หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม

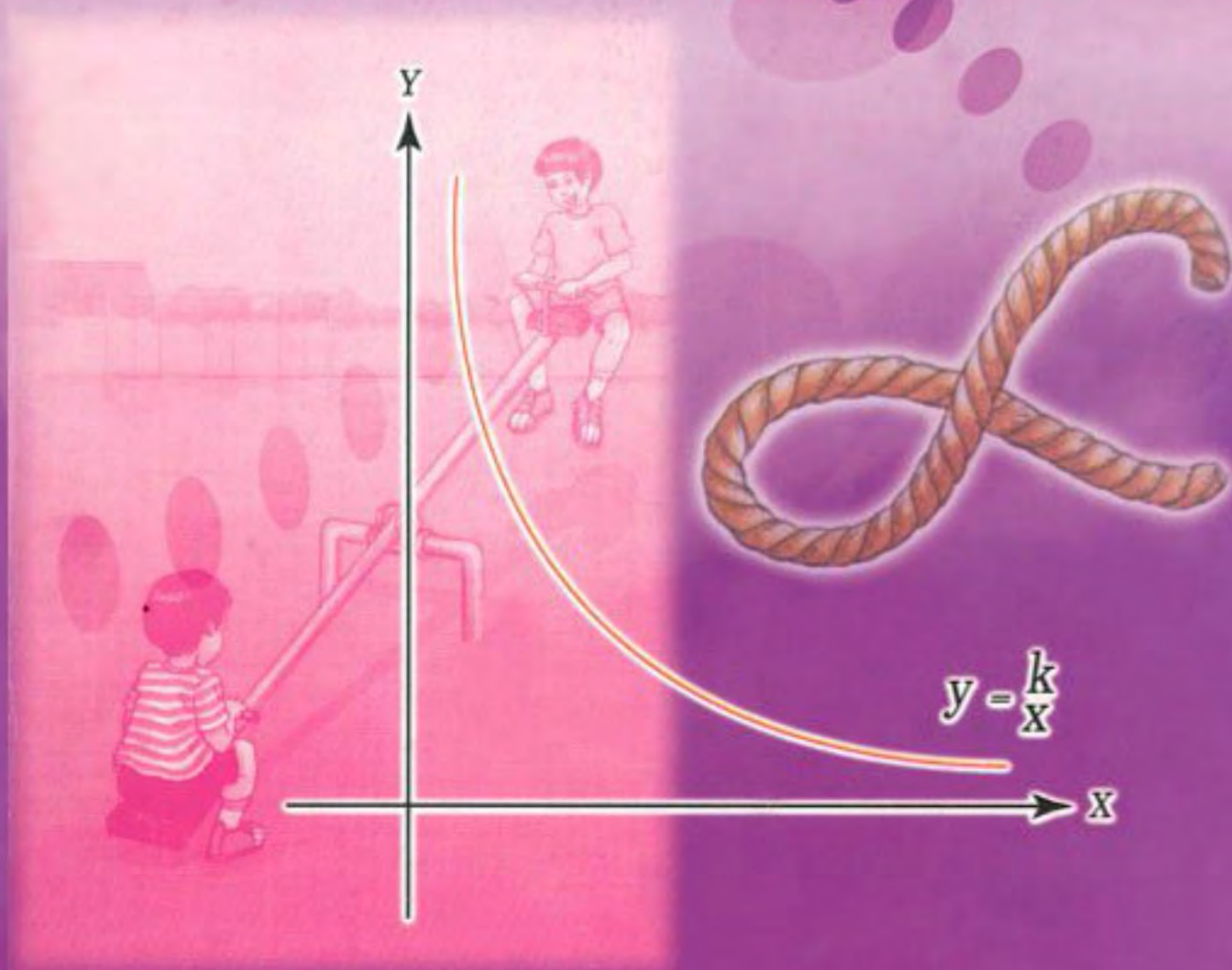
ฉบับคู่มือครู

คณิตศาสตร์ เล่ม ๒

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๒

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑



๔๒.-

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม
คณิตศาสตร์ เล่ม ๒
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๒

