2}{7} \times \frac{2}{7} \times \frac{2}{7}$$

$$= \frac{2 \times 2 \times 2}{7 \times 7 \times 7}$$

$$= \frac{2^3}{7^3}$$

จะได้ $\left(\frac{2}{7}\right)^3 = \frac{2^3}{7^3}$

2. $\left(\frac{3}{5}\right)^{-4}$ เป็นเลขยกกำลังที่มี $\frac{3}{5}$ เป็นฐาน และ -4 เป็นเลขชี้กำลัง

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)^4}$$

$$= \frac{1}{\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5}}$$

$$= \frac{1}{\frac{3^4}{5^4}}$$

$$= 1 \times \frac{5^4}{3^4}$$

$$= \frac{5^4}{3^4}$$

$$\frac{5^4}{3^4} = \frac{1}{3^4} \times 5^4$$

$$= \frac{3^{-4}}{5^{-4}}$$

จะได้ $\left(\frac{3}{5}\right)^{-4} = \frac{3^{-4}}{5^{-4}}$

3. $\left(\frac{3}{5}\right)^0$ เป็นเลขยกกำลังที่มี $\frac{3}{5}$ เป็นฐาน และ 0 เป็นเลขชี้กำลัง

$$\left(\frac{3}{5}\right)^0 = 1$$
$$= \frac{3^0}{5^0}$$

ผลที่ได้ข้างต้นเป็นไปตามสมบัติของเลขยกกำลัง ดังนี้

เมื่อ a และ b แทนจำนวนใด ๆ ที่ไม่ใช่ศูนย์ และ n แทนจำนวนเต็ม

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

ตัวอย่างที่ 3 จงเขียน $\left(\frac{3}{7}\right)^5$ ในรูปเศษส่วนของเลขยกกำลังที่ฐานเป็นจำนวนเฉพาะ

วิธีทำ $\left(\frac{3}{7}\right)^5 = \frac{3^5}{7^5}$

ตอบ $\frac{3^5}{7^5}$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาผลลัพธ์ $\frac{(7^2)^5 \times (3^{-2})^{-3}}{\left(\frac{3}{7}\right)^{-2}}$ ในรูปเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก

วิธีทำ

$$\frac{(7^2)^5 \times (3^{-2})^{-3}}{\left(\frac{3}{7}\right)^{-2}} = 7^{10} \times 3^6 \times \left(\frac{3}{7}\right)^2$$
$$= 7^{10} \times 3^6 \times \frac{3^2}{7^2}$$
$$= \frac{7^{10}}{7^2} \times 3^6 \times 3^2$$
$$= 7^8 \times 3^8$$
$$= (7 \times 3)^8$$
$$= 21^8$$

ตอบ 21^8

ตัวอย่างที่ 5 จงหาผลลัพธ์ $\frac{16(a^2b^3)^3}{8(a^3b^{-3})^2}$ เมื่อ a และ b แทนจำนวนใด ๆ ที่ไม่ใช่ศูนย์

วิธีทำ

$$\frac{16(a^2b^3)^3}{8(a^3b^{-3})^2} = \frac{16}{8} \times \frac{a^6 \times b^9}{a^6 \times b^{-6}}$$

$$= 2 \times \frac{a^6}{a^6} \times \frac{b^9}{b^{-6}}$$

$$= 2 \times a^0 \times b^{15}$$

$$= 2 \times 1 \times b^{15}$$

$$= 2b^{15}$$

ตอบ $2b^{15}$

ตัวอย่างที่ 6 จงหาปริมาตรของโลกซึ่งมีรูปร่างเป็นทรงกลม มีรัศมียาวประมาณ 6,380,000 เมตร ให้เขียนคำตอบในรูปสัญกรณ์วิทยาศาสตร์

(สูตร ปริมาตรของทรงกลม $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ เมื่อ π มีค่าประมาณ 3.14)

วิธีทำ โลกมีรัศมียาวประมาณ $6{,}380{,}000 = 6.38 \times 10^6$ เมตร

จากสูตร $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

เมื่อ V แทนปริมาตรของโลก มีหน่วยเป็นลูกบาศก์เมตร

r แทนรัศมีของโลกยาวประมาณ 6.38×10^6 เมตร

จะได้ $V \approx \frac{4}{3} \times 3.14 \times (6.38 \times 10^6)^3$ ลูกบาศก์เมตร

$\approx \left(\frac{4 \times 3.14}{3}\right) \times (6.38)^3 \times (10^6)^3$ ลูกบาศก์เมตร

$\approx 4.1866 \times 259.694 \times 10^{18}$ ลูกบาศก์เมตร

$\approx 1087.23 \times 10^{18}$ ลูกบาศก์เมตร

$\approx (1.08723 \times 10^3) \times 10^{18}$ ลูกบาศก์เมตร

$\approx 1.09 \times 10^{21}$ ลูกบาศก์เมตร

ดังนั้น ปริมาตรของโลกประมาณ 1.09×10^{21} ลูกบาศก์เมตร

ตอบ 1.09×10^{21} ลูกบาศก์เมตร

แบบฝึกหัด 1.3

1. จงหาผลลัพธ์ในรูปอย่างง่าย

   1) $(5^0)^0$ 2) $(3a^2b^2)^0$ เมื่อ $a \neq 0$ และ $b \neq 0$

   3) $(5^{-3})^{-2}$ 4) $7^2 \times 5^{-4} \times 5^6$

   5) $(2^{-1} \times 3^2)^{-2}$ 6) $(2^{-3} \times 4^{-1})^{-1}$

   7) $(9^{-1} \times 3^5 \times 3^{-1})^2$ 8) $[8 \times (2^3)^{-1} \times 16^{-1} \times 5^{-4}]^{-2}$

   9) $4^2 \times a^{-2} \times 4^{-1}$ เมื่อ $a \neq 0$ 10) $(2a^{-1}a^2a^3)^{-3}$ เมื่อ $a \neq 0$

2. จงหาผลลัพธ์ต่อไปนี้

   1) $[(4^{-1})^{-2} \div (2^{-5})^2]^2$ 2) $(3^2 \times 2^4)^3 \div (3^{-1} \times 2^5)^{-2}$

   3) $12^{-7} \div (3^{-7} \times 4^{-7})$ 4) $(4 \times 10^3)^2 \div (4 \times 10^{-1})^{-2}$

   5) $6^{17} \div (2^{17} \times 3^{16})$ 6) $(2^5 \times (0.4)^{-5}) \div (0.2)^{-5}$

   7) $(a^{-2}b^{-4} \times a^5b^2)^2 \div a^3b^{-1}$ เมื่อ $a \neq 0$ และ $b \neq 0$

   8) $\left(\dfrac{3a^5b^6}{2^7}\right)^0 \times \left(\dfrac{9a^{-1}b^{-1}}{10^{-1}}\right)^{-1}$ เมื่อ $a \neq 0$ และ $b \neq 0$

   9) $[(4^2)^m \times (9^3)^m] \div (2^m \times 3^{3m})$ เมื่อ m แทนจำนวนเต็ม

   10) $[(7^n)^{-1} \times (14^n)^6] \div (128 \times 7^4)^n$ เมื่อ n แทนจำนวนเต็ม

3. จงหาจำนวนที่แทน m, n และ p แล้วทำให้ประโยคต่อไปนี้เป็นจริง

   1) $35 \times 49 = 5^m \times 7^n$ 2) $10^5 \div 6^5 = 2^m \times 3^n \times 5^p$

4. ดวงอาทิตย์อยู่ห่างจากโลกประมาณ 149,000,000 กิโลเมตร เมื่ออัตราเร็วของแสงประมาณ 300,000 กิโลเมตรต่อวินาที จงหาเวลาโดยประมาณที่แสงเดินทางจากดวงอาทิตย์มาถึงโลก ให้เขียนคำตอบในรูปสัญกรณ์วิทยาศาสตร์

   สูตร $t = \dfrac{d}{r}$

   เมื่อ t แทนเวลาที่แสงเดินทางจากดวงอาทิตย์มาถึงโลก

   d แทนระยะห่างระหว่างดวงอาทิตย์กับโลก

   r แทนอัตราเร็วของแสง

5. ในปี พ.ศ. 2430 เฮิรตซ์ (Hertz) ได้สังเกตปรากฏการณ์แสงที่มีความยาวคลื่นสั้น และพบว่า เมื่อแสงตกกระทบผิวโลหะแล้วทำให้อนุภาคที่มีประจุไฟฟ้าหลุดจากโลหะนั้น แสงที่มีความยาวคลื่นสั้นนี้จะให้ก้อนพลังงานที่เรียกว่า โฟตอน (Photon) แก่โลหะที่ตกกระทบ จงหาว่าถ้าใช้แสงสีเขียวที่มีความยาวคลื่น 550 นาโนเมตร จะได้โฟตอนที่ให้พลังงานเป็นเท่าใด

กำหนดให้ $E = \frac{hc}{\lambda}$ เมื่อ E แทน พลังงานของโฟตอน มีหน่วยเป็นจูล

λ (แลมบ์ดา) แทน ความยาวคลื่น มีหน่วยเป็นนาโนเมตร

c แทน อัตราเร็วของแสง เท่ากับ 3×10^{8} เมตรต่อวินาที

h แทน ค่าคงตัวเท่ากับ 6.63×10^{-34}

คิด

จำนวนสองจำนวนที่นำมาคูณกันแล้วได้ผลคูณเป็นหนึ่งล้าน และจำนวนทั้งสองต้องไม่เป็นจำนวนที่หารด้วย 10 ลงตัว จำนวนทั้งสองนั้นคือจำนวนใด

เป็นจริงหรือไม่

จงพิจารณาว่าประโยคต่อไปนี้เป็นจริงหรือไม่ เพราะเหตุใด

1. $(0.000000005)^0 = 1$
2. $a^0 = 1$ เมื่อ a แทนจำนวนใดๆ
3. $10^{-5} < 0$
4. $-5^4 = (-5)^4$
5. $(0.5)^2 = (2)^{-2}$
6. $100^{10} = 10^{100}$
7. $\left(\frac{3}{7}\right)^{-4} < \left(\frac{7}{3}\right)^4$
8. $\frac{2^{10}}{10^2} > \frac{10^2}{2^{10}}$
9. $10^a + 10^a = 20^a$ เมื่อ a แทนจำนวนเต็ม
10. $10^a + 10^b = 10^{a+b}$ เมื่อ a และ b แทนจำนวนเต็ม
11. $10^a \times 10^b < 1$ เมื่อ a และ b แทนจำนวนเต็มที่ $a + b < 0$
12. $10^a \times 10^b = 1$ เมื่อ $a = 0$ และ $b = 0$ เท่านั้น
13. $a^{10} \times b^{10} = (a \times b)^{20}$ เมื่อ a และ b แทนจำนวนใด ๆ
14. $10^a \div 10^b > 1$ เมื่อ a และ b แทนจำนวนเต็มที่ $a - b < 0$
15. $a^2 > a$ เมื่อ a แทนจำนวนเต็ม

ดอกเบี้ยทบต้น

ในการกู้ยืมเงิน ค่าตอบแทนที่ผู้กู้ตกลงให้แก่ผู้ให้กู้ เรียกว่า *ดอกเบี้ย* การจ่ายดอกเบี้ยจะจ่ายเป็นเงินหรือทรัพย์อื่นก็ได้ แต่ส่วนใหญ่จะจ่ายเป็นเงิน ตามกฎหมายถ้าไม่ใช่เป็นการกู้ยืมกับธนาคารหรือสถาบันการเงินจะคิดดอกเบี้ยเกินร้อยละ 15 ต่อปีไม่ได้

ในกรณีที่ผู้กู้ค้างชำระดอกเบี้ย ผู้ให้กู้อาจเรียกเก็บดอกเบี้ยจากดอกเบี้ยที่ค้างชำระได้อีกต่อหนึ่ง ทำให้ต้องเสียดอกเบี้ยเพิ่มขึ้น ดอกเบี้ยที่คิดจากเงินต้น รวมกับดอกเบี้ยที่ค้างชำระ เรียกว่า *ดอกเบี้ยทบต้น* ตามกฎหมายผู้ให้กู้จะคิดดอกเบี้ยทบต้นไม่ได้ ยกเว้นจะมีสัญญาตกลงกันเป็นหนังสือว่าให้คิดดอกเบี้ยทบต้นได้

การฝากเงินไว้กับธนาคารประเภทฝากแบบประจำ ปกติจะมีการคิดดอกเบี้ยทบต้นในแต่ละช่วงเวลาที่ตกลงกันไว้

ในการคิดดอกเบี้ยทบต้นเมื่อนำดอกเบี้ยที่คำนวณได้ตามเงื่อนไขของเวลาและอัตราดอกเบี้ยที่กำหนดรวมกับเงินต้น เรียกว่า *เงินรวม* เช่น ต้นปีฝากเงินไว้ 100 บาท ธนาคารให้ดอกเบี้ย 2% ต่อปี ดังนั้นเมื่อสิ้นปีที่ฝากจะได้ดอกเบี้ย $\frac{2}{100} \times 100 = 2$ บาท เมื่อนำเงินต้น 100 บาท รวมกับดอกเบี้ยที่ได้ 2 บาท จะได้เป็นเงินรวม $100 + 2 = 102$ บาท

พิจารณาการหาเงินรวม เมื่อคิดดอกเบี้ยทบต้น ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง จงหาเงินรวมของเงินต้น 500 บาท ระยะเวลา 3 ปี คิดดอกเบี้ยทบต้นปีละหนึ่งครั้ง อัตราดอกเบี้ย 6% ต่อปี

วิธีทำ

ใช้สมบัติการแจกแจง

เริ่มปีที่ 1 เงินต้น 500 บาท ดอกเบี้ย 6%

สิ้นปีที่ 1 ได้ดอกเบี้ย $\frac{6}{100} \times 500$ หรือ $500 \times \frac{6}{100}$ บาท

จะได้เงินรวม $500 + \left(500 \times \frac{6}{100}\right) = 500 \times \left(1 + \frac{6}{100}\right)$ บาท

ดังนั้นสิ้นปีที่ 1 ได้เงินรวม $500 \times \left(1 + \frac{6}{100}\right)$ บาท

เริ่มปีที่ 2 เงินต้น $500 \times \left(1 + \frac{6}{100}\right)$ บาท ดอกเบี้ย 6%

สิ้นปีที่ 2 ได้ดอกเบี้ย $\left[500 \times \left(1 + \frac{6}{100}\right)\right] \times \frac{6}{100}$ บาท

จะได้เงินรวม $\left[500 \times \left(1 + \frac{6}{100}\right)\right] + \left[500 \times \left(1 + \frac{6}{100}\right) \times \frac{6}{100}\right]$

$= \left[500 \times \left(1+\frac{6}{100}\right)\right] \times \left(1+\frac{6}{100}\right)$ ใช้สมบัติการแจกแจง

$= 500 \times \left(1+\frac{6}{100}\right)^2$ บาท

ดังนั้นสิ้นปีที่ 2 ได้เงินรวม $500 \times \left(1+\frac{6}{100}\right)^2$ บาท

เริ่มปีที่ 3 เงินต้น $500 \times \left(1+\frac{6}{100}\right)^2$ บาท ดอกเบี้ย 6%

สิ้นปีที่ 3 ได้ดอกเบี้ย $\left[500 \times \left(1 + \frac{6}{100}\right)^2\right] \times \frac{6}{100}$ บาท

จะได้เงินรวม $\left[500 \times \left(1 + \frac{6}{100}\right)^2\right] + \left[500 \times \left(1 + \frac{6}{100}\right)^2 \times \frac{6}{100}\right]$

$= \left[500 \times \left(1+\frac{6}{100}\right)^2\right] \times \left(1+\frac{6}{100}\right)$

$= 500 \times \left(1+\frac{6}{100}\right)^3$ บาท

ดังนั้นสิ้นปีที่ 3 ได้เงินรวม $500 \times \left(1+\frac{6}{100}\right)^3 = 500 \times (1.06)^3$

≈ 595.51 บาท

ให้นักเรียนสังเกตแบบรูปของเงินรวมแต่ละปีข้างต้น แล้วหาเงินรวมต่อไปอีกหนึ่งปี เมื่อสิ้นปีที่ 4 จะได้เงินรวมกี่บาท

จากที่แสดงการหาเงินรวมข้างต้น เป็นไปตามแบบรูปของความสัมพันธ์ ดังนี้

$$A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^t$$

เมื่อ A แทนเงินรวม เมื่อสิ้นปีที่ t

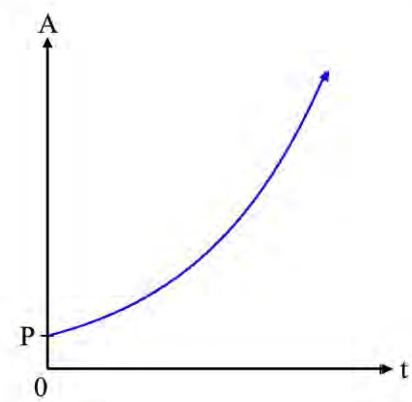
P แทนเงินต้น

r แทนอัตราดอกเบี้ย คิดเป็นร้อยละต่อปี

t แทนเวลาเป็นปี

ในที่นี้ $\left(1+\frac{r}{100}\right)^t$ เป็นเลขยกกำลังที่มี $\left(1+\frac{r}{100}\right)$ เป็นฐาน และ t เป็นเลขชี้กำลัง ซึ่ง $1+\frac{r}{100} > 1$ ทั้งนี้เพราะ $r > 0$ เสมอ

เมื่อให้ t แทนปริมาณต่าง ๆ บนแกนนอน และ A แทนปริมาณต่าง ๆ บนแกนตั้ง ความสัมพันธ์ $A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^t$ มีแบบรูปของกราฟเป็นดังนี้



จากกราฟจะเห็นได้ว่า เมื่อมีการฝากเงินไว้โดยไม่ถอน หรือกู้เงินโดยไม่ผ่อนชำระ เงินรวมที่เพิ่มขึ้นในแต่ละปีนั้น ในช่วงปีแรก ๆ จะเพิ่มขึ้นอย่างช้า ๆ แต่ในช่วงปีหลัง ๆ จะเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็ว

ในกรณีที่คิดดอกเบี้ยทบต้นปีละหลายครั้ง เช่นจากตัวอย่างข้างต้นเงินต้น 500 บาท ระยะเวลา 3 ปี คิดดอกเบี้ยทบต้นทุก 6 เดือน อัตราดอกเบี้ย 6% ต่อปี หาเงินรวมได้ดังนี้

เนื่องจากอัตราดอกเบี้ยเป็น 6% ต่อปี เมื่อคิดเป็นอัตราดอกเบี้ยต่อ 6 เดือนจะได้ $\frac{6}{2}\% = 3\%$ ต่อ 6 เดือน

ระยะเวลา 3 ปี คิดดอกเบี้ยทบต้นทุก 6 เดือน ต้องคิดดอกเบี้ยทบต้น $2 \times 3 = 6$ ครั้ง

จากสูตร $A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^t$ จึงแทนได้ดังนี้

$$A = 500\left(1+\frac{3}{100}\right)^6$$

$$= 500(1.03)^6$$

$$\approx 597.03 \text{ บาท}$$

ดังนั้น สิ้นปีที่ 3 จะได้เงินรวมประมาณ 597.03 บาท

ถ้านักเรียนมีเงินก้อนหนึ่งไปฝากธนาคาร และธนาคารคิดอัตราดอกเบี้ยเดียวกัน นักเรียนคิดว่าจะเลือกฝากแบบคิดดอกเบี้ยทบต้นปีละหนึ่งครั้ง หรือหกเดือนครั้ง เพราะเหตุใด

กำหนดเงินต้น 5,000 บาท อัตราดอกเบี้ย 5% ต่อปี คิดดอกเบี้ยทบต้นปีละหนึ่งครั้ง เมื่อสิ้นปีที่ 3 จะได้ดอกเบี้ยเท่าใด

คิดเป็นล้านล้าน

เมื่อมีจำนวนที่มีค่ามาก ๆ เช่น 9,500,000 คน หรือ 4,000,000,000 เมตร หรือ 25,000,000,000,000 บาท ในทางคณิตศาสตร์สามารถเขียนจำนวนเหล่านี้ในรูป $A \times 10^n$ เมื่อ n แทนจำนวนเต็มบวกได้ ดังนี้

9,500,000 คน = 9.5×10^6 คน

4,000,000,000 เมตร = 4×10^9 เมตร

25,000,000,000,000 บาท = 25×10^{12} บาท

เนื่องจาก $10^6 = 1{,}000{,}000$ หรือ 1×10^6 หรือ หนึ่งล้าน เพื่อความสะดวกในการเขียน การอ่าน และการนำไปใช้ เราอาจใช้หน่วยเป็น สิบล้าน ร้อยล้าน พันล้าน หมื่นล้าน แสนล้าน ล้านล้าน แทนรูป 10^n ได้ เช่น

$22.4 \times 10^9 = 22.4 \times 10^3 \times 10^6$ อ่านว่า ยี่สิบสองจุดสี่**พันล้าน**

$115 \times 10^{10} = 115 \times 10^4 \times 10^6$ อ่านว่า หนึ่งร้อยสิบห้า**หมื่นล้าน**

$2 \times 10^{11} = 2 \times 10^5 \times 10^6$ อ่านว่า สอง**แสนล้าน**

$177.5 \times 10^{12} = 177.5 \times 10^6 \times 10^6$ อ่านว่า หนึ่งร้อยเจ็ดสิบเจ็ดจุดห้า**ล้านล้าน**

จากแบบรูปการเขียนจำนวนข้างต้น จะสังเกตได้ว่า จำนวนที่กำหนดให้เขียนอยู่ในรูปของ $A \times 10^m \times 10^6$ เมื่อ A แทนจำนวนจำนวนหนึ่ง และ m แทนจำนวนเต็มบวก ทั้งนี้เพื่อความสะดวกในการอ่านเป็นหน่วยของล้าน เช่น เขียน 22.4×10^9 เป็น

$\underset{\text{ยี่สิบสองจุดสี่}}{\underset{\uparrow}{22.4}} \times \underset{\text{พัน}}{\underset{\uparrow}{10^3}} \times \underset{\text{ล้าน}}{\underset{\uparrow}{10^6}}$ อ่านว่า ยี่สิบสองจุดสี่พันล้าน

เราสามารถนำจำนวนที่มีหน่วยเป็นล้านมาบวก ลบ คูณ และหารได้ สำหรับการคูณและการหารสามารถใช้สมบัติของเลขยกกำลัง ดังที่เคยเรียนมาแล้ว สำหรับการบวกและการลบ อาจใช้สมบัติการแจกแจง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 เงิน 123.5 พันล้านบาท รวมกับเงิน 8 ร้อยล้านบาท เท่ากับเงินกี่พันล้านบาท

วิธีทำ เงิน 123.5 พันล้านบาท เท่ากับเงิน $123.5 \times 10^3 \times 10^6$ บาท

เงิน 8 ร้อยล้านบาท เท่ากับเงิน $8 \times 10^2 \times 10^6 = 0.8 \times 10^3 \times 10^6$ บาท

จะได้ $(123.5 \times 10^3 \times 10^6) + (0.8 \times 10^3 \times 10^6)$

$= (123.5 + 0.8) \times 10^3 \times 10^6$ บาท

$= 124.3 \times 10^3 \times 10^6$ บาท

ดังนั้น รวมเป็นเงิน 124.3 พันล้านบาท

ตอบ 124.3 พันล้านบาท

ตัวอย่างที่ 2 หน่วยงานของรัฐสามแห่ง ได้รับงบประมาณในการดำเนินงานเป็นเงิน 12.5 พันล้านบาท 3.125 พันล้านบาท และ 975 ล้านบาท

1) งบประมาณของหน่วยงานทั้งสามรวมกันเป็นเงินกี่ร้อยล้านบาท
2) หน่วยงานที่ได้รับงบประมาณมากที่สุด ได้รับมากกว่าหน่วยงานที่ได้รับงบประมาณน้อยที่สุดเป็นเงินกี่ล้านบาท

วิธีทำ 1) หน่วยงานแห่งที่หนึ่งได้รับงบประมาณ 12.5 พันล้านบาท

หรือ $12.5 \times 10^3 \times 10^6$ บาท

หรือ $125 \times 10^2 \times 10^6$ บาท

หน่วยงานแห่งที่สองได้รับงบประมาณ 3.125 พันล้านบาท

หรือ $3.125 \times 10^3 \times 10^6$ บาท

หรือ $31.25 \times 10^2 \times 10^6$ บาท

หน่วยงานแห่งที่สามได้รับงบประมาณ 975 ล้านบาท

หรือ 975×10^6 บาท

หรือ $9.75 \times 10^2 \times 10^6$ บาท

ดังนั้นงบประมาณของหน่วยงานทั้งสามรวมกันเป็น

$$(125 \times 10^2 \times 10^6) + (31.25 \times 10^2 \times 10^6) + (9.75 \times 10^2 \times 10^6)$$

$$= (125 + 31.25 + 9.75)(10^2 \times 10^6)$$

$= 166 \times 10^2 \times 10^6$ บาท

$= 166$ ร้อยล้านบาท

ตอบ 166 ร้อยล้านบาท

2) หน่วยงานที่ได้รับงบประมาณมากที่สุดได้รับ 12.5 พันล้านบาท

หรือ $12,500 \times 10^6$ บาท

หน่วยงานที่ได้รับงบประมาณน้อยที่สุดได้รับ 975 ล้านบาท

หรือ 975×10^6 บาท

ดังนั้นหน่วยงานที่ได้รับงบประมาณมากที่สุด ได้รับมากกว่าหน่วยงานที่ได้รับงบประมาณน้อยที่สุดเป็นเงิน $(12,500 \times 10^6) - (975 \times 10^6)$

$= (12,500 - 975) \times 10^6$

$= 11,525 \times 10^6$ บาท

$= 11,525$ ล้านบาท

ตอบ 11,525 ล้านบาท

จงหาผลลัพธ์

1) 2.5 หมื่นล้านบาท รวมกับ 4,200 ล้านบาท เท่ากับกี่ล้านบาท
2) 12.2 พันล้านบาท ต่างจาก 1,320 ล้านบาท เท่ากับกี่ล้านบาท
3) 3.2 พันล้านบาท รวมกับ 2 ร้อยล้านบาท เท่ากับกี่พันล้านบาท
4) 17 หมื่นล้านบาท น้อยกว่า 3 แสนล้านบาท เท่ากับกี่หมื่นล้านบาท
5) 10 ล้านล้านบาท รวมกับ 1 หมื่นล้านบาท เท่ากับกี่หมื่นล้านบาท

ไม่เท่ากัน

นักเรียนทราบมาแล้วว่า เมื่อกล่าวถึงเลขยกกำลังจะต้องมีจำนวนที่เป็นฐาน และจำนวนที่เป็นเลขชี้กำลัง เช่น

3^2 เป็นเลขยกกำลังที่มี 3 เป็นฐาน และ 2 เป็นเลขชี้กำลัง

$$3^2 = 9$$

3^{2^4} เป็นเลขยกกำลังที่มี 3 เป็นฐาน และ $2^4 = 16$ เป็นเลขชี้กำลัง

$$3^{2^4} = 3^{16}$$

นักเรียนบางคนอาจเข้าใจว่า 3^{2^4} มี 3^2 เป็นฐานและ 4 เป็นเลขชี้กำลังซึ่งไม่ถูกต้อง เพราะ*การเขียนเลขยกกำลังที่มีฐานเป็นเลขยกกำลัง ควรเขียนฐานไว้ในวงเล็บ* ดังนั้น เลขยกกำลังที่มี 3^2 เป็นฐาน และ 4 เป็นเลขชี้กำลังควร เขียนเป็น $(3^2)^4$ หรือ $(3^2)^4$

$(3^2)^4$ เป็นเลขยกกำลังที่มี 3^2 เป็นฐานและ 4 เป็นเลขชี้กำลัง

$$(3^2)^4 = 3^{2\times 4} = 3^8$$

จะเห็นว่า $3^{2^4} = 3^{16}$ แต่ $(3^2)^4 = 3^8$ ซึ่ง $3^{16} \neq 3^8$

ดังนั้น 3^{2^4} ไม่เท่ากับ $(3^2)^4$

จากความรู้ข้างต้นนักเรียนบอกได้หรือไม่ว่า $3^{2^{2^2}}$ กับ $((3^2)^2)^2$ จำนวนใดมากกว่า

ยิ้มญาติเยอะ

ยิ้มนับจำนวนบรรพบุรุษของยิ้มได้ ดังนี้

บรรพบุรุษของยิ้มหนึ่งชั่วคนมี 2 คน คือ พ่อและแม่

บรรพบุรุษของยิ้มสองชั่วคนมี 6 คน คือ พ่อ แม่ ปู่ ย่า ตาและยาย

บรรพบุรุษของยิ้มสามชั่วคนมี 14 คน คือ พ่อ แม่ ปู่ ย่า ตา ยาย พ่อกับแม่ของปู่ พ่อกับแม่ของย่า พ่อกับแม่ของตา และพ่อกับแม่ของยาย

เมื่อนับมาถึงเท่านี้ยิ้มก็ชักจะงง ช่วยยิ้มคิดหน่อยว่า ถ้ายิ้มนับบรรพบุรุษถึงเก้าชั่วคน บรรพบุรุษของยิ้มจะมีทั้งหมดกี่คน

บทที่ 2

พหุนามและเศษส่วนของพหุนาม

2.1 ทบทวนพหุนาม

นักเรียนเคยเรียนเรื่อง การบวกพหุนาม การลบพหุนาม การคูณเอกนามกับพหุนาม และการหารพหุนามด้วยเอกนามมาแล้ว ในหัวข้อนี้จะทบทวนเรื่องดังกล่าว ดังต่อไปนี้

การบวกและการลบพหุนาม

การหาผลบวกและผลลบของพหุนาม มีหลักเกณฑ์ดังนี้

การหาผลบวกของพหุนามทำได้โดยนำพหุนามมาเขียนในรูปการบวก และถ้ามีพจน์ที่คล้ายกัน ให้บวกพจน์ที่คล้ายกันเข้าด้วยกัน

การหาผลลบของพหุนามทำได้โดยบวกพหุนามตัวตั้ง ด้วยพจน์ตรงข้ามของแต่ละพจน์ของพหุนามตัวลบ

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลบวกและผลลบของ $3x^2 - 4x + 2$ และ $7x - 3$ โดยใช้พหุนามแรกเป็นตัวตั้ง

วิธีทำ หาผลบวก

$$(3x^2 - 4x + 2) + (7x - 3) = 3x^2 - 4x + 2 + 7x - 3$$

$$= 3x^2 + 3x - 1$$

ตอบ $3x^2 + 3x - 1$

หาผลลบ

$$(3x^2 - 4x + 2) - (7x - 3) = 3x^2 - 4x + 2 + (-7x) + 3$$

$$= 3x^2 - 11x + 5$$

ตอบ $3x^2 - 11x + 5$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลบวกและผลลบของ $-8x + y - 6z$ และ $2x - z$ โดยใช้พหุนามแรกเป็นตัวตั้ง

วิธีทำ หาผลบวก

$$(-8x + y - 6z) + (2x - z) = -8x + y - 6z + 2x - z$$
$$= -6x + y - 7z$$

ตอบ $-6x + y - 7z$

หาผลลบ

$$(-8x + y - 6z) - (2x - z) = -8x + y - 6z + (-2x) + z$$
$$= -10x + y - 5z$$

ตอบ $-10x + y - 5z$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลบวกและผลลบของ $10x^3 + 5x^2 - 1$ และ $-8x^3 - 9x + 7$ โดยใช้พหุนามแรกเป็นตัวตั้ง

วิธีทำ หาผลบวก

$$(10x^3 + 5x^2 - 1) + (-8x^3 - 9x + 7) = 10x^3 + 5x^2 - 1 - 8x^3 - 9x + 7$$
$$= 2x^3 + 5x^2 - 9x + 6$$

ตอบ $2x^3 + 5x^2 - 9x + 6$

หาผลลบ

$$(10x^3 + 5x^2 - 1) - (-8x^3 - 9x + 7) = 10x^3 + 5x^2 - 1 + 8x^3 + 9x + (-7)$$
$$= 18x^3 + 5x^2 + 9x - 8$$

ตอบ $18x^3 + 5x^2 + 9x - 8$

การคูณเอกนามกับพหุนาม

การหาผลคูณของเอกนามกับพหุนาม มีหลักเกณฑ์ดังนี้

การหาผลคูณระหว่างเอกนามกับพหุนามทำได้โดยนำเอกนามไปคูณแต่ละพจน์ของพหุนาม แล้วนำผลคูณเหล่านั้นมาบวกกัน

ตัวอย่างที่ 4 จงหาผลคูณของ $2x$ กับ $-5x^2 + 6x - 4$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
(2x)(-5x^2 + 6x - 4) &= (2x)[(-5x^2) + 6x + (-4)] \\
&= (2x)(-5x^2) + (2x)(6x) + (2x)(-4) \\
&= -10x^3 + 12x^2 - 8x
\end{aligned}
$$

ตอบ $-10x^3 + 12x^2 - 8x$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาผลคูณ $(8x^3 + 4x - 11)(-7x^2)$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
(8x^3 + 4x - 11)(-7x^2) &= [8x^3 + 4x + (-11)](-7x^2) \\
&= (8x^3)(-7x^2) + (4x)(-7x^2) + (-11)(-7x^2) \\
&= -56x^5 - 28x^3 + 77x^2
\end{aligned}
$$

ตอบ $-56x^5 - 28x^3 + 77x^2$

การหารพหุนามด้วยเอกนาม

การหารพหุนามด้วยเอกนาม มีหลักเกณฑ์ดังนี้

การหาผลหารของพหุนามด้วยเอกนามที่ไม่เป็นศูนย์ ทำได้โดยหารแต่ละพจน์ของพหุนามด้วยเอกนาม แล้วนำผลหารเหล่านั้นมาบวกกัน

ถ้าการหารพหุนามด้วยเอกนามได้ผลหารเป็นพหุนาม แล้วจะกล่าวว่าการหารนั้นเป็น *การหารลงตัว*

ความสัมพันธ์ของตัวหาร ผลหาร และตัวตั้งในกรณีที่เป็นการหารลงตัว เป็นดังนี้

ตัวหาร × ผลหาร = ตัวตั้ง

ตัวอย่างที่ 6 จงหาร $18x^3 - 27x^2 + 3x$ ด้วย $3x$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \frac{18x^3 - 27x^2 + 3x}{3x} &= \frac{18x^3 + (-27x^2) + 3x}{3x} \\ &= \frac{18x^3}{3x} + \frac{(-27x^2)}{3x} + \frac{3x}{3x} \\ &= 6x^2 + (-9x) + 1 \\ &= 6x^2 - 9x + 1 \end{aligned}$$

ตอบ $6x^2 - 9x + 1$

ตัวอย่างที่ 7 จงหาผลหาร $\frac{-12x^2y - 30x^3y}{-6x^2}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \frac{-12x^2y - 30x^3y}{-6x^2} &= \frac{(-12x^2y) + (-30x^3y)}{-6x^2} \\ &= \frac{(-12x^2y)}{-6x^2} + \frac{(-30x^3y)}{-6x^2} \\ &= 2y + 5xy \end{aligned}$$

ตอบ $2y + 5xy$

แบบฝึกหัด 2.1

1. จงหาผลบวกและผลลบของพหุนามในแต่ละข้อต่อไปนี้ โดยใช้พหุนามแรกที่กำหนดให้เป็นตัวตั้ง

   1) $2x^2 + 3x - 5$ กับ $6x - x^2$
   2) $3x^2 + 5x - 4$ กับ $-7x^2 + 1$
   3) $3x^2 - 2x + 6$ กับ $4x^2 + 7x + 3$
   4) $x^2 + 3y^2$ กับ $3x + y$
   5) $7xz + x$ กับ $5x - xz - 6z^2$
   6) $4y^2z + y^2$ กับ $7y^2 + yz - 3y^2z$
   7) $-xy^2 + 7x^3 - 10x^2y$ กับ $x^3 - 2x^2y + 3y^2$
   8) $9x^3 - 5x^2 - 8$ กับ $-4x^3 + x^2 - 4x + 2$

9) $x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ กับ $1 + 5x + 6x^2 - 7x^3$

10) $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ กับ $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

2. จงหาผลคูณต่อไปนี้

1) $(-3x)(8 - x)$
2) $(9x^2 - 7)(4x)$
3) $(-x)(-10x^2 + 6)$
4) $(11x)(x^2 + 7x)$
5) $(6x)(3 - 5x - 7x^2)$
6) $(x^2 + x + 1)(x^2)$
7) $(-2x^2)(8x - 9x^2)$
8) $(9x^2 - 4)(5x^3)$
9) $(14x^2 - 13x)(-x^3)$
10) $(3x^2)(x^3 - 4x^2 + 3x - 1)$

3. จงหาผลหารต่อไปนี้

1) $28x + 20x^2 - 4x^3$ หารด้วย $4x$
2) $45x^3 - 30x^2 - 25x$ หารด้วย $-5x$
3) $-26x^3 + 65x^2$ หารด้วย $13x$
4) $60x^2 - 36x^3$ หารด้วย $-12x^2$
5) $14x^4 - 35x^3 - 42x^2$ หารด้วย $-7x^2$
6) $\dfrac{-18x^4 - 42x^3 - 42x^2}{6x}$
7) $\dfrac{21x^4 - 30x^3 + 15x^2}{3x^2}$
8) $\dfrac{-36x^3y^3 + 27x^3y^2 - 54x^2y + 9xy}{-9xy}$

2.2 การคูณพหุนาม

พิจารณาการคูณพหุนามกับพหุนามซึ่งทำได้โดยใช้สมบัติการแจกแจง ดังต่อไปนี้

1. $$\begin{aligned}(x+2)(x+5) &= [(x+2)(x)] + [(x+2)(5)] \\ &= (x)(x) + (2)(x) + (x)(5) + (2)(5) \\ &= x^2 + 2x + 5x + 10 \\ &= x^2 + 7x + 10\end{aligned}$$

ใช้สมบัติการแจกแจงโดยนำ $(x+2)$ ไปคูณแต่ละพจน์ของ $x+5$

หรือ $$\begin{aligned}(x+2)(x+5) &= [(x)(x+5)] + [(2)(x+5)] \\ &= (x)(x) + (x)(5) + (2)(x) + (2)(5) \\ &= x^2 + 5x + 2x + 10 \\ &= x^2 + 7x + 10\end{aligned}$$