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑

จัดทำโดย

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

กระทรวงศึกษาธิการ

ISBN 978 - 974 - 01 - 9505 - 4

พิมพ์ครั้งที่หนึ่ง ๕๐๐,๐๐๐ เล่ม

พ.ศ. ๒๕๕๔

องค์การค้าของ สกสค. จัดพิมพ์จำหน่าย

พิมพ์ที่โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว

๒๒๔๙ ถนนลาดพร้าว วังทองหลาง กรุงเทพมหานคร

ประกาศสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน
เรื่อง อนุญาตให้ใช้สื่อการเรียนรู้ในสถานศึกษา

ด้วยสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน ได้มอบหมายให้ สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีจัดทำโครงสร้างหลักสูตรรายวิชาเพิ่มเติม และจัดทำหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม ๒ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๒ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐานได้พิจารณาแล้ว อนุญาตให้ใช้ในสถานศึกษาได้

ประกาศ ณ วันที่ ๑๕ ธันวาคม พ.ศ. ๒๕๕๓

(นายชินภัทร ภูมิรัตน)
เลขาธิการคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน

คำนำ

หนังสือเรียน รายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม ๒ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๒ นี้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ จัดทำขึ้นโดยสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ซึ่งได้จัดทำโครงสร้างหลักสูตรรายวิชาเพิ่มเติม ที่ประกอบด้วย โครงสร้างรายวิชาเพิ่มเติมและคำอธิบายรายวิชาที่มีทั้งผลการเรียนรู้และสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม เพื่อให้สถานศึกษาได้เทียบเคียงกับหลักสูตรของสถานศึกษา และพิจารณาเลือกใช้หนังสือนี้ประกอบการจัดการเรียนรู้ ให้สอดคล้องกับหลักสูตรสถานศึกษาของตนได้ตามความเหมาะสม ซึ่งสถานศึกษาสามารถใช้เป็นแนวทางในการออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้ ให้ความรู้ความเข้าใจผู้เรียนนำไปสู่ทักษะการคิดวิเคราะห์ สังเคราะห์ ตามความสามารถและความแตกต่างระหว่างบุคคลของผู้เรียนได้ในการจัดทำหนังสือเล่มนี้ ได้รับความช่วยเหลือจากคณาจารย์ ผู้ทรงคุณวุฒิ ผู้เชี่ยวชาญด้านคณิตศาสตร์จากสถาบันต่างๆ ทั้งภาครัฐและเอกชนเป็นอย่างดี

สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน หวังเป็นอย่างยิ่งว่าหนังสือเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการจัดการเรียนรู้ เพื่อประยุกต์ใช้พัฒนาการเรียนรู้ของผู้เรียนได้อย่างเหมาะสม ขอขอบคุณสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ตลอดจนบุคคลและหน่วยงานที่มีส่วนเกี่ยวข้องในการจัดทำหนังสือไว้ ณ โอกาสนี้

(นายชินภัทร ภูมิรัตน)
เลขาธิการคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน
๑๕ ธันวาคม ๒๕๕๓

คำชี้แจง

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้รับมอบหมายจากกระทรวงศึกษาธิการ ให้พัฒนาหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ กลุ่มสาระการเรียนรู้วิทยาศาสตร์ รวมทั้งสาระการออกแบบและ เทคโนโลยีและสาระเทคโนโลยีสารสนเทศในกลุ่มสาระการเรียนรู้การงานอาชีพและเทคโนโลยี ตลอดจนจัดทำสื่อการเรียนรู้ตามหลักสูตรดังกล่าว

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ สำหรับระดับมัธยมศึกษาตอนต้น มีด้วยกันทั้งหมด 6 เล่ม จัดทำขึ้นเพื่อให้ผู้เรียนสามารถเรียนรู้และพัฒนาตนเอง นำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปพัฒนาชีวิต และเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตลอดจนศาสตร์อื่นๆ ในระดับที่สูงขึ้น ทั้งนี้สถานศึกษาสามารถปรับใช้เนื้อหาจากหนังสือเรียนทั้ง 6 เล่มนี้ เพื่อจัดการเรียนการสอนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ได้ตามความเหมาะสม

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ประกอบด้วยเรื่องการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสอง สมการกำลังสองตัวแปรเดียวการแปรผัน ซึ่งเป็นเนื้อหาสาระตามมาตรฐานการเรียนรู้ตามที่กำหนดไว้ในหลักสูตร อย่างไรก็ตามผู้สอนสามารถปรับบทเรียนให้เหมาะสมกับศักยภาพของผู้เรียนแต่ละกลุ่ม

การจัดทำหนังสือเรียนคณิตศาสตร์เล่มนี้ สสวท. ได้รับความร่วมมืออย่างดียิ่งจากคณาจารย์ ผู้ทรงคุณวุฒิ นักวิชาการ และครูผู้สอน จากหลายหน่วยงาน ทั้งภาครัฐและเอกชน สสวท. จึงขอขอบคุณทุกท่านไว้ ณ ที่นี้ และหวังเป็นอย่างยิ่งว่าหนังสือเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการศึกษาคณิตศาสตร์ อันเป็นรากฐานสำคัญของการพัฒนาทรัพยากรมนุษย์ของชาติต่อไป หากมีข้อเสนอแนะใดที่จะทำให้หนังสือเรียนเล่มนี้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น โปรดแจ้งให้สาขาคณิตศาสตร์มัธยมศึกษา สสวท. ทราบด้วย จักขอบคุณยิ่ง

(นางพรพรรณ ไวทยางกูร)
ผู้อำนวยการ
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

สารบัญ

บทที่ 1
การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสอง

นักเรียนเคยรู้จักพหุนามและการหาผลบวก ผลลบ ผลคูณและผลหารของพหุนามมาแล้ว ในบทนี้จะกล่าวถึงการแยกตัวประกอบของพหุนามซึ่งสัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์เป็น**จำนวนเต็ม** เช่น $4x^2 + 12x$, $4mn - 10m^2n^2$ และ $-y^2 + 7y - 10$

ให้นักเรียนพิจารณาการคูณของพหุนามต่อไปนี้

1. $2(x + 3) \quad = \quad 2x + 6$
2. $-x(3x - 4) \quad = \quad -3x^2 + 4x$
3. $5xy(x + 2y) \quad = \quad 5x^2y + 10xy^2$
4. $(x + 1)(x + 3) \quad = \quad x^2 + 4x + 3$
5. $(m + 4)(2m - 3) \quad = \quad 2m^2 + 5m - 12$
6. $4(x - 5)(x - 2) \quad = \quad 4x^2 - 28x + 40$

เราอาจเขียนผลคูณของพหุนามข้างต้นได้ใหม่ โดยใช้สมบัติของการเท่ากันได้ดังนี้

1. $2x + 6 \quad = \quad 2(x + 3)$
2. $-3x^2 + 4x \quad = \quad -x(3x - 4)$
3. $5x^2y + 10xy^2 \quad = \quad 5xy(x + 2y)$
4. $x^2 + 4x + 3 \quad = \quad (x + 1)(x + 3)$
5. $2m^2 + 5m - 12 \quad = \quad (m + 4)(2m - 3)$
6. $4x^2 - 28x + 40 \quad = \quad 4(x - 5)(x - 2)$

การเขียนพหุนามที่กำหนดให้ ให้อยู่ในรูปการคูณของพหุนามตั้งแต่สองพหุนามขึ้นไป ดังข้างต้น เป็นตัวอย่างของการแยกตัวประกอบของพหุนามที่กำหนดให้

การเขียนพหุนามที่กำหนดให้ ในรูปการคูณกันของพหุนามที่มีดีกรีต่ำกว่าตั้งแต่สอง พหุนามขึ้นไป หรือเขียนพหุนามที่กำหนดให้ในรูปที่ง่ายกว่า เรียกว่า **การแยกตัวประกอบของพหุนาม**

พิจารณาการแยกตัวประกอบของพหุนามจากตัวอย่างต่อไปนี้

1. $2x + 6 = 2(x + 3)$

   จะเห็นว่า $2x + 6$ เป็นพหุนามดีกรีหนึ่ง 2 เป็นพหุนามดีกรีศูนย์ และ $x + 3$ เป็นพหุนามดีกรีหนึ่งซึ่งเท่ากับดีกรีของ $2x + 6$ และถือว่า $2(x + 3)$ เป็นรูปที่ง่ายกว่า $2x + 6$