ใช้สมบัติการแจกแจงโดยนำ $(x+5)$ ไปคูณแต่ละพจน์ของ $x+2$

2. $$\begin{aligned}(2x-3)(x+4) &= [(2x-3)(x)] + [(2x-3)(4)] \\ &= [(2x+(-3))(x)] + [(2x+(-3))(4)] \\ &= (2x)(x) + (-3)(x) + (2x)(4) + (-3)(4) \\ &= 2x^2 - 3x + 8x - 12 \\ &= 2x^2 + 5x - 12\end{aligned}$$

ใช้สมบัติการแจกแจงโดยนำ $(2x-3)$ ไปคูณแต่ละพจน์ของ $x+4$

หรือ $$\begin{aligned}(2x-3)(x+4) &= [2x+(-3)](x+4) \\ &= [(2x)(x+4)] + [(-3)(x+4)] \\ &= (2x)(x) + (2x)(4) + (-3)(x) + (-3)(4) \\ &= 2x^2 + 8x - 3x - 12 \\ &= 2x^2 + 5x - 12\end{aligned}$$

ใช้สมบัติการแจกแจงโดยนำ $(x+4)$ ไปคูณแต่ละพจน์ของ $2x+(-3)$

3. $(x-6)(2x^2-5) = (x-6)[2x^2+(-5)]$

$= [(x-6)(2x^2)] + [(x-6)(-5)]$

$= [(x+(-6))(2x^2)] + [(x+(-6))(-5)]$

$= (x)(2x^2) + (-6)(2x^2) + (x)(-5) + (-6)(-5)$

$= 2x^3 - 12x^2 - 5x + 30$

ใช้สมบัติการแจกแจงโดยนำ $(x-6)$ ไปคูณแต่ละพจน์ของ $2x^2+(-5)$

หรือ $(x-6)(2x^2-5) = [x+(-6)](2x^2-5)$

$= [(x)(2x^2-5)] + [(-6)(2x^2-5)]$

$= [(x)(2x^2+(-5))] + [(-6)(2x^2+(-5))]$

$= (x)(2x^2) + (x)(-5) + (-6)(2x^2) + (-6)(-5)$

$= 2x^3 - 5x - 12x^2 + 30$

$= 2x^3 - 12x^2 - 5x + 30$

ใช้สมบัติการแจกแจงโดยนำ $(2x^2-5)$ ไปคูณแต่ละพจน์ของ $x+(-6)$

การหาผลคูณของพหุนามสรุปได้ดังนี้

การหาผลคูณของพหุนามกับพหุนาม ทำได้โดยคูณแต่ละพจน์ของพหุนามหนึ่งกับทุก ๆ พจน์ของอีกพหุนามหนึ่ง แล้วนำผลคูณเหล่านั้นมาบวกกัน

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลคูณ $(x+4)(3x^2-x)$

วิธีทำ $(x+4)(3x^2-x) = (x)(3x^2) + (x)(-x) + (4)(3x^2) + (4)(-x)$

$= 3x^3 - x^2 + 12x^2 - 4x$

$= 3x^3 + 11x^2 - 4x$

$(x+4)[3x^2+(-x)]$

ตอบ $3x^3 + 11x^2 - 4x$

การหาผลคูณในตัวอย่างที่ 1 นี้ อาจนำแต่ละพจน์ของ $3x^2+(-x)$ ไปคูณทุก ๆ พจน์ของ $x+4$ ดังแผนผัง

$(x+4)\,[3x^2+(-x)]$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลคูณ $(x-3)(x^2+2x-5)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}(x-3)(x^2+2x-5) &= (x)(x^2)+(x)(2x)+(x)(-5)+(-3)(x^2)+(-3)(2x)+\\ &\quad (-3)(-5)\\ &= x^3+2x^2-5x-3x^2-6x+15\\ &= x^3-x^2-11x+15\end{aligned}$$

ตอบ $x^3-x^2-11x+15$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลคูณ $(5x^2+x)(2x^2-7x-1)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}(5x^2+x)(2x^2-7x-1) &= (5x^2)(2x^2)+(5x^2)(-7x)+(5x^2)(-1)+(x)(2x^2)+\\ &\quad (x)(-7x)+(x)(-1)\\ &= 10x^4-35x^3-5x^2+2x^3-7x^2-x\\ &= 10x^4-33x^3-12x^2-x\end{aligned}$$

ตอบ $10x^4-33x^3-12x^2-x$

การหาผลคูณของพหุนาม อาจเขียนการคูณในแนวตั้ง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 4 จงหาผลคูณของ $3x+2$ กับ $4x-5$

วิธีทำ

$$\begin{array}{rrl} & 3x + 2 & \\ \times & \underline{4x - 5} & \\ 12x^2 + & 8x & \quad \text{คูณทุก ๆ พจน์ของตัวตั้งด้วย } 4x \\ + & \underline{-15x - 10} & \quad \text{คูณทุก ๆ พจน์ของตัวตั้งด้วย } -5 \\ 12x^2 & \underline{\underline{- 7x - 10}} & \end{array}$$

ตอบ $12x^2-7x-10$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาผลคูณของ $-x + 7$ กับ $4x^2 - 9x + 3$

วิธีทำ

$$
\begin{array}{rl}
4x^2 - 9x + 3 & \\
\underline{-x + 7} & \times \\
-4x^3 + 9x^2 - 3x & \\
\underline{28x^2 - 63x + 21} & + \\
\underline{\underline{-4x^3 + 37x^2 - 66x + 21}} &
\end{array}
$$

คูณทุก ๆ พจน์ของตัวตั้งด้วย -x

คูณทุก ๆ พจน์ของตัวตั้งด้วย 7

ตอบ $-4x^3 + 37x^2 - 66x + 21$

ตัวอย่างที่ 6 จงหาผลลัพธ์ของ $(5x^2 - 9)^2$

วิธีทำ

$$
\begin{array}{rl}
5x^2 - 9 & \\
\underline{5x^2 - 9} & \times \\
25x^4 - 45x^2 & \\
\underline{-45x^2 + 81} & + \\
\underline{\underline{25x^4 - 90x^2 + 81}} &
\end{array}
$$

ตอบ $25x^4 - 90x^2 + 81$

ตัวอย่างที่ 7 จงหาผลคูณของ $x^2 - 2x + 2$ กับ $5x^2 + x - 8$

วิธีทำ

$$
\begin{array}{rl}
5x^2 + x - 8 & \\
\underline{x^2 - 2x + 2} & \times \\
5x^4 + x^3 - 8x^2 & \\
-10x^3 - 2x^2 + 16x & + \\
\underline{10x^2 + 2x - 16} & \\
\underline{\underline{5x^4 - 9x^3 + 18x - 16}} &
\end{array}
$$

ตอบ $5x^4 - 9x^3 + 18x - 16$

หมายเหตุ การเขียนการคูณในแนวตั้ง ถ้าพหุนามที่นำมาคูณกันมีดีกรีไม่เท่ากัน นิยมใช้พหุนามที่มีดีกรีสูงกว่าเป็นตัวตั้ง แต่ถ้าพหุนามที่นำมาคูณกันมีดีกรีเท่ากัน จะใช้พหุนามใดเป็นตัวตั้งก็ได้

แบบฝึกหัด 2.2 ก

1. จงหาผลคูณต่อไปนี้ โดยใช้สมบัติการแจกแจง

1) $(x + 3)(x + 6)$	2) $(x + 2)(x - 1)$
3) $(x - 3)(x - 5)$	4) $(x - 2)(x + 3)$
5) $(x + 3)(x + 3)$	6) $(x - 1)(x + 1)$
7) $(x + 5)(x - 5)$	8) $(x - 2)(2x - 1)$
9) $(2x - 1)(x + 5)$	10) $(3x + 1)(2x + 3)$
11) $(3x + 1)(2x - 3)$	12) $(2 - 3x)(1 + 5x)$
13) $(4y - 7)(3 - 2y)$	14) $(x + 2)(7x^2 + 4)$
15) $(x - 1)(x^2 - 1)$	16) $(x - 1)(x - 1)^2$
17) $(2x - 3)(2x^2 + 1)$	18) $(6x - 9)(2x^2 - 3x)$

2. จงหาผลคูณต่อไปนี้โดยเขียนการคูณในแนวตั้ง

1) $9x - 2$ กับ $8x - 13$

2) $14 - 5x$ กับ $6x^2 + 14$

3) $-4x - 6$ กับ $10x^2 - 7x$

4) $3x + 5$ กับ $2x^2 - 4x - 6$

5) $-8x^2 + 13$ กับ $5x^2 - 4x$

6) $3x^2 - 4$ กับ $x^2 + 10$

7) $8x^2 - 6$ กับ $12 - 5x^2$

8) $2x^2 + 7$ กับ $9x^2 + 1$

9) $3x^2 + 2x$ กับ $3x + 4x^2$

10) $x^2 - x$ กับ $x^2 + x$

11) $15x - 7x^2$ กับ $-6x^2 - 10x$

12) $2x^2 + 1$ กับ $x^2 - x - 1$

13) $-x^2 + 8$ กับ $11x^2 + 3x + 5$

14) $4x^2 - 11x + 8$ กับ $-x^2 + 10x - 1$

15) $2y^2 + 6y + 7$ กับ $12 - 11y - y^2$

16) $3x^2 + 1$ กับ $x^3 - 1$

17) $9x^3 + 6x^2 + 3x$ กับ $3x^2 - 2x + 1$

18) $x^3 - x^2 - x + 1$ กับ $x^2 + x + 1$

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างการหาผลคูณของเอกนามกับพหุนาม และการหาผลคูณของพหุนามกับพหุนามในกรณีที่มีตัวแปรมากกว่าหนึ่งตัว

ตัวอย่างที่ 8 จงหาผลคูณของ $2xy$ กับ $3x^2 - y$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}(2xy)(3x^2 - y) &= (2xy)(3x^2) + (2xy)(-y)\\ &= 6x^3y - 2xy^2\end{aligned}$$

ตอบ $6x^3y - 2xy^2$

ตัวอย่างที่ 9 จงหาผลคูณของ $5y^2z$ กับ $y^3 - 4y^2z^2 + 2z$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}(5y^2z)(y^3 - 4y^2z^2 + 2z) &= (5y^2z)(y^3) + (5y^2z)(-4y^2z^2) + (5y^2z)(2z)\\ &= 5y^5z - 20y^4z^3 + 10y^2z^2\end{aligned}$$

ตอบ $5y^5z - 20y^4z^3 + 10y^2z^2$

ตัวอย่างที่ 10 จงหาผลคูณของ $3x + 4$ กับ $y - 2$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
(3x + 4)(y - 2) &= (3x)(y) + (3x)(-2) + (4)(y) + (4)(-2) \\
&= 3xy - 6x + 4y - 8
\end{aligned}
$$

ตอบ $3xy - 6x + 4y - 8$

ตัวอย่างที่ 11 จงหาผลลัพธ์ของ $(x - y)^2$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
(x - y)^2 &= (x - y)(x - y) \\
&= (x - y)x - (x - y)y \\
&= x^2 - xy - (xy - y^2) \\
&= x^2 - xy - xy + y^2 \\
&= x^2 - 2xy + y^2
\end{aligned}
$$

ตอบ $x^2 - 2xy + y^2$

ตัวอย่างที่ 12 จงหาผลคูณของ $xy - 7y^2$ กับ $-x + 6y$

วิธีทำ

$$
\begin{array}{rrrl}
 & xy & -7y^2 & \\
 & -x & +6y & \times \\
\hline
-x^2y & +7xy^2 & & + \\
 & 6xy^2 & -42y^3 & \\
\hline
-x^2y & +13xy^2 & -42y^3 & \\
\hline\hline
\end{array}
$$

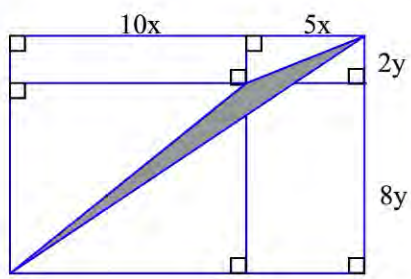
ตอบ $-x^2y + 13xy^2 - 42y^3$

แบบฝึกหัด 2.2 ข

จงหาผลคูณต่อไปนี้

1. $(y)(x^2 + 5)$
2. $(-2xy)(x - 3)$
3. $(3xy)(2x + y)$
4. $(5xy^2)(8xy - 6x^2)$
5. $(-2z)(y^2 - yz + 4z^2)$
6. $(-y^2z^2)(9yz - 7y - 2z)$
7. $(7x + 9y)(-6y + x)$
8. $(10z - 5y)(-12y^3 - 11)$
9. $(14x - 3xy)(y^2 - x^2)$
10. $(2xy - x^2)(xy + 10y^2)$
11. $(-4x + 6z)(11x^2z - 8xz + 4z^2)$
12. $(3x^2 + 4xy - 5y^2)(-9x^2 - y^2)$
13. $(x - y)^2(x - y)$
14. $(x + y)^2(x + y)$
15. $(x^2 - xy + y^2)(x + y)$
16. $(x^2 + xy + y^2)(x - y)$

คิด



จากรูป อัตราส่วนของพื้นที่ของรูปส่วนที่แรเงาต่อพื้นที่ของส่วนที่ไม่แรเงาเป็นเท่าใด

2.3 การหารพหุนาม

การหารพหุนามด้วยพหุนามที่ไม่เป็นศูนย์ ในที่นี้จะกล่าวถึงเฉพาะกรณีที่ตัวตั้งและตัวหารเป็นพหุนามที่มีตัวแปรหนึ่งตัวและเป็นตัวแปรตัวเดียวกัน

สำหรับการหารพหุนามที่มีตัวแปรหนึ่งตัวและเป็นตัวแปรตัวเดียวกัน ก่อนทำการหาร ให้เขียนพหุนามทั้งตัวตั้งและตัวหาร โดยเรียงพจน์ของพหุนามจากพจน์ที่มีดีกรีมากไปพจน์ที่มีดีกรีน้อย เช่น

ถ้าต้องการหารพหุนาม $2x + x^2 - 3$ ด้วยพหุนาม $x + 3$ จะเขียนเรียงพจน์ของพหุนาม $2x + x^2 - 3$ เป็น $x^2 + 2x - 3$ ส่วนพหุนาม $x + 3$ กำหนดมาโดยเขียนเรียงพจน์ที่มีดีกรีมากไปพจน์ที่มีดีกรีน้อยอยู่แล้ว จึงไม่ต้องเขียนเรียงพจน์ใหม่

ก่อนที่จะกล่าวถึงวิธีการหารพหุนามด้วยพหุนาม ให้พิจารณาการหารจำนวนเต็มด้วยวิธีการหารยาว ต่อไปนี้

$$\begin{array}{rl} 213 & \longleftarrow (200 \quad + \quad 10 \quad + \quad 3) \\ 14\,\overline{)\,2982} & \\ \underline{2800} & \longleftarrow 200 \times 14 \\ 182 & \\ \underline{140} & \longleftarrow 10 \times 14 \\ 42 & \\ \underline{42} & \longleftarrow 3 \times 14 \end{array}$$

ดังนั้น 2,982 หารด้วย 14 ได้ผลหารเป็น 213 และเศษเป็น 0 และเขียนความสัมพันธ์ของตัวตั้ง ตัวหาร ผลหาร และเศษ ได้ดังนี้

$$2{,}982 = (14 \times 213) + 0$$

การหารพหุนามด้วยพหุนามทำได้โดยวิธีการตั้งหารในทำนองเดียวกับการหารจำนวนเต็มข้างต้น ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ต้องการหาร $2x + x^2 - 3$ ด้วย $x + 3$ ให้ทำตามขั้นตอนดังนี้

1. เรียงพจน์ของพหุนามตัวตั้งและพหุนามตัวหารจากพจน์ที่มีดีกรีมากไปพจน์ที่มีดีกรีน้อย แล้วเขียนการตั้งหารดังนี้

$$x + 3\,\overline{)\,x^2 + 2x - 3}$$

2. นำพจน์แรกของตัวหารคือ x ไปหารพจน์แรกของตัวตั้งคือ x^2 จะได้ผลหารเป็น x เขียนผลหารที่ได้นี้ไว้ที่บรรทัดเหนือตัวตั้งโดยเขียนในตำแหน่งให้ตรงกับพจน์ x^2 ดังนี้

$$\frac{x^2}{x} = x$$

หาร x^2 ด้วย x ได้เท่ากับ x

$$\begin{array}{r l} & \,x \\ x+3 & \overline{)\,x^2+2x-3} \end{array}$$

3. นำผลหารที่ได้จากข้อ 2 คือ x ไปคูณตัวหารคือ $x+3$ ได้ผลคูณเป็น x^2+3x แล้วเขียนผลคูณที่ได้ไว้ที่บรรทัดใต้ตัวตั้ง ดังนี้

$$\begin{array}{r l} & \,x \\ x+3 & \overline{)\,x^2+2x-3} \\ & \underline{\,x^2+3x} \end{array}$$

x^2+3x ← ผลคูณของ x กับ $x+3$ หรือ $x(x+3)$

4. นำผลคูณที่ได้จากข้อ 3 คือ x^2+3x ไปลบออกจากตัวตั้งคือ x^2+2x-3 จะได้ผลลบเป็น $-x-3$ ดังนี้

$$\begin{array}{r l} & \,x \\ x+3 & \overline{)\,x^2+2x-3} \\ & \underline{\,x^2+3x} \\ & \,-x-3 \end{array}$$

$-x-3$ ← x^2+2x-3 ลบด้วย x^2+3x

5. ผลลบที่ได้จากข้อ 4 คือ $-x-3$ จะเป็นตัวตั้งใหม่ ให้ดูว่าดีกรีของตัวตั้งใหม่นี้น้อยกว่าดีกรีของตัวหารคือ $x+3$ หรือไม่ ถ้าน้อยกว่าก็หยุดการหาร ถ้าไม่น้อยกว่าก็ทำการหารต่อไปอีก ในที่นี้ดีกรีของ $-x-3$ ไม่น้อยกว่าดีกรีของ $x+3$ จึงต้องหารต่อไป

6. นำพจน์แรกของตัวหารคือ x ไปหารพจน์แรกของตัวตั้งใหม่คือ $-x$ จะได้ผลหารเป็น -1 นำผลหารที่ได้นี้ไปเขียนในรูปการบวกกับผลหารที่ได้ในข้อ 2 เป็น $x + (-1)$ หรือ $x - 1$ แล้วทำซ้ำทำนองเดียวกันกับขั้นตอนที่ 3 และ 4 จนได้ตัวตั้งใหม่คือพหุนาม 0 จึงหยุดการหาร ดังนี้

$$\frac{-x}{x} = -1$$

หาร x^2 ด้วย x ได้เท่ากับ x

หาร $-x$ ด้วย x ได้เท่ากับ -1

$$
\begin{array}{r|l}
 & x \quad -1 \\
\hline
x+3 & x^2 + 2x - 3 \\
 & \underline{x^2 + 3x} \\
 & \quad\; -x - 3 \\
 & \quad\; \underline{-x - 3} \\
 & \qquad\quad \underline{0}
\end{array}
$$

$x^2 + 3x$ ← ผลคูณของ x กับ $x + 3$ หรือ $x(x + 3)$

$-x - 3$ ← $x^2 + 2x - 3$ ลบด้วย $x^2 + 3x$

$-x - 3$ ← ผลคูณของ -1 กับ $x + 3$ หรือ $(-1)(x + 3)$

0 ← $-x - 3$ ลบด้วย $-x - 3$

จากการหารพหุนามข้างต้น เรากล่าวว่า $x^2 + 2x - 3$ หารด้วย $x + 3$ ได้ผลหารเป็น $x - 1$ และเศษเป็น 0 เขียนความสัมพันธ์ของตัวตั้ง ตัวหาร ผลหาร และเศษ ได้ดังนี้

$$x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1) + 0$$

พิจารณาการหารพหุนาม $3x^2 + 2x - 14$ ด้วย $x - 2$ ต่อไปนี้

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x \quad +8 \\
\hline
x-2 & 3x^2 + 2x - 14 \\
 & \underline{3x^2 - 6x} \\
 & \qquad 8x - 14 \\
 & \qquad \underline{8x - 16} \\
 & \qquad\qquad \underline{2}
\end{array}
$$

$3x^2 - 6x$ ← $3x(x - 2)$

$8x - 16$ ← $8(x - 2)$

จากการหารพหุนามนี้ เรากล่าวว่า $3x^2 + 2x - 14$ หารด้วย $x - 2$ ได้ผลหารเป็น $3x + 8$ และ เศษเป็น 2 เขียนความสัมพันธ์ของตัวตั้ง ตัวหาร ผลหาร และเศษ ได้ดังนี้

$$3x^2 + 2x - 14 = (x - 2)(3x + 8) + 2$$

โดยทั่วไป ในการหารพหุนามเราเขียนความสัมพันธ์ของตัวตั้ง ตัวหาร ผลหาร และเศษได้ดังนี้

ตัวตั้ง = (ตัวหาร × ผลหาร) + เศษ

เมื่อผลหารเป็นพหุนาม และเศษเป็นศูนย์หรือเป็นพหุนามที่มีดีกรีน้อยกว่าดีกรีของตัวหาร

*การหารพหุนามใดได้เศษเป็นศูนย์ เรากล่าวว่าการหารพหุนามนั้นเป็น*การหารลงตัว *ส่วนการหารพหุนามใดได้เศษไม่เป็นศูนย์ เรากล่าวว่าการหารพหุนามนั้นเป็น*การหารไม่ลงตัว

จาก $x^2 + 2x - 3$ หารด้วย $x + 3$ ได้ผลหารเป็น $x - 1$ เศษเป็น 0 จึงกล่าวว่าการหารนี้เป็นการหารลงตัว

จาก $3x^2 + 2x - 14$ หารด้วย $x - 2$ ได้ผลหารเป็น $3x + 8$ เศษเป็น 2 จึงกล่าวว่าการหารนี้เป็นการหารไม่ลงตัว

เราสามารถตรวจสอบผลลัพธ์ของการหารจากความสัมพันธ์

ตัวตั้ง = (ตัวหาร × ผลหาร) + เศษ

โดยนำตัวหารคูณกับผลหาร แล้วบวกด้วยเศษ ถ้าได้ผลลัพธ์เท่ากับตัวตั้งแสดงว่าผลลัพธ์ของการหารนั้นถูกต้อง

ในบทนี้เราจะกล่าวถึง*การหารพหุนามด้วยพหุนามที่ตัวตั้ง ตัวหาร ผลหาร และเศษมีสัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์เป็นจำนวนเต็มเท่านั้น*

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลลัพธ์ของการหาร $8x^2 - 14x - 15$ ด้วย $2x - 5$

วิธีทำ

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4x + 3 \\
\hline
2x - 5 & 8x^2 - 14x - 15 \\
 & \underline{8x^2 - 20x} \\
 & \qquad 6x - 15 \\
 & \qquad \underline{6x - 15} \\
 & \qquad\qquad \underline{0}
\end{array}
$$

ตอบ ผลลัพธ์คือ $4x + 3$

ตรวจสอบผลลัพธ์

$$
\begin{aligned}
(2x - 5)(4x + 3) &= 8x^2 + 6x - 20x - 15 \\
&= 8x^2 - 14x - 15
\end{aligned}
$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลลัพธ์ของการหาร $y^3 - 2y^2 + 175$ ด้วย $y + 5$

วิธีทำ $y^3 - 2y^2 + 175 \quad = \quad y^3 - 2y^2 + (0)y + 175$

$$
\begin{array}{r|l}
 & y^2 - 7y + 35 \\
\hline
y + 5 & y^3 - 2y^2 + (0)y + 175 \\
 & \underline{y^3 + 5y^2} \\
 & \quad -7y^2 + (0)y \\
 & \quad \underline{-7y^2 - 35y} \\
 & \qquad\quad 35y + 175 \\
 & \qquad\quad \underline{35y + 175}
\end{array}
$$

ตอบ ผลลัพธ์คือ $y^2 - 7y + 35$

กรณีที่ได้เศษเป็น 0 ไม่จำเป็นต้องเขียน 0 ในขั้นสุดท้ายของการหาร

ตรวจสอบผลลัพธ์

$$
\begin{aligned}
(y + 5)(y^2 - 7y + 35) &= y^3 - 7y^2 + 35y + 5y^2 - 35y + 175 \\
&= y^3 - 2y^2 + 175
\end{aligned}
$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลลัพธ์ของการหาร $6x^3 + 5x^2 - 7x - 4$ ด้วย $3x^2 + x - 4$

วิธีทำ

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x + 1 \\
\hline
3x^2 + x - 4 & 6x^3 + 5x^2 - 7x - 4 \\
 & \underline{6x^3 + 2x^2 - 8x} \\
 & \qquad 3x^2 + x - 4 \\
 & \qquad \underline{3x^2 + x - 4}
\end{array}
$$

ตอบ ผลลัพธ์คือ $2x + 1$

ตรวจสอบผลลัพธ์

$$
\begin{aligned}
(3x^2 + x - 4)(2x + 1) &= 6x^3 + 3x^2 + 2x^2 + x - 8x - 4 \\
&= 6x^3 + 5x^2 - 7x - 4
\end{aligned}
$$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาผลลัพธ์ของการหาร $12x^3 - x^2 - 62x - 50$ ด้วย $3x + 5$

วิธีทำ

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4x^2 - 7x - 9 \\
\hline
3x + 5 & 12x^3 - x^2 - 62x - 50 \\
 & \underline{12x^3 + 20x^2} \\
 & \quad -21x^2 - 62x \\
 & \quad \underline{-21x^2 - 35x} \\
 & \qquad\quad -27x - 50 \\
 & \qquad\quad \underline{-27x - 45} \\
 & \qquad\qquad\quad \underline{\underline{-5}}
\end{array}
$$

ตอบ ผลหารคือ $4x^2 - 7x - 9$ เศษ -5

ตรวจสอบผลลัพธ์

$$
\begin{aligned}
(3x + 5)(4x^2 - 7x - 9) + (-5) &= 12x^3 - 21x^2 - 27x + 20x^2 - 35x - 45 - 5 \\
&= 12x^3 - x^2 - 62x - 50
\end{aligned}
$$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาผลลัพธ์ของการหาร $4x^3 - 7x^2 + 13x - 18$ ด้วย $x^2 + 2x - 7$

วิธีทำ

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4x - 15 \\
\hline
x^2 + 2x - 7 & 4x^3 - 7x^2 + 13x - 18 \\
 & \underline{4x^3 + 8x^2 - 28x} \\
 & \quad -15x^2 + 41x - 18 \\
 & \quad \underline{-15x^2 - 30x + 105} \\
 & \qquad\qquad \underline{71x - 123}
\end{array}
$$

ตอบ ผลหารคือ $4x - 15$ เศษ $71x - 123$

ตรวจสอบผลลัพธ์

$$
\begin{aligned}
(x^2 + 2x - 7)(4x - 15) + (71x - 123) &= 4x^3 - 15x^2 + 8x^2 - 30x - 28x + 105 + 71x - 123 \\
&= 4x^3 - 7x^2 + 13x - 18
\end{aligned}
$$

แบบฝึกหัด 2.3

1. จงหาผลลัพธ์ของการหารต่อไปนี้

   1) $(-4x + 6) \div (2x - 3)$
   2) $(3x + 5) \div (x - 1)$
   3) $(x^2 - 4) \div (x + 2)$
   4) $(x^2 - 3x + 18) \div (x - 6)$
   5) $(18x^2 - 21x) \div (6x - 7)$
   6) $(4x^2 - 7x - 15) \div (x - 3)$
   7) $(16x^2 + 20x + 9) \div (4x + 7)$
   8) $(-6x^2 + 13x + 8) \div (2x + 1)$
   9) $(30x^2 - 47x + 14) \div (5x - 2)$
   10) $(8x^2 - 7x - 6) \div (2x^2 - x)$

11) $(y^3 - 6y^2 + 8y - 3) \div (y - 1)$

12) $(3y^3 - 45y - 52) \div (y - 4)$

13) $(8x^3 - 6x^2 - 5x + 3) \div (4x + 3)$

14) $(3y^3 + 5y^2 - 5y - 4) \div (3y - 1)$

15) $(y^3 - 1) \div (y + 1)$

16) $(12x^3 - 23x^2 + 23x - 30) \div (3x - 5)$

17) $(12y^3 + 9y^2 - 5y + 2) \div (3y^2 - 2)$

18) $(45y^3 + 2y^2 + y + 9) \div (5y^2 + 3y + 2)$

19) $(-12x^3 - 10x^2 + 19x + 25) \div (2x^2 + 4x + 3)$

20) $(20x^4 - 26x^3 + 3x - 1) \div (2x^2 + 1)$

2. กำหนดให้พหุนาม A เป็นตัวตั้ง และพหุนาม B เป็นตัวหาร ดังต่อไปนี้ จงหาพหุนาม C และ พหุนาม D ที่ทำให้ A = BC + D เมื่อดีกรีของ D น้อยกว่าดีกรีของ B หรือ D = 0

ข้อ	A	B
1	$x^3 + 6 + x$	$x^2 + 2x - 1$
2	$10x^3 + 3x^2 - 4x + 21$	$2x + 3$
3	$4y^3 + 2y^2 - 16y - 19$	$y^2 - y - 3$
4	$3y^3 + 15y^2 - 2y + 1$	$3y^2 - 1$

3. กำหนดให้ A, B, C และ D เป็นพหุนามที่ A = BC + D จงหาพหุนาม A เมื่อกำหนดพหุนาม B, C และ D ดังต่อไปนี้

ข้อ	B	C	D
1	$x^2 - x + 4$	$5x + 4$	-2
2	$-x^2 + 6x - 5$	$2x^2 - x + 9$	0
3	$4x^2 + 1$	$6x^2 + 8x - 3$	$x + 2$
4	$3x^2 - 2x - 7$	$-5x^2 - 3x + 4$	$-6x - 1$

4. กำหนดให้ตัวตั้ง ตัวหาร ผลหาร และเศษ เป็นดังในตาราง
จงตรวจสอบว่าผลลัพธ์ที่ได้ในแต่ละข้อถูกต้องหรือไม่ โดยไม่ต้องตั้งหาร

ข้อ	ตัวตั้ง	ตัวหาร	ผลหาร	เศษ
1	$6x^2 - 7x + 1$	$3x - 2$	$2x - 1$	-1
2	$5x^3 - 35x^2 + 3x - 27$	$5x^2 + 4$	$x - 7$	$x + 1$
3	$8x^3 - 10x^2 - 5x - 6$	$-4x + 3$	$-2x^2 + x - 2$	0
4	$-4x^3 + 11x + 2$	$2x^2 + x - 1$	$-2x + 1$	$8x + 3$

ลองคิดดู

จงหาพหุนามที่แทน A, B, C, D, E และ F แล้วทำให้การหารพหุนามต่อไปนี้เป็นจริง

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + x + 6 \\ \hline
x - 1 & A \\
 & \underline{B} \\
 & C \\
 & \underline{D} \\
 & E \\
 & \underline{F} \\
 & \underline{\underline{4}}
\end{array}
$$

2.4 เศษส่วนของพหุนาม

นักเรียนเคยพบเศษส่วนที่เขียนได้ในรูป $\frac{a}{b}$ เมื่อ a เป็นจำนวนเต็ม และ b เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เท่ากับศูนย์

ในทำนองเดียวกันถ้า P และ Q เป็นพหุนาม โดยที่ $Q \neq 0$ จะเรียก $\frac{P}{Q}$ ว่า **เศษส่วนของพหุนาม**ที่มี P เป็น**ตัวเศษ**และ Q เป็น**ตัวส่วน** เช่น

$\dfrac{18xy^2}{6x^2y}$ เมื่อ $6x^2y \neq 0$

$\dfrac{x}{x-2}$ เมื่อ $x-2 \neq 0$

$\dfrac{x-5}{x^2-7x}$ เมื่อ $x^2-7x \neq 0$

นิพจน์ เช่น x^4, $6x-7$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเศษส่วนของพหุนามได้เช่นกัน เพราะสามารถเขียน x^4 ได้เป็น $\frac{x^4}{1}$ และเขียน $6x-7$ ได้เป็น $\frac{6x-7}{1}$ ซึ่งอยู่ในรูปเศษส่วนของพหุนาม

เศษส่วนของพหุนามที่จะกล่าวต่อไปนี้ให้ถือว่าพหุนามที่เป็นตัวส่วนไม่เท่ากับ 0 ถึงแม้ว่าจะไม่ได้ระบุเงื่อนไขของพหุนามที่เป็นตัวส่วนไว้

พิจารณาเศษส่วนของพหุนามต่อไปนี้

$\dfrac{15x^2y^2}{3xy^3}$ และ $\dfrac{2x+4}{x^2+2x}$

เราเขียน $\dfrac{15x^2y^2}{3xy^3}$ และ $\dfrac{2x+4}{x^2+2x}$ ในรูปเศษส่วนของพหุนามอีกแบบหนึ่งได้ดังนี้

$$\frac{15x^2y^2}{3xy^3} = \frac{(5x)\overset{1}{\cancel{(3xy^2)}}}{(y)\underset{1}{\cancel{(3xy^2)}}}$$

$$= \frac{5x}{y}$$

$$\frac{2x+4}{x^2+2x} = \frac{2\overset{1}{\cancel{(x+2)}}}{x\underset{1}{\cancel{(x+2)}}}$$

$$= \frac{2}{x}$$

เรียก $\frac{5x}{y}$ ว่า **เศษส่วนของพหุนามในรูปผลสำเร็จ**ของ $\frac{15x^2y^2}{3xy^3}$

เรียก $\frac{2}{x}$ ว่า **เศษส่วนของพหุนามในรูปผลสำเร็จ**ของ $\frac{2x+4}{x^2+2x}$

ตัวอย่างการเขียนเศษส่วนของพหุนามให้เป็นเศษส่วนของพหุนามในรูปผลสำเร็จ

1. $$\frac{8xy^4}{-6x^3y^2} = \frac{{}^{4}\cancel{8}x\cancel{y^4}\ y^2}{\underset{-3x^2}{\cancel{-6x^3}}\ \cancel{y^2}} = \frac{4y^2}{-3x^2}$$

2. $$\frac{10y^2-5y}{8y-4} = \frac{5y\overset{1}{\cancel{(2y-1)}}}{4\underset{1}{\cancel{(2y-1)}}} = \frac{5y}{4}$$

2.5 การคูณและการหารเศษส่วนของพหุนาม

การคูณเศษส่วนของพหุนาม

การคูณเศษส่วนของพหุนามทำได้เช่นเดียวกับการคูณเศษส่วน กล่าวคือ

เมื่อมี P, Q, R และ S เป็นพหุนาม โดยที่ $Q \neq 0$ และ $S \neq 0$ จะได้ว่า

$$\frac{P}{Q}\times\frac{R}{S} = \frac{P\times R}{Q\times S}$$

พิจารณาการหาผลคูณของเศษส่วนของพหุนามต่อไปนี้

1. $$\frac{x}{x+2}\times\frac{1}{x-1} = \frac{(x)(1)}{(x+2)(x-1)} = \frac{x}{x^2+x-2}$$

2. $\frac{4xy}{5} \times \frac{10}{x} \quad = \quad \frac{4xy \times 10}{5 \times x}$

$$= \frac{40xy}{5x}$$

ในข้อ 2 ข้างต้น เราได้ $\frac{40xy}{5x}$ เป็นผลคูณ แต่เนื่องจากเราเขียน $\frac{40xy}{5x}$ ให้เป็นเศษส่วนของพหุนามในรูปผลสำเร็จได้ดังนี้

$$\frac{40xy}{5x} = \frac{8y}{1} = 8y$$

ดังนั้น เราอาจใช้ $\frac{40xy}{5x}$ หรือ $8y$ เป็นคำตอบ

โดยทั่วไปนิยมเขียนผลคูณของเศษส่วนของพหุนามเป็นเศษส่วนของพหุนามในรูปผลสำเร็จ ดังตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลคูณของ $\frac{-6}{xy}$ กับ $\frac{5x}{y}$

วิธีทำ $\frac{-6}{xy} \times \frac{5x}{y} \quad = \quad \frac{(-6)(5x)}{(xy)(y)}$

$$= \frac{-30\cancel{x}^{1}}{{}_{1}\cancel{x}y^{2}}$$

$$= \frac{-30}{y^{2}}$$

ตอบ $\frac{-30}{y^{2}}$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลคูณของ $\frac{7}{6x-18}$ กับ $x-3$

วิธีทำ

$$\frac{7}{6x-18} \times (x-3) = \frac{7}{6x-18} \times \frac{x-3}{1}$$

$$= \frac{7(x-3)}{(6x-18)(1)}$$

$$= \frac{7\cancel{(x-3)}^{1}}{6\cancel{(x-3)}_{1}}$$

$$= \frac{7}{6}$$

ตอบ $\frac{7}{6}$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลคูณของ $\frac{-5x}{x+2}$ กับ $\frac{x-6}{2x-1}$

วิธีทำ

$$\frac{-5x}{x+2} \times \frac{x-6}{2x-1} = \frac{(-5x)(x-6)}{(x+2)(2x-1)}$$

$$= \frac{-5x^2+30x}{2x^2+3x-2}$$

ตอบ $\frac{-5x^2+30x}{2x^2+3x-2}$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาผลคูณของ $\frac{x^2-x}{3x^2}$ กับ $\frac{x+1}{x-1}$

ใช้สมบัติการแจกแจงเขียน x^2-x ได้เป็น $x(x-1)$

วิธีทำ

$$\frac{x^2-x}{3x^2} \times \frac{x+1}{x-1} = \frac{(x^2-x)(x+1)}{(3x^2)(x-1)}$$

$$= \frac{x(x-1)(x+1)}{3x^2(x-1)}$$

$$= \frac{x+1}{3x}$$

ตอบ $\frac{x+1}{3x}$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาผลคูณ $\frac{6-10y}{y+8} \times \frac{2y+1}{12-20y}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\frac{6-10y}{y+8} \times \frac{2y+1}{12-20y} &= \frac{2(3-5y)}{y+8} \times \frac{2y+1}{4(3-5y)} \\ &= \frac{2(3-5y)(2y+1)}{4(3-5y)(y+8)} \\ &= \frac{2y+1}{2(y+8)} \text{ หรือ } \frac{2y+1}{2y+16}\end{aligned}$$

ตอบ $\frac{2y+1}{2(y+8)}$ หรือ $\frac{2y+1}{2y+16}$

การหารเศษส่วนของพหุนาม

การหารเศษส่วนของพหุนามทำได้เช่นเดียวกับการหารเศษส่วน กล่าวคือ

เมื่อมี P, Q, R และ S เป็นพหุนาม โดยที่ $Q \neq 0$, $R \neq 0$ และ $S \neq 0$ จะได้ว่า

$$\frac{P}{Q} \div \frac{R}{S} = \frac{P}{Q} \times \frac{S}{R}$$

นิยมเขียนผลหารที่ได้ให้เป็นเศษส่วนของพหุนามในรูปผลสำเร็จ

ตัวอย่างที่ 6 จงหาร $\frac{3x}{4}$ ด้วย $\frac{15x^2}{16}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\frac{3x}{4} \div \frac{15x^2}{16} &= \frac{3x}{4} \times \frac{16}{15x^2} \\ &= \frac{3x \times 16}{4 \times 15x^2} \\ &= \frac{4}{5x}\end{aligned}$$

ตอบ $\frac{4}{5x}$

ตัวอย่างที่ 7 จงหาร $\frac{2}{x}$ ด้วย $\frac{2x-6}{x}$

วิธีทำ

$$\frac{2}{x} \div \frac{2x-6}{x} = \frac{2}{x} \times \frac{x}{2x-6}$$

$$= \frac{2x}{x(2x-6)}$$

$$= \frac{2x}{2x(x-3)}$$

$$= \frac{1}{x-3}$$

ตอบ $\frac{1}{x-3}$

ตัวอย่างที่ 8 จงหาร $\frac{y^4}{4y+8}$ ด้วย $\frac{y^2}{7y+14}$

วิธีทำ

$$\frac{y^4}{4y+8} \div \frac{y^2}{7y+14} = \frac{y^4}{4y+8} \times \frac{7y+14}{y^2}$$

$$= \frac{y^4(7y+14)}{(4y+8)y^2}$$

$$= \frac{y^4(7)(y+2)}{4(y+2)y^2}$$

$$= \frac{7y^2}{4}$$

ตอบ $\frac{7y^2}{4}$

ตัวอย่างที่ 9 จงหาร $\frac{3y^2-y}{y+1}$ ด้วย $9y-3$

วิธีทำ

$$\frac{3y^2-y}{y+1} \div (9y-3) = \frac{3y^2-y}{y+1} \div \frac{9y-3}{1}$$

$$= \frac{3y^2-y}{y+1} \times \frac{1}{9y-3}$$

$$= \frac{3y^2-y}{(y+1)(9y-3)}$$

$$= \frac{y(3y-1)}{(y+1)(3)(3y-1)}$$

$$= \frac{y}{3(y+1)} \text{ หรือ } \frac{y}{3y+3}$$

ตอบ $\frac{y}{3(y+1)}$ หรือ $\frac{y}{3y+3}$

แบบฝึกหัด 2.5

1. จงหาผลคูณของเศษส่วนของพหุนามต่อไปนี้โดยทำให้เป็นเศษส่วนของพหุนามในรูปผลสำเร็จ

1) $\frac{3xy}{5} \times \frac{2x}{y}$

2) $\frac{-12x^2y}{5y^3} \times \frac{5xy}{3y^2}$

3) $\frac{ab^2c}{25} \times \frac{5a}{-4b^2c^2}$

4) $\frac{6x}{3x-9} \times \frac{x-3}{2}$

5) $\frac{2x+5}{x+2} \times \frac{x+2}{3x-5}$

6) $\frac{x+1}{4x-5} \times \frac{8x-10}{7x+7}$

7) $\frac{3x+1}{x-1} \times \frac{x^2-x}{x+1}$

8) $\frac{3y^2-y}{6y+3} \times \frac{2y+1}{3y-1}$

9) $\frac{x+2}{10x^2+5x} \times \frac{2x+1}{7x^2+14x}$

10) $\frac{-6y}{y^2-y} \times \frac{1-3y}{3y}$

2. จงหาผลลัพธ์ต่อไปนี้โดยทำให้เป็นเศษส่วนของพหุนามในรูปผลสำเร็จ

1) $\frac{3a}{7} \div \frac{18a^2b}{21}$

2) $\frac{75x^2y}{-9z^2} \div \frac{-5xy^2}{2z^2}$

3) $\frac{3x^5y^2}{x^2} \div \frac{-5x^3y^3}{y}$

4) $\frac{x^2}{2x-1} \div \frac{x^5}{6x-3}$

5) $\frac{2x^2+1}{x-1} \div \frac{1}{x-1}$

6) $\frac{15y^2+3y}{y-3} \div (5y+1)$

7) $\dfrac{3x^2-9x}{x-1} \div \dfrac{4x+12}{x+3}$ 8) $(y-2) \div \dfrac{2-y}{8}$

9) $(x+1)^2 \div \dfrac{x+1}{x-1}$ 10) $\dfrac{(x+3)^2}{x-3} \div \dfrac{x+3}{(x-3)^2}$

2.6 การบวกและการลบเศษส่วนของพหุนาม

การบวกและการลบเศษส่วนของพหุนามทำได้เช่นเดียวกับการบวกและการลบเศษส่วน กล่าวคือ

เมื่อมี P, Q และ R เป็นพหุนามโดยที่ $Q \neq 0$ จะได้ว่า

$$\frac{P}{Q}+\frac{R}{Q} = \frac{P+R}{Q} \text{ และ}$$

$$\frac{P}{Q}-\frac{R}{Q} = \frac{P-R}{Q}$$

นิยมเขียนผลบวกหรือผลลบที่ได้ให้เป็นเศษส่วนของพหุนามในรูปผลสำเร็จ

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลบวกของ $\frac{2x}{7}$ กับ $\frac{x}{7}$

วิธีทำ $\dfrac{2x}{7}+\dfrac{x}{7} = \dfrac{2x+x}{7}$

$= \dfrac{3x}{7}$

$\frac{2x}{7}$ และ $\frac{x}{7}$ มีตัวส่วนเป็น 7 เท่ากัน จึงนำตัวเศษมาบวกกันได้เลย

ตอบ $\dfrac{3x}{7}$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลบวกของ $\frac{3}{8x}$ กับ $\frac{9}{4x}$

วิธีทำ

$$\frac{3}{8x} + \frac{9}{4x} = \frac{3}{8x} + \frac{(9)(2)}{(4x)(2)}$$

$$= \frac{3}{8x} + \frac{18}{8x}$$

$$= \frac{21}{8x}$$

$\frac{3}{8x}$ และ $\frac{9}{4x}$ มีตัวส่วนไม่เท่ากัน จึงต้องทำตัวส่วนให้เท่ากันก่อน

ตอบ $\frac{21}{8x}$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลบวกของ $\frac{x}{(x+2)(x-2)}$ กับ $\frac{-2}{(x+2)(x-2)}$

วิธีทำ

$$\frac{x}{(x+2)(x-2)} + \frac{-2}{(x+2)(x-2)} = \frac{x+(-2)}{(x+2)(x-2)}$$

$$= \frac{x-2}{(x+2)(x-2)}$$

$$= \frac{1}{x+2}$$

ตอบ $\frac{1}{x+2}$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาผลบวกของ $\frac{6}{y}$ กับ $\frac{7}{y+4}$

วิธีทำ

$$\frac{6}{y} + \frac{7}{y+4} = \frac{6(y+4)}{y(y+4)} + \frac{7y}{(y+4)(y)}$$

$$= \frac{6(y+4)+7y}{y(y+4)}$$

$$= \frac{6y+24+7y}{y(y+4)}$$

$$= \frac{13y+24}{y(y+4)} \text{ หรือ } \frac{13y+24}{y^2+4y}$$

ตอบ $\frac{13y+24}{y(y+4)}$ หรือ $\frac{13y+24}{y^2+4y}$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาผลบวกของ $\frac{5}{x+1}$ กับ $\frac{3}{x-1}$

วิธีทำ

$$\frac{5}{x+1}+\frac{3}{x-1} = \frac{5(x-1)}{(x+1)(x-1)}+\frac{3(x+1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{5(x-1)+3(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{5x-5+3x+3}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{8x-2}{(x+1)(x-1)} \text{ หรือ } \frac{8x-2}{x^2-1}$$

ตอบ $\frac{8x-2}{(x+1)(x-1)}$ หรือ $\frac{8x-2}{x^2-1}$

ตัวอย่างที่ 6 จงหาผลบวกของ $\frac{4}{x+2}$ กับ $\frac{x-2}{x-3}$

วิธีทำ

$$\frac{4}{x+2}+\frac{x-2}{x-3} = \frac{4(x-3)}{(x+2)(x-3)}+\frac{(x-2)(x+2)}{(x-3)(x+2)}$$

$$= \frac{4(x-3)+(x-2)(x+2)}{(x+2)(x-3)}$$

$$= \frac{(4x-12)+(x^2+2x-2x-4)}{(x+2)(x-3)}$$

$$= \frac{x^2+4x-16}{(x+2)(x-3)} \text{ หรือ } \frac{x^2+4x-16}{x^2-x-6}$$

ตอบ $\frac{x^2+4x-16}{(x+2)(x-3)}$ หรือ $\frac{x^2+4x-16}{x^2-x-6}$

ตัวอย่างที่ 7 จงหาผลลบ $\frac{3}{10x} - \frac{7}{10x}$

วิธีทำ $\frac{3}{10x} - \frac{7}{10x} = \frac{3-7}{10x}$

$= \frac{-4}{10x}$

$= \frac{-2}{5x}$

$\frac{3}{10x}$ และ $\frac{7}{10x}$ มีตัวส่วนเป็น $10x$ เท่ากัน จึงนำตัวเศษมาลบกันได้เลย

ตอบ $\frac{-2}{5x}$

ตัวอย่างที่ 8 จงหาผลลบ $\frac{8x}{x-3} - \frac{24}{x-3}$

วิธีทำ $\frac{8x}{x-3} - \frac{24}{x-3} = \frac{8x-24}{x-3}$

$= \frac{8(x-3)}{x-3}$

$= 8$

ตอบ 8

ตัวอย่างที่ 9 จงหาผลลบ $\frac{3x+2}{5x+6} - \frac{x+1}{5x+6}$

วิธีทำ $\frac{3x+2}{5x+6} - \frac{x+1}{5x+6} = \frac{(3x+2)-(x+1)}{5x+6}$

$= \frac{3x+2-x-1}{5x+6}$

$= \frac{2x+1}{5x+6}$

ตอบ $\frac{2x+1}{5x+6}$

ตัวอย่างที่ 10 จงหาผลลบ $\frac{10}{2y+7} - \frac{4}{y}$

วิธีทำ

$$\frac{10}{2y+7} - \frac{4}{y} = \frac{10y}{(2y+7)y} - \frac{4(2y+7)}{y(2y+7)}$$

$$= \frac{10y-4(2y+7)}{y(2y+7)}$$

$\frac{10}{2y+7}$ และ $\frac{4}{y}$ มีตัวส่วนไม่เท่ากัน จึงต้องทำตัวส่วนให้เท่ากันก่อน

$$= \frac{10y-8y-28}{y(2y+7)}$$

$$= \frac{2y-28}{y(2y+7)} \text{ หรือ } \frac{2y-28}{2y^2+7y}$$

ตอบ $\frac{2y-28}{y(2y+7)}$ หรือ $\frac{2y-28}{2y^2+7y}$

ตัวอย่างที่ 11 จงหาผลลบ $\frac{2y}{y+1} - \frac{7y-1}{3y+5}$

วิธีทำ

$$\frac{2y}{y+1} - \frac{7y-1}{3y+5} = \frac{(2y)(3y+5)}{(y+1)(3y+5)} - \frac{(7y-1)(y+1)}{(3y+5)(y+1)}$$

$$= \frac{(2y)(3y+5)-(7y-1)(y+1)}{(y+1)(3y+5)}$$

$$= \frac{(6y^2+10y)-(7y^2+6y-1)}{(y+1)(3y+5)}$$

$$= \frac{6y^2+10y-7y^2-6y+1}{(y+1)(3y+5)}$$

$$= \frac{-y^2+4y+1}{(y+1)(3y+5)} \text{ หรือ } \frac{-y^2+4y+1}{3y^2+8y+5}$$

ตอบ $\frac{-y^2+4y+1}{(y+1)(3y+5)}$ หรือ $\frac{-y^2+4y+1}{3y^2+8y+5}$

แบบฝึกหัด 2.6

จงหาผลลัพธ์ต่อไปนี้โดยทำให้เป็นเศษส่วนของพหุนามในรูปผลสำเร็จ

1. $\frac{2x}{3}+\frac{4x}{3}$
2. $\frac{5}{7x}+\frac{2}{7x}$
3. $\frac{x+2}{10}+\frac{2x-3}{10}$
4. $\frac{x+1}{x}-\frac{x-1}{x}$
5. $\frac{x+1}{5}+\frac{x-1}{3}$
6. $\frac{x}{x-3}-\frac{3}{x-3}$
7. $\frac{1}{m+1}+\frac{m}{1+m}$
8. $\frac{5m}{m-2}-\frac{10}{m-2}$
9. $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}$
10. $\frac{3}{2b}+\frac{2}{3b}$
11. $\frac{5}{8x}-\frac{3}{2x}$
12. $\frac{x}{2y}+\frac{y}{2x}$
13. $\frac{x-3}{2}+\frac{1-2x}{6}$
14. $\frac{5x-1}{2(x-1)}+\frac{x}{x-1}$
15. $\frac{2x-3}{5}+\frac{3x^2}{x-1}$
16. $\frac{-11}{5x-25}-\frac{3}{x-5}$
17. $\frac{x}{x+4}-\frac{1}{x-6}$
18. $\frac{x-5}{4(x-1)}+\frac{3x+5}{8(x-1)}$
19. $\frac{7x^2}{3(x+3)}-\frac{5x}{4x+12}$
20. $\frac{x^2+3x}{x}+\frac{x^2-3x}{x-1}$

น่าสนใจ

แบบรูปกับพหุนาม

แบบรูปในทางคณิตศาสตร์ที่สามารถเขียนแสดงในรูปทั่วไปได้โดยใช้ตัวแปร อาจพบในรูปของพหุนามหรือเศษส่วนของพหุนามดังตัวอย่าง

1. พิจารณาแบบรูปของเศษส่วนต่อไปนี้

$$\frac{2}{3}-\frac{1}{2} = \frac{1}{6} = \frac{1}{3\times 2}$$

$$\frac{3}{4}-\frac{2}{3} = \frac{1}{12} = \frac{1}{4\times 3}$$

$$\frac{4}{5}-\frac{3}{4} = \frac{1}{20} = \frac{1}{5\times 4}$$

$$\vdots$$

จะเห็นว่า ผลลัพธ์ที่ได้จากการลบเศษส่วนในลักษณะข้างต้นจะเท่ากับ 1 หารด้วยผลคูณของตัวส่วนจากเศษส่วนที่นำมาลบกันเสมอ เหตุที่เป็นเช่นนั้นเพราะว่าเขียนเศษส่วนที่นำมาลบกันในรูปทั่วไปได้เป็น ดังนี้

$$\frac{n}{n+1}-\frac{n-1}{n}$$ เมื่อ n แทนจำนวนนับตั้งแต่ 2 ขึ้นไป

จะได้

$$\begin{aligned}\frac{n}{n+1}-\frac{n-1}{n} &= \frac{(n)(n)}{(n+1)n}-\frac{(n-1)(n+1)}{(n+1)n}\\ &= \frac{n^2}{(n+1)n}-\frac{n^2-n+n-1}{(n+1)n}\\ &= \frac{n^2-(n^2-1)}{(n+1)n}\\ &= \frac{n^2-n^2+1}{(n+1)n}\\ &= \frac{1}{(n+1)n}\end{aligned}$$

2. พิจารณาการหาผลบวกของจำนวนนับตั้งแต่ 1 ถึง n ต่อไปนี้

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

กรณีที่ n แทนจำนวนคู่บวก

เช่น $n = 12$ จะหาผลบวกโดยใช้วิธีดังแผนภาพ

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12$$

$$6 + 7 = 13$$

$$5 + 8 = 13$$

$$4 + 9 = 13$$

$$3 + 10 = 13$$

$$2 + 11 = 13$$

$$1 + 12 = 13$$

จะเห็นว่า ผลบวกของจำนวนสองจำนวนที่จับคู่กันในแผนภาพเท่ากับ 13 ซึ่งมีอยู่ 6 คู่พอดี

ดังนั้น $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 6 \times 13$

หรือ $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = \frac{12}{2} \times (12 + 1)$

ให้สังเกตว่าผลบวกของจำนวนสองจำนวนที่จับคู่กันเป็น $13 = 12 + 1 = n + 1$ และจำนวนคู่เป็น 6 คู่ $= \frac{12}{2} = \frac{n}{2}$ คู่

ในกรณีทั่วไป เมื่อ n เป็นจำนวนคู่บวกใด ๆ จะได้แผนภาพการหาผลบวกเป็นดังนี้

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n - 3) + (n - 2) + (n - 1) + n$$

$$4 + (n - 3) = n + 1$$

$$3 + (n - 2) = n + 1$$

$$2 + (n - 1) = n + 1$$

$$1 + n = n + 1$$

ผลบวกของจำนวนสองจำนวนที่จับคู่กันในแผนภาพเท่ากับ $n+1$ ซึ่งมีอยู่ $\frac{n}{2}$ คู่พอดี

ดังนั้น $1+2+3+4+\ldots+(n-3)+(n-2)+(n-1)+n = \left(\frac{n}{2}\right)(n+1)$

$$= \frac{n(n+1)}{2}$$

กรณีที่ n แทนจำนวนคี่บวก

เช่น $n = 13$ จะหาผลบวกโดยใช้วิธีดังแผนภาพ

จำนวนตรงกลางที่เหลือ

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \boxed{7} + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13$

$6 + 8 = 14$

$5 + 9 = 14$

$4 + 10 = 14$

$3 + 11 = 14$

$2 + 12 = 14$

$1 + 13 = 14$

จะเห็นว่า ผลบวกของจำนวนสองจำนวนที่จับคู่กันในแผนภาพเท่ากับ 14 ซึ่งมีอยู่ 6 คู่ และเหลือจำนวนตรงกลางหนึ่งจำนวนที่ไม่มีคู่จับคือ 7

ดังนั้น $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13 = (6 \times 14)+7$

หรือ $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13$

$$= \left[\left(\frac{13-1}{2}\right)(13+1)\right]+\left(\frac{13+1}{2}\right)$$

ให้สังเกตว่าผลบวกของจำนวนสองจำนวนที่จับคู่กันเป็น $14 = 13+1 = n+1$

จำนวนคู่เป็น 6 คู่ $= \frac{13-1}{2} = \frac{n-1}{2}$ คู่ และจำนวนตรงกลางที่เหลือเป็น $7 = \frac{13+1}{2} = \frac{n+1}{2}$

ในกรณีทั่วไป เมื่อ n เป็นจำนวนคี่บวกใด ๆ จะได้แผนภาพการหาผลบวกเป็นดังนี้

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n-3) + (n-2) + (n-1) + n$$

$$4 + (n-3) = n+1$$

$$3 + (n-2) = n+1$$

$$2 + (n-1) = n+1$$

$$1 + n = n+1$$

ผลบวกของจำนวนสองจำนวนที่จับคู่กันในแผนภาพ เท่ากับ $n+1$

ซึ่งมีอยู่ $\frac{n-1}{2}$ คู่ และเหลือจำนวนตรงกลางหนึ่งจำนวนที่ไม่มีคู่จับคือ $\frac{n+1}{2}$

ดังนั้น $1+2+3+4+\ldots+(n-3)+(n-2)+(n-1)+n = \left(\frac{n-1}{2}\right)(n+1)+\left(\frac{n+1}{2}\right)$

$$= \frac{(n-1)(n+1)}{2}+\frac{n+1}{2}$$

$$= \frac{n^2-n+n-1}{2}+\frac{n+1}{2}$$

$$= \frac{n^2-1}{2}+\frac{n+1}{2}$$

$$= \frac{n^2-1+n+1}{2}$$

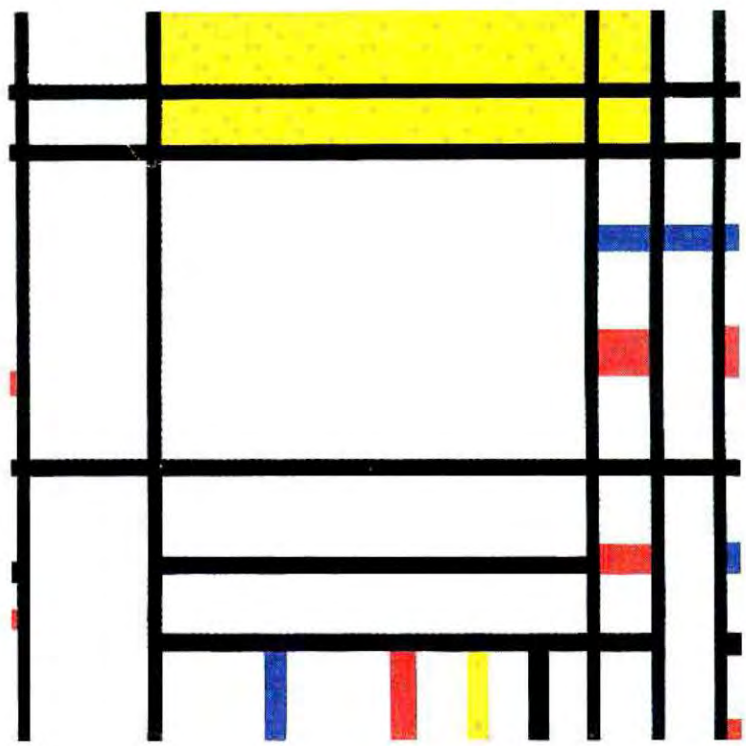
$$= \frac{n^2+n}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}$$

จากกรณีที่ n เป็นจำนวนคู่บวก และ n เป็นจำนวนคี่บวกที่กล่าวมาแล้ว

จะเห็นว่าผลบวกของจำนวนนับตั้งแต่ 1 ถึง n มีค่าเท่ากันคือ $\frac{n(n+1)}{2}$

นั่นคือ $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ เมื่อ n แทนจำนวนนับใด ๆ



Painting by Piet Mondrian

บทที่ 3
การประยุกต์เกี่ยวกับอัตราส่วนและร้อยละ

3.1 การประยุกต์เกี่ยวกับอัตราส่วน

นักเรียนเคยทราบมาแล้วว่า *อัตราส่วน $a : b$ หรือ $\frac{a}{b}$ เป็นการเปรียบเทียบปริมาณ a และ ปริมาณ b ซึ่งอาจมีหน่วยเดียวกันหรือต่างหน่วยกัน* ตัวอย่างเช่น

อัตราส่วนของพื้นที่ผิวโลกส่วนที่เป็นน้ำต่อพื้นที่ผิวโลกส่วนที่เป็นพื้นดิน เป็น 7 : 3
อัตราส่วนของจำนวนห้องเรียนเป็นห้องต่อจำนวนนักเรียนเป็นคน เป็น 35 : 1,400

ในชีวิตประจำวันเรามักคุ้นเคยและเข้าใจความหมายของอัตราส่วนในรูปที่บอกเป็นอัตรา เช่น

อัตราค่าโดยสารรถประจำทาง 8 บาทต่อคน
ราคามะนาว 5 ผล 8 บาท
อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 2.50 บาทต่อปี

จากข้อความข้างต้นสามารถเขียนเป็นอัตราส่วนได้ดังนี้

อัตราส่วนของค่าโดยสารรถประจำทางเป็นบาทต่อจำนวนผู้โดยสารเป็นคน เป็น 8 : 1 หรือ $\frac{8}{1}$

อัตราส่วนของจำนวนมะนาวเป็นผลต่อราคามะนาวเป็นบาท เป็น 5 : 8 หรือ $\frac{5}{8}$

อัตราส่วนของเงินต้นเป็นบาทต่อดอกเบี้ยเป็นบาทต่อเวลาเป็นปี เป็น 100 : 2.50 : 1

คิดอย่างไร

นักเรียนคิดอย่างไรในสถานการณ์ต่อไปนี้

สถานการณ์ที่ 1 พินิจ และนิติ นัดหมายพาครอบครัวไปเที่ยวทะเลและจองบ้านพักไว้หลังหนึ่งเพื่อพักด้วยกัน ทั้งสองครอบครัวออกเดินทางโดยรถยนต์ในเวลาเดียวกันและไม่แวะระหว่างทาง พินิจขับรถด้วยอัตราเร็วเฉลี่ย 85 กิโลเมตรต่อชั่วโมง และนิติขับรถด้วยอัตราเร็วเฉลี่ย 90 กิโลเมตรต่อชั่วโมง นักเรียนคิดว่าครอบครัวของใครน่าจะถึงบ้านพักก่อนกัน

สถานการณ์ที่ 2 พลอยและแพรสั่งก๋วยเตี๋ยวน้ำมารับประทานคนละ 1 ชาม โดยที่แม่ค้าไม่ได้ปรุงรสให้ก่อน แต่ละคนปรุงรสดังนี้

พลอย ใส่น้ำปลา 3 ช้อนชา น้ำมะนาว 3 ช้อนชา และน้ำตาลทราย 2 ช้อนชา

แพร ใส่น้ำปลา 4 ช้อนชา น้ำมะนาว 3 ช้อนชา และน้ำตาลทราย 2 ช้อนชา

ก๋วยเตี๋ยวของใครจะออกรสเค็มมากกว่า

สถานการณ์ที่ 3 วีระต้องการวาดภาพทุ่งนาและระบายสีภาพ เขาผสมสีที่ต้องการโดยใช้สูตรการผสมสีตามอัตราส่วนของปริมาณแม่สีดังนี้

สีเขียว A มีส่วนผสมของปริมาณสีน้ำเงินต่อสีเหลือง เป็น 3 : 2

สีเขียว B มีส่วนผสมของปริมาณสีน้ำเงินต่อสีเหลือง เป็น 2 : 1

สีเขียว C มีส่วนผสมของปริมาณสีน้ำเงินต่อสีเหลือง เป็น 1 : 2

สีส้ม A มีส่วนผสมของปริมาณสีแดงต่อสีเหลือง เป็น 2 : 3

สีส้ม B มีส่วนผสมของปริมาณสีแดงต่อสีเหลือง เป็น 3 : 2

นักเรียนคิดว่าสีต่าง ๆ ที่วีระผสม ตามอัตราส่วนดังกล่าวมีระดับความเข้มของสีแตกต่างกันอย่างไร

1) ระหว่างสีเขียว A กับสีเขียว B สีใดเป็นสีเขียวเข้มกว่ากัน
2) ระหว่างสีเขียว B กับสีเขียว C สีใดเป็นสีเขียวอ่อนกว่ากัน
3) ระหว่างสีส้ม A กับสีส้ม B สีใดเป็นสีส้มอมแดงมากกว่ากัน

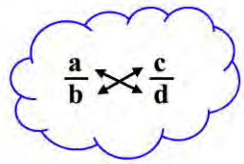
นักเรียนทราบมาแล้วว่า *ประโยคที่แสดงการเท่ากันของอัตราส่วนสองอัตราส่วน* เรียกว่า *สัดส่วน* เช่น

$$\frac{13}{15} = \frac{26}{30}$$

การหาจำนวนใดจำนวนหนึ่งในสัดส่วน อาจใช้*การคูณไขว้* ดังนี้

สำหรับอัตราส่วน $\frac{a}{b}$ และ $\frac{c}{d}$

ถ้า $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ แล้ว $a \times d = b \times c$



ในการนำสัดส่วนไปใช้เพื่อแก้โจทย์ปัญหาหรือแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่าง ๆ บางครั้งจำเป็นต้องหาค่าของตัวแปรที่อยู่ในสัดส่วนนั้น ดังตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ x ในสัดส่วน $\frac{x}{7} = \frac{24}{56}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{x}{7} = \frac{24}{56}$

จากผลคูณไขว้

จะได้ $x \times 56 = 7 \times 24$

$x = \frac{7 \times 24}{56}$

ดังนั้น $x = 3$

นั่นคือ ค่าของ x เป็น 3

ตอบ 3

ตัวอย่างที่ 2 สนามหญ้าแห่งหนึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีอัตราส่วนของความกว้างต่อความยาว เป็น 5 : 8 ถ้าสนามหญ้ามีความยาว 84 เมตร จงหาความกว้างของสนามหญ้าแห่งนี้

วิธีทำ ให้ x เป็นความกว้างของสนามหญ้าที่มีความยาวเป็น 84 เมตร

อัตราส่วนของความกว้างต่อความยาว เป็น 5 : 8

เขียนสัดส่วนได้ดังนี้ $\frac{x}{84} = \frac{5}{8}$

จะได้ $x \times 8 = 84 \times 5$

$$x = \frac{84 \times 5}{8}$$

ดังนั้น $x = 52.5$

นั่นคือ สนามหญ้ากว้าง 52.5 เมตร

ตอบ 52.5 เมตร

ตัวอย่างที่ 3 ร้านจันทร์อัลลอย นำโลหะต่าง ๆ มาผสมเป็นอัลลอย ด้วยอัตราส่วนโดยน้ำหนักของเหล็กต่อนิกเกิล เป็น 21 : 5 และนิกเกิลต่อทองแดง เป็น 4 : 3 ถ้าต้องการได้อัลลอยหนัก 2,142 กรัม จะต้องใช้โลหะต่าง ๆ ชนิดละกี่กรัม

วิธีทำ เนื่องจาก อัตราส่วนของเหล็กต่อนิกเกิลโดยน้ำหนัก เป็น

$$21 : 5 = 21 \times 4 : 5 \times 4$$
$$= 84 : 20$$

ทำน้ำหนักของนิกเกิลในสองอัตราส่วนให้เป็นจำนวนเดียวกัน

อัตราส่วนของนิกเกิลต่อทองแดงโดยน้ำหนัก เป็น

$$4 : 3 = 4 \times 5 : 3 \times 5$$
$$= 20 : 15$$

จะได้อัตราส่วนของเหล็กต่อนิกเกิลต่อทองแดงโดยน้ำหนัก เป็น 84 : 20 : 15

ดังนั้นอัลลอยมีส่วนผสมทั้งหมดโดยน้ำหนัก เป็น 84 + 20 + 15 = 119 ส่วน

ให้ x เป็นน้ำหนักของเหล็กที่นำมาผสม เพื่อให้ได้อัลลอย 2,142 กรัม

เนื่องจาก อัตราส่วนของเหล็กต่ออัลลอยโดยน้ำหนัก เป็น 84 : 119

เขียนสัดส่วนได้ดังนี้ $\frac{x}{2,142} = \frac{84}{119}$

จะได้ $x \times 119 = 2,142 \times 84$

$$x = \frac{2,142 \times 84}{119}$$

ดังนั้น $x = 1,512$

นั่นคือ ใช้เหล็กหนัก 1,512 กรัม

ให้ y เป็นน้ำหนักนิกเกิลที่นำมาผสม เพื่อให้ได้อัลลอยหนัก 2,142 กรัม

เนื่องจาก อัตราส่วนของนิกเกิลต่ออัลลอยโดยน้ำหนัก เป็น 20 : 119

เขียนสัดส่วนได้ดังนี้ $\frac{y}{2,142} = \frac{20}{119}$

จะได้ $y \times 119 = 2,142 \times 20$

$$y = \frac{2,142 \times 20}{119}$$

ดังนั้น $y = 360$

นั่นคือ ใช้นิกเกิลหนัก 360 กรัม

ให้ z เป็นน้ำหนักทองแดงที่นำมาผสม เพื่อให้ได้อัลลอยหนัก 2,142 กรัม

เนื่องจาก อัตราส่วนของทองแดงต่ออัลลอยโดยน้ำหนัก เป็น 15 : 119

เขียนสัดส่วนได้ดังนี้ $\frac{z}{2,142} = \frac{15}{119}$

จะได้ $z \times 119 = 2,142 \times 15$

$$z = \frac{2,142 \times 15}{119}$$

ดังนั้น $z = 270$

นั่นคือ ใช้ทองแดงหนัก 270 กรัม

ตอบ
- เหล็ก 1,512 กรัม
- นิกเกิล 360 กรัม
- ทองแดง 270 กรัม

แบบฝึกหัด 3.1 ก

1. จงหาจำนวนที่แทนด้วย a ในสัดส่วนต่อไปนี้

1) $\frac{a}{3} = \frac{42}{7}$ 2) $\frac{18}{5} = \frac{a}{20}$

3) $\frac{1.5}{a} = \frac{3}{10}$ 4) $\frac{72}{45} = \frac{9}{a}$

5) $\frac{7.2}{9} = \frac{a}{16.8}$ 6) $\frac{a}{35} = \frac{0.5}{7}$

2. บุญศรีทอผ้าฝ้ายยาว 3 เมตร ใช้เวลาทอโดยประมาณ 4 วัน ถ้าบุญศรีรับงานทอผ้าฝ้ายแบบเดียวกันยาว 50 เมตร จะต้องใช้เวลาทอประมาณกี่วัน
3. นงนุชหุงข้าวผสมกับลูกเดือยโดยใช้ข้าวสาร 2 กระป๋อง และลูกเดือย $\frac{3}{4}$ กระป๋องสำหรับรับประทาน 5 คน ถ้านงนุชต้องการหุงข้าวผสมลูกเดือยสำหรับรับประทาน 30 คน จะต้องใช้ข้าวสารและลูกเดือยอย่างละกี่กระป๋อง
4. โรงงานแห่งหนึ่งมีอัตราส่วนของจำนวนพนักงานชายต่อจำนวนพนักงานหญิง เป็น 5 : 2 ถ้ามีพนักงานทั้งหมด 336 คน จะเป็นพนักงานชายและพนักงานหญิงอย่างละกี่คน
5. สุดาซื้อมะม่วงมาขายสองครั้ง ครั้งละ 100 กิโลกรัม ครั้งแรกสั่งซื้อโดยตรงจากสวนในราคา 4 กิโลกรัม 70 บาท ครั้งที่สองซื้อผ่านพ่อค้าคนกลางในราคา 5 กิโลกรัม 95 บาท จงหาว่าสุดาซื้อจากพ่อค้าคนกลางแพงกว่าซื้อโดยตรงจากสวนกี่บาท
6. โรงเรียนก้าวหน้าศึกษา และโรงเรียนคณิตวิทยา รับสมัครนักเรียนเข้าเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 พร้อมกันโดยวิธีจับฉลาก พบว่าอัตราส่วนของจำนวนนักเรียนที่จับฉลากเข้าเรียนได้ต่อจำนวนนักเรียนที่จับฉลากไม่ได้ของโรงเรียนก้าวหน้าศึกษา เป็น 5 : 12 และของโรงเรียนคณิตวิทยา เป็น 3 : 8 ถ้าจำนวนนักเรียนที่จับฉลากได้ของทั้งสองโรงเรียนเป็น 210 คนเท่ากัน จงหาว่าแต่ละโรงเรียนมีนักเรียนมาสมัครกี่คน
7. จันทร์เพ็ญผสมปุ๋ยชีวภาพเพื่อใช้เองและแจกเพื่อนบ้าน โดยใช้ใบไม้และเศษผักต่าง ๆ มาหมักกับกากน้ำตาลแดงและน้ำตาลทรายแดงในถังพลาสติก ด้วยอัตราส่วนของใบไม้และเศษผักต่อกากน้ำตาลแดงต่อน้ำตาลทรายแดงโดยน้ำหนัก เป็น $3 : \frac{3}{5} : \frac{2}{5}$ ถ้าจันทร์เพ็ญมีใบไม้และเศษผัก 15 กิโลกรัม จงหาว่าจันทร์เพ็ญต้องใช้กากน้ำตาลแดงและน้ำตาลทรายแดงอย่างละกี่กิโลกรัม

นักเรียนเคยทราบมาแล้วว่าเมื่อกล่าวถึงอัตราส่วน จำนวนที่ปรากฏอยู่ในอัตราส่วนไม่จำเป็นต้องแสดงปริมาณที่แท้จริงของสิ่งที่นำมาเปรียบเทียบกันเสมอไป เช่น อัตราส่วนของจำนวนเงินของจิตราต่อจำนวนเงินของวารี เป็น 13 : 15 อัตราส่วนนี้ไม่จำเป็นต้องหมายความว่า จิตรามีเงิน 13 บาท และวารีมีเงิน 15 บาท แต่อาจหมายถึงจำนวนเงินเป็นอย่างอื่นได้อีก เช่น

ถ้าจิตรามีเงิน 6.50 บาท วารีจะมีเงิน 7.50 บาท

ถ้าจิตรามีเงิน 26 บาท วารีจะมีเงิน 30 บาท

ถ้าจิตรามีเงิน 39 บาท วารีจะมีเงิน 45 บาท

ดังนั้นอัตราส่วนของจำนวนเงินของจิตราต่อจำนวนเงินของวารีอาจเขียนเป็นอัตราส่วนที่เท่ากับ 13 : 15 ซึ่งหาได้โดยใช้หลักการคูณ หรือหลักการหาร ดังนี้

$13 : 15 \;=\; \frac{13}{2} : \frac{15}{2} \;=\; 6.50 : 7.50$ หรือ

$13 : 15 \;=\; 13 \times 2 \;:\; 15 \times 2 \;=\; 26 : 30$ หรือ

$13 : 15 \;=\; 13 \times 3 \;:\; 15 \times 3 \;=\; 39 : 45$

จากอัตราส่วนข้างต้น จะเห็นว่าจำนวนเงินของจิตราต่อจำนวนเงินของวารีจะอยู่ในรูป $13x : 15x$ เมื่อ x แทนจำนวนบวก

นั่นคือ ถ้ากำหนดให้จำนวนเงินของจิตราเป็น $13x$ เมื่อ x แทนจำนวนบวกบางจำนวนแล้ว จะได้จำนวนเงินของวารีเป็น $15x$