   ทั้ง 2 และ $x + 3$ ต่างหาร $2x + 6$ ลงตัว เรียก 2 และ $x + 3$ ว่า **ตัวประกอบ**ของ $2x + 6$

2. $x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$

   จะเห็นว่า $x^2 + 4x + 3$ เป็นพหุนามดีกรีสอง $x + 1$ และ $x + 3$ ต่างเป็นพหุนามดีกรีหนึ่ง ซึ่งต่ำกว่าดีกรีของ $x^2 + 4x + 3$

   ทั้ง $x + 1$ และ $x + 3$ ต่างหาร $x^2 + 4x + 3$ ลงตัว เรียก $x + 1$ และ $x + 3$ ว่า **ตัวประกอบ**ของ $x^2 + 4x + 3$

3. $4x^2 - 28x + 40 = 4(x - 5)(x - 2)$

   จะเห็นว่า $4x^2 - 28x + 40$ เป็นพหุนามดีกรีสอง 4 เป็นพหุนามดีกรีศูนย์ $x - 5$ และ $x - 2$ ต่างเป็นพหุนามดีกรีหนึ่ง ซึ่ง 4, $x - 5$ และ $x - 2$ มีดีกรีต่ำกว่าดีกรีของ $4x^2 - 28x + 40$

   ทั้ง 4, $x - 5$ และ $x - 2$ ต่างหาร $4x^2 - 28x + 40$ ลงตัว เรียก 4, $x - 5$ และ $x - 2$ ว่า **ตัวประกอบ**ของ $4x^2 - 28x + 40$

จากตัวอย่างข้อ 3 ถ้าเขียน $4x^2 - 28x + 40 = 4(x^2 - 7x + 10)$ ยังไม่ถือว่าเป็นการแยกตัวประกอบของ $4x^2 - 28x + 40$ ถึงแม้ว่า $4(x^2 - 7x + 10)$ จะเป็นรูปที่ง่ายกว่าของ $4x^2 - 28x + 40$ ก็ตาม ทั้งนี้เพราะยังสามารถแยกตัวประกอบของ $x^2 - 7x + 10$ ได้เป็น $x^2 - 7x + 10 = (x - 5)(x - 2)$

จากตัวอย่างข้างต้นจะเห็นว่า การแยกตัวประกอบของพหุนามที่แต่ละพจน์มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม อาจทำโดยวิธีใดวิธีหนึ่งต่อไปนี้หรือทั้งสองวิธีผสมกัน

1. ใช้สมบัติการแจกแจงโดยนำ ห.ร.ม. ของค่าสัมบูรณ์ของสัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์ในพหุนามออกมาเป็นตัวประกอบของพหุนามที่กำหนดให้
2. เขียนพหุนามที่กำหนดให้ในรูปการคูณกันของพหุนามที่มีดีกรีต่ำกว่า

1.1 การแยกตัวประกอบโดยใช้สมบัติการแจกแจง

สมบัติการแจกแจงกล่าวว่า ถ้า a, b และ c แทนจำนวนเต็มใด ๆ แล้ว

$a(b + c) = ab + ac$ หรือ $(b + c)a = ba + ca$

เราอาจเขียนสมบัติการแจกแจงข้างต้นใหม่ เป็นดังนี้

$ab + ac = a(b + c)$ หรือ $ba + ca = (b + c)a$

ถ้า a, b และ c เป็นพหุนาม เราก็สามารถใช้สมบัติการแจกแจงข้างต้นได้ด้วย และเรียก a ว่า ตัวประกอบร่วมของ ab และ ac หรือตัวประกอบร่วมของ ba และ ca

พิจารณาวิธีการแยกตัวประกอบของ $15x^2y - 18xy^2$ โดยใช้สมบัติการแจกแจง ดังนี้

$15x^2y - 18xy^2 = 3(5x^2y - 6xy^2)$

3 เป็น ห.ร.ม. ของ 15 และ 18

$= 3 \times x \times (5xy - 6y^2)$

x เป็นตัวประกอบร่วมของ $5x^2y$ และ $6xy^2$

$= 3 \times x \times y \times (5x - 6y)$

y เป็นตัวประกอบร่วมของ $5xy$ และ $6y^2$

$= 3xy(5x - 6y)$

ดังนั้น $15x^2y - 18xy^2 = 3xy(5x - 6y)$

ตัวอย่างที่ 1 จงแยกตัวประกอบของ $5xy + 6x^2$

วิธีทำ $5xy + 6x^2 = x(5y + 6x)$

ตรวจสอบว่า การแยกตัวประกอบนี้ถูกต้อง โดยหาผลคูณ $x(5y + 6x)$ ซึ่งจะต้องเท่ากับ $5xy + 6x^2$