เราสามารถนำแนวคิดนี้มาใช้แก้โจทย์ปัญหาได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 4 ดำรงมีต้นชวนชมและต้นเฟื่องฟ้าอยู่จำนวนหนึ่ง อัตราส่วนของจำนวนต้นชวนชมต่อจำนวนต้นเฟื่องฟ้า เป็น 5 : 3 เมื่อเขาจำหน่ายต้นชวนชมไป 22 ต้น และต้นเฟื่องฟ้าไป 16 ต้น แล้วอัตราส่วนของจำนวนต้นชวนชมที่เหลือต่อจำนวนต้นเฟื่องฟ้าที่เหลือ เป็น 9 : 5 จงหาว่าเดิมดำรงมีต้นชวนชมและต้นเฟื่องฟ้าอยู่อย่างละกี่ต้น

วิธีทำ เนื่องจาก อัตราส่วนของจำนวนต้นชวนชมต่อจำนวนต้นเฟื่องฟ้า เป็น 5 : 3

ถ้าเดิมดำรงมีต้นชวนชมอยู่ $5x$ ต้น เมื่อ x เป็นจำนวนบวก

แล้วจะมีต้นเฟื่องฟ้าอยู่ $3x$ ต้น

หลังจากจำหน่ายต้นชวนชมไป 22 ต้น และต้นเฟื่องฟ้า 16 ต้น

เหลือต้นชวนชมอยู่ $5x - 22$ ต้น

และเหลือต้นเฟื่องฟ้าอยู่ $3x - 16$ ต้น

เนื่องจาก อัตราส่วนของจำนวนต้นชวนชมที่เหลือต่อจำนวนต้นเฟื่องฟ้าที่เหลือ เป็น 9 : 5

เขียนสัดส่วนได้ดังนี้ $\frac{5x-22}{3x-16} = \frac{9}{5}$

$$\frac{\text{จำนวนต้นชวนชมที่เหลือ}}{\text{จำนวนต้นเฟื่องฟ้าที่เหลือ}} = \frac{9}{5}$$

จะได้ $(5x-22)\times 5 = (3x-16)\times 9$

$$25x - 110 = 27x - 144$$

$$25x - 27x = 110 - 144$$

$$-2x = -34$$

$$x = \frac{-34}{-2}$$

ดังนั้น $x = 17$

$$5x = 5\times 17 = 85$$

$$3x = 3\times 17 = 51$$

นั่นคือ เดิมดำรงมีต้นชวนชม 85 ต้น และต้นเฟื่องฟ้า 51 ต้น

ตอบ ต้นชวนชม 85 ต้น และต้นเฟื่องฟ้า 51 ต้น

ตัวอย่างที่ 5 ในการรับสมัครนักเรียนเข้าค่ายคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นของโรงเรียนคณิตวิทยา อัตราส่วนของจำนวนนักเรียนที่สมัคร ชั้น ม.1 ต่อชั้น ม.2 ต่อชั้น ม.3 เป็น 5 : 3 : 2 เมื่อถึงวันเข้าค่ายมีนักเรียนชั้น ม.1 ถอนตัว 10 คน นักเรียนชั้น ม.2 สมัครเพิ่ม 6 คน และนักเรียนชั้น ม.3 สมัครเพิ่ม 8 คน ทำให้อัตราส่วนของจำนวนนักเรียนที่เข้าค่ายชั้น ม.1 ต่อชั้น ม.2 ต่อชั้นม.3 เป็น 5 : 4 : 3 จงหาว่ามีนักเรียนเข้าค่ายทั้งหมดกี่คน

วิธีทำ เนื่องจาก อัตราส่วนของจำนวนนักเรียนที่สมัครชั้น ม.1 ต่อชั้น ม.2 ต่อชั้น ม.3 เป็น 5 : 3 : 2

ถ้าให้นักเรียนชั้น ม.1 มาสมัคร $5x$ คน เมื่อ x เป็นจำนวนบวก

จะได้ นักเรียนชั้น ม.2 มาสมัคร $3x$ คน

นักเรียนชั้น ม.3 มาสมัคร $2x$ คน

เมื่อถึงวันเข้าค่ายมีนักเรียนชั้น ม.1 $5x - 10$ คน

นักเรียนชั้น ม.2 เข้าค่าย $3x + 6$ คน

นักเรียนชั้น ม.3 เข้าค่าย $2x + 8$ คน

เนื่องจาก อัตราส่วนของจำนวนนักเรียนที่เข้าค่ายชั้น ม.1 ต่อชั้น ม.2 ต่อชั้นม.3 เป็น 5 : 4 : 3

ดังนั้น อัตราส่วนของจำนวนนักเรียนที่เข้าค่ายชั้น ม.1 ต่อชั้น ม.2 เป็น 5 : 4

เขียนสัดส่วนได้ดังนี้ $\frac{5x - 10}{3x + 6} = \frac{5}{4}$

จะได้

$$
\begin{aligned}
(5x - 10) \times 4 &= (3x + 6) \times 5 \\
20x - 40 &= 15x + 30 \\
20x - 15x &= 40 + 30 \\
5x &= 70 \\
x &= 14
\end{aligned}
$$

ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
5x - 10 &= (5 \times 14) - 10 \\
&= 70 - 10 \\
&= 60 \\
3x + 6 &= (3 \times 14) + 6 \\
&= 42 + 6 \\
&= 48
\end{aligned}
$$

และ

$$
\begin{aligned}
2x + 8 &= (2 \times 14) + 8 \\
&= 28 + 8 \\
&= 36
\end{aligned}
$$

นั่นคือ มีนักเรียนเข้าค่ายทั้งหมด $60 + 48 + 36 = 144$ คน

ตอบ 144 คน

แบบฝึกหัด 3.1 ข

1. จงหาจำนวนที่แทนด้วย x ในสัดส่วนต่อไปนี้

   1) $\frac{x-3}{x} = \frac{7}{12}$ 2) $\frac{4x}{x+1} = \frac{10}{3}$

   3) $\frac{8x-5}{6} = \frac{x+9}{6}$ 4) $\frac{2x-3}{x+2} = \frac{15}{11}$

2. พิษณุ และ ภูวนัย ฝากเงินไว้กับธนาคารออมสิน เดือนที่แล้วอัตราส่วนของยอดเงินฝากของพิษณุต่อยอดเงินฝากของภูวนัย เป็น $7:5$ เดือนนี้ภูวนัยฝากเงินเพิ่มอีก 500 บาท ทำให้อัตราส่วนของยอดเงินฝากของพิษณุต่อยอดเงินฝากของภูวนัย เป็น $6:5$ จงหาว่าเดือนนี้แต่ละคนมียอดเงินฝากคนละกี่บาท

3. อารีทำเครื่องจิ้มสำหรับรับประทานกับมะม่วงดิบโดยผสมพริกป่น เกลือ และน้ำตาลด้วยอัตราส่วนโดยน้ำหนัก เป็น $\frac{1}{2}:2:4$ ตามลำดับ ครั้งแรกอารีผสมเครื่องจิ้มได้หนัก 130 กรัม ถ้าต้องการเครื่องจิ้มเพิ่มอีก 390 กรัมโดยใช้สูตรเดิม อารีจะต้องใช้ส่วนผสมทั้งหมดอย่างละกี่กรัม

4. วิไลซื้อส้มโชกุนและลิ้นจี่มาขายจำนวนหนึ่ง โดยที่อัตราส่วนของน้ำหนักของส้มโชกุนต่อน้ำหนักของลิ้นจี่ เป็น $4:5$ เมื่อขายส้มโชกุนไป 15 กิโลกรัมและลิ้นจี่ไป 42 กิโลกรัม วิไลได้สั่งซื้อลิ้นจี่มาเพิ่มอีก 30 กิโลกรัม ทำให้อัตราส่วนของน้ำหนักของส้มโชกุนที่เหลือต่อน้ำหนักของลิ้นจี่ที่มีอยู่ทั้งหมด เป็น $5:7$ จงหาว่าเดิมวิไลมีส้มโชกุนและลิ้นจี่อยู่ชนิดละกี่กิโลกรัม

5. แม่ค้าซื้อมะกรูดและมะนาวมาขายโดยมีอัตราส่วนระหว่างจำนวนมะกรูดต่อจำนวนมะนาวที่ซื้อมา เป็น $3:4$

   1) เมื่อขายมะกรูดไป 100 ผล ขายมะนาวไป 60 ผล ปรากฏว่าเหลือมะกรูดและมะนาวเป็นอัตราส่วน $1:2$ จงหาว่าแม่ค้าซื้อมะกรูดและมะนาวมาขายอย่างละกี่ผล
   2) ถ้าแม่ค้าขายมะนาวไป 40 ผล โดยที่ยังไม่ได้ขายมะกรูด อัตราส่วนของจำนวนมะกรูดต่อจำนวนมะนาวที่เหลือจะเป็นเท่าไร

6. พิมพ์กับพลอยเป็นพี่น้องกัน ทั้งสองเป็นเด็กขยันเรียนและมัธยัสถ์ เงินค่าขนมที่เหลือจะเก็บฝากธนาคารเป็นประจำ ปลายเดือนที่แล้วอัตราส่วนของยอดเงินฝากของพิมพ์ต่อยอดเงินฝากของพลอย เป็น 5 : 7 เดือนนี้คุณแม่ให้เงินพิมพ์ 1,800 บาท คุณยายให้เงินพลอย 1,100 บาท ทั้งสองคนเก็บเงินไว้ใช้ 1 ส่วน อีก 3 ส่วน นำฝากธนาคาร ปรากฏว่ายอดเงินฝากของพิมพ์กับพลอยเป็นอัตราส่วน 4 : 5 จงหาว่าเดิมทั้งสองคนมีเงินฝากคนละกี่บาท
7. นิ่ม นิด และน้อย สามคนเป็นพี่น้องกัน ทุกคนจะมีการออมเงินฝากไว้กับคุณแม่ เมื่อเดือนที่แล้วอัตราส่วนของยอดเงินฝากของนิ่มต่อของนิดต่อของน้อย เป็น 2 : 5 : 4 ถ้าเดือนนี้นิ่มฝากเงินเพิ่ม 20 บาท แต่นิดและน้อยเบิกเงินมาใช้ 190 บาท และ 120 บาท ตามลำดับ ทำให้ยอดเงินฝากของทั้งสามคนที่ฝากแม่ไว้เป็น 1,360 บาท จงหาว่าเดือนนี้อัตราส่วนของยอดเงินฝากของนิ่มต่อของนิดต่อของน้อยเป็นเท่าใด
8. วิจิตร ภานุ และดนัย แต่ละคนมีเงินเก็บพิเศษสำหรับทำกิจกรรมของโรงเรียน อัตราส่วนของจำนวนเงินพิเศษของวิจิตรต่อของภานุต่อของดนัย เป็น 3 : 2 : 5 ซึ่งทั้งสามคนมีเงินรวมกัน 2,800 บาท ถ้าเดือนนี้ต้องใช้เงินส่วนนี้สำหรับไปทัศนศึกษาต่างจังหวัดกับทางโรงเรียนคนละ 350 บาท จงหาว่าเงินพิเศษที่เหลือของแต่ละคนยังเป็นอัตราส่วนเดิมอยู่หรือไม่ ถ้าไม่เท่าเดิมอัตราส่วนใหม่เป็นเท่าใด

ผิดตรงไหน

จุก : มานะมีข้าวสารอยู่จำนวนหนึ่ง ถ้าหุงข้าวจำนวนนี้ให้คนงาน 28 คน จะกินได้นาน 36 วัน ถ้าหุงให้คนงาน 42 คน ข้าวสารจำนวนนี้จะกินได้นานกี่วัน

กุ้ง : โจทย์ข้อนี้ถ้าใช้ความรู้สึกเชิงจำนวนและความเป็นจริงตามธรรมชาติ คำตอบที่ได้ควรน้อยกว่า 36 วัน ใช่หรือเปล่าล่ะจุก

จุก : ใช่ จุกก็คิดเหมือนกันนั่นแหละ แต่เมื่อจุกคำนวณโดยใช้สัดส่วน คำตอบกลับไม่เป็นอย่างที่คิด

กุ้ง : ขอดูที่จุกคิดหน่อยได้ไหม

จุก : อ้อ ! จุกเตรียมมาให้พร้อมเลย เอ้า ! กุ้งดูซิจ๊ะว่าจุกผิดที่ไหนและผิดอย่างไร เริ่มจากให้คนงาน 42 คน กินข้าวได้นาน x วัน

เขียนสัดส่วนได้ดังนี้ $\frac{x}{42} = \frac{36}{28}$

จะได้ $x \times 28 = 42 \times 36$

$x = \frac{42 \times 36}{28}$

ดังนั้น $x = 54$

นั่นคือ คนงาน 42 คน จะกินข้าวได้นาน 54 วัน

กุ้ง : น่าฉงนจังเลยจุก กุ้งดูตามที่จุกคิดก็เห็นด้วยกับจุก กุ้งก็จนปัญญาเหมือนกัน เราไปถามคุณครูกันดีกว่าว่าวิธีทำของเราผิดตรงไหน

3.2 การประยุกต์เกี่ยวกับร้อยละ

ในชีวิตประจำวันนักเรียนจะพบข้อมูลข่าวสารต่าง ๆ ตามป้ายโฆษณา สื่อสิ่งพิมพ์ วิทยุหรือโทรทัศน์อยู่เสมอ สำหรับข้อมูลข่าวสารที่เกี่ยวกับจำนวนที่มีค่ามาก ๆ ถ้าใช้ร้อยละมาช่วยในการนำเสนอ จะทำให้เห็นภาพของข้อมูลได้ชัดเจนขึ้น เช่น

จากการสำรวจการอ่านหนังสือของคนไทยในปี พ.ศ. 2546 โดยสำนักงานสถิติแห่งชาติ พบว่าผู้มีอายุตั้งแต่ 6 ปีขึ้นไปประมาณ 57.8 ล้านคน *มีคนอ่านหนังสือประมาณ 35.4 ล้านคน และ มีคนไม่อ่านหนังสือประมาณ 22.4 ล้านคน*

จากข้อมูลดังกล่าวจะเห็นการเปรียบเทียบระหว่างจำนวนประชากรที่อ่านหนังสือและไม่อ่านหนังสือมีหน่วยเป็นล้านคนซึ่งเป็นจำนวนที่มาก อาจทำให้เรานึกภาพการเปรียบเทียบได้ไม่ชัดเจนว่าแตกต่างกันมากน้อยเพียงใด แต่ถ้าใช้ร้อยละมาขยายความประกอบด้วยว่า*มีคนอ่านหนังสือประมาณ 35.4 ล้านคน คิดเป็นร้อยละประมาณ 61.2 และมีคนไม่อ่านหนังสือประมาณ 22.4 ล้านคน คิดเป็นร้อยละประมาณ 38.8* ก็จะทำให้เห็นภาพชัดเจนขึ้น

นักเรียนเคยแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับร้อยละในเรื่องการซื้อ ขาย การลดราคา การหากำไรหรือขาดทุน และการหาดอกเบี้ยมาบ้างแล้ว ในชีวิตประจำวันนักเรียนอาจพบร้อยละในข้อมูล

โภชนาการ เพื่อให้ผู้บริโภคได้ทราบส่วนประกอบโดยประมาณในอาหารและยาเหล่านั้น เช่น นักเรียนอาจพบข้อมูลโภชนาการด้านข้างของกล่องนมยูเอชที ดังนี้

ร้อยละของปริมาณที่แนะนำต่อวัน

ไขมันทั้งหมด 7 กรัม	11%
ไขมันอิ่มตัว 1 กรัม	5%
โคเลสเตอรอล 40 มิลลิกรัม	13%
โปรตีน 10 กรัม	
คาร์โบไฮเดรตทั้งหมด 16 กรัม	5%
ใยอาหาร 0 กรัม	
น้ำตาล 10 กรัม	
โซเดียม 150 มิลลิกรัม	6%

จะเห็นว่าร้อยละเกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวันของคนในยุคปัจจุบันอย่างหลีกเลี่ยงไม่ได้ เพื่อให้สามารถนำร้อยละไปใช้ได้อย่างเหมาะสม นักเรียนจำเป็นต้องเข้าใจความหมายของร้อยละ และสามารถนำไปใช้ได้อย่างถูกต้อง

นักเรียนเคยทราบมาแล้ว *ร้อยละ หรือเปอร์เซ็นต์เป็นอัตราส่วนแสดงการเปรียบเทียบปริมาณใดปริมาณหนึ่งกับ 100* เช่น

ร้อยละ 25 หรือ 25% เท่ากับ 25 : 100 หรือ $\frac{25}{100}$

ร้อยละ 230 หรือ 230% เท่ากับ 230 : 100 หรือ $\frac{230}{100}$

ในทางกลับกัน เราสามารถเขียนอัตราส่วนให้อยู่ในรูปร้อยละ เช่น

$$3 : 8 = \frac{3}{8} = \frac{3 \times 12.5}{8 \times 12.5} = \frac{37.5}{100} = 37.5\%$$

$$1.75 : 2.5 = \frac{1.75}{2.5} = \frac{1.75 \times 40}{2.5 \times 40} = \frac{70}{100} = 70\%$$

เมื่อกล่าวถึงร้อยละ เราควรระบุว่าเป็นร้อยละของจำนวนใด เพราะร้อยละที่เท่ากันของจำนวนที่ต่างกัน จะมีค่าไม่เท่ากัน เช่น

ร้อยละ 5 ของ 200 เท่ากับ $\frac{5}{100}\times 200 = 10$

ร้อยละ 5 ของ 300 เท่ากับ $\frac{5}{100}\times 300 = 15$

ในทางกลับกัน เมื่อกำหนดร้อยละที่ไม่เท่ากันของจำนวนที่ต่างกัน อาจมีค่าเท่ากันได้ เช่น

ร้อยละ 8 ของ 200 เท่ากับ $\frac{8}{100}\times 200 = 16$

ร้อยละ 10 ของ 160 เท่ากับ $\frac{10}{100}\times 160 = 16$

โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับร้อยละ จะเป็นข้อความที่มีความหมายใน 3 ลักษณะ ดังตัวอย่าง

1. ร้อยละ 8 ของ 60 เท่ากับเท่าไร ซึ่งหาคำตอบได้โดยใช้สัดส่วน

   $\frac{x}{60} = \frac{8}{100}$ เมื่อ x เป็นร้อยละ 8 ของ 60

2. 8 เป็นร้อยละเท่าไรของ 32 ซึ่งหาคำตอบได้โดยใช้สัดส่วน

   $\frac{8}{32} = \frac{x}{100}$ เมื่อ 8 เป็นร้อยละ x ของ 32

3. 16 เป็น 25% ของจำนวนใด ซึ่งหาคำตอบได้โดยใช้สัดส่วน

   $\frac{16}{x} = \frac{25}{100}$ เมื่อ 16 เป็น 25% ของ x

ยังตอบได้หรือไม่

ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

1. เสื้อยืดตัวหนึ่งปิดราคาไว้ 380 บาท ถ้าลดราคาให้ 15% จะซื้อเสื้อตัวนี้ได้ในราคากี่บาท
2. วิมลซื้อเครื่องเสียงราคา 4,500 บาท ต้องเสียภาษีมูลค่าเพิ่มร้อยละ 7 เมื่อรวมภาษีมูลค่าเพิ่มแล้ว เครื่องเสียงชุดนี้ราคากี่บาท
3. อำภาซื้อแตงโมมาขาย 360 ผล วันแรกขายได้ 162 ผล แตงโมที่ขายได้คิดเป็นร้อยละเท่าไรของจำนวนแตงโมทั้งหมด
4. บริษัทเจริญกิจต้องการรับพนักงานขาย 18 คน มีคนมาสมัครทั้งหมด 150 คน อยากทราบว่าจำนวนพนักงานที่ต้องการรับ คิดเป็นกี่เปอร์เซ็นต์ของจำนวนผู้มาสมัครทั้งหมด
5. นารีได้รับเงินปันผลครึ่งปีแรกจากหุ้นที่ซื้อไว้ 1,300 บาท ซึ่งคิดเป็นร้อยละ 5 ของเงินที่ลงทุน จงหาว่านารีลงทุนทั้งหมดกี่บาท
6. อัมพรเป็นพนักงานบริษัทแห่งหนึ่ง ฝากเงินออมทรัพย์ทุกเดือน เดือนละ 4,500 บาท ซึ่งคิดเป็น 9% ของเงินเดือน จงหาว่าอัมพรมีเงินเดือนเดือนละกี่บาท

ต่อไปนี้นักเรียนจะได้เห็นการนำร้อยละไปใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับของผสม

คำว่า “ของผสม” หมายถึง สิ่งของที่ได้จากการนำสิ่งของตั้งแต่สองชนิดขึ้นไปมาผสมกัน ซึ่งของผสมที่ได้จะกลายเป็นสิ่งของชนิดใหม่ หรือเป็นสิ่งของชนิดเดิม ที่มีคุณภาพเปลี่ยนไป ดังตัวอย่าง

1. เมื่อนำน้ำตาลทรายกับน้ำผสมกัน จะได้น้ำเชื่อม
2. เมื่อนำโซฮาแลบ N70 ผงข้นและผงฟอง ผสมกันด้วยอัตราส่วนโดยน้ำหนัก 15 : 10 : 3 : 1 จะได้น้ำยาล้างจานสูตรเข้มข้น

โดยทั่วไปของผสมที่เป็นของเหลว จะนิยมบอกส่วนผสมเป็นร้อยละ ดังตัวอย่าง

1. น้ำผลไม้แท้ 100% หมายถึง น้ำผลไม้บริสุทธิ์ไม่มีการนำน้ำหรือสิ่งอื่น ๆ มาเจือปน

2. น้ำผลไม้แท้ 35% หมายถึง น้ำผลไม้ 100 ลูกบาศก์เซนติเมตรจะมีน้ำผลไม้แท้อยู่ 35 ลูกบาศก์เซนติเมตร อีก 65 ลูกบาศก์เซนติเมตรเป็นน้ำหรือสิ่งเจือปนอื่นๆ
3. สารละลายชนิดหนึ่งมีแอลกอฮอล์ 20% หมายถึง ในสารละลายที่มีปริมาตร 100 หน่วย มีแอลกอฮอล์อยู่ 20 หน่วย อีก 80 หน่วยเป็นสารชนิดอื่น ๆ เจือปน

ตัวอย่างที่ 1 หนูหน่อยนำน้ำส้มแท้ 100 % ที่มีปริมาตร 700 ลูกบาศก์เซนติเมตร มาทำให้เจือจางเป็น 28 % โดยเติมน้ำดื่มที่มีปริมาตรสุทธิขวดละ 600 มิลลิลิตรลงไป จงหาว่าต้องเติมน้ำดื่มกี่ขวด

วิธีทำ ให้เติมน้ำดื่ม x ขวด

จะได้น้ำที่เติมมีปริมาตร $600 \times x = 600x$ ลูกบาศก์เซนติเมตร

มีน้ำส้มชนิด 100% อยู่ 700 ลูกบาศก์เซนติเมตร

น้ำส้มเจือจาง 28% หมายความว่า

ใน 100 ส่วน มีน้ำส้มแท้ 28 ส่วน มีน้ำ 72 ส่วน โดยปริมาตร

เขียนสัดส่วนได้ดังนี้ $\frac{28}{72} = \frac{700}{600x}$

จะได้ $28 \times 600x = 72 \times 700$

$$600x = \frac{72 \times 700}{28}$$

$$x = \frac{72 \times 700}{28 \times 600}$$

ดังนั้น $x = 3$

นั่นคือ เติมน้ำดื่ม 3 ขวด

ตอบ 3 ขวด

ตัวอย่างที่ 2 ร้านค้าซื้อส้มผลใหญ่และผลกลางมาจำนวนหนึ่ง เฉลี่ยแล้วส้มผลใหญ่ราคาผลละ 3 บาท และส้มผลกลางราคาผลละ 2.50 บาท นำส้มทั้งสองขนาดจัดใส่ถุงถุงละ 10 ผล โดยมีส้มผลใหญ่ 6 ผล และผลกลาง 4 ผล แล้วขายถุงละ 35 บาท ถ้าขายส้มได้หมด จงหาว่าจะได้กำไรร้อยละเท่าไร

วิธีทำ ให้ขายส้มทั้งหมดได้กำไร x%

ในส้ม 1 ถุงมี ส้มผลใหญ่ 6 ผล ผลละ 3 บาท

ส้มผลกลาง 4 ผล ผลละ 2.50 บาท

ดังนั้น ราคาทุนของส้มแต่ละถุง เป็น $(6 \times 3) + (4 \times 2.50) = 28$ บาท

ขายส้มราคาถุงละ 35 บาท

ดังนั้น กำไรถุงละ $35 - 28 = 7$ บาท

เขียนสัดส่วนได้ดังนี้ $\frac{7}{28} = \frac{x}{100}$

จะได้ $7 \times 100 = 28 \times x$

$x = \frac{7 \times 100}{28}$

ดังนั้น $x = 25$

นั่นคือ จะได้กำไร 25% หรือร้อยละ 25

ตอบ ร้อยละ 25

ตัวอย่างที่ 3 ต้อมต้องการทำครีมแต่งหน้าขนมเค้ก ตามสูตรใช้นมสดที่มีไขมันเนย 40% จำนวน 4 ถ้วยตวง แต่ต้อมมีนมสดที่มีไขมันเนย 60% กับนมสดที่มีไขมันเนย 30% ต้อมจะต้องผสมนมสดทั้งสองชนิดอย่างไรจึงได้นมสดตามสูตรที่ระบุไว้

วิธีทำ ให้ใช้นมสดที่มีไขมันเนย 60% จำนวน x ถ้วยตวง

จะได้ว่ามีไขมันเนย $\frac{60}{100} \times x = \frac{6x}{10}$ ถ้วยตวง

ใช้นมสดที่มีไขมันเนย 30% จำนวน $4 - x$ ถ้วยตวง

จะได้ว่ามีไขมันเนย $\frac{30}{100} \times (4 - x) = \frac{3(4-x)}{10}$ ถ้วยตวง

ดังนั้น มีไขมันเนยทั้งหมดจำนวน $\frac{6x}{10} + \frac{3(4-x)}{10}$ ถ้วยตวง

ต้องการนมสดที่มีไขมันเนย 40% จำนวน 4 ถ้วยตวง

คิดเป็นไขมันเนย $\frac{40}{100} \times 4 = \frac{16}{10}$ ถ้วยตวง

เขียนสมการแสดงปริมาณไขมันเนยในครีมแต่งหน้า ได้ดังนี้

$$\frac{6x}{10} + \frac{3(4-x)}{10} = \frac{16}{10}$$

$$6x + 3(4-x) = 16$$

$$6x + 12 - 3x = 16$$

$$3x + 12 = 16$$

$$3x = 16 - 12$$

$$3x = 4$$

จะได้ $x = \frac{4}{3}$ หรือ $1\frac{1}{3}$

ดังนั้น ต้องใช้นมสดที่มีไขมันเนย 60% จำนวน $1\frac{1}{3}$ ถ้วยตวง

และต้องใช้นมสดที่มีไขมัน 30% จำนวน $4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$ หรือ $2\frac{2}{3}$ ถ้วยตวง

ตอบ $\begin{cases} \text{ใช้นมสด 60\% จำนวน } 1\frac{1}{3} \text{ ถ้วยตวง} \\ \text{ใช้นมสด 30\% จำนวน } 2\frac{2}{3} \text{ ถ้วยตวง} \end{cases}$

ตัวอย่างที่ 4 ร้านขายกาแฟผสมกาแฟบดสูตรพิเศษจากกาแฟสองชนิด กาแฟชนิดแรกราคากิโลกรัมละ 240 บาท กาแฟชนิดที่ 2 ราคากิโลกรัมละ 300 บาท ขายกาแฟบดสูตรพิเศษนี้ในราคากิโลกรัมละ 360 บาท ได้กำไร 25% จงหาอัตราส่วนของกาแฟชนิดที่ 1 ต่อชนิดที่ 2 โดยน้ำหนัก

วิธีทำ ให้อัตราส่วนของน้ำหนักของกาแฟชนิดที่ 1 ต่อชนิดที่ 2 เป็น $x : y$

กาแฟชนิดที่ 1 x กิโลกรัม กิโลกรัมละ 240 บาท คิดเป็นเงิน $240x$ บาท

กาแฟชนิดที่ 2 y กิโลกรัม กิโลกรัมละ 300 บาท คิดเป็นเงิน $300y$ บาท

กาแฟสูตรพิเศษ $x + y$ กิโลกรัม ราคาทุน $240x + 300y$ บาท

กาแฟสูตรพิเศษ $x + y$ กิโลกรัม ราคาขาย $360(x + y)$ บาท

อัตราส่วนของราคาทุนต่อราคาขายกาแฟสูตรพิเศษ เป็น $\frac{240x + 300y}{360(x + y)}$

ขายได้กำไร 25%

อัตราส่วนของราคาทุนต่อราคาขาย เป็น $\frac{100}{125}$

เขียนสัดส่วนได้ดังนี้ $\frac{240x+300y}{360(x+y)} = \frac{100}{125}$

จะได้

$$
\begin{aligned}
(240x + 300y) \times 125 &= 360(x + y) \times 100 \\
(120x + 150y)\, 250 &= 36{,}000(x + y) \\
120x + 150y &= 144x + 144y \\
150y - 144y &= 144x - 120x \\
6y &= 24x \\
y &= 4x
\end{aligned}
$$

หรือ $\frac{1}{4} = \frac{x}{y}$

ดังนั้น $x : y = 1 : 4$

นั่นคือ อัตราส่วนของกาแฟชนิดที่ 1 ต่อชนิดที่ 2 โดยน้ำหนักเป็น 1 : 4

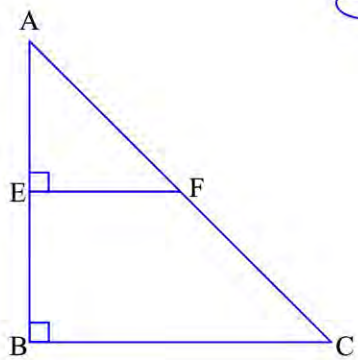
ตอบ 1 : 4

แบบฝึกหัด 3.2

1. น้ำส้มสายชูกลั่น 5% หมายถึงน้ำส้มสายชู 100 ลูกบาศก์เซนติเมตร มีกรดน้ำส้มหรือกรดแอซิติก 5 กรัม น้ำส้มสายชูกลั่น 5% ขวดหนึ่ง มีปริมาตรสุทธิ 390 ลูกบาศก์เซนติเมตร จงหาว่าน้ำส้มสายชูขวดนี้มีกรดน้ำส้มกี่กรัม
2. น้ำส้มเข้มข้นปรุงรสชนิดหนึ่งมีปริมาตร 700 ลูกบาศก์เซนติเมตร มีคำแนะนำในการปรุงรสว่า ถ้าใช้อัตราส่วนของน้ำส้มเข้มข้นปรุงรสต่อน้ำดื่มเป็น 1 : 4 จะทำให้ได้น้ำส้มปรุงรสที่มีน้ำส้มแท้ 7% จงหาว่าน้ำส้มเข้มข้นปรุงรสชนิดนี้มีน้ำส้มแท้กี่เปอร์เซ็นต์
3. อัลลอยชนิดหนึ่ง มีเงินผสมอยู่ 60% และอัลลอยอีกชนิดหนึ่งมีเงินผสมอยู่ 75% จะต้องนำอัลลอยแต่ละชนิดมาผสมกันอย่างไร จึงจะได้อัลลอยที่มีเงินผสม 65% จำนวน 250 กิโลกรัม
4. สารละลายชนิดหนึ่งจำนวน 18 ลิตร มีแอลกอฮอล์ 55% ส่วนที่เหลือเป็นน้ำ ถ้าต้องการให้สารละลายนี้มีแอลกอฮอล์ 15% จะต้องเติมน้ำลงไปกี่ลิตร

5. ข้อสอบวิชาภาษาอังกฤษมีสองฉบับ ฉบับที่หนึ่งมี 40 ข้อ ข้อละ 1 คะแนน และฉบับที่สองมี 30 ข้อ ข้อละ 1 คะแนน วิไลทำข้อสอบฉบับที่หนึ่งได้คะแนน 75% จะต้องทำข้อสอบฉบับที่สองถูกกี่ข้อ จึงจะได้คะแนนรวมสองฉบับเป็น 80%
6. ข้อสอบวิชาคณิตศาสตร์มีสองฉบับ ฉบับที่หนึ่งพิพัฒน์ทำได้ 65% ของคะแนนเต็ม 60 คะแนน ฉบับที่สองพิพัฒน์ทำได้ 80% ของคะแนนเต็ม 80 คะแนน จงหาว่าพิพัฒน์ทำข้อสอบวิชานี้ได้กี่เปอร์เซ็นต์
7. การสอบวิชาฟิสิกส์มีอัตราส่วนคะแนนระหว่างภาคต่อปลายภาคเป็น 60 : 40 รจิตทำคะแนนระหว่างภาคได้ 85% รจิตจะต้องสอบปลายภาคให้ได้กี่คะแนน จึงจะได้คะแนนรวมเป็น 83 คะแนน
8. ถ้านำนมสดที่มีไขมันเนย 4% จำนวน 50 ลิตร ผสมกับนมสดที่มีไขมันเนย 5% จำนวน 20 ลิตร แล้วเติมครีมที่มีไขมันเนย 20% ลงไปอีกจำนวนหนึ่ง ทำให้ได้นมสดที่มีไขมันเนย 10% จงหาว่าเติมครีมลงไปกี่ลิตร
9. จิตราลงทุนตัดเย็บเสื้อและกางเกงชุดละ 700 บาท และปิดราคาขายชุดละ 950 บาท โดยคิดกำไรของเสื้อไว้ 40% และคิดกำไรของกางเกงไว้ 30% จงหา
    1) ราคาต้นทุนของเสื้อและต้นทุนของกางเกงชุดนี้
    2) จิตราขายเสื้อและกางเกงชุดนี้ได้กำไรเฉลี่ยกี่เปอร์เซ็นต์
10. แม่ค้านำลูกกวาดเคลือบช็อกโกแลตและเคลือบน้ำตาลมาผสมกัน ขายไปกิโลกรัมละ 100 บาท ถ้าราคาลูกกวาดเคลือบช็อกโกแลตกิโลกรัมละ 90 บาท ลูกกวาดเคลือบน้ำตาลกิโลกรัมละ 70 บาท แม่ค้าจะต้องผสมลูกกวาดสองชนิดนี้ด้วยอัตราส่วนโดยน้ำหนักเท่าไร จึงจะได้กำไร 20 เปอร์เซ็นต์

หาได้ไหม



ΔABC กับ ΔAEF เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

AE : AB = 1 : 2

EF : BC = 1 : 2

พื้นที่ของ ΔAEF คิดเป็นร้อยละเท่าไรของพื้นที่ของ ΔABC

เทแล้วเติม – เติมแล้วเท

นิดต้องการเติมน้ำลงในน้ำหวานสังเคราะห์รสสละ 100% ให้เจือจางลงโดยกระทำดังนี้

ครั้งที่ 1 เทน้ำหวาน 2 ถ้วยตวงลงในโถแก้ว แล้วเติมน้ำดื่ม 2 ถ้วยตวงลงในโถแก้ว คนส่วนผสมให้เข้ากัน

ครั้งที่ 2 เทส่วนผสมในครั้งที่ 1 ออก 2 ถ้วยตวง แล้วเติมน้ำดื่ม 2 ถ้วยตวงลงไปแทน คนส่วนผสมให้เข้ากัน

ครั้งที่ 3 เทส่วนผสมในครั้งที่ 2 ออก 2 ถ้วยตวง แล้วเติมน้ำดื่ม 2 ถ้วยตวงลงไปแทน คนส่วนผสมให้เข้ากัน

ครั้งที่ 4 เทส่วนผสมในครั้งที่ 3 ออก 2 ถ้วยตวง แล้วเติมน้ำดื่ม 2 ถ้วยตวงลงไปแทน คนส่วนผสมให้เข้ากัน

จงหาว่าส่วนผสมในครั้งที่ 4 เป็นน้ำหวานเจือจางกี่เปอร์เซ็นต์

เป็นอัตราส่วนเท่าใด

ในงานคืนสู่เหย้าของโรงเรียนคณิตวิทยา วัชระและพงษ์เป็นศิษย์เก่าของโรงเรียน ต้องการทำขนมสามแส้จำหน่าย เพื่อนำกำไรสมทบทุนการศึกษา วัชระบริจาคเงินสมทบทำน้ำเชื่อมและซื้อน้ำแข็งให้ สำหรับพงษ์ซื้อส่วนผสมที่ใช้ในการทำขนมสามแส้ ดังนี้

วุ้นมะพร้าวกิโลกรัมละ 40 บาท แปะก้วยกิโลกรัมละ 160 บาท ลูกพลับแห้งกิโลกรัมละ 80 บาท วัชระได้นำส่วนผสมทั้งสามมาผสมกันตามอัตราส่วนของสูตร เพื่อนำส่วนผสมดังกล่าวมาตักแบ่งขายเป็นถ้วย โดยที่ปริมาณขนมผสม 1 กิโลกรัม จะขายได้เงิน 120 บาท เมื่อขายหมดได้กำไร 20% จงหาว่าในการขายครั้งนี้เขาใช้ส่วนผสมแต่ละชนิดเป็นอัตราส่วนโดยน้ำหนักอย่างไรได้บ้าง (ให้ตอบอย่างน้อยสองคำตอบ)

3.3 การประยุกต์เกี่ยวกับอัตราส่วนและร้อยละ

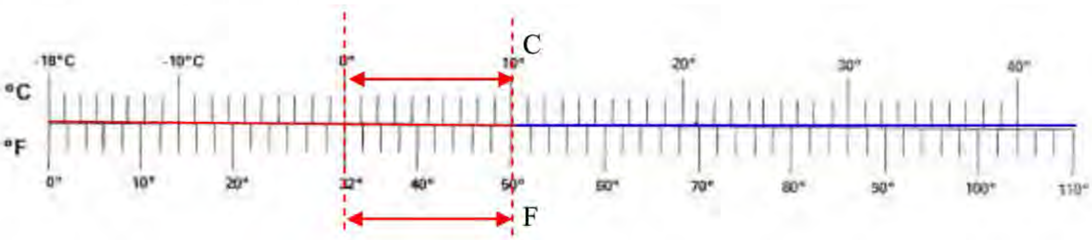
นักเรียนอาจคิดไม่ถึงว่ารอบ ๆ ตัวของนักเรียนมีการนำอัตราส่วนไปประยุกต์ใช้ในงานต่าง ๆ อยู่หลายงานด้วยกัน ดังจะกล่าวเป็นตัวอย่างต่อไปนี้