ตัวอย่างที่ 2 จงแยกตัวประกอบของ $12y^2z + 20yz$

วิธีทำ $12y^2z + 20yz = 4yz(3y + 5)$

ตรวจสอบว่า การแยกตัวประกอบนี้ถูกต้อง โดยหาผลคูณ $4yz(3y + 5)$ ซึ่งจะต้องเท่ากับ $12y^2z + 20yz$

ตัวอย่างที่ 3 จงแยกตัวประกอบของ $16x^3y^3 - 24x^4y$

วิธีทำ $16x^3y^3 - 24x^4y = 8x^3y(2y^2 - 3x)$

ตรวจสอบว่า การแยกตัวประกอบนี้ถูกต้อง โดยหาผลคูณ $8x^3y(2y^2 - 3x)$ ซึ่งจะต้องเท่ากับ $16x^3y^3 - 24x^4y$

แบบฝึกหัด 1.1 ก

จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้

1. $10x + 4$
2. $7x - 14$
3. $-9x + 3$
4. $-8 - 12x$
5. $14y + 26z$
6. $x^2 + 13x$
7. $3z^2 - 2z$
8. $5y^2 - 20y$
9. $12xz - 16z$
10. $33y^2 - 11yz$
11. $15x^2y + 5x$
12. $6xy - 8xy^2$
13. $x^3 + x$
14. $y^3 + 4y$
15. $9y^2z^2 - 6yz$
16. $21x^3y^2 - 28x^2y^3$
17. $-7x^2z^3 + 63xz^5$
18. $24x^4z^2 + 18x^3z^3$
19. $30x^2y^3 + 36x^3y^2 - 6x^3y^3$
20. $24xz^2 - 27x^2z^3 + 9x^3z^4$

ในการแยกตัวประกอบของพหุนามที่มีหลายพจน์ นอกจากจะใช้สมบัติการแจกแจงแล้ว อาจต้องใช้สมบัติการสลับที่และสมบัติการเปลี่ยนหมู่ประกอบด้วย ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 4 จงแยกตัวประกอบของ $ab - 2ac + bc - 2c^2$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} ab - 2ac + bc - 2c^2 &= (ab - 2ac) + (bc - 2c^2) \\ &= a(b - 2c) + c(b - 2c) \\ &= (b - 2c)(a + c) \end{aligned}$$

$b - 2c$ เป็นตัวประกอบร่วม

ดังนั้น $ab - 2ac + bc - 2c^2 = (b - 2c)(a + c)$

ตัวอย่างที่ 5 จงแยกตัวประกอบของ $5x^2z - 3y + 5yz - 3x^2$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} 5x^2z - 3y + 5yz - 3x^2 &= 5x^2z - 3x^2 + 5yz - 3y \\ &= (5x^2z - 3x^2) + (5yz - 3y) \\ &= x^2(5z - 3) + y(5z - 3) \\ &= (5z - 3)(x^2 + y) \end{aligned}$$

$5z - 3$ เป็นตัวประกอบร่วม

ดังนั้น $5x^2z - 3y + 5yz - 3x^2 = (5z - 3)(x^2 + y)$

ตัวอย่างที่ 6 จงแยกตัวประกอบของ $mr^2 - 3mp + 15np - 5nr^2$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} mr^2 - 3mp + 15np - 5nr^2 &= mr^2 - 3mp - 5nr^2 + 15np \\ &= (mr^2 - 3mp) - (5nr^2 - 15np) \\ &= m(r^2 - 3p) - 5n(r^2 - 3p) \\ &= (r^2 - 3p)(m - 5n) \end{aligned}$$