เปลี่ยนหน่วยอุณหภูมิ

ในการบอกอุณหภูมิ เช่น อุณหภูมิของอากาศและอุณหภูมิของร่างกาย นิยมบอกเป็นองศาเซลเซียสและองศาฟาเรนไฮต์ การกำหนดอุณหภูมิเริ่มจากอุณหภูมิที่น้ำกลายเป็นน้ำแข็ง เรียกว่า *จุดเยือกแข็ง* นักวิทยาศาสตร์กำหนดให้เป็นศูนย์องศาเซลเซียส (0°C) หรือ สามสิบสอง

องศาฟาเรนไฮต์ (32°F) และอุณหภูมิที่น้ำกลายเป็นไอ เรียกว่า *จุดเดือด* นักวิทยาศาสตร์กำหนดให้เป็น หนึ่งร้อยองศาเซลเซียส (100°C) หรือ สองร้อยสิบสององศาฟาเรนไฮต์ (212°F)

นักเรียนจะพบว่าอุณหภูมิระหว่างจุดเยือกแข็งและจุดเดือดเมื่อวัดเป็นองศาเซลเซียสต่างกัน 100 – 0 = 100 องศา แต่เมื่อวัดเป็นองศาฟาเรนไฮต์ต่างกัน 212 – 32 = 180 องศา ดังนั้น เมื่อนักเรียนนำเทอร์โมมิเตอร์ทั้งสองระบบวัดอุณหภูมิสิ่งใดสิ่งหนึ่งพร้อมกัน ค่าที่อ่านได้จะต่างกันซึ่งนักเรียนสามารถใช้อัตราส่วนที่เท่ากันมาหาความสัมพันธ์ระหว่างองศาเซลเซียสกับองศาฟาเรนไฮต์ได้ดังนี้



จากรูป เมื่อนำเทอร์โมมิเตอร์ทั้งสองระบบมาวางเทียบกัน โดยให้จุดเยือกแข็ง 0°C และ 32°F ตรงกัน จะพบว่าจำนวนช่องององศาของเทอร์โมมิเตอร์ทั้งสองระบบเหลื่อมจำนวนกันอยู่ เราสามารถนำจำนวนช่องที่บอกอุณหภูมิของเทอร์โมมิเตอร์ทั้งสองระบบนี้ เขียนเป็นอัตราส่วนได้ดังนี้

ถ้าให้ C แทนองศาเซลเซียสที่อ่านได้

F แทนองศาฟาเรนไฮต์ที่อ่านได้ ณ ขณะเดียวกัน

$$\frac{C-0}{F-32} = \frac{100}{180}$$

$$\frac{\text{จำนวนช่องในระบบองศาเซลเซียส}}{\text{จำนวนช่องในระบบองศาฟาเรนไฮต์}} = \frac{100}{180}$$

จะได้ $(C-0) \times 180 = (F-32) \times 100$

ดังนั้น $\frac{C}{100} = \frac{F-32}{180}$

หรือ $\frac{C}{5} = \frac{F-32}{9}$

เราใช้ความสัมพันธ์ที่เขียนในรูปสัดส่วน เป็นสูตรในการคำนวณหาอุณหภูมิในระบบใดระบบหนึ่งได้จากอีกระบบหนึ่งที่กำหนดให้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 นักปีนเขาคนหนึ่งวัดอุณหภูมิบนยอดเขาได้ $38^{\circ}F$ จงหาว่าถ้าวัดเป็นองศาเซลเซียสจะได้กี่องศา

วิธีทำ วัดอุณหภูมิบนยอดเขาได้ $38^{\circ}F$

จากสูตร $\frac{C}{5} = \frac{F-32}{9}$

แทน F ด้วย 38 จะได้ $\frac{C}{5} = \frac{38-32}{9}$

$$\frac{C}{5} = \frac{6}{9}$$

$$C \times 9 = 5 \times 6$$

$$C = \frac{5 \times 6}{9}$$

ดังนั้น $C = 3\frac{1}{3}$

นั่นคือ วัดอุณหภูมิเป็นองศาเซลเซียสได้ $3\frac{1}{3}$ องศา

ตอบ $3\frac{1}{3}$ องศาเซลเซียส

ตัวอย่างที่ 2 อุณหภูมิของร่างกายคนปกติอยู่ระหว่าง $37^{\circ}C - 37.7^{\circ}C$ จงหาอุณหภูมิของร่างกายคนปกติเมื่อวัดเป็นองศาฟาเรนไฮต์

วิธีทำ อุณหภูมิของร่างกายคนปกติอยู่ระหว่าง $37^{\circ}C - 37.7^{\circ}C$

ที่อุณหภูมิ $37^{\circ}C$ และจากสูตร $\frac{C}{5} = \frac{F-32}{9}$

แทน C ด้วย 37 จะได้ $\frac{37}{5} = \frac{F-32}{9}$

$$37 \times 9 = 5 \times (F-32)$$

$$F-32 = \frac{37 \times 9}{5}$$

$$F-32 = 66.6$$

$$F = 66.6 + 32$$

ดังนั้น $F = 98.6$

ที่อุณหภูมิ $37.7^{\circ}C$ และจากสูตร $\frac{C}{5} = \frac{F-32}{9}$

แทน C ด้วย 37.7 จะได้ $\frac{37.7}{5} = \frac{F-32}{9}$

$$37.7 \times 9 = 5 \times (F-32)$$

$$F - 32 = \frac{37.7 \times 9}{5}$$

$$F - 32 = 67.86$$

$$F = 67.86 + 32$$

ดังนั้น $F = 99.86$

นั่นคือ อุณหภูมิของร่างกายคนปกติอยู่ระหว่าง 98.6°F ถึง 99.86°F

ตอบ 98.6 องศาฟาเรนไฮต์ ถึง 99.86 องศาฟาเรนไฮต์

ตัวอย่างที่ 3 เมืองไอสมิตต์ (Eismitte) ในกรีนแลนด์มีอุณหภูมิต่ำกว่าจุดเยือกแข็งตลอดทั้งปี ซึ่งอากาศเย็นจะเก็บความชื้นได้น้อย ทำให้ปริมาณน้ำฝนที่ตกมีน้อย ในเดือนธันวาคม เมืองนี้มีอุณหภูมิเฉลี่ยประมาณ -45°C จงหาว่าถ้าวัดอุณหภูมิดังกล่าวเป็นองศาฟาเรนไฮต์จะได้เท่าไร

วิธีทำ เมืองไอสมิตต์มีอุณหภูมิเฉลี่ยประมาณ -45°C

จากสูตร $\frac{C}{5} = \frac{F - 32}{9}$

แทน C ด้วย -45 จะได้ $\frac{-45}{5} = \frac{F - 32}{9}$

$$\frac{-9}{1} = \frac{F - 32}{9}$$

$$(-9) \times 9 = 1 \times (F - 32)$$

$$F = -81 + 32$$

ดังนั้น $F = -49$

นั่นคือ วัดอุณหภูมิเป็นองศาฟาเรนไฮต์ได้เฉลี่ยประมาณ -49 องศา

ตอบ ประมาณ -49 องศาฟาเรนไฮต์

ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดต่อไปนี้

1. จงเปลี่ยนอุณหภูมิจากองศาเซลเซียสเป็นองศาฟาเรนไฮต์

1) 25°C	2) 115°C
3) 92.5°C	4) -32.5°C

2. จงเปลี่ยนอุณหภูมิจากองศาฟาเรนไฮต์เป็นองศาเซลเซียส

    1) $149^{\circ}F$ 2) $275^{\circ}F$

    3) $-13^{\circ}F$ 4) $-107.5^{\circ}F$

3. ความบริสุทธิ์ของทองคำมีหน่วยบอกเป็นกะรัต เช่นทองคำ 24 กะรัต เป็นทองคำบริสุทธิ์ มีสีเหลืองทอง การดูว่าทองคำนั้นบริสุทธิ์มากน้อยเพียงใดอาจดูได้จากสีและจุดหลอมเหลว เช่น ทองคำ 18 กะรัต (ทอง 18 K) เป็นทองคำผสม มีทองคำบริสุทธิ์อยู่ 75% มีสีเหลือง และมีจุดหลอมเหลวที่ 926 องศาเซลเซียส ทองคำ 14 กะรัต (ทอง 14 K) เป็นทองคำผสม มีทองคำบริสุทธิ์อยู่ 58.3% มีสีเหลืองอ่อน และมีจุดหลอมเหลว 879 องศาเซลเซียส จงหาว่าทองคำ 18 กะรัตและทองคำ 14 กะรัต มีจุดหลอมเหลวต่างกันกี่องศาฟาเรนไฮต์

4. การทำฝนเทียมในเขตอบอุ่นที่เมฆมีอุณหภูมิต่ำกว่า $0^{\circ}C$ เรียกว่าการทำฝนเมฆเย็น จะทำเมื่อยอดเมฆสูงเฉลี่ย 21,500 ฟุต จะใช้การโปรยหรือหว่านเม็ดน้ำแข็งแห้ง (dry ice) เกล็ดเล็ก ๆ ซึ่งมีอุณหภูมิ $-38^{\circ}C$ เข้าสู่ก้อนเมฆโดยตรงหรือโปรยรอบ ๆ และระหว่างช่องว่างของก้อนเมฆทางด้านเหนือลม ให้กระแสลมพัดพาสารเคมีเข้าสู่ก้อนเมฆ จงหาว่าที่อุณหภูมิ $-38^{\circ}C$ ถ้าวัดเป็นองศาฟาเรนไฮต์จะได้เท่าไร

5. ดินแดนแถบอลาสก้าและไซบีเรียเป็นเขตที่มีอากาศหนาวมากจนมีน้ำแข็งปกคลุมพื้นดิน

ตลอดปี บางครั้งอุณหภูมิลดต่ำลงถึง $-50^{\circ}F$ ทำให้สัตว์ที่อาศัยอยู่ เช่น กวางคาลิบู และกวางเรนเดียร์ ต้องย้ายถิ่น จงหาว่าที่อุณหภูมิดังกล่าวถ้าวัดเป็นองศาเซลเซียสจะได้เท่าไร

6. ปะการังจะเจริญเติบโตได้ดีในน้ำที่ใสและอุ่น จึงมักพบปะการังเฉพาะในทะเลเขตร้อน

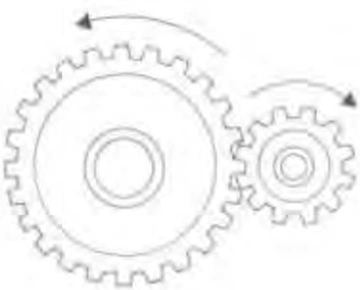
อุณหภูมิของน้ำจึงเป็นสิ่งสำคัญ ถ้าหากอุณหภูมิต่ำกว่า $68^{\circ}F$ จะยับยั้งการเจริญเติบโตของปะการัง จงหาว่าที่อุณหภูมิดังกล่าวถ้าวัดเป็นองศาเซลเซียสจะได้เท่าไร

7. ทะเลทรายซาฮาราเป็นบริเวณที่ร้อนที่สุดในโลก มีอุณหภูมิเฉลี่ยสูงกว่า $50^{\circ}C$ จงหาว่าที่อุณหภูมิดังกล่าวถ้าวัดเป็นองศาฟาเรนไฮต์จะได้เท่าไร

อัตราทดของเกียร์

รถยนต์และรถจักรยานยนต์ต้องใช้แรงมากเมื่อออกรถหรือขึ้นที่สูงชัน แต่ในขณะที่รถมีความเร็วพอสมควรอยู่แล้ว เมื่อต้องการให้รถแล่นด้วยอัตราเร็วที่สูงขึ้น จะใช้แรงน้อยลง รถยนต์และรถจักรยานยนต์จึงต้องมีเกียร์เป็นเครื่องปรับถ่ายกำลังระหว่างเครื่องยนต์กับล้อที่หมุนเพื่อให้ได้แรงตามต้องการ

อุปกรณ์หลักของเกียร์แต่ละเกียร์ประกอบด้วยเฟืองกลมสองอันขบติดกัน เฟืองอันหนึ่งเป็น*เฟืองขับ* ทำหน้าที่ขับเคลื่อนเฟืองอีกอันหนึ่งที่เป็น*เฟืองตาม* ในทิศทางตรงกันข้าม ดังรูป



ห้องเกียร์

อัตราทดของเกียร์ เป็นอัตราส่วนเปรียบเทียบจำนวนฟันของเฟืองตามต่อจำนวนฟันของเฟืองขับ

$$\text{นั่นคือ อัตราทดของเกียร์} = \frac{\text{จำนวนฟันของเฟืองตาม}}{\text{จำนวนฟันของเฟืองขับ}}$$

เกียร์ที่มีอัตราทดของเกียร์สูง เช่น เกียร์ 1 และเกียร์ 2 ในรถยนต์ เป็นเกียร์ที่ให้แรงมาก ชาวบ้านมักเรียกว่าเกียร์ต่ำ และเกียร์ที่มีอัตราทดของเกียร์ต่ำ เช่น เกียร์ 4 และเกียร์ 5 ในรถยนต์ เป็นเกียร์ที่ให้แรงน้อย ชาวบ้านมักเรียกว่าเกียร์สูง

จากตัวอย่างในรูปข้างต้น จะพบว่า เฟืองขับมีฟัน 12 ซี่ และเฟืองตามมีฟัน 24 ซี่

นั่นคือ อัตราทดของเกียร์ $= \frac{24}{12}$ หรือ 2 : 1

เรานิยมเขียนอัตราทดของเกียร์ในรูปทศนิยม อัตราทดของเกียร์ 2 : 1 ข้างต้น จึงอาจเขียนได้เป็น 2.0 ในที่นี้จะเห็นได้ชัดเจนว่า เมื่อเฟืองขับหมุนไป 1 รอบ เฟืองตามจะหมุนไปเพียง $\frac{1}{2}$ รอบ หรือต้องให้เฟืองขับหมุนไป 2 รอบ เฟืองตามจึงจะหมุนได้ 1 รอบ

ตัวอย่าง เกียร์ชุดหนึ่งเฟืองขับมีฟัน 20 ซี่ เฟืองตามมีฟัน 10 ซี่ จงหาอัตราทดของเกียร์

วิธีทำ

$$\text{อัตราทดของเกียร์} = \frac{\text{จำนวนฟันของเฟืองตาม}}{\text{จำนวนฟันของเฟืองขับ}}$$

$$= \frac{10}{20} = \frac{1}{2} \text{ หรือ } 0.5$$

ตอบ 0.5

ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

1. ถ้าเกียร์ชุดหนึ่งมีอัตราทดของเกียร์เป็น 1 จงอธิบายถึงความสัมพันธ์ระหว่างรอบการหมุนของเฟืองขับและเฟืองตาม
2. จงหาอัตราทดของเกียร์ที่มีจำนวนฟันของเฟืองต่อไปนี้
   1) จำนวนฟันของเฟืองตาม 35
      จำนวนฟันของเฟืองขับ 24
   2) จำนวนฟันของเฟืองตาม 42
      จำนวนฟันของเฟืองขับ 25
   3) จำนวนฟันของเฟืองตาม 36
      จำนวนฟันของเฟืองขับ 45

4) จำนวนฟันของเฟืองตาม 48

จำนวนฟันของเฟืองขับ 32

3. จงหาจำนวนฟันของเฟืองขับของเกียร์แต่ละชุดดังต่อไปนี้

1) อัตราทดของเกียร์เป็น 1.25 และเฟืองตามมีฟัน 50 ซี่

2) อัตราทดของเกียร์เป็น 0.925 และเฟืองตามมีฟัน 37 ซี่

4. จงหาจำนวนฟันของเฟืองตามของเกียร์แต่ละชุดดังต่อไปนี้

1) อัตราทดของเกียร์เป็น 2.45 และเฟืองขับมีฟัน 20 ซี่

2) อัตราทดของเกียร์เป็น 0.725 และเฟืองขับมีฟัน 40 ซี่

5. ถ้าต้องการเกียร์ที่มีอัตราทดของเกียร์เป็น 1.8 จงหาว่าต้องใช้เฟืองตามและเฟืองขับที่มีจำนวนฟัน เฟืองละกี่ซี่ (ให้ตอบมา 2 คำตอบและแสดงการตรวจสอบคำตอบด้วย)

มาตราส่วน

นักเรียนเคยทราบมาแล้วว่า

มาตราส่วนเป็นอัตราส่วนที่แสดงการเปรียบเทียบระยะทางในแผนที่หรือในแผนผังกับระยะทางจริง ซึ่งอาจเป็นการย่อ การขยายหรือคงขนาดเดิมก็ได้ ดังตัวอย่าง

มาตราส่วนในแผนที่ ที่ต้องการแสดงว่าระยะทางในแผนที่ 1 เซนติเมตร แทนระยะทางจริง 5 กิโลเมตร อาจเขียนเป็น $1 : 500{,}000$ หรือ $\frac{1}{500{,}000}$ หรือ 0 5 10 15 กม.

บางครั้งนักเรียนอาจจะพบมาตราส่วนที่ใช้เขียนแผนผัง ที่ระยะทางในแผนผังและระยะทางจริงมีหน่วยต่างกัน เช่น เขียนว่าแผนผังของห้องหนึ่งเป็น 1 ซม. : 1.5 เมตร

ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

1. ถ้าระยะทางในแผนที่ยาว 1.5 เซนติเมตร และใช้มาตราส่วน $1 : 500{,}000$ แล้วระยะทางจริงยาวกี่กิโลเมตร
2. ระยะทางจริงยาว 350 กิโลเมตร ถ้าใช้มาตราส่วน $1 : 500{,}000$ ในแผนที่ แล้วระยะทางในแผนที่ยาวกี่เซนติเมตร

3. ถ้าระยะทางในแผนที่ยาว 0.80 เซนติเมตร และใช้มาตราส่วน $\frac{1}{1,000,000}$ แล้วระยะทางจริงยาวกี่กิโลเมตร
4. ถนนสายหนึ่งยาว 152 กิโลเมตร ถ้าใช้มาตราส่วน $\frac{1}{1,000,000}$ ในแผนที่ แล้วถนนในแผนที่ยาวกี่เซนติเมตร
5. ถ้าระยะทางในแผนที่ยาว 5 เซนติเมตร และใช้มาตราส่วน 0 5 10 15 กม. แล้วระยะทางจริงยาวกี่กิโลเมตร
6. เมืองสองเมืองอยู่ห่างกัน 1,080 กิโลเมตร ถ้าใช้มาตราส่วน 0 15 30 45 กม. ในแผนที่ แล้วระยะทางในแผนที่ยาวกี่เซนติเมตร
7. แผนผังสนามกีฬาของโรงเรียนแห่งหนึ่งใช้มาตราส่วน 0.5 ซม. : 1 เมตร ถ้าในแผนผังมีความยาว 12 เซนติเมตร แล้วสนามกีฬามีความยาวกี่เมตร
8. อาคารแห่งหนึ่งมีความยาว 24 เมตร และความกว้าง 15 เมตร ถ้าในแผนผังใช้มาตราส่วน 1 ซม. : 3 เมตร แล้วความยาวและความกว้างในแผนผังต่างกันกี่เซนติเมตร

เมื่อใช้เครื่องถ่ายเอกสารหรือคอมพิวเตอร์ นักเรียนอาจพบมาตราส่วนย่อ หรือมาตราส่วนขยายในรูปของร้อยละ ซึ่งเราจะพบ เช่น ย่อ 75% หรือขยาย 120%

ย่อส่วนของเส้นตรง 75% หมายถึงย่อส่วนของเส้นตรงให้มีความยาว เป็น $\frac{75}{100}$ เท่าของความยาวของส่วนของเส้นตรงต้นแบบ หรือกล่าวได้ว่าย่อส่วนของเส้นตรงโดยใช้มาตราส่วน 75 : 100

ขยายส่วนของเส้นตรง 120% หมายถึงขยายส่วนของเส้นตรงให้มีความยาว เป็น $\frac{120}{100}$ เท่าของความยาวของส่วนของเส้นตรงต้นแบบ หรือกล่าวได้ว่าขยายส่วนของเส้นตรงโดยใช้มาตราส่วน 120 : 100

ตัวอย่าง เมื่อกำหนดให้ $\overline{AB}$ ยาว 6 เซนติเมตร เป็นรูปต้นแบบ ถ้าต้องการรูปย่อ 75% และรูปขยาย 120% ของ $\overline{AB}$ จะได้ดังรูป

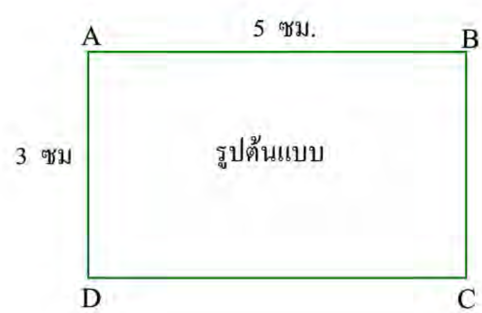
จากรูป จะได้ $\overline{CD}$ ยาว 4.5 เซนติเมตร เป็นรูปย่อ 75% ของ $\overline{AB}$ และ

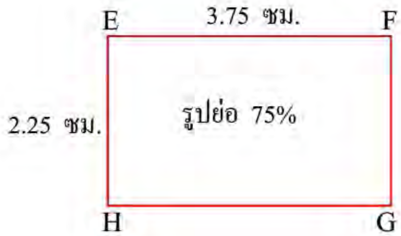
ได้ $\overline{EF}$ ยาว 7.2 เซนติเมตร เป็นรูปขยาย 120% ของ $\overline{AB}$

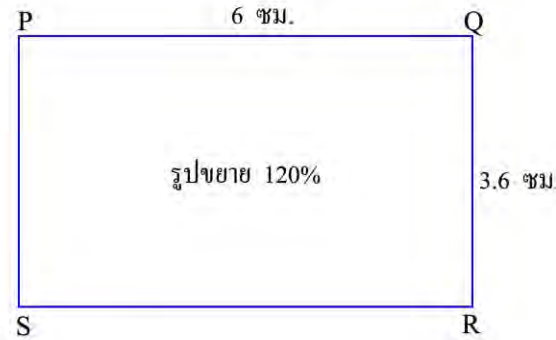
ย่อรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า 75% หมายถึงย่อรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าให้มีความยาวเป็น $\frac{75}{100}$ เท่าของความยาวของรูปต้นแบบ และความกว้างเป็น $\frac{75}{100}$ เท่าของความกว้างของรูปต้นแบบ หรือกล่าวได้ว่าย่อรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าทั้งความยาวและความกว้างโดยใช้มาตราส่วน 75 : 100

ขยายรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า 120% หมายถึงขยายรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าให้มีความยาวเป็น $\frac{120}{100}$ เท่าของความยาวของรูปต้นแบบ และความกว้างเป็น $\frac{120}{100}$ เท่าของความกว้างของรูปต้นแบบ หรือกล่าวได้ว่าขยายรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าทั้งความยาวและความกว้างโดยใช้มาตราส่วน 120 : 100

ตัวอย่าง เมื่อกำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า รูปต้นแบบมีความกว้าง 3 เซนติเมตร และความยาว 5 เซนติเมตร ถ้าต้องการรูปย่อ 75% และรูปขยาย 120% จะได้ EFGH และ PQRS ที่เป็นรูปย่อ 75% และรูปขยาย 120% ของ ABCD ตามลำดับ ดังรูป







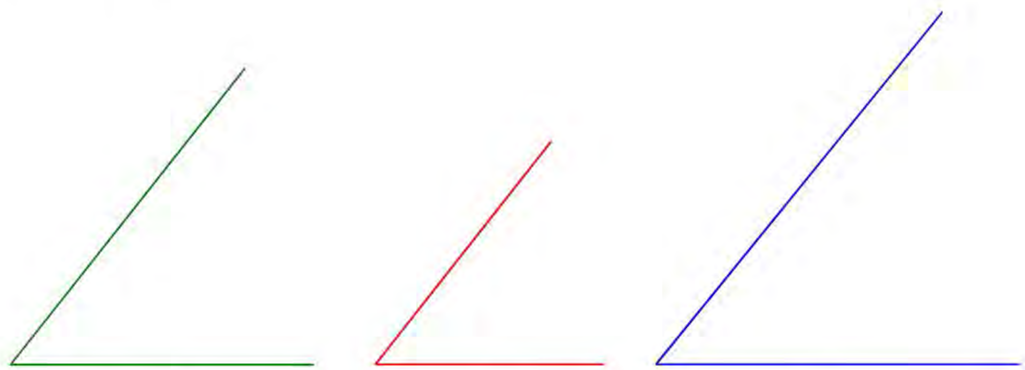
จากตัวอย่างดังกล่าวข้างต้น จงตอบคำถามต่อไปนี้

1. ถ้าขยายรูปส่วนของเส้นตรงยาว 8 เซนติเมตร เป็นรูปขยาย 150% รูปขยายจะมีความยาวเท่าไร
2. ถ้าย่อรูปส่วนของเส้นตรงยาว 20 เซนติเมตร เป็นรูปย่อ 75% รูปย่อจะมีความยาวเท่าไร
3. ถ้าขยายรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความยาว 9 เซนติเมตร และความกว้าง 5 เซนติเมตร เป็นรูปขยาย 120% รูปขยายมีความยาวและความกว้างเท่าไร
4. ถ้าย่อรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความยาว 15 เซนติเมตร และความกว้าง 12 เซนติเมตร เป็นรูปย่อ 50% รูปย่อมีความยาวและความกว้างเท่าไร
5. ถ้าขยายรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีด้านประกอบมุมยอดยาว 8 เซนติเมตร และฐานยาว 5 เซนติเมตร เป็นรูปขยาย 120% รูปขยายมีด้านประกอบมุมยอดและฐานยาวเท่าไร

นักเรียนคิดว่า ถ้าขยายรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปหนึ่ง เป็นรูปขยาย 150% แล้วพื้นที่ของรูปขยายจะเป็น 150% ของพื้นที่ของรูปต้นแบบหรือไม่ เพราะเหตุใด

ย่อมุมและขยายมุม

กำหนดให้รูป ก เป็นรูปต้นแบบ รูป ข เป็นรูปย่อ 75% ของรูป ก และรูป ค เป็นรูปขยาย 120% ของรูป ก ดังนี้



รูป ก รูปต้นแบบ | รูป ข รูปย่อ 75% | รูป ค รูปขยาย 120%

จากรูปที่กำหนด ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้

1. ให้นักเรียนใช้วงเวียนตรวจสอบว่า ขนาดของมุมในรูป ก รูป ข และรูป ค มีการเปลี่ยนแปลงหรือไม่
2. นักเรียนคิดว่าการย่อรูปมุมและการขยายรูปมุมจะทำให้ขนาดของมุมเปลี่ยนแปลงหรือไม่
3. นักเรียนคิดว่ารูปย่อหรือรูปขยายของรูปเหลี่ยมใด ๆ ขนาดของมุมภายในแต่ละมุมมีการเปลี่ยนแปลงหรือไม่ เพราะเหตุใด

ไม้บรรทัดมาตราส่วน

นักเรียนเคยทราบมาแล้วว่า มาตราส่วนเป็นอัตราส่วนที่แสดงการเปรียบเทียบระยะทางในแผนที่หรือในแผนผังกับระยะทางจริง ซึ่งอาจเป็นการย่อ การขยายหรือคงขนาดเดิมก็ได้ ในการย่อส่วน ช่างเขียนแบบ ช่างไม้หรือช่างก่อสร้าง ใช้*ไม้บรรทัดมาตราส่วน*ในการเขียนแบบและในการอ่านแบบ ไม้บรรทัดมาตราส่วนมีลักษณะเป็นปริซึมฐานคล้ายรูปสามเหลี่ยม มีหน้าสามหน้าประกบกัน แต่ละหน้ามีแถบสีแบ่งหน้าไม้บรรทัดออกเป็น 2 ซีก แต่ละซีกมีสเกลหรือมาตราส่วนอยู่หนึ่งมาตราส่วน ดังนั้นแต่ละหน้าจะมีมาตราส่วน 2 มาตราส่วนที่ต่างกัน ทั้งสามหน้าของไม้บรรทัดมาตราส่วนจะมีมาตราส่วนที่ต่างกันทั้งหมด 6 มาตราส่วน เช่น มาตราส่วน 1 : 20, 1 : 25, 1 : 50, 1 : 75, 1 : 100 และ 1 : 125 ไม้บรรทัดมาตราส่วนแต่ละอันจะมีมาตราส่วนต่าง ๆ กัน เพื่อให้ผู้ใช้งานเลือกใช้ได้ตามลักษณะของงาน

ตัวอย่างมาตราส่วนบนหน้าไม้บรรทัดมาตราส่วนหน้าหนึ่ง เป็นดังนี้

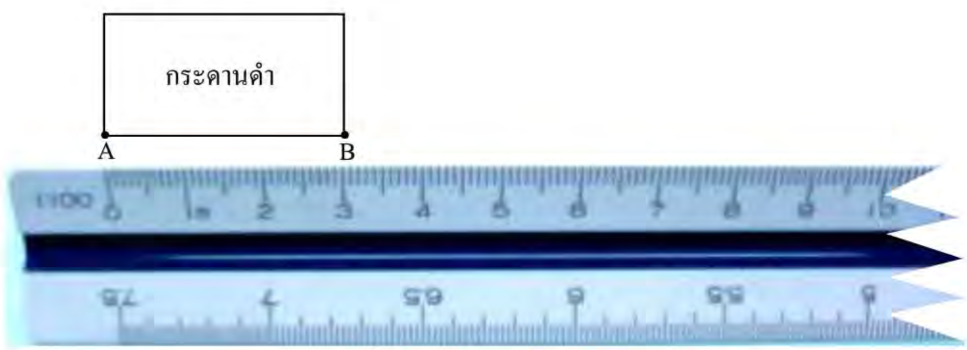
ภาพถ่ายให้เห็นมาตราส่วน 1 : 25

ภาพถ่ายให้เห็นมาตราส่วน 1 : 100

จากรูป จะเห็นว่าไม้บรรทัดมาตราส่วนแถบสีน้ำเงินจากตัวอย่างนี้มี 2 มาตราส่วน คือ 1 : 25 และ 1 : 100 อยู่ในหน้าเดียวกัน

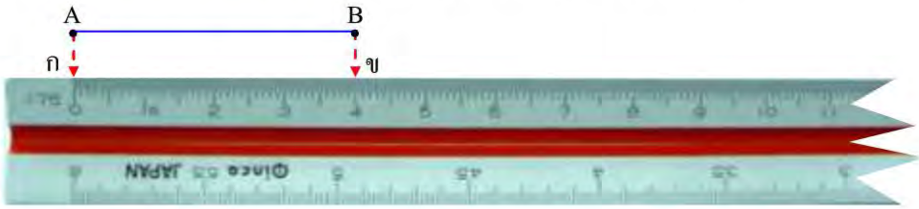
เราใช้ไม้บรรทัดมาตราส่วนในการอ่านแบบที่ย่อส่วนแล้ว หรือเขียนแบบที่ย่อส่วนจากระยะทางจริงโดยใช้มาตราส่วนต่าง ๆ ดังตัวอย่าง

ตัวอย่าง ถ้ากำหนดให้ $\overline{AB}$ ยาว 3 เซนติเมตร เป็นระยะทางในแผนผังที่แทนความยาวจริงของกระดานดำ เมื่อใช้ไม้บรรทัดมาตราส่วนที่มีมาตราส่วน 1 : 100 ไปวัดความยาวของ $\overline{AB}$ เพื่อเทียบหาความยาวจริงของกระดานดำ จะอ่านความยาวจากไม้บรรทัดมาตราส่วนได้เป็น 3 เมตร ดังรูป



ในทางกลับกัน เมื่อต้องการเขียนแผนที่หรือแผนผังเพื่อแสดงความยาวจริงของสิ่งที่วัดได้ นักเรียนก็สามารถใช้ไม้บรรทัดมาตราส่วนเป็นเครื่องมือในการเขียนรูปย่อที่สามารถอ่านความยาวได้ตามความเป็นจริง เช่น

ต้องการเขียนแผนผังแสดงความยาวของห้องนั่งเล่น ซึ่งยาว 4 เมตร เมื่อเขียนเป็นแผนผังและใช้มาตราส่วน 1 : 75 มาเขียนแสดงจะได้ภาพดังนี้



จากรูป จะได้ AB แทนความยาวของห้องนั่งเล่นตามต้องการ

จากตัวอย่างนี้นักเรียนจะเห็นว่าไม้บรรทัดมาตราส่วนเป็นอุปกรณ์ หรือเครื่องมือที่สำคัญของผู้ที่เกี่ยวข้องกับงานทางด้านการเขียนแบบ การอ่านแบบและการก่อสร้าง เช่น ช่างเขียนแบบ ช่างสำรวจ ช่างก่อสร้าง ช่างยนต์ ฯลฯ

ทำได้หรือไม่

ให้นักเรียนใช้ภาพของมาตราส่วนบนไม้บรรทัดมาตราส่วนที่กำหนดให้ข้างล่างนี้ ในการทำแบบฝึกหัดต่อไปนี้

1 : 20

1 : 75

1 : 25

1 : 100

1 : 50

1 : 125

1. จงใช้วงเวียนตรวจสอบความยาวของส่วนของเส้นตรงในแต่ละข้อต่อไปนี้ นำไปเทียบกับภาพของมาตราส่วนที่กำหนดให้ แล้วเขียนคำตอบที่อ่านได้จากภาพ เติมลงในช่องว่าง

   1) 

   มาตราส่วน 1 : 20 ระยะทางจริง ....

   2) 

   มาตราส่วน 1 : 50 ระยะทางจริง ....

   3) 

   มาตราส่วน 1 : 75 ระยะทางจริง ....

   4) 

   มาตราส่วน 1 : 100 ระยะทางจริง.........

   5) 

   มาตราส่วน 1 : 125 ระยะทางจริง.........