$r^2 - 3p$ เป็นตัวประกอบร่วม

ดังนั้น $mr^2 - 3mp + 15np - 5nr^2 = (r^2 - 3p)(m - 5n)$

แบบฝึกหัด 1.1 ข

จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้

1. $m(n + 3) + 5(n + 3)$
2. $(x + y)z - (x + y)$
3. $4t(a + b) - s(a + b)$
4. $(4y^2 + 3)y + 6(4y^2 + 3)$
5. $a(b - 3c) + x(b - 3c)$
6. $ax + by + bx + ay$
7. $5a - 10x + ab - 2bx$
8. $na + 3b + nb + 3a$
9. $xy - st - xt + sy$
10. $n^2m + n^2p - 8m - 8p$
11. $ab^2 - cb^2 - 6a + 6c$
12. $2x^3 - x + 14x^2 - 7$
13. $a^2 - 2b - 5a^3 + 10ab$
14. $x^3 - x^3z + y^2z - y^2$

1.2 การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการแยกตัวประกอบของพหุนามที่มีดีกรีสองและมีตัวแปรเดียว ที่แต่ละพจน์มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม เช่น

$$3x^2 + 4x + 5$$

$$2x^2 - 6x - 1$$

$$x^2 - 9$$

$$y^2 + 3y - 7$$

$$-y^2 + 8y$$

พหุนามข้างต้นเป็นตัวอย่างของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว

พหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวคือ พหุนามที่เขียนได้ในรูป $ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b, c เป็นค่าคงตัวที่ $a \neq 0$ และ x เป็นตัวแปร

การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองในรูป $ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนเต็ม และ $c = 0$

ในกรณีที่ $c = 0$ พหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวจะอยู่ในรูป $ax^2 + bx$ เราสามารถใช้สมบัติการแจกแจง แยกตัวประกอบของพหุนามในรูปนี้ได้ในลักษณะเดียวกับที่กล่าวมาแล้วในหัวข้อ 1.1

ตัวอย่างที่ 1 จงแยกตัวประกอบของ $x^2 + 2x$

วิธีทำ $x^2 + 2x = x(x + 2)$

ตัวอย่างที่ 2 จงแยกตัวประกอบของ $4x^2 – 20x$

วิธีทำ $4x^2 – 20x = 4x(x – 5)$

ตัวอย่างที่ 3 จงแยกตัวประกอบของ $-15x^2 + 12x$

วิธีทำ $-15x^2 + 12x = -3x(5x – 4)$

หรือ $-15x^2 + 12x = 3x(-5x + 4)$

ตัวอย่างที่ 4 จงแยกตัวประกอบของ $-4x^2 – 6x$

วิธีทำ $-4x^2 – 6x = -2x(2x + 3)$

หรือ $-4x^2 – 6x = 2x(-2x – 3)$

การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองในรูป $ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a = 1$ b และ c เป็นจำนวนเต็ม และ $c \neq 0$

ในกรณีที่ $a = 1$ และ $c \neq 0$ พหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวจะอยู่ในรูป $x^2 + bx + c$ เราสามารถแยกตัวประกอบของพหุนามในรูปนี้ได้โดยอาศัยแนวคิดจากการหาผลคูณของพหุนาม ดังตัวอย่างต่อไปนี้

พิจารณาการหาผลคูณของพหุนามต่อไปนี้

1. $$\begin{aligned}(x+2)(x+3) &= (x+2)(x)+(x+2)(3)\\ &= (x^2+2x)+[3x+(2)(3)]\\ &= x^2+(2x+3x)+(2)(3)\\ &= x^2+(2+3)x+(2)(3)\\ &= x^2+5x+6\end{aligned}$$

ดังนั้น แยกตัวประกอบของ x^2+5x+6 ได้ดังนี้

$$x^2+5x+6 \quad = \quad (x+2)(x+3)$$

จากการหาผลคูณ $(x+2)(x+3)$ ดังกล่าว จะได้ขั้นตอนการแยกตัวประกอบของ x^2+5x+6 โดยทำขั้นตอนย้อนกลับ ดังนี้

$$\begin{aligned}x^2+5x+6 &= x^2+(2+3)x+(2)(3)\\ &= x^2+(2x+3x)+(2)(3)\\ &= (x^2+2x)+[3x+(2)(3)]\\ &= (x+2)x+(x+2)(3)\\ &= (x+2)(x+3)\end{aligned}$$