2. จงเขียนส่วนของเส้นตรงแทนระยะทางจริงที่กำหนดให้ต่อไปนี้
   1) 1.5 เมตร โดยใช้มาตราส่วน 1 : 20
   2) 3.5 เมตร โดยใช้มาตราส่วน 1 : 50
   3) 6 เมตร โดยใช้มาตราส่วน 1 : 75
   4) 4.5 เมตร โดยใช้มาตราส่วน 1 : 100

3. ให้นักเรียนเขียนแผนผังของห้องเรียนของนักเรียน โดยใช้มาตราส่วน 1 : 75

แบบจำลอง

นักเรียนเคยถ่ายรูป อัดสำเนาเอกสารและอาจมีของที่ระลึกหรือของสะสมที่เป็นแบบจำลองต่าง ๆ เช่น พระบรมรูปรัชกาลที่ 5 รถยนต์และเครื่องบิน เป็นต้น บางครั้งเมื่อนักเรียนไปทัศนศึกษาตามสถานที่ต่าง ๆ เช่น พิพิธภัณฑ์หุ่นขี้ผึ้งไทย จังหวัดนครปฐม มีหุ่นขี้ผึ้งที่มองดูเหมือนคนจริง ๆ นั่งอ่านหนังสือพิมพ์ นั่งเล่นหมากรุก และที่เมืองจำลอง จังหวัดชลบุรี มีแบบจำลองโบราณสถานวัตถุของไทย 80 แห่ง ตลอดจนสิ่งก่อสร้างที่มีชื่อเสียงต่าง ๆ ของโลก ซึ่งมองดูเหมือนจริง แต่มีขนาดเล็กกว่าหลายเท่า

ปกติการจำลองมีหลักการว่าต้องให้คล้ายของเดิม รูปร่างต้องเหมือนเดิม แต่ขนาดอาจเล็กลง ใหญ่ขึ้นหรือคงเดิม ตามมาตราส่วนที่ผู้สร้างแบบจำลองต้องการ เช่น

แบบจำลองโบราณสถานวัตถุของไทย ที่เมืองจำลอง จังหวัดชลบุรี ใช้มาตราส่วน 1 : 25 หมายถึง ของจริงยาว 25 หน่วย ต้องย่อส่วนให้สั้นลงเป็น 1 หน่วย

อนุสาวรีย์ของพระบาทสมเด็จพระจุลจอมเกล้าเจ้าอยู่หัว ที่จังหวัดสมุทรปราการ ใช้มาตราส่วน 2.5 : 1 หมายถึง สร้างพระบรมรูปให้มีขนาดโตขึ้นเป็นสองเท่าครึ่งของพระองค์จริง

หุ่นขี้ผึ้งที่พิพิธภัณฑ์ขี้ผึ้งไทย จังหวัดนครปฐม ใช้มาตราส่วน 1 : 1 หมายถึง ของจริง 1 ส่วน ต้องสร้างตัวหุ่น 1 ส่วน ซึ่งเป็นแบบจำลองที่ต้องการให้เหมือนของจริง

ในการสร้างแบบจำลอง มาตราส่วนที่ใช้ในการจำลอง เป็นอัตราส่วนของระยะทางบนแบบจำลองต่อระยะทางจริงที่สมนัยกัน

การจำลองให้เหมือนของจริงแต่ขนาดเล็กลงหรือใหญ่ขึ้นนั้น ผู้สร้างแบบจำลองจะต้องใช้มาตราส่วนย่อ หรือมาตราส่วนขยายในทุก ๆ ระยะระหว่างสองจุดใด ๆ บนของจริง ด้วยมาตราส่วนย่อหรือมาตราส่วนขยายอย่างเดียวกัน ถ้าไม่ได้ใช้มาตราส่วนเดียวกันในทุก ๆ ระยะแล้ว อาจจะได้แบบจำลองที่มีรูปร่างและส่วนสัดต่างไปจากของจริง

ตัวอย่างที่ 1 รถยนต์คันหนึ่งมีความยาว 3.20 เมตร ความกว้าง 1.25 เมตร และความสูง 1.50 เมตร ถ้าต้องการจำลองรถยนต์คันนี้ให้มีความสูง 6.50 เซนติเมตร จงหาความยาวและความกว้างโดยประมาณของรถยนต์จำลอง

วิธีทำ ต้องการจำลองรถยนต์ให้มีความสูง 6.5 เซนติเมตร จากความสูงจริง 1.50 เมตร

จะได้ อัตราส่วนของความสูงจำลองต่อความสูงจริง เป็น $6.50 : 150$

$\approx \quad 1 : 23.08$

ดังนั้น ใช้มาตราส่วนในการจำลองโดยประมาณ เป็น $1 : 23.08$

เนื่องจาก รถยนต์มีความยาว 3.20 เมตร หรือ 320 เซนติเมตร

จะได้ รถยนต์จำลองยาวประมาณ $\frac{320}{23.08} \approx 13.86$ เซนติเมตร

เนื่องจาก รถยนต์มีความกว้าง 1.25 เมตร หรือ 125 เซนติเมตร

จะได้ รถยนต์จำลองกว้างประมาณ $\frac{125}{23.08} \approx 5.42$ เซนติเมตร

ตอบ ความยาวประมาณ 13.86 เซนติเมตร
ความกว้างประมาณ 5.42 เซนติเมตร

ตัวอย่างที่ 2 เรือสุพรรณหงส์จำลองลำหนึ่งใช้มาตราส่วนประมาณ 1 : 26.37 เรือลำนี้มีความยาวของลำเรือ 175 เซนติเมตร ความกว้างกลางลำ 12 เซนติเมตร และความลึกกลางลำ 3.6 เซนติเมตร จงหาขนาดจริงโดยประมาณของเรือลำนี้

วิธีทำ กำหนดให้ เรือสุพรรณหงส์จำลองใช้มาตราส่วนประมาณ 1 : 26.37

เนื่องจาก เรือมีความยาว 175 เซนติเมตร

จะได้ อัตราส่วนของความยาวจำลองต่อความยาวจริง ประมาณ

$$1 \times 175 : 26.37 \times 175 \quad = \quad 175 : 4{,}614.75$$

ดังนั้น เรือจริงมีความยาวประมาณ 4,614.75 เซนติเมตร

หรือประมาณ 46.15 เมตร

เนื่องจาก เรือมีความกว้างกลางลำ 12 เซนติเมตร

จะได้ อัตราส่วนของความกว้างกลางลำจำลองต่อความกว้างกลางลำจริง

ประมาณ $1 \times 12 : 26.37 \times 12 \quad = \quad 12 : 316.44$

ดังนั้น เรือจริงมีความกว้างกลางลำประมาณ 316.44 เซนติเมตร

หรือประมาณ 3.16 เมตร

เนื่องจาก เรือมีความลึกกลางลำ 3.6 เซนติเมตร

จะได้ อัตราส่วนของความลึกกลางลำจำลองต่อความลึกกลางลำจริง ประมาณ

$$1 \times 3.6 : 26.37 \times 3.6 \;=\; 3.6 : 94.932$$

ดังนั้น เรือจริงมีความลึกกลางลำประมาณ 94.932 เซนติเมตร

หรือประมาณ 0.95 เมตร

ตอบ
- ความยาวของลำเรือประมาณ 46.15 เมตร
- ความกว้างกลางลำประมาณ 3.16 เมตร
- ความลึกกลางลำประมาณ 0.95 เมตร

ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดต่อไปนี้

1. ในสารานุกรมเกี่ยวกับนก ใต้ภาพนกชนิดหนึ่งที่เขียนมาตราส่วนกำกับ เป็น 1 : 4 ถ้าวัดความยาวของนกจากภาพได้ $1\frac{1}{2}$ นิ้ว จงหาความยาวของนก
2. ภาพวาดของผึ้งชนิดหนึ่งกำหนดมาตราส่วนไว้ 2 : 1 ถ้าวัดความยาวของผึ้งจากภาพได้ 4.5 เซนติเมตร จงหาความยาวของผึ้ง
3. เรือกระแชงลำหนึ่งมีความยาวตลอดลำ 17 เมตร ความกว้างกลางลำ 5.50 เมตร และความลึกกลางลำ 1.75 เมตร ถ้าต้องการสร้างเรือกระแชงจำลอง โดยใช้มาตราส่วน 1 : 20 จงหาขนาดของเรือกระแชงจำลอง
4. บ้านหลังหนึ่งมีความยาว 15 เมตร ความกว้าง 10 เมตร และความสูง 6 เมตร ถ้าต้องการสร้างบ้านจำลองหลังนี้ให้มีความสูง 6 เซนติเมตร จงหาขนาดของบ้านจำลอง
5. เรืออสุรวายุภักษ์ เป็นเรือในกระบวนพยุหยาตรา มีโขนเรือเป็นรูปครึ่งยักษ์ครึ่งนก เรือลำนี้มีความยาว 31 เมตร ความกว้าง 2.03 เมตร และความลึก 62 เซนติเมตร ถ้าต้องการสร้างเรือจำลองให้มีความยาว 1.24 เมตร จงหาขนาดของเรืออสุรวายุภักษ์จำลอง

6. เรือพาลีรั้งทวีป เป็นเรือในกระบวนเรือพยุหยาตรา มีโขนเรือเป็นรูปลิงจากวรรณคดีเรื่อง

รามเกียรติ์ เรือลำนี้มีความยาว 29.03 เมตร ความกว้าง 2 เมตรและ ความลึก 63 เซนติเมตร ถ้าต้องการสร้างเรือจำลองให้มีความกว้าง 10 เซนติเมตร จงหาขนาดของเรือพาลีรั้งทวีปจำลอง

7. รถยนต์โบราณจำลองคันหนึ่งมีความยาว 24 เซนติเมตร ความกว้าง 10 เซนติเมตร และ ความสูง 12 เซนติเมตร ถ้าใช้มาตราส่วน 1 : 12.50 ในการจำลอง จงหาขนาดของ รถยนต์โบราณคันนี้
8. เรือจำลองลำหนึ่งมีความยาวตลอดลำ 81 เซนติเมตร ความกว้างกลางลำ 7.2 เซนติเมตร และความลึกกลางลำ 9 เซนติเมตร เมื่อเรือจริงมีความยาว 27 เมตร จงหาความกว้างและ ความลึกจริงของเรือ
9. เรือจำลองลำหนึ่งสร้างจากเรือจริงซึ่งมีความยาวตลอดลำ 17.50 เมตร ความกว้างกลางลำ 2.60 เมตร และความลึกกลางลำ 2.50 เมตร โดยเรือจำลองมีความยาวตลอดลำ 1.05 เมตร ความกว้างกลางลำ 0.20 เมตร และความลึกกลางลำ 0.15 เมตร จงหาว่าเรือจำลองนี้มี ส่วนสัดเหมือนของจริงหรือไม่ เพราะเหตุใด

เรือพระที่นั่งสุพรรณหงส์

สุวรรณหงส์ทรงภู่ห้อย งามชดช้อยลอยหลังสินธุ์
เพียงหงส์ทรงพรหมินทร์ ลินลาศเลื่อนเตือนตาชม

เรือพระที่นั่งสุพรรณหงส์เป็นเรือที่แกะสลักโขนเรือเป็นรูปหงส์ เรือพระที่นั่งสุพรรณหงส์ลำปัจจุบันเป็นเรือที่พระบาทสมเด็จพระจุลจอมเกล้าเจ้าอยู่หัวทรงโปรดเกล้าให้สร้างขึ้นใหม่เพื่อทดแทนลำเดิมที่ชำรุดยากต่อการบูรณะซ่อมแซม คนไทยนิยมมอบเรือพระที่นั่งสุพรรณหงส์จำลอง แก่ผู้นำหรือแขกผู้มีเกียรติชาวต่างชาติเพื่อเป็นที่ระลึก

บทที่ 4
การประยุกต์ของการแปลงทางเรขาคณิต

การแปลงทางเรขาคณิตที่นักเรียนได้เรียนมาแล้ว เป็นการศึกษาเกี่ยวกับการเปลี่ยนตำแหน่ง หรือย้ายตำแหน่งของรูปเรขาคณิตที่เป็น *รูปต้นแบบ* และรูปที่ได้จากการแปลงเรียกว่า *ภาพ* ในบทนี้เป็นการทบทวนสมบัติที่สำคัญของการแปลงเหล่านั้น ซึ่งได้แก่ *การเลื่อนขนาน การสะท้อน และการหมุน* จากนั้นนักเรียนจะได้เห็นตัวอย่างการประยุกต์ใช้การแปลงเหล่านี้ในการสร้างสรรค์งานศิลปะ ออกแบบ หรือแก้ปัญหา

4.1 การประยุกต์ของการเลื่อนขนาน

ให้นักเรียนพิจารณาว่ารูปในข้อใดต่อไปนี้ มีความเกี่ยวข้องกับการเลื่อนขนาน

รูป ก

รูป ข

รูป ค

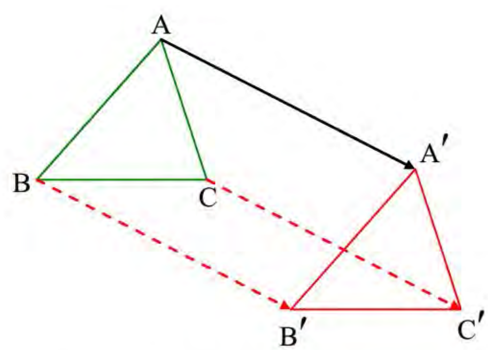
รูป ง

การเลื่อนขนาน มีสมบัติที่สำคัญ ดังนี้

1. *สามารถเลื่อนรูปต้นแบบทับภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานได้สนิท โดยไม่ต้องพลิกรูป*
2. *ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดที่สมนัยกันแต่ละคู่จะขนานกันและยาวเท่ากันทุกเส้น*
3. *ส่วนของเส้นตรงบนรูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานของส่วนของเส้นตรงนั้นจะขนานกันและยาวเท่ากัน*

จากรูปข้างต้น รูป ข และรูป ง มีความเกี่ยวข้องกับการเลื่อนขนาน เช่น รูป ง เมื่อกำหนดให้รูปวงกลมรูปใดรูปหนึ่งเป็นรูปต้นแบบ จะได้ว่า รูปวงกลมรูปอื่นเป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานรูปต้นแบบ

ตัวอย่าง กำหนดให้ $\Delta A'B'C'$ เป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนาน ΔABC ด้วย $\overrightarrow{AA'}$ ดังรูป



จากสิ่งที่กำหนดให้ จะได้ดังนี้

1. สามารถเลื่อน ΔABC ไปทับ $\Delta A'B'C'$ ได้สนิท โดยไม่ต้องพลิกรูป
2. $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ และ $\overline{CC'}$ ขนานกันและ $AA' = BB' = CC'$
3. $\overline{AB}$ และ $\overline{A'B'}$ ขนานกันและยาวเท่ากัน
   $\overline{BC}$ และ $\overline{B'C'}$ ขนานกันและยาวเท่ากัน
   $\overline{CA}$ และ $\overline{C'A'}$ ขนานกันและยาวเท่ากัน

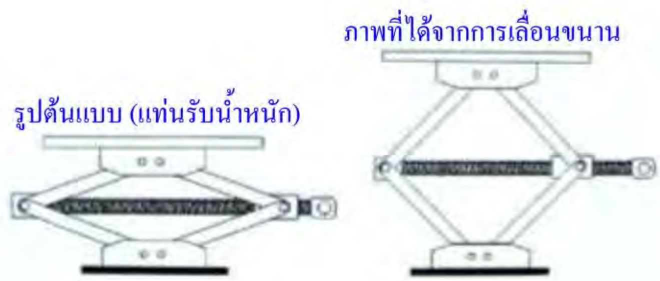
ตัวอย่างการประยุกต์ของการเลื่อนขนาน

ในชีวิตประจำวันนักเรียนอาจเคยเห็นการใช้การเลื่อนขนานมาบ้างแล้ว เช่น เตียงคนไข้แบบปรับระดับ โต๊ะรองรีดผ้า แม่แรงยกรถ ประตูเหล็ก เครื่องทำกุญแจสำรอง เป็นต้น

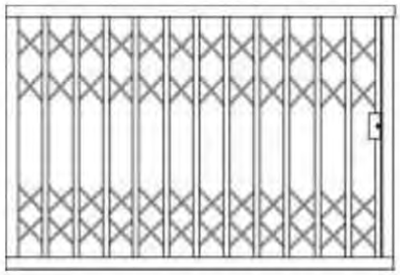
เตียงปรับระดับเป็นอุปกรณ์ทางการแพทย์ที่ใช้สำหรับยกระดับคนไข้ให้สูงขึ้นหรือต่ำลง เพื่อความสะดวกในการทำงานของแพทย์ หรือเพื่อการเคลื่อนย้ายคนไข้ ขณะที่ปรับเตียงส่วนบนของเตียงที่รองรับตัวคนไข้จะขนานกับฐานของเตียงตลอดเวลา ดังรูป

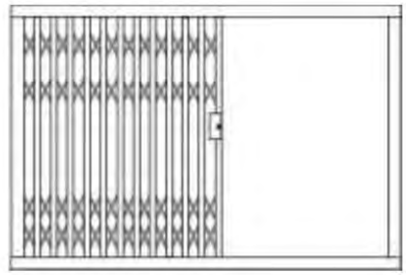
ถ้านักเรียนสังเกตโต๊ะรองรีดผ้า จะเห็นว่าการปรับให้ระดับของโต๊ะรองรีดผ้าอยู่ที่ตำแหน่งต่าง ๆ นั้นเป็นตัวอย่างของการใช้การเลื่อนขนานเช่นเดียวกัน

แม่แรงยกรถเป็นเครื่องมืออีกอย่างหนึ่งที่ใช้การเลื่อนขนานกับส่วนที่ดันรถให้สูงขึ้น

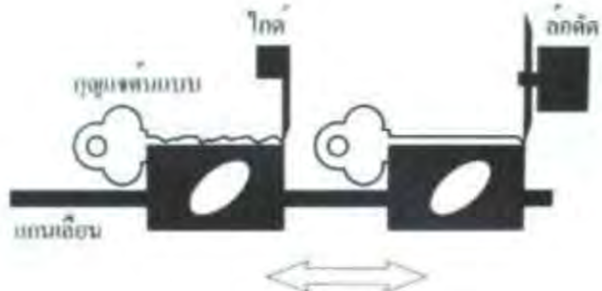


การเปิดปิดประตูเหล็กยืดที่เราเห็นติดตั้งตามตึกแถว ก็เป็นการใช้การเลื่อนขนานเช่นเดียวกัน





เครื่องทำลูกกุญแจสำรองมีตัวนำหรือไกด์เลื่อนไปตามโครงร่างของลูกกุญแจต้นแบบที่ต้องการทำสำเนา ล้อตัดจะตัดลูกกุญแจตัวใหม่ไปตามการเคลื่อนที่ของไกด์ ซึ่งลูกกุญแจตัวใหม่จะเหมือนลูกกุญแจต้นแบบทุกประการ การถ่ายโอนโครงร่างของลูกกุญแจต้นแบบจากไกด์ไปยังล้อตัด เป็นอีกตัวอย่างหนึ่งของการนำการแปลงแบบเลื่อนขนานไปใช้งาน



กล่องใส่เครื่องมือและชั้นวางของบางแบบ ใช้การเลื่อนขนานในการออกแบบการเลื่อนชั้นใส่ของให้แต่ละชั้นเหลื่อมกัน เพื่อสะดวกต่อการหยิบของและสะดวกต่อการซ้อนชั้นเก็บเป็นกล่อง ดังรูป

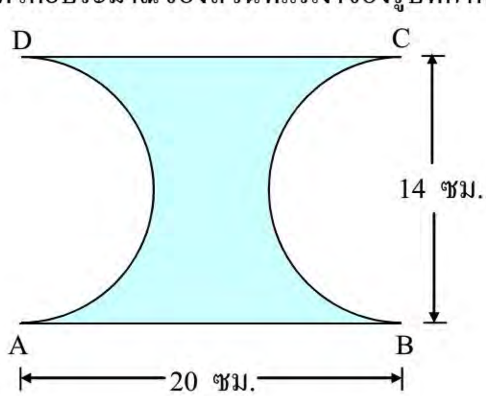
นอกจากจะใช้การเลื่อนขนานในการทำอุปกรณ์และเครื่องมือต่าง ๆ แล้ว เรายังสามารถนำการเลื่อนขนานมาใช้กับงานออกแบบลวดลายต่าง ๆ ในการออกแบบลวดลายจะสร้างรูปต้นแบบไว้หนึ่งรูป แล้วใช้รูปต้นแบบนั้นเป็นแบบ ทำให้เกิดภาพซ้ำ ๆ กันตามแนวเส้นขนานในทิศทางที่ต้องการ ดังเช่น ลายผ้า และลวดลายเหล็กดัด ต่อไปนี้

ลายผ้า

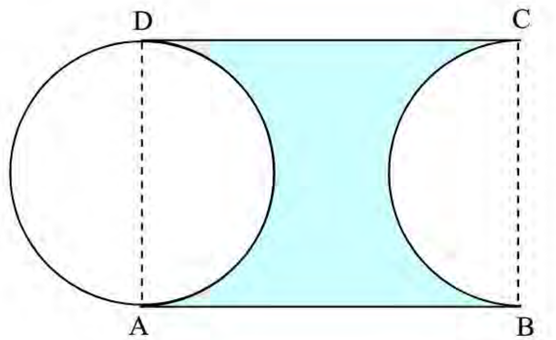
ลวดลายเหล็กดัด

นอกจากนี้เราสามารถนำความรู้เรื่องการเลื่อนขนานมาใช้แก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้อีกด้วย เช่น การหาพื้นที่ การพิสูจน์ทางเรขาคณิต การหาระยะทางที่สั้นที่สุด ดังตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 1 จงหาพื้นที่โดยประมาณของส่วนที่แรเงาของรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้



แนวคิด จากการคาดคะเน เมื่อลาก $\overline{AD}$ และ $\overline{BC}$ จะได้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ถ้าใช้การเลื่อนขนานส่วนโค้ง BC ด้วย $\overrightarrow{BA}$ ให้ไปต่อกับส่วนโค้ง AD จะได้รูปวงกลม ดังรูป พื้นที่ของส่วนที่แรเงา เท่ากับ พื้นที่ของ ABCD ลบด้วยพื้นที่ของรูปวงกลมนั้น



วิธีทำ จากรูป ABCD มีความยาว 20 เซนติเมตร

ความกว้าง 14 เซนติเมตร

จะได้พื้นที่ของ ABCD เท่ากับ $20 \times 14 = 280$ ตารางเซนติเมตร

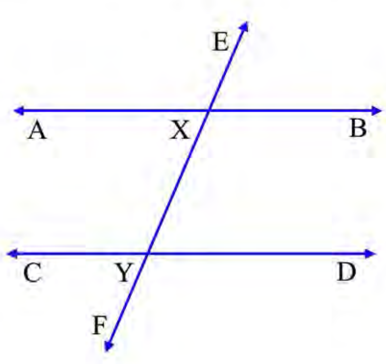
เลื่อนขนานส่วนโค้ง BC ด้วย $\overrightarrow{BA}$ จะได้วงกลมที่มีรัศมี 7 เซนติเมตร

จะได้พื้นที่ของรูปวงกลมประมาณ $\frac{22}{7} \times 7^2 = 154$ ตารางเซนติเมตร

ดังนั้นพื้นที่ของรูปที่แรเงาประมาณ $280 - 154 = 126$ ตารางเซนติเมตร

ตอบ ประมาณ 126 ตารางเซนติเมตร

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{CD}$ มี $\overleftrightarrow{EF}$ ลากตัด $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ที่จุด X และจุด Y ตามลำดับ จงใช้การเลื่อนขนานแสดงว่า $E\hat{X}B = E\hat{Y}D$



พิสูจน์ เนื่องจาก $\overleftrightarrow{AB} \mathbin{//} \overleftrightarrow{CD}$

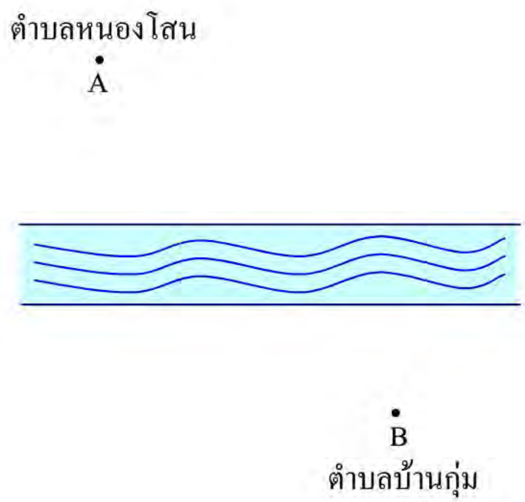
เมื่อเลื่อนขนาน $\widehat{EXB}$ ด้วย $\overrightarrow{XY}$

จะได้ $\widehat{EYD}$ เป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนาน $\widehat{EXB}$

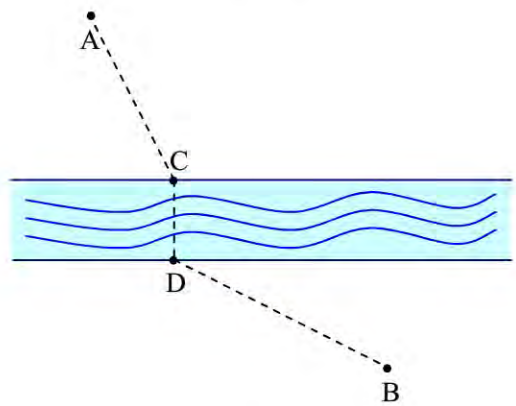
ดังนั้น $\widehat{EXB}$ ทับ $\widehat{EYD}$ ได้สนิท

นั่นคือ $\widehat{EXB} = \widehat{EYD}$

ตัวอย่างที่ 3 ตำบลหนองโสนตั้งอยู่ที่ตำแหน่ง A และตำบลบ้านกุ่มตั้งอยู่ที่ตำแหน่ง B ซึ่งอยู่คนละฝั่งของแม่น้ำสายหนึ่งซึ่งชายฝั่งทั้งสองด้านขนานกันดังรูป ต้องการสร้างสะพานเชื่อมระหว่างตำบลทั้งสอง โดยสะพานต้องตั้งฉากกับฝั่งแม่น้ำ และให้เส้นทางเดินระหว่างสองตำบลผ่านสะพานมีระยะทางรวมสั้นที่สุด จงอธิบายวิธีการหาตำแหน่งที่จะสร้างสะพาน



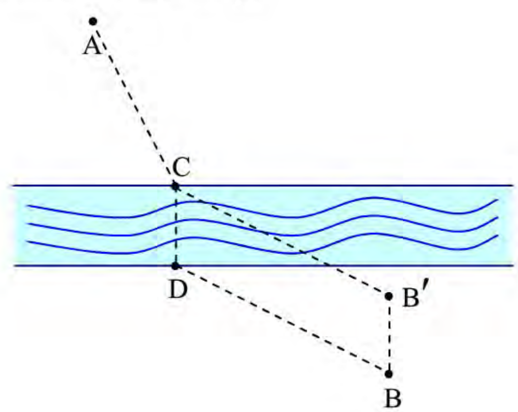
แนวคิด สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อช่วยในการคิดวิเคราะห์หาตำแหน่งของสะพาน สมมติให้สะพานตั้งอยู่ที่จุด C และจุด D ดังรูป ซึ่ง CD เท่ากับความกว้างของแม่น้ำ และ $\overline{CD}$ ตั้งฉากกับริมฝั่งทั้งสองของแม่น้ำ



ในที่นี้ต้องการให้ AC + CD + DB สั้นที่สุด แต่ CD เป็นความกว้างของแม่น้ำที่คงตัว ดังนั้น AC + CD + DB จะสั้นที่สุดเมื่อ AC + DB สั้นที่สุด

นักเรียนเคยทราบมาแล้วว่า *เมื่อกำหนดจุดให้สองจุด ส่วนของเส้นที่สั้นที่สุดที่เชื่อมระหว่างจุดสองจุด คือ ส่วนของเส้นตรง* ดังนั้น ถ้าเราทำให้ $\overline{AC}$ และ $\overline{DB}$ มาต่อกันเป็นส่วนของเส้นตรง จึงจะได้ว่า AC + DB สั้นที่สุด

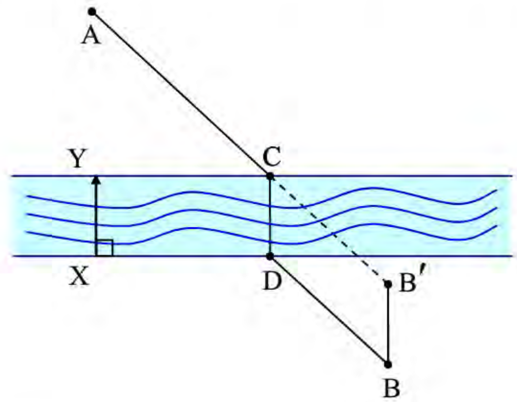
เนื่องจากมีแม่น้ำอยู่ระหว่างจุด C และจุด D เราจึงเลื่อนขนาน $\overline{DB}$ ไป $\overline{CB'}$ ด้วย $\overrightarrow{DC}$ ดังรูป จะได้ $\overline{CB'}$ เป็นตัวแทนของ $\overline{DB}$ ดังรูป



นักเรียนจะสังเกตเห็นว่า AC + DB = AC + CB′ แต่ $\overline{AC}$ และ $\overline{CB'}$ ยังไม่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน ดังนั้นจึงต้องหาตำแหน่งของจุด C ที่ $\overline{AC}$ และ $\overline{CB'}$ อยู่บนแนวเส้นตรงเดียวกัน

การหาจุด C ดังกล่าว หาได้โดยการเลื่อนขนาน B ไป B' ด้วยเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับริมฝั่งแม่น้ำ และมีขนาดเท่ากับความกว้างของแม่น้ำ จากนั้นลาก $\overline{AB'}$ ให้ตัดริมฝั่งแม่น้ำด้านฝั่ง A ที่จุด C ที่ $AC + CB'$ สั้นที่สุด

จากแนวคิด ทำได้ดังนี้



ให้ $\overrightarrow{XY}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับความกว้างของแม่น้ำ และมีทิศทางตั้งฉากกับริมฝั่งของแม่น้ำทั้งสองข้าง เลื่อนขนานจุด B ด้วยเวกเตอร์ XY ไปที่จุด B' ลาก $\overline{AB'}$ ตัดริมฝั่งแม่น้ำทางด้านฝั่ง A ที่จุด C และสร้าง $\overline{CD}$ ตั้งฉากกับริมฝั่งแม่น้ำอีกฝั่งหนึ่งที่จุด D

จะได้จุด C และจุด D เป็นตำแหน่งของสะพาน ตามต้องการ ทั้งนี้เพราะว่า $AC + DB = AC + CB' = AB'$ ดังนั้น $AC + CD + DB$ สั้นที่สุดตามต้องการ

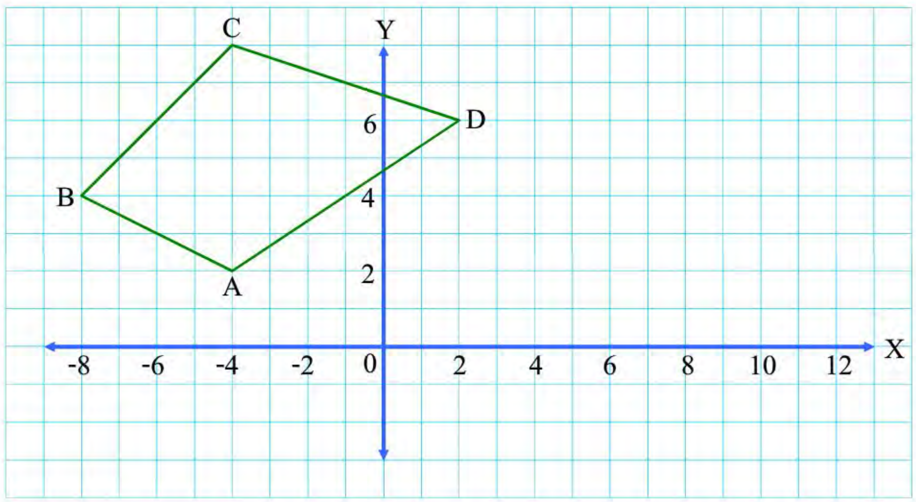
นักเรียนจะเห็นว่า ในตัวอย่างนี้เป็นการหาตำแหน่งของสะพานที่จุด C ทางด้านฝั่ง A ก่อน นักเรียนคิดว่า จะหาตำแหน่งของสะพานที่จุด D ทางด้านฝั่ง B ก่อน ได้หรือไม่ ถ้าได้ทำอย่างไร และจะเป็นสะพานเดียวกันกับสะพานที่หาได้ในตัวอย่างนี้หรือไม่

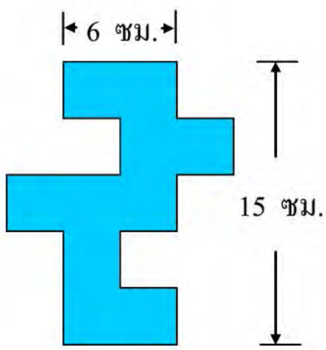
ลองคิดดู

ช่างไม้สร้างเส้นขนานโดยใช้ไม้ฉากและไม้บรรทัดดังแสดงในรูป นักเรียนคิดว่าเพราะเหตุใดวิธีการของช่างไม้จึงใช้ได้

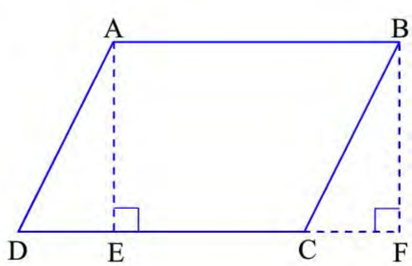
แบบฝึกหัด 4.1

1. กำหนดให้ ABCD เป็นรูปต้นแบบ $A'B'C'D'$ เป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนาน ABCD ซึ่งมีจุด $A'(7, 2)$ เป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานจุด A จงหาพิกัดของจุด B', C' และ D'



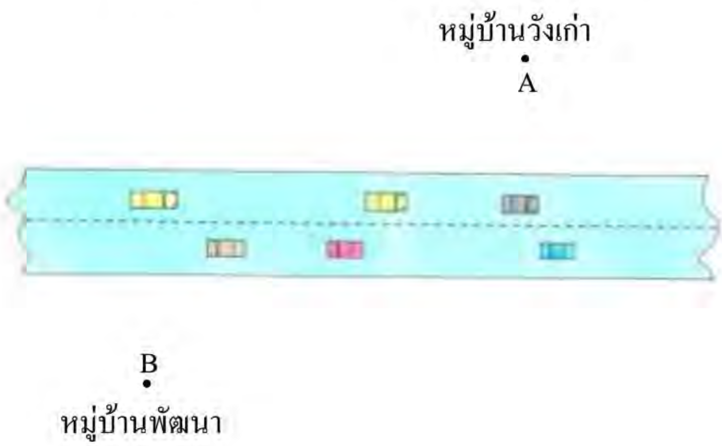
2. 

จงหาพื้นที่โดยประมาณของรูปที่กำหนดให้

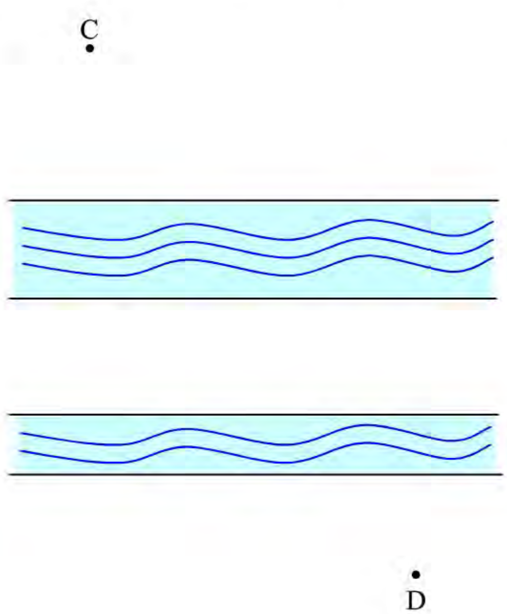
3. 

จากรูป จงใช้การเลื่อนขนานแสดงว่า รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD มีพื้นที่เท่ากับรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ABFE

4. หมู่บ้านวังเก่าตั้งอยู่ที่ตำแหน่ง A และหมู่บ้านพัฒนาตั้งอยู่ที่ตำแหน่ง B ทางหลวงสายใหม่สร้างขึ้นผ่านกลางระหว่างสองหมู่บ้านนี้ ดังแผนภาพ ทางการต้องการสร้างสะพานลอยคนข้าม เพื่อให้ประชาชนในสองหมู่บ้านไปมาหาสู่กันได้สะดวก จงหาตำแหน่งที่จะสร้างสะพานลอย เพื่อให้ระยะทางจากหมู่บ้านวังเก่าถึงหมู่บ้านพัฒนาสั้นที่สุด โดยแนวสะพานลอยต้องตั้งฉากกับแนวทางหลวง นักเรียนทราบได้อย่างไรว่า ตำแหน่งที่สร้างสะพานลอยทำให้ได้ระยะทางสั้นที่สุด



5.



หมู่บ้านสองหมู่บ้านตั้งอยู่ที่ตำแหน่ง C และตำแหน่ง D มีแม่น้ำสองสายขนานกัน และชายฝั่งของแม่น้ำแต่ละสายขนานกัน แม่น้ำไหลผ่านกั้นระหว่างสองหมู่บ้านนี้ ดังรูป ถ้าต้องการสร้างสะพานสองสะพานให้ตั้งฉากกับฝั่งแม่น้ำทั้งสองของแม่น้ำแต่ละสาย เพื่อเชื่อมระหว่างสองหมู่บ้านให้ได้ระยะทางสั้นที่สุด ควรจะสร้างแต่ละสะพานที่ตำแหน่งใด จงอธิบาย

4.2 การประยุกต์ของการสะท้อน

ให้นักเรียนพิจารณาว่ารูปในข้อใดต่อไปนี้ มีความเกี่ยวข้องกับการสะท้อน

รูป ก

รูป ข

รูป ค

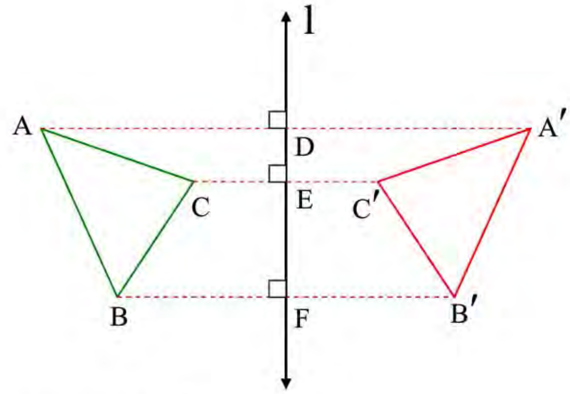
รูป ง

การสะท้อน มีสมบัติที่สำคัญ ดังนี้

1. *สามารถเลื่อนรูปต้นแบบทับภาพที่ได้จากการสะท้อนได้สนิท โดยต้องพลิกรูป*
2. *เส้นสะท้อนแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดที่สมนัยกัน*

จากรูปข้างต้น ทุกรูปมีความเกี่ยวข้องกับการสะท้อน เช่น รูป ข ถ้าให้รูปมือซ้ายเป็นรูปต้นแบบ และมีเส้นสะท้อนอยู่ในแนวตั้ง จะได้รูปมือขวาเป็นภาพที่ได้จากการสะท้อน

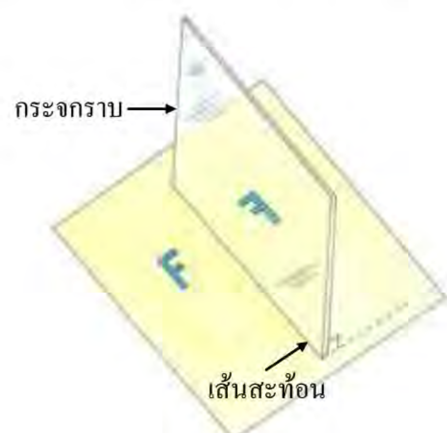
ตัวอย่าง กำหนดให้ $\Delta A'B'C'$ เป็นภาพที่ได้จากการสะท้อน ΔABC ด้วยเส้นสะท้อน ℓ ดังรูป



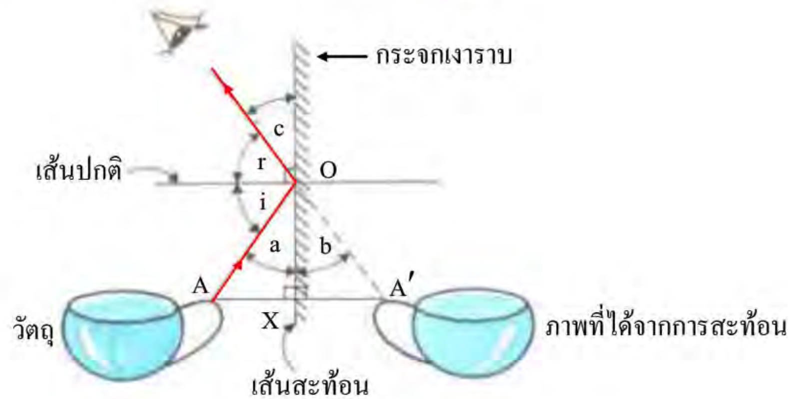
จากสิ่งที่กำหนดให้ จะได้ดังนี้

1. สามารถพลิก ΔABC แล้วเลื่อนไปทับ $\Delta A'B'C'$ ได้สนิท
2. เส้นสะท้อน ℓ แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ และ $\overline{CC'}$
3. $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ และ $\overline{CC'}$ ขนานกัน

ถ้าตั้งแผ่นกระจกเงาราบให้ตั้งฉากกับกระดาษที่เขียนตัวอักษร F จะมองเห็นภาพของตัวอักษร F ปรากฏหลังกระจกเงาราบ ขนาดของตัวอักษรเท่ากันแต่กลับข้างกันและภาพของตัวอักษร F ที่เกิดขึ้นอยู่ห่างจากขอบด้านหน้าของกระจกเงาราบเท่ากับตัวอักษร F อยู่ห่างจากขอบด้านหน้าของกระจกเงาราบ ดังนั้นภาพของตัวอักษร F ที่เกิดจากกระจกเงาราบ จึงเป็นภาพที่เกิดจากการสะท้อน โดยมีขอบด้านหน้าเป็นเส้นสะท้อน



เมื่อเรามองวัตถุในกระจกเงาราบ ผิวด้านหน้าของกระจกเงาราบจะเป็นเส้นสะท้อน แสงจากวัตถุจะตกกระทบกับกระจกเงาราบแล้วสะท้อนมายังตาของเรา การสะท้อนของแสงเป็นไปตาม*กฎของสเนลล์ คือ ขนาดของมุมตกกระทบเท่ากับขนาดของมุมสะท้อน* สมองจะรับรู้ภาพที่ได้จากการสะท้อนซึ่งอยู่ไกลออกไปทางด้านหลังของกระจกเงาราบ เป็นระยะเท่ากับระยะจากวัตถุจริงถึงผิวด้านหน้าของกระจกเงาราบ



การเกิดภาพที่ได้จากการสะท้อนในกระจกเงาราบ

จากรูป

แสงจากวัตถุไปตกกระทบที่กระจกเงา เรียกว่า *รังสีตกกระทบ*

แสงที่สะท้อนจากกระจกเงาไปที่นัยน์ตา เรียกว่า *รังสีสะท้อน*

เส้นตรงที่ลากตั้งฉากกับผิวของกระจกเงา เรียกว่า *เส้นปกติ*

มุมที่เกิดจากรังสีตกกระทบกับเส้นปกติ เรียกว่า *มุมตกกระทบ i*

มุมที่เกิดจากรังสีสะท้อนกับเส้นปกติ เรียกว่า *มุมสะท้อน r*

และจากการที่ $\hat{i} = \hat{r}$ ทำให้ได้ $\hat{a} = \hat{c}$ เนื่องจาก

$\hat{i} + \hat{a} = \hat{r} + \hat{c} = 90^\circ$

นอกจากนั้น จะได้ว่า $\hat{a} = \hat{b}$ และ $AX = XA'$

ตัวอย่างการประยุกต์ของการสะท้อน

ในชีวิตประจำวันเราได้นำการสะท้อนและการสมมาตรไปใช้ประโยชน์อย่างมากมาย เช่น การส่องกระจก การตัดเสื้อผ้า การทำถุงมือและถุงเท้า เป็นต้น

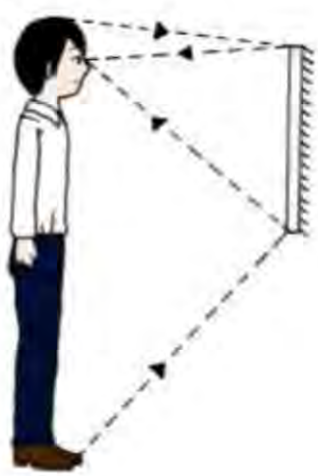
นักเรียนได้รู้จักกล้องสลับลายที่ใช้หลักการสะท้อนมาแล้ว ต่อไปนี้จะใช้หลักการสะท้อนในการหาความสูงของกระจกเงาราบที่สามารถมองเห็นภาพได้เต็มตัว ดังตัวอย่างต่อไปนี้

กระจกสูงเท่าไร

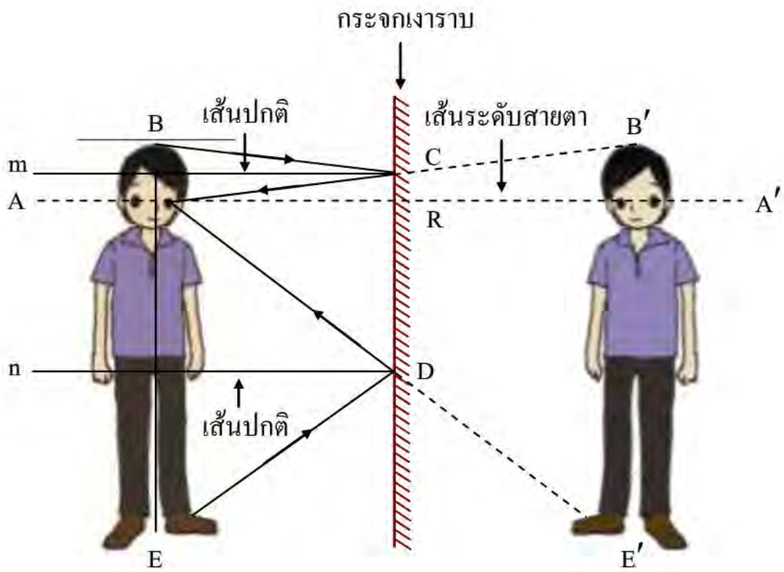
ขณะที่นักเรียนยืนส่องกระจกเงาราบ เคยสงสัยหรือไม่ว่า กระจกเงาที่ใช้ต้องมีความสูงอย่างน้อยเท่าไร จึงจะสามารถเห็นตัวเองได้เต็มตัวตั้งแต่ศีรษะจรดเท้า

นักเรียนทราบสมบัติการสะท้อนมาแล้วว่า ความสูงของนักเรียนจะต้องเท่ากับความสูงของภาพในกระจกเงา และระยะห่างระหว่างนักเรียนถึงกระจกเงาก็ต้องเท่ากับระยะของภาพสะท้อนในกระจกถึงกระจกอีกเช่นกัน

จากสมบัติของการสะท้อนและกฎของสเนลล์ ทำให้เราแสดงได้ว่า การใช้กระจกที่มีความสูงเพียงครึ่งหนึ่งของความสูงของผู้ส่องกระจก ก็สามารถจะเห็นภาพได้เต็มตัวตั้งแต่ศีรษะจรดเท้า ดังรูป



ให้นักเรียนพิจารณาแผนภาพแสดงการส่องกระจกของพีระ



จากรูป กำหนดให้ $\overline{CD}$ แทนกระจก

เส้นตรง AA' แทนเส้นระดับสายตา

เส้นตรง m และ n แทนเส้นปกติที่ตั้งฉากกับกระจกเงา

ความสูงของพีระ เท่ากับ BE

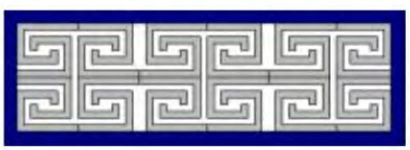
ความยาวของกระจก เท่ากับ $CR + RD$ หรือ CD

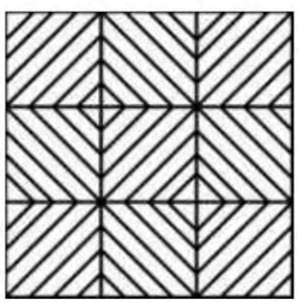
จากกฎของสเนลล์ จะพบว่า พีระสามารถมองเห็นภาพสะท้อนของเขาในกระจกเงาที่มีความสูงเพียงครึ่งหนึ่งของความสูงของพีระ ได้ดังแผนภาพ

ให้นักเรียนลองสำรวจดูว่า ถ้าใช้กระจกเงาที่มีความสูงน้อยกว่าครึ่งหนึ่งของความสูงของนักเรียน แล้วจะยังคงเห็นภาพเต็มตัวของนักเรียนหรือไม่

ในชีวิตประจำวันเรายังใช้การสะท้อนและการสมมาตรในการออกแบบลวดลายต่าง ๆ เช่น ลายผ้า ลวดลายเหล็กดัด งานศิลปะและเครื่องมือเครื่องใช้อื่น ๆ ดังตัวอย่าง

ลายผ้า

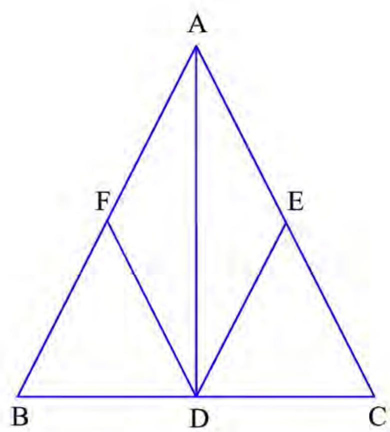




ลวดลายเหล็กดัดและงานอื่น ๆ

นอกจากนี้เรายังสามารถนำความรู้เรื่องการสะท้อน มาช่วยในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้ ดังตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มี $\overline{BC}$ เป็นฐาน $\overline{AD}$ แบ่งครึ่ง $\overline{BC}$ ที่จุด D มีจุด E และจุด F เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AC}$ และ $\overline{AB}$ ตามลำดับ จงใช้การสะท้อนพิสูจน์ว่า $\Delta EDC \cong \Delta FDB$ และ $\Delta ADE \cong \Delta ADF$



พิสูจน์ เนื่องจาก ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว $\overline{AD}$ แบ่งครึ่งฐาน $\overline{BC}$ ที่จุด D โดยสมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วจะได้ $\overline{AD}$ ตั้งฉากกับ $\overline{BC}$

จะได้ว่า $\overleftrightarrow{AD}$ เป็นแกนสมมาตรของ ΔABC หรือ เป็นเส้นสะท้อนระหว่าง ΔABD และ ΔACD

นั่นคือ $\overline{AC}$ เป็นภาพที่ได้จากการสะท้อน $\overline{AB}$

เนื่องจาก จุด E และจุด F เป็นจุดกึ่งกลาง $\overline{AC}$ และ $\overline{AB}$ ตามลำดับ

จะได้ จุด E เป็นภาพที่ได้จากการสะท้อนจุด F

ทำให้ ΔEDC เป็นภาพที่ได้จากการสะท้อน ΔFDB

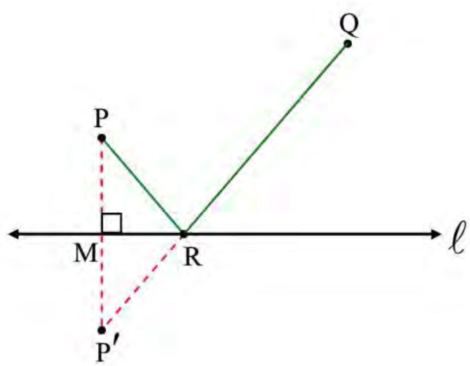
และ ΔADE เป็นภาพที่ได้จากการสะท้อน ΔADF

นั่นคือ $\Delta EDC \cong \Delta FDB$ และ $\Delta ADE \cong \Delta ADF$

ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้

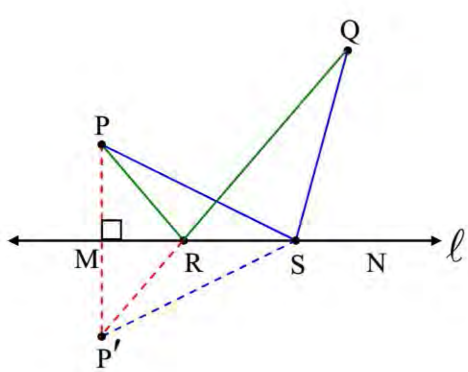
ระยะใดสั้นที่สุด

กำหนดให้ เส้นตรง ℓ เป็นเส้นสะท้อน จุด P และจุด Q อยู่ด้านเดียวกันของเส้นสะท้อน จุด P' เป็นภาพที่ได้จากการสะท้อนจุด P ด้วยเส้นสะท้อน ℓ ให้ $\overline{PP'}$ และ $\overline{P'Q}$ ตัดเส้นสะท้อน ℓ ที่จุด M และจุด R ตามลำดับ



จงตอบคำถามต่อไปนี้

1. $\Delta PMR \cong \Delta P'MR$ หรือไม่ เพราะเหตุใด
2. $PR = P'R$ หรือไม่ เพราะเหตุใด
3. $PR + RQ = P'R + RQ$ หรือไม่ เพราะเหตุใด
4. ถ้ากำหนดให้ S เป็นจุดใด ๆ บนเส้นตรง ℓ ที่ต่างไปจากจุด R ดังรูป



1) $PS = P'S$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

2) $PS + SQ = P'S + SQ$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

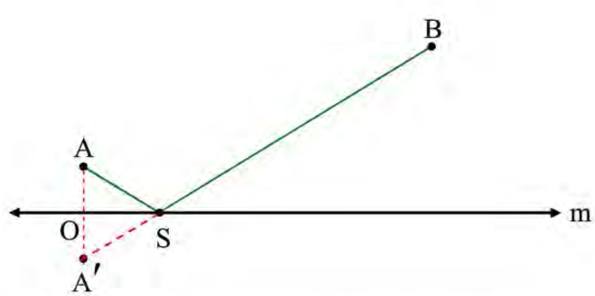
3) $P'R + RQ$ กับ $P'S + SQ$ ระยะใดสั้นกว่า เพราะเหตุใด

4) $PR + RQ$ กับ $PS + SQ$ ระยะใดสั้นกว่า เพราะเหตุใด

5. นักเรียนคิดว่า ระยะจากจุด P ถึงจุดจุดหนึ่งบนเส้นตรง ℓ รวมกับระยะจากจุดนั้นถึงจุด Q ระยะใดสั้นที่สุด

ตัวอย่างที่ 2 หมู่บ้านท่าใหม่ตั้งอยู่ที่ตำแหน่ง A และหมู่บ้านท่ามะขามตั้งอยู่ที่ตำแหน่ง B บนฝั่งเดียวกันของคลองส่งน้ำชลประทานสายหนึ่งซึ่งขุดเป็นแนวตรง ต้องการสร้างสถานีสูบน้ำ 1 แห่ง เพื่อส่งน้ำไปยังหมู่บ้านทั้งสอง จงหาตำแหน่งที่จะสร้างสถานีสูบน้ำ เพื่อให้ใช้ท่อน้ำสั้นที่สุด

วิธีทำ สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ในการหาตำแหน่งที่จะสร้างสถานีสูบน้ำได้ดังนี้



จากรูป ให้เส้นตรง m แทนแนวกั้นคลองส่งน้ำ และเป็นเส้นสะท้อน จุด A'

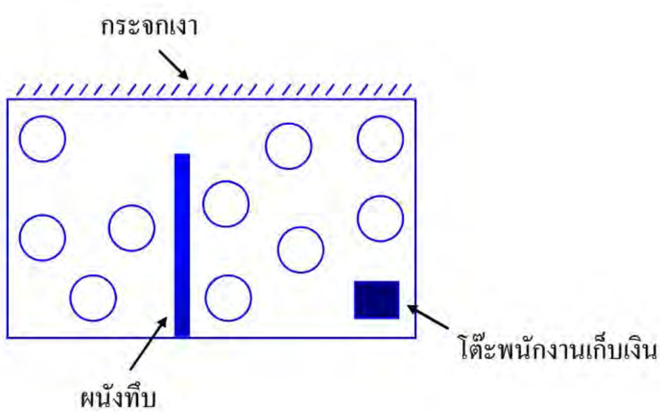
เป็นภาพที่ได้จากการสะท้อนจุด A ซึ่งเป็นตำแหน่งที่ตั้งของหมู่บ้านท่าใหม่ ลากเส้นต่อระหว่างจุด A' กับจุด B ตัดเส้นตรง m ที่จุด S

จะได้ $AS + SB = A'S + SB$ เป็นระยะสั้นที่สุด

นั่นคือ S เป็นตำแหน่งที่จะสร้างสถานีสูบน้ำ เพื่อให้ใช้ท่อน้ำสั้นที่สุด

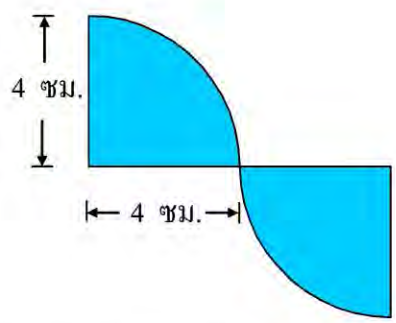
แบบฝึกหัด 4.2

1. ร้านขายอาหารขนาดเล็กแห่งหนึ่งมีผนังด้านหนึ่งติดกระจกเงาตลอดแนว และมีผนังทึบกั้นสำหรับงานเลี้ยงส่วนตัวดังแสดงในรูป ถ้าผู้จัดการยืนที่ตำแหน่งโต๊ะพนักงานเก็บเงิน เขาจะสามารถมองเห็นโต๊ะอาหารได้ทั้งหมดกี่โต๊ะ จากการมองโดยตรงหรือมองภาพสะท้อนจากกระจกเงา จงอธิบาย

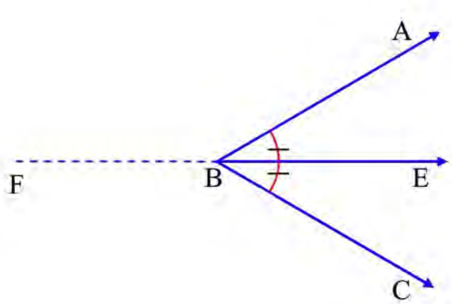


2. ทางรถไฟสร้างใหม่ผ่านตำบลบางไทรและตำบลบางปลาซึ่งตั้งอยู่ที่ตำแหน่ง A และตำแหน่ง B ตามลำดับ ต้องการสร้างสถานีรถไฟระหว่าง 2 ตำบลนี้ โดยให้ระยะทางจากสถานีรถไฟถึงตำบลบางไทร และระยะทางจากสถานีรถไฟถึงตำบลบางปลารวมกันแล้วสั้นที่สุด จงหาตำแหน่งที่จะสร้างสถานีรถไฟนั้น ทราบได้อย่างไรว่าตำแหน่งนั้นจะให้ผลรวมของระยะทางสั้นที่สุด

3. จงหาพื้นที่โดยประมาณของรูปที่กำหนดให้



4. กำหนด $A\hat{B}C$ สร้าง $\overrightarrow{BE}$ แบ่งครึ่ง $A\hat{B}C$ และต่อ $\overline{EB}$ ไปทาง B ถึงจุด F ดังรูป จงพิสูจน์ว่า $A\hat{B}F = C\hat{B}F$ โดยใช้การสะท้อน

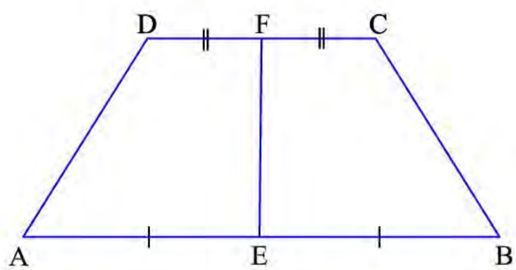


5. รูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่วมีสมบัติประการหนึ่งว่า เส้นตรงที่เชื่อมต่อจุดกึ่งกลางของด้านคู่ขนานจะตั้งฉากกับด้านคู่ขนานนั้นด้วย

กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่ว จุด E และจุด F เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ ตามลำดับ

จงใช้สมบัติดังกล่าวข้างต้นและการสะท้อน พิสูจน์ว่า

1. $B\hat{A}D = A\hat{B}C$
2. $A\hat{D}C = B\hat{C}D$

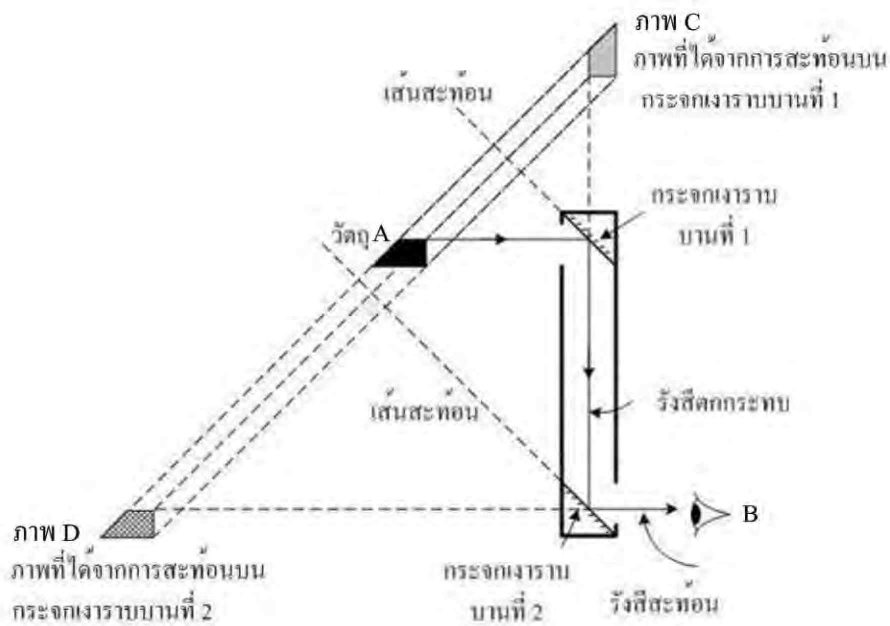


กล้องดูแห่

กล้องดูแห่หรือกล้องส่องเหนือผิวน้ำหรือกล้องปริทรรศน์ (periscope) สำหรับเรือดำน้ำ เป็นกล้องที่อาศัยการสะท้อนเพื่อเพิ่มความสามารถในการมองเห็น

กล้องดูแห่อย่างง่าย ประกอบด้วย กระจกเงาราบ 2 บาน ติดตั้งหันหน้าเข้าหากัน โดยเอียงทำมุมขนาด 45 องศากับแนวนอน ดังรูป

ให้นักเรียนพิจารณาแบบจำลองแสดงหลักการของกล้องดูแห่ ต่อไปนี้



จากรูป ในกล้องดูแห่มีกระจกเงาบานที่ 1 และกระจกเงาบานที่ 2 ติดตั้งให้กระจกเงาทั้งสองบานหันหน้าเข้าหากัน แต่ละบานทำมุมขนาด 45° กับแนวนอน

ให้ วัตถุ A เป็นรูปต้นแบบ ที่ต้องการดูผ่านกล้องดูแห่

B แทนตำแหน่งของสายตาที่มองดูวัตถุ A ผ่านกล้องดูแห่

การมองวัตถุผ่านกล้องดูแห่ อาศัยหลักการตามกฎของสเนลล์ โดยใช้การสะท้อนสองครั้ง ดังนี้

การสะท้อนครั้งที่ 1 ได้ภาพ C เป็นภาพที่ได้จากการสะท้อนวัตถุ A โดยมีกระจกบานที่ 1 เป็นเส้นสะท้อน ภาพ C จึงมีลักษณะเหมือนกับการพลิกรูปของวัตถุ A

การสะท้อนครั้งที่ 2 ได้ภาพ D เป็นภาพที่ได้จากการสะท้อนภาพ C โดยมีกระจกบานที่ 2 เป็นเส้นสะท้อน ภาพ D จึงมีลักษณะเหมือนกับวัตถุ A

จากการสะท้อนครั้งที่ 2 ทำให้เรามองเห็นภาพของวัตถุ A เป็นภาพเดียวกันกับการมองวัตถุ A โดยตรง

4.3 การประยุกต์ของการหมุน

ให้นักเรียนพิจารณาว่ารูปใดต่อไปนี้ มีความเกี่ยวข้องกับการหมุน

รูป ก

รูป ข

รูป ค

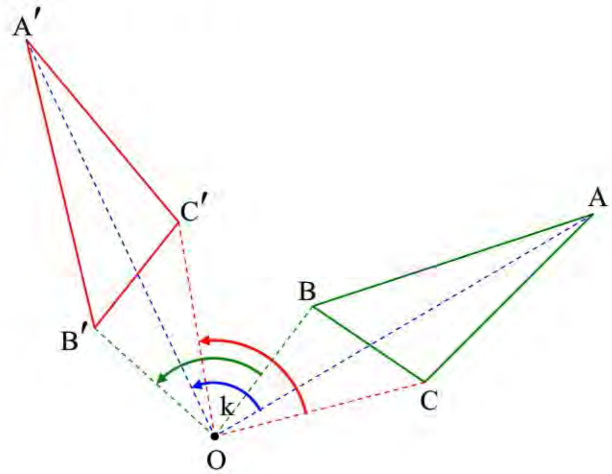
รูป ง

การหมุน มีสมบัติที่สำคัญ ดังนี้

1. *สามารถเลื่อนรูปต้นแบบทับภาพที่ได้จากการหมุนได้สนิท โดยไม่ต้องพลิกรูป*
2. *จุดบนรูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการหมุนจุดนั้น จะอยู่บนวงกลมเดียวกันที่มีจุดหมุนเป็นจุดศูนย์กลาง แต่วงกลมเหล่านี้ไม่จำเป็นต้องมีรัศมียาวเท่ากัน*

จากรูปข้างต้น รูป ข และรูป ง มีความเกี่ยวข้องกับการหมุน เช่น รูป ข เมื่อกำหนดให้ใบพัดใบหนึ่งของกังหันเป็นรูปต้นแบบ จะได้ว่าใบพัดใบอื่น ๆ เป็นภาพที่ได้จากการหมุนรูปต้นแบบ โดยมีจุดศูนย์กลางของกังหันเป็นจุดหมุน

ตัวอย่าง กำหนดให้ $\Delta A'B'C'$ เป็นภาพที่ได้จากการหมุน ΔABC รอบจุดหมุน O ทวนเข็มนาฬิกา ด้วยมุมที่มีขนาด k



จากสิ่งที่กำหนดให้ จะได้ดังนี้

1. สามารถเลื่อน ΔABC ไปทับ $\Delta A'B'C'$ ได้สนิท โดยไม่ต้องพลิกรูป
2. $A\hat{O}A' = B\hat{O}B' = C\hat{O}C' = k$

   $OA = OA'$, $OB = OB'$ และ $OC = OC'$

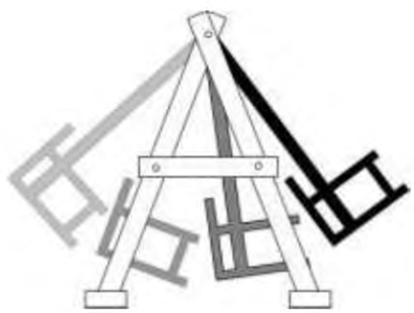
ตัวอย่างการประยุกต์ของการหมุน

ในชีวิตประจำวันถ้านักเรียนสังเกตสิ่งของเครื่องใช้ต่าง ๆ จะพบว่ามีอุปกรณ์หลายอย่างที่นำเอาการหมุนมาประยุกต์ใช้งาน เช่น เครื่องตัดกระดาษ ชิงช้า เครื่องเล่นบางชนิดในสวนสนุกหรือสนามเด็กเล่น

นักเรียนจะสังเกตเห็นว่าเครื่องตัดกระดาษมีใบมีดยึดติดกับแท่นรองตัดและหมุนรอบจุดหมุนจุดหนึ่ง ขณะที่ยกใบมีดขึ้นหรือกดลงในตำแหน่งต่าง ๆ การหมุนของใบมีดของเครื่องตัดกระดาษเป็นการแปลงแบบการหมุนเพราะทุก ๆ จุดบนใบมีดจะหมุนรอบจุดหมุนเป็นส่วนของวงกลมที่มีรัศมีคงตัว

รูปด้านหน้า

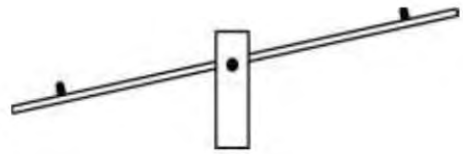
ชิงช้าเป็นเครื่องเล่นชนิดหนึ่งที่นำการแปลงแบบการหมุนมาประยุกต์ใช้ ถ้านักเรียนมองรูปด้านข้างของชิงช้า จะเห็นเป็นรูปสองมิติที่มีการเคลื่อนที่ของที่นั่งชิงช้าที่มีสมบัติของการหมุน



รูปด้านข้าง

เครื่องเล่นบางชนิดในสวนสนุกหรือสนามเด็กเล่นก็นำการแปลงแบบการหมุนมาประยุกต์ใช้เช่นเดียวกัน

รูปด้านบน



รูปด้านข้าง

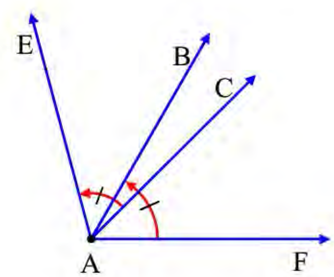
นอกจากจะใช้การหมุนกับอุปกรณ์และเครื่องมือต่าง ๆ แล้ว ยังสามารถนำการหมุนมาใช้กับงานออกแบบลวดลายศิลปะต่าง ๆ เช่น ลวดลายบนวงล้อรถยนต์ ลายผ้า เป็นต้น

ลวดลายบนวงล้อรถยนต์

ลายผ้า

เราสามารถนำความรู้เรื่องการหมุน มาช่วยในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้ดังตัวอย่าง

ตัวอย่าง กำหนดให้ $E\hat{A}C = B\hat{A}F$ จงใช้การหมุนพิสูจน์ว่า $E\hat{A}B = C\hat{A}F$



พิสูจน์ กำหนดให้ A เป็นจุดหมุน

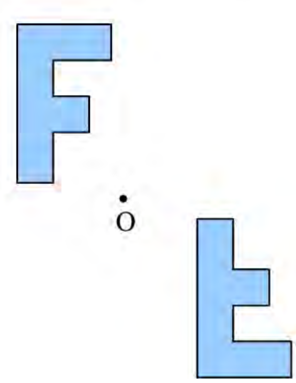
หมุน $C\hat{A}F$ ทวนเข็มนาฬิกาด้วยมุมที่มีขนาดเท่ากับ $C\hat{A}E$

จะได้ $C\hat{A}F$ ทับ $E\hat{A}B$ ได้สนิทพอดี

นั่นคือ $E\hat{A}B = C\hat{A}F$

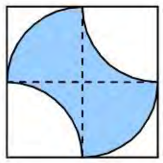
แบบฝึกหัด 4.3

1. จากรูป เมื่อกำหนดให้จุด O เป็นจุดหมุน F ที่อยู่ทางขวาของจุด O เป็นภาพที่ได้จากการหมุน F ที่อยู่ทางซ้ายของจุด O หรือไม่ เพราะเหตุใด

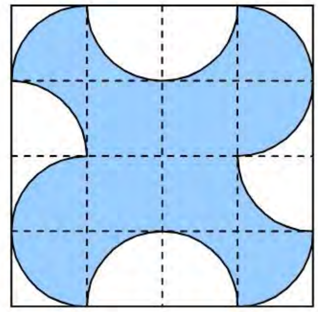


2. จงหาพื้นที่โดยประมาณของรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้

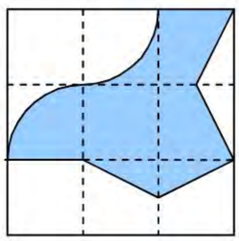
1)



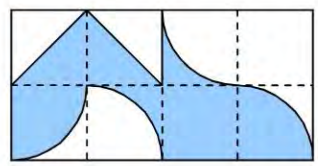
2)



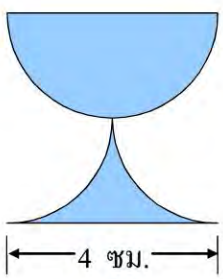
3)



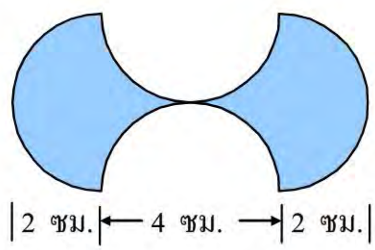
4)



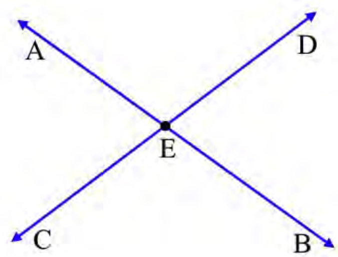
5)



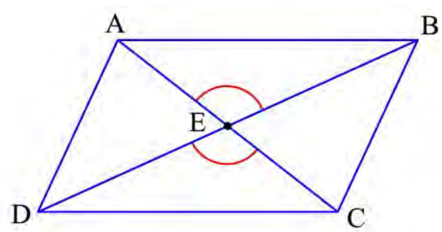
6)



3. กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ตัดกันที่จุด E จงใช้การหมุนแสดงว่า $B\hat{E}D = A\hat{E}C$ และ $D\hat{E}A = C\hat{E}B$



4. กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $\overline{AC}$ และ $\overline{BD}$ ตัดกันที่จุด E จงพิสูจน์ว่า $B\hat{E}A = D\hat{E}C$ โดยใช้การหมุน



5. ให้นักเรียนช่วยกันบอกชื่ออุปกรณ์ เครื่องมือ เครื่องใช้ หรือของเล่น ที่มีการนำการแปลงแบบการหมุนมาใช้ พร้อมทั้งบอกด้วยว่าส่วนใดของสิ่งนั้นมีการประยุกต์ใช้การแปลงแบบการหมุน และมีจุดหมุนอยู่ที่ใด

4.4 เทสเซลเลชัน

นักเรียนได้รู้จักการประยุกต์ของการแปลงทางเรขาคณิต ทั้งการประยุกต์ของการเลื่อนขนาน การประยุกต์ของการสะท้อน และการประยุกต์ของการหมุนมาแล้ว ในหัวข้อนี้จะเป็นการนำการแปลงทางเรขาคณิตทั้งสามแบบมาประยุกต์ใช้ร่วมกันในการออกแบบลวดลายทางศิลปะที่ใช้กันในชีวิตประจำวัน

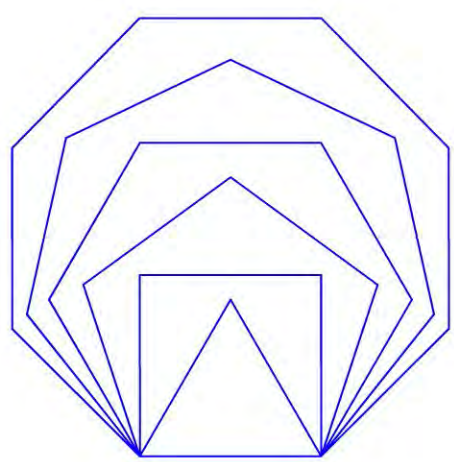
ปัจจุบันเราจะพบเห็นการปูกระเบื้องในหลายสถานที่ไม่ว่าจะเป็นพื้นห้อง ผนังห้อง หรือพื้นสนาม การปูกระเบื้องนี้จะนำแผ่นกระเบื้องมาวางเรียงปิดพื้นที่ที่ต้องการ โดยไม่ให้เกิดช่องว่างและไม่ให้มีการซ้อนทับกัน *การนำรูปปิดมาปิดพื้นที่ที่ต้องการ โดยไม่ให้เกิดช่องว่างและไม่ให้มีการซ้อนทับกัน ในทางคณิตศาสตร์ เรียกว่า* เทสเซลเลชัน

ในธรรมชาติก็มีเทสเซลเลชันปรากฏให้เห็น เช่น โครงสร้างของรังผึ้ง และโครงสร้างโมเลกุลของผลึกบางชนิด

สำรวจเทสเซลเลชันปกติ

รูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า หมายถึง รูปหลายเหลี่ยมที่มีด้านทุกด้านยาวเท่ากันและและมุมภายในทุกมุมมีขนาดเท่ากัน การเรียกชื่อรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า จะเรียกชื่อตามจำนวนด้านของรูปนั้น ๆ

จากรูปให้นักเรียนวัดขนาดของมุมภายในของรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าต่าง ๆ ที่กำหนด แล้วเติมขนาดของมุมลงในตาราง

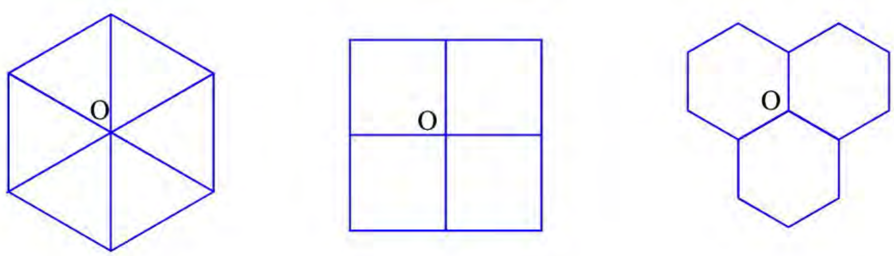


จำนวนด้าน	3	4	5	6	7	8
ขนาดของมุมภายในแต่ละมุม (องศา)						
ผลรวมของขนาดของมุมภายในทุกมุม (องศา)						

เมื่อวัดขนาดของมุมแล้ว ให้นักเรียนใช้กระดาษลอกลายลอกรูปหลายเหลี่ยมต่าง ๆ ทีละรูป แล้วใช้กรรไกรตัดเป็นรูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยม จนถึงรูปแปดเหลี่ยมตามแบบจากกระดาษลอกลาย อย่างละ 6 รูป แล้วนำรูปหลายเหลี่ยมที่ได้แต่ละชนิดมาลองทำเทสเซลเลชันและพิจารณาว่า รูปหลายเหลี่ยมชนิดใดบ้างที่สามารถนำมาทำเป็นเทสเซลเลชันได้

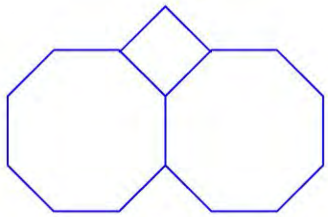
จากกิจกรรมข้างต้นจะเห็นว่า *รูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่สามารถนำมาทำเป็นเทสเซลเลชันได้ ต้องเป็นรูปหลายเหลี่ยมที่มีขนาดของมุมภายในแต่ละมุมหาร 360 องศา ได้ลงตัว จึงมีเพียงรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปหกเหลี่ยมด้านเท่า เท่านั้น*

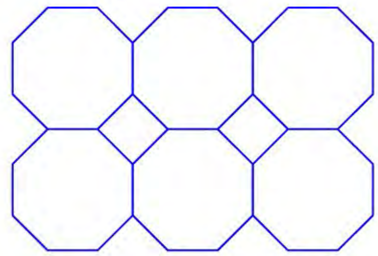
เทสเซลเลชันที่ได้จากรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า ชนิดใดชนิดหนึ่งเพียงชนิดเดียว เรียกว่า **เทสเซลเลชันปกติ** *ดังนั้นเทสเซลเลชันปกติจึงมีเพียง 3 แบบดังรูป*

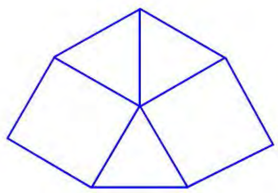


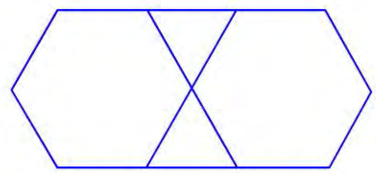
จากรูปข้างต้นจะเห็นว่า จุดที่มุมของรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่ามาพบกันดังเช่น จุด O จะต้องมีผลบวกของขนาดของมุมรอบจุดนั้นเป็น 360 องศา

นอกจากเทสเซลเลชันปกติดังกล่าว ยังมีเทสเซลเลชันรูปแบบอื่น ๆ ที่ได้จากการนำรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า หรือรูปหลายเหลี่ยมใด ๆ หรือรูปใด ๆ มาปิดพื้นที่ที่ต้องการ ดังตัวอย่างต่อไปนี้









การสร้างเทสเซลเลชันโดยใช้การแปลงทางเรขาคณิต

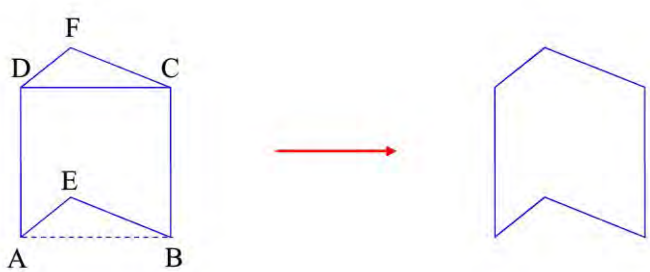
การสร้างเทสเซลเลชันให้มีลวดลายต่าง ๆ สามารถทำได้โดยใช้สมบัติของการแปลงทางเรขาคณิต เช่น การเลื่อนขนาน การสะท้อน และการหมุน มาช่วยในการดัดแปลงด้านของรูปเรขาคณิตให้มีส่วนโค้งตามที่ต้องการ ซึ่งนักเรียนจะได้ศึกษาจากตัวอย่างและกิจกรรมต่อไปนี้

กบของฉัน

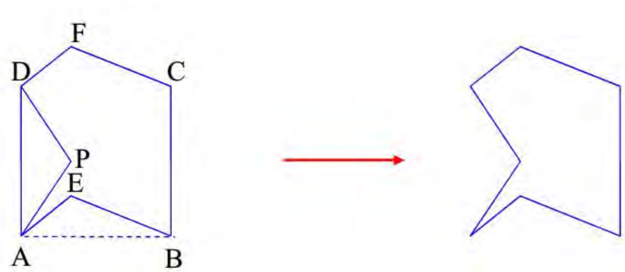
ให้นักเรียนทำเทสเซลเลชัน โดยใช้การเลื่อนขนานตามกิจกรรมต่อไปนี้

1. เขียนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ABCD และสร้าง Δ AEB บนด้าน AB ดังรูป

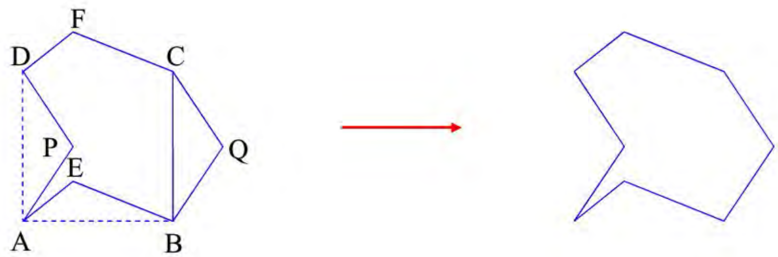
2. เลื่อนขนาน Δ AEB ด้วย $\overrightarrow{AD}$ และได้ Δ DFC เป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนาน Δ AEB ดังรูป



3. เขียน Δ APD บนด้าน AD



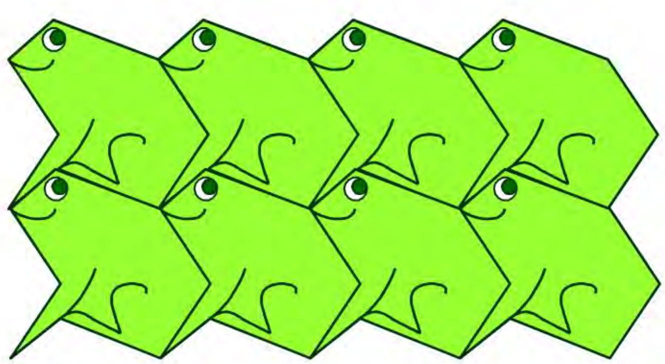
4. เลื่อนขนาน Δ APD ด้วย $\overrightarrow{AB}$ และได้ Δ BQC เป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนาน Δ APD ดังรูป



เราจะใช้รูปสุดท้ายที่ได้ในข้อนี้ เป็นโครงร่างของกบที่จะนำไปใช้เป็นรูปต้นแบบต่อไป

5. เขียนลวดลายบนโครงร่างของกบที่ได้ในข้อ 4 ให้เป็นกบรูปต้นแบบ ดังตัวอย่าง

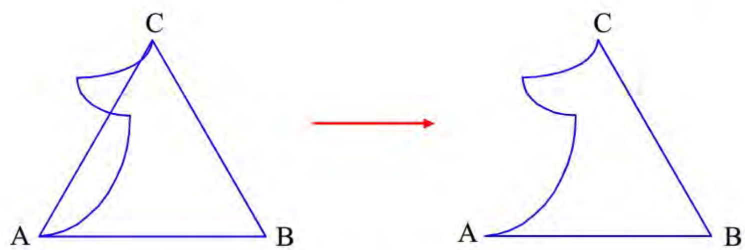
6. ใช้กระดาษลอกลายลอกรูปกบซึ่งเป็นรูปต้นแบบ ไปเขียนเป็นเทสเซลเลชันที่ใช้การเลื่อนขนานดังรูป



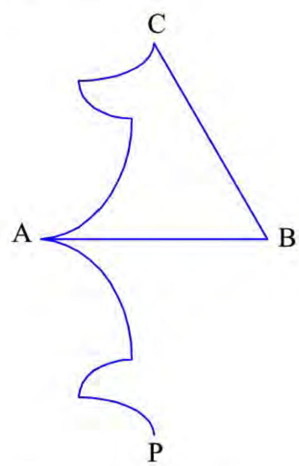
รูปหล่อของใคร

ให้นักเรียนทำเทสเซลเลชันโดยใช้การสะท้อนและการเลื่อนขนานตามกิจกรรมต่อไปนี้

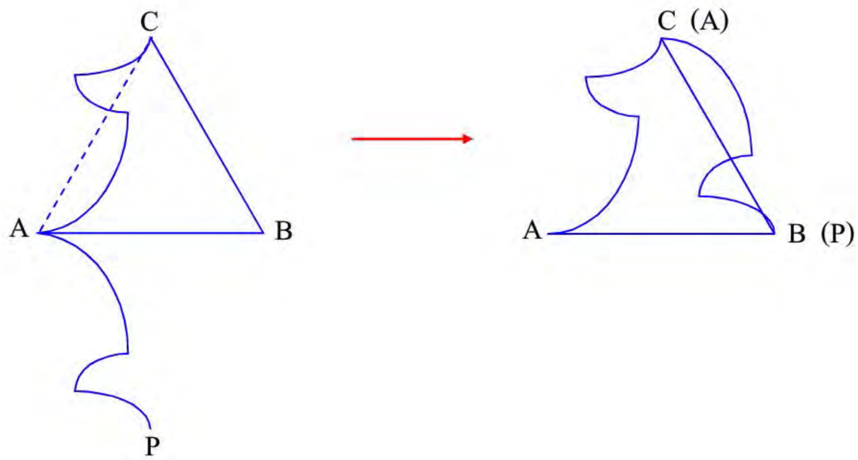
1. เขียนรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ABC และเขียนเส้นโค้งบนด้าน AC ดังรูป



2. สะท้อนเส้นโค้ง AC ด้วยเส้นสะท้อน AB จะได้เส้นโค้ง AP เป็นภาพที่ได้จาก การสะท้อนเส้นโค้ง AC ดังรูป



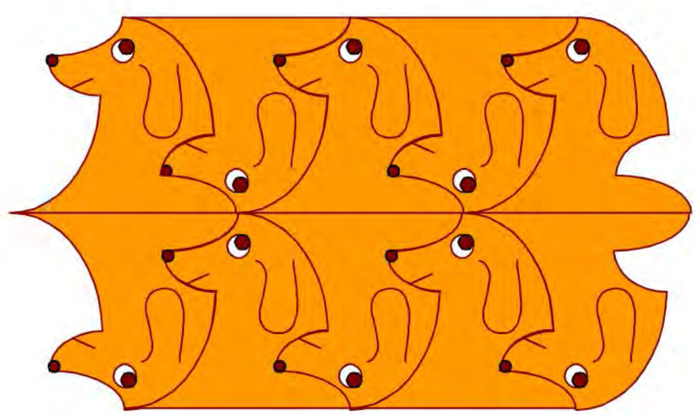
3. เลื่อนขนานเส้นโค้ง AP ด้วย $\overrightarrow{AC}$ และได้เส้นโค้ง CB เป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนาน เส้นโค้ง AP ดังรูป



เราจะใช้รูปสุดท้ายในข้อนี้ เป็นโครงร่างของสุนัขที่จะนำไปใช้เป็นรูปต้นแบบต่อไป

4. เขียนลวดลายบนโครงร่างของสุนัขที่ได้ในข้อ 3 ให้เป็นสุนัขรูปต้นแบบ ดังตัวอย่าง

5. ใช้กระดาษลอกลายลอกรูปสุนัข ซึ่งเป็นรูปต้นแบบไปเขียนเป็นเทสเซลเลชันที่ใช้การสะท้อน ดังรูป

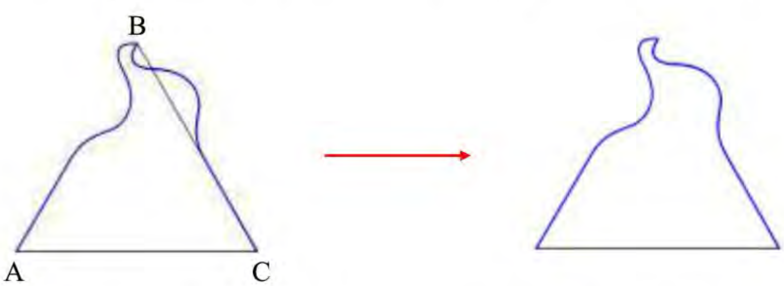


นกสวยของเธอ

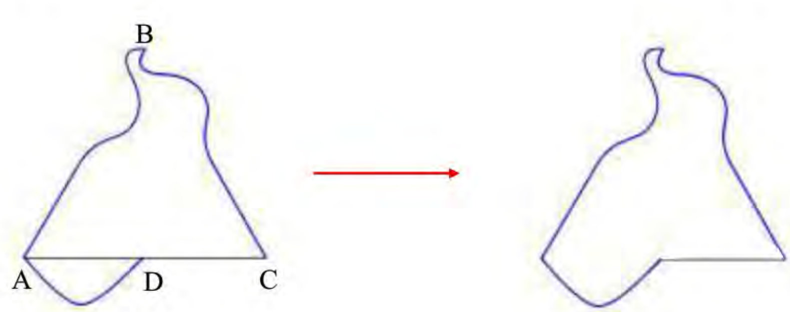
ให้นักเรียนทำเทสเซลเลชันโดยใช้การหมุนตามกิจกรรมต่อไปนี้

1. เขียนรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ABC และเขียนเส้นโค้งบนด้าน AB ดังรูป

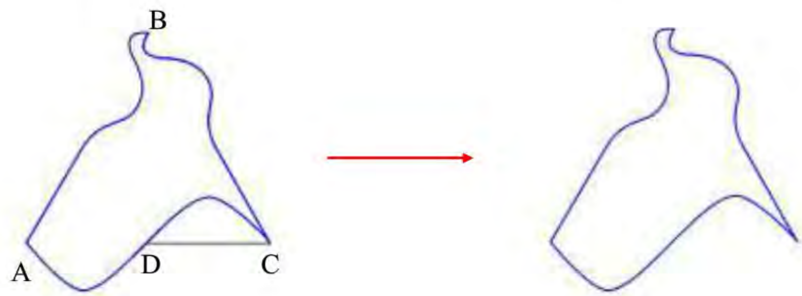
2. หมุนเส้นโค้ง AB รอบจุด B ทวนเข็มนาฬิกาด้วยขนาดของมุม 60 องศา หรือเท่ากับ $A\hat{B}C$ จะได้เส้นโค้ง BC เป็นภาพที่ได้จากการหมุนเส้นโค้ง AB ดังรูป



3. เขียนจุด D เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AC แล้วเขียนเส้นโค้ง AD ดังรูป

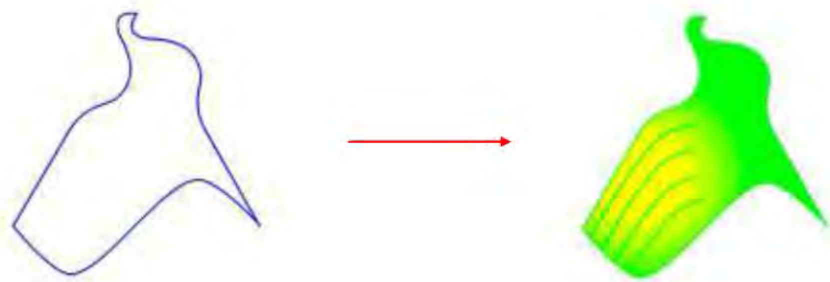


4. หมุนเส้นโค้ง AD รอบจุด D ทวนเข็มนาฬิกาด้วยขนาดของมุม 180 องศา จะได้เส้นโค้ง DC เป็นภาพที่ได้จากการหมุนเส้นโค้ง AD ดังรูป

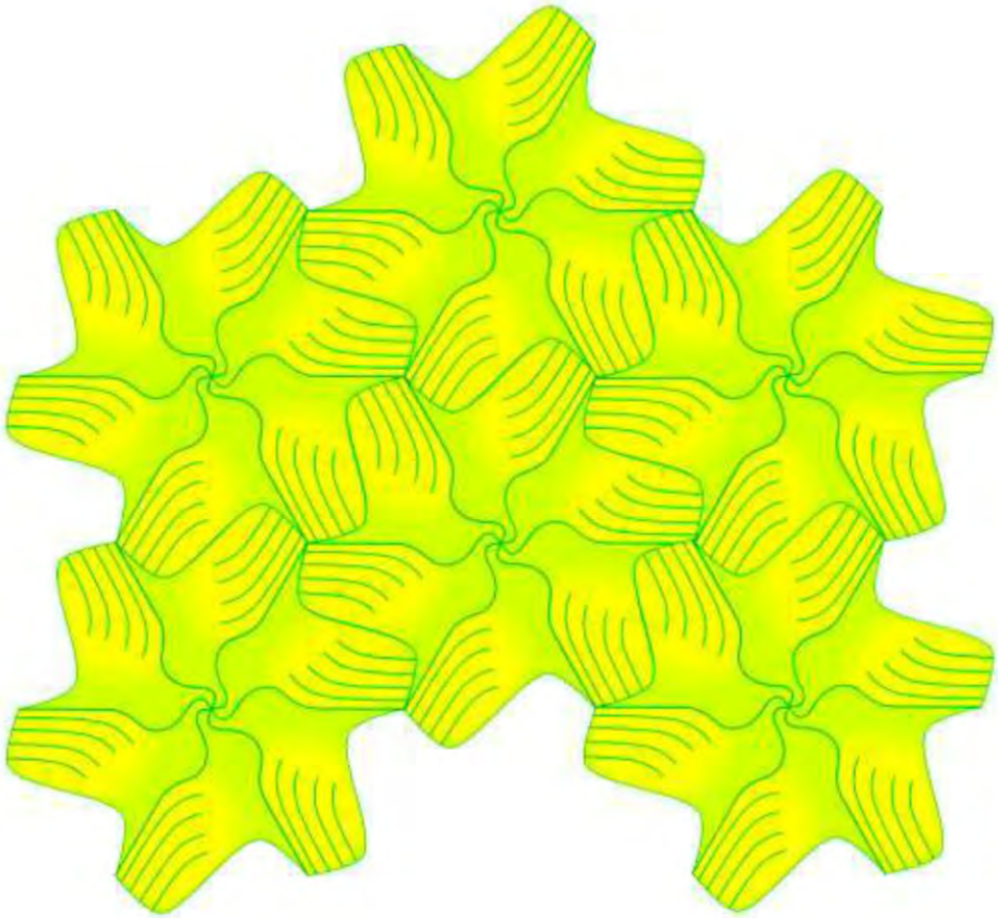


เราจะใช้รูปสุดท้ายในข้อนี้ เป็นโครงร่างของนกที่จะนำไปใช้เป็นรูปต้นแบบต่อไป

5. เขียนลวดลายบนโครงร่างของนกที่ได้ในข้อ 4 ให้เป็นนกรูปต้นแบบ ดังตัวอย่าง



6. ใช้กระดาษลอกลายลอกรูปนกซึ่งเป็นรูปต้นแบบ ไปเขียนเทสเซลเลชันที่ใช้การหมุน ดังรูป



แบบฝึกหัด 4.4

1. จงทำเทสเซลเลชันปกติมา 1 แบบ ลงในกรอบรูปสี่เหลี่ยมขนาดประมาณ 8×12 ตารางเซนติเมตร
2. จงออกแบบรูปต้นแบบโดยใช้การแปลงทางเรขาคณิตที่เรียนมาหนึ่งแบบ แล้วนำไปสร้างเทสเซลเลชันในพื้นที่ขนาดประมาณ 10×15 ตารางเซนติเมตร

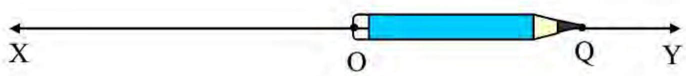
หมุนดินสอแล้วได้อะไร

ให้นักเรียนพิจารณาการหมุน และการเลื่อนขนานของดินสอในกิจกรรมต่อไปนี้

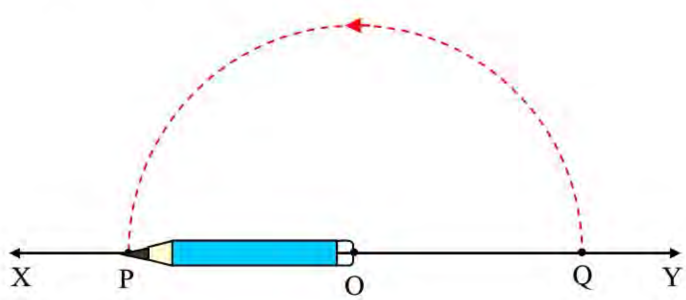
กิจกรรมที่ 1 ขนาดของมุม

กำหนดให้ จุด O เป็นจุดหมุนอยู่บน $\overleftrightarrow{XY}$

ขั้นที่ 1 วางดินสอบน $\overleftrightarrow{XY}$ ให้ปลายดินสอด้านยางลบอยู่ที่จุดหมุน O จะได้ปลายแหลมของดินสออยู่ทางขวามือที่จุด Q



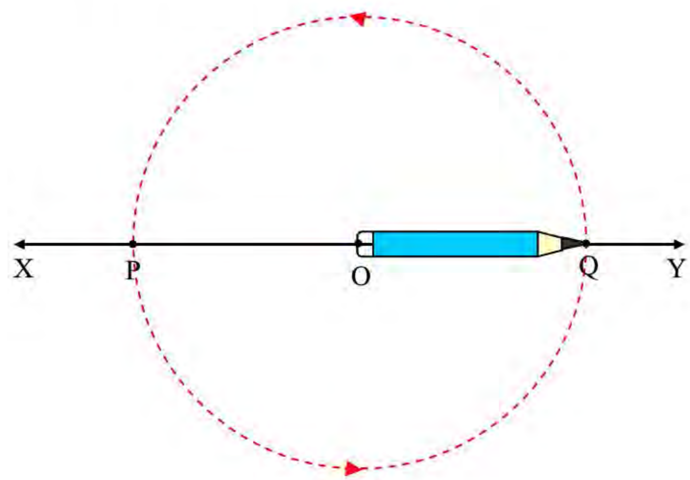
ขั้นที่ 2 เมื่อหมุนดินสอทวนเข็มนาฬิกาด้วยมุมขนาด 180 องศา จะได้ปลายแหลมของดินสอกลับมาอยู่ทางซ้ายมือที่จุด P ดังรูป



ในขั้นนี้แสดงว่า มีการหมุนรอบจุด O เพียงครึ่งรอบ ซึ่งจะได้ $P\hat{O}Q = 180^\circ$

นั่นคือ เมื่อปลายแหลมของดินสอหมุนกลับมาอยู่ทางซ้ายมือทิศตรงข้าม จะเป็นการหมุนด้วยมุมขนาด 180°

ขั้นที่ 3 เมื่อหมุนดินสอทวนเข็มนาฬิกาต่อไปอีกด้วยมุมขนาด 180° จะได้ปลายแหลมของดินสอกลับมาอยู่ทางขวามือเหมือนรูปตั้งต้นในขั้นที่ 1



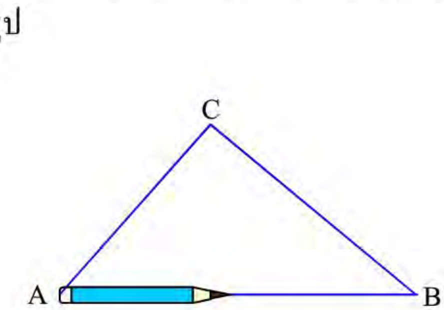
ในขั้นนี้แสดงว่า มีการหมุนรอบจุด O ครบหนึ่งรอบ ซึ่งจะได้ขนาดของมุมรอบจุด O เท่ากับ 360°

นั่นคือ เมื่อปลายแหลมของดินสอ หันมาอยู่ในทิศทางเดิม จะเป็นการหมุนด้วยมุมขนาด 360°

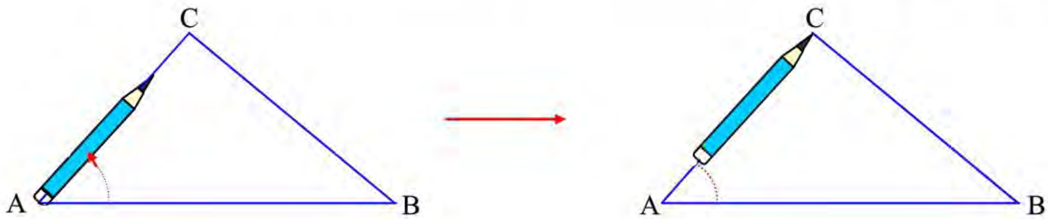
กิจกรรมที่ 2 ขนาดของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยม

กำหนดรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งให้เป็น ΔABC

วางดินสอบนด้าน AB ให้ปลายดินสอด้านยางลบอยู่ที่จุด A จะได้ปลายแหลมของดินสออยู่ทางขวามือ ดังรูป



ขั้นที่ 1 วัดขนาดของมุม A โดยหมุนดินสอที่จุดหมุน A ทวนเข็มนาฬิกา ด้วยขนาดของ $B\hat{A}C$ แล้วเลื่อนขนานดินสอไปตามแนว $\overline{AC}$ ให้ปลายแหลมของดินสอไปอยู่ที่จุด C ดังรูป



ขั้นที่ 2 วัดขนาดของมุม C โดยหมุนดินสอที่จุดหมุน C ทวนเข็มนาฬิกาด้วยขนาดของ $A\hat{C}B$ แล้วเลื่อนขนานดินสอไปตามแนว $\overline{CB}$ ให้ปลายดินสอด้านยางลบไปอยู่ที่จุด B ดังรูป

ขั้นที่ 3 วัดขนาดของมุม B โดยหมุนดินสอที่จุดหมุน B ทวนเข็มนาฬิกาด้วยขนาดของ $C\hat{B}A$ แล้วเลื่อนขนานดินสอไปตามแนว $\overline{BA}$ ให้ปลายแหลมของดินสอไปอยู่ที่จุด A ดังรูป

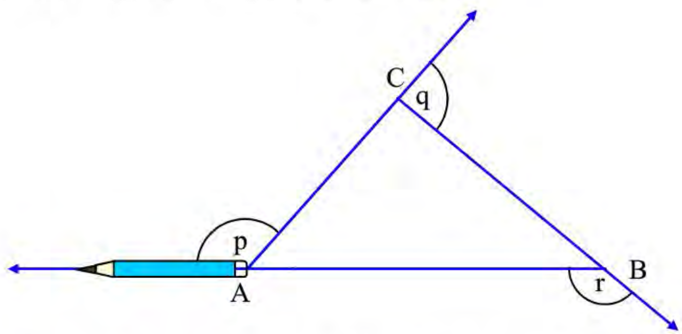
จากขั้นตอนนี้ นักเรียนจะพบว่ารูปสุดท้าย ดินสอกลับมาอยู่ที่จุดเริ่มต้น A แต่ปลายแหลมของดินสอกลับมาอยู่ทางซ้ายมือทิศตรงข้าม

จากขั้นตอนทั้งสามจะได้ $B\hat{A}C + A\hat{C}B + C\hat{B}A = 180^{\circ}$

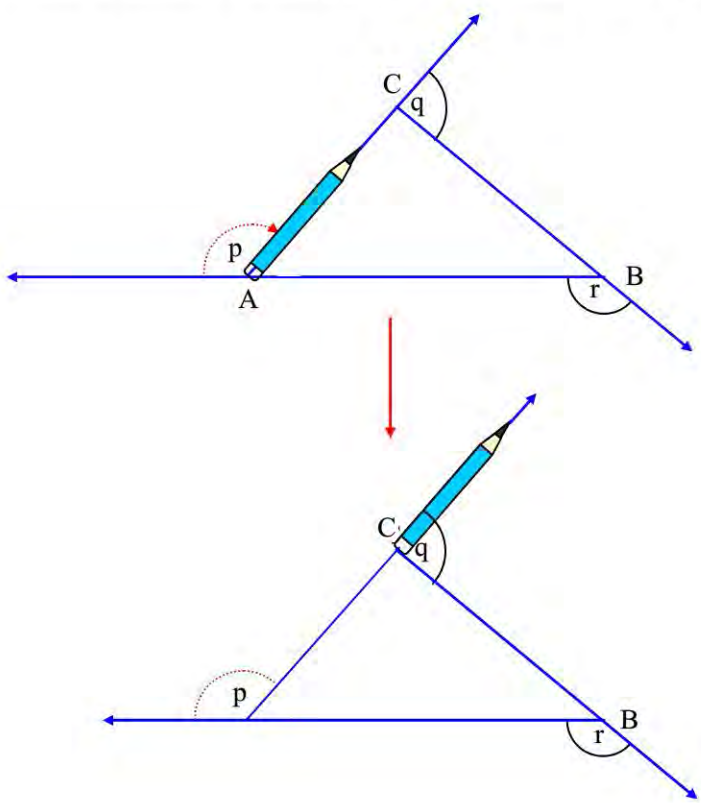
แสดงว่า ผลบวกของขนาดของมุมภายในของ ΔABC เท่ากับ 180 องศา

กิจกรรมที่ 3 ขนาดของมุมภายนอกของรูปสามเหลี่ยม

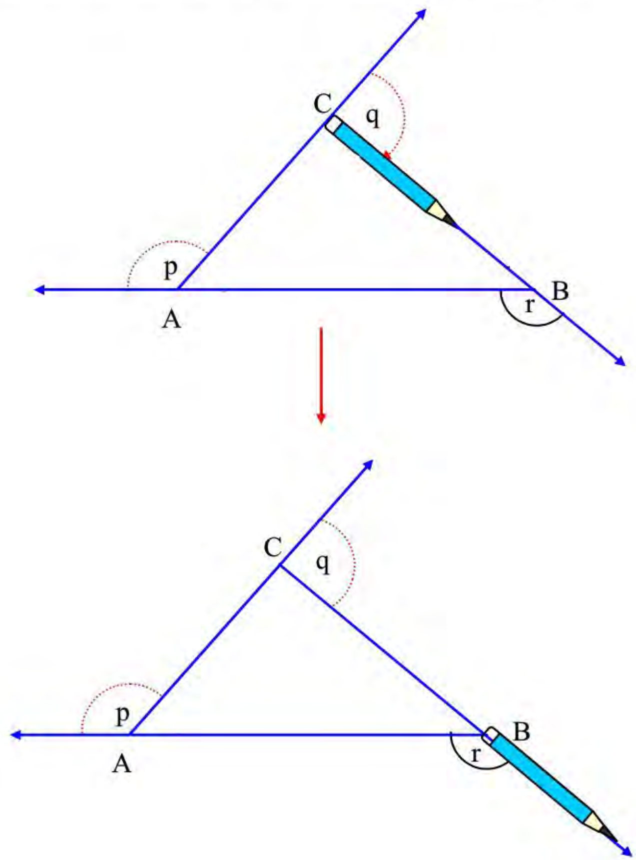
กำหนดให้ ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง มี $\hat{p}$, $\hat{q}$ และ $\hat{r}$ เป็นมุมภายนอกของรูปสามเหลี่ยม ABC ดังรูป วางดินสอบนด้าน $\overrightarrow{BA}$ ให้ปลายดินสอด้านยางลบอยู่ที่จุดหมุน A และปลายแหลมของดินสอหันไปทาง $\overrightarrow{BA}$



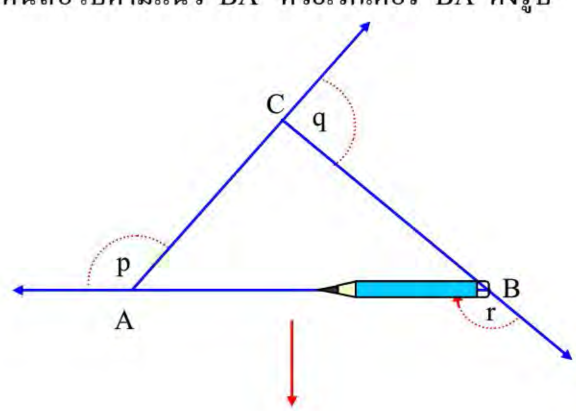
ขั้นที่ 1 วัดขนาดของมุม p โดยหมุนดินสอที่จุดหมุน A ตามเข็มนาฬิกา ด้วยขนาดของ $\hat{p}$ แล้วเลื่อนขนานดินสอไปตามแนว $\overrightarrow{AC}$ ด้วยเวกเตอร์ AC ดังรูป

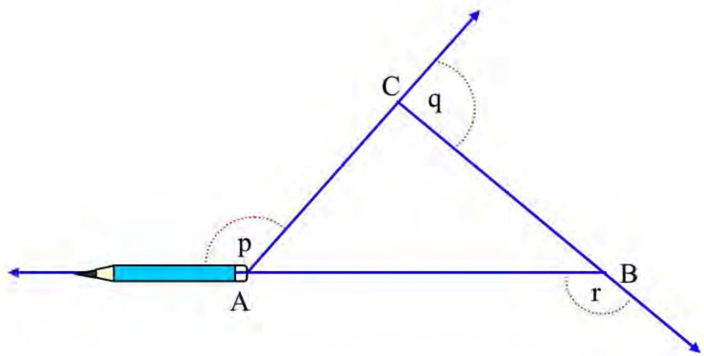


ขั้นที่ 2 วัดขนาดของมุม q โดยหมุนดินสอที่จุดหมุน C ตามเข็มนาฬิกา ด้วยขนาดของ $\hat{q}$ แล้วเลื่อนขนานดินสอไปตามแนว $\overrightarrow{CB}$ ด้วยเวกเตอร์ CB ดังรูป



ขั้นที่ 3 วัดขนาดของมุม r โดยหมุนดินสอที่จุดหมุน B ตามเข็มนาฬิกา ด้วยขนาดของ $\hat{r}$ แล้วเลื่อนขนานดินสอไปตามแนว $\overrightarrow{BA}$ ด้วยเวกเตอร์ BA ดังรูป





จากขั้นตอนนี้นักเรียนจะพบว่า รูปสุดท้ายปลายดินสอด้านยางลบอยู่ที่จุดหมุน A และปลายแหลมของดินสอหันไปทาง $\overrightarrow{BA}$ เหมือนรูปในขั้นที่ 1

จากขั้นตอนทั้งสามจะได้ $\hat{p} + \hat{q} + \hat{r} = 360^\circ$

แสดงว่า ผลบวกของขนาดของมุมภายนอกของ ΔABC เท่ากับ 360°

ให้นักเรียนทำกิจกรรมในทำนองเดียวกันนี้เพื่อสำรวจดูว่า ผลบวกของขนาดของมุมภายในและผลบวกของขนาดของมุมภายนอกของรูปหลายเหลี่ยมอื่น ๆ เช่น รูปสี่เหลี่ยม และรูปห้าเหลี่ยม มีขนาดเท่ากับเท่าไร

Tessellation by M. C. Escher

บรรณานุกรม

ศึกษาธิการ, กระทรวง. (2525). **หนังสือประกอบการสอน วิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่หนึ่ง.** กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

ศึกษาธิการ, กระทรวง. (2525). **หนังสือประกอบการสอน วิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่สอง.** กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2536). **คู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์ ค 022 ชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533).** พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2540). **คู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์ ค 011 ชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533).** พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2540). **คู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์ ค 204 ชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533).** พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2540). **หนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เสริมทักษะคณิตศาสตร์ 1 ค 031 ชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533).** พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2541). **คู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์ ค 101 ชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533).** พิมพ์ครั้งที่ 4. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2541). **คู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์ ค 102 ชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533).** พิมพ์ครั้งที่ 4. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

Charles, Randall I., and others. (1995). **Addison – Wesley Mathematics Teacher's Edition Grade 7.** New York, U.S.A. : Addison – Wesley Publishing Company, Inc.

Eichoiz, Robert E., and others. (1995) . **Addison – Wesley Mathematics Teacher's Edition Grade 6.** New York, U.S.A. : Addison – Wesley Publishing Company, Inc.

Fey, James T., and others. (1998). **Covering and Surrounding : Two – Dimensional Measurement.** U.S.A. : Dale Seymour Publications.

Fey, James T., and others. (1998). **Filling and Wrapping : Three - Dimensional Measurement.** U.S.A. : Dale Seymour Publications.

Fey, James T., and others. (1998). **Kaleidoscopes, Hubcaps, and Mirrors : Symmetry and Transformations.** U.S.A. : Dale Seymour Publications.

Jurgensen, Ray C., and others. (1994). **Geometry.** Boston, MA. U.S.A. : Houghton Mifflin Company.

Munem, M.A., and Joulis D.J., (1982). **College Algebra with Application.** New York, U.S.A. : Worth Publishers. Inc.

Rising, Gerald R., and others. (1989). **Houghton Mifflin Unified Mathematics, Book 2.** Boston, MA. U.S.A. : Houghton Mifflin Company.

Serra, Michael. (1993). **Discovering Geometry An Inductive Approach.** : Berkeley, U.S.A. : Key Curriculum Press.

ภาคผนวก

บัญชีศัพท์

บทที่ 1

เลขยกกำลัง	power
เลขชี้กำลัง	exponent
ฐาน	base
สัญกรณ์วิทยาศาสตร์	scientific notation

บทที่ 2

เศษส่วนของพหุนาม	fractional polynomial

บทที่ 3

อัตราส่วน	ratio
ร้อยละ เปอร์เซ็นต์	percent
สัดส่วน	proportion

บทที่ 4

การเลื่อนขนาน	translation
การสะท้อน	reflection
การหมุน	rotation
เวกเตอร์	vector
ความเท่ากันทุกประการ	congruence
เส้นสะท้อน	reflection line

รูปสมมาตร (บนเส้น)	symmetric figure (with respect to a line)
แกนสมมาตร	axis of symmetry
กฎของสเนลล์	Snell's Law
จุดหมุน	center of the rotation
เทสเซลเลชัน	tessellation

บัญชีสัญลักษณ์

a : b	a ต่อ b
%	เปอร์เซ็นต์
$\cong$	เท่ากันทุกประการ

คณะกรรมการจัดทำสื่อการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

นางปิยรัตน์ จาตุรันตบุตร	สถาบันราชภัฏสวนดุสิต
นางสาวลัดดาวัลย์ เพ็ญสุภา	มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์
นายปรีชา เนาว์เย็นผล	มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช
นางสาวอัมพร ม้าคนอง	จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
นายสมนึก บุญพาไสว	มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานคร
นางจรรยา ภูอุดม	โรงเรียนดอนเมืองจาตุรจินดา
นางสาวกัลยาณี แคนยุกต์	โรงเรียนบดินทร์เดชา (สิงห์ สิงหเสนี)
นางสุวรรณา คล้ายกระแส	ข้าราชการบำนาญ
นางยุพิน พิพิธกุล	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางจารุนี สูตะบุตร	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นายสมพล เล็กสกุล	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางอารียา สุวรรณคำ	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางเจริญศรี จันไพบูลย์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวจันทร์เพ็ญ ชุมคช	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวจารุวรรณ แสงทอง	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวปานทอง กุลนาถศิริ	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางชุลีพร สุภธีระ	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางชมัยพร ตั้งตน	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวรจนา รัตนานิคม	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาววันดี ตีระสหกุล	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวดนิตา ชื่นอารมณ์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวพิลาลักษณ์ ทองทิพย์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

คณะบรรณาธิการ

นางยุพิน พิพิธกุล

นางจารุนี สูตะบุตร

นายสมพล เล็กสกุล

นางปิยรัตน์ จาตุรันตบุตร

นางสาวจารุวรรณ แสงทอง

นางชุลีพร สุภธีระ

คณะบรรณาธิการดำเนินงานปรับปรุงหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์

นายดนัย ยังคง

นางสุวรรณา คล้ายกระแส

นางสาวอัมพร ม้าคนอง

นายสมนึก บุญพาไสว

นางชมัยพร ตั้งตน

นางสาวลัดดาวัลย์ เพ็ญสุภา

นายปรีชา เนาว์เย็นผล

ภาพ

นางวรพรรณ ทิณพงษ์

นางสาวดนพร จรัสแสงสกุล

ผู้จัดพิมพ์ต้นฉบับ

นางสาวเสาวนีย์ ประมูลทรัพย์

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

พค.คณิตฯล.1ม.2

9 789740 195047

ราคา 58.00 บาท

ศึกษาภัณฑ์พาณิชย์

พิมพ์ที่โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว

นายสันติภาพ อินทรพัฒน์ ผู้พิมพ์และผู้โฆษณา

๕๔๐๐๐๑๒

www.suksapan.or.th