$2+3 = 5$

$(2)(3) = 6$

นั่นคือ $x^2+5x+6 = (x+2)(x+3)$

ให้สังเกตว่า เราจะแยกตัวประกอบของ x^2+5x+6 ได้ ถ้าเราสามารถหาจำนวนเต็มสองจำนวนที่คูณกันได้เท่ากับพจน์ที่เป็นค่าคงตัวคือ 6 และบวกกันได้เท่ากับสัมประสิทธิ์ของ x คือ 5

2. $$\begin{aligned}(x+4)(x-5) &= (x+4)(x)+(x+4)(-5)\\ &= (x^2+4x)+[(-5)x+(4)(-5)]\\ &= x^2+[4x+(-5)x]+(4)(-5)\\ &= x^2+[4+(-5)]x+(4)(-5)\\ &= x^2+(-1)x+(-20)\\ &= x^2-x-20\end{aligned}$$

ดังนั้น แยกตัวประกอบของ $x^2 - x - 20$ ได้ดังนี้

$$x^2 - x - 20 = (x+4)(x-5)$$

จากการหาผลคูณ $(x+4)(x-5)$ ดังกล่าว จะได้ขั้นตอนการแยกตัวประกอบของ $x^2 - x - 20$ โดยทำขั้นตอนย้อนกลับในทำนองเดียวกับข้อ 1. ดังนี้

$$\begin{aligned}
x^2 - x - 20 &= x^2 + (-1)x + (-20) \\
&= x^2 + [4 + (-5)]x + (4)(-5) \\
&= x^2 + [4x + (-5)x] + (4)(-5) \\
&= (x^2 + 4x) + [(-5)x + (4)(-5)] \\
&= (x+4)x + (x+4)(-5) \\
&= (x+4)[x + (-5)] \\
&= (x+4)(x-5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4 + (-5) &= -1 \\
(4)(-5) &= -20
\end{aligned}$$

นั่นคือ $x^2 - x - 20 = (x+4)(x-5)$

ให้สังเกตเช่นเดียวกันว่า เราจะแยกตัวประกอบของ $x^2 - x - 20$ ได้ ถ้าเราสามารถหาจำนวนเต็มสองจำนวนที่คูณกันได้เท่ากับพจน์ที่เป็นค่าคงตัวคือ -20 และบวกกันได้เท่ากับสัมประสิทธิ์ของ x คือ -1

จากที่กล่าวมาข้างต้นนี้ ถ้าเราต้องการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสอง เช่น $x^2 + 6x + 8$ เราจะต้องหาจำนวนเต็มสองจำนวนที่คูณกันได้ 8 และบวกกันได้ 6 ก่อน ดังนี้

เนื่องจาก $(2)(4) = 8$ และ $2 + 4 = 6$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}
x^2 + 6x + 8 &= x^2 + (2+4)x + (2)(4) \\
&= x^2 + (2x + 4x) + (2)(4) \\
&= (x^2 + 2x) + [4x + (2)(4)] \\
&= (x+2)x + (x+2)(4) \\
&= (x+2)(x+4)
\end{aligned}$$

นั่นคือ $x^2 + 6x + 8 = (x+2)(x+4)$

ในกรณีทั่วไป เราสามารถแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสอง $x^2 + bx + c$ เมื่อ b, c เป็นจำนวนเต็ม และ $c \neq 0$ ได้ ถ้าเราสามารถหา *จำนวนเต็มสองจำนวนที่คูณกันได้เท่ากับพจน์ที่เป็นค่าคงตัวคือ c และบวกกันได้เท่ากับสัมประสิทธิ์ของ x คือ b*

ถ้าให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มสองจำนวน ซึ่ง $mn = c$ และ $m + n = b$ จะได้ว่า

$$x^2 + bx + c = (x + m)(x + n)$$

ตัวอย่างที่ 5 จงแยกตัวประกอบของ $x^2 - 10x + 21$

$c = 21$

$b = -10$

วิธีทำ

เนื่องจาก $(-3)(-7) = 21$

และ $(-3) + (-7) = -10$

ดังนั้น $x^2 - 10x + 21 = [x + (-3)][x + (-7)]$

นั่นคือ $x^2 - 10x + 21 = (x - 3)(x - 7)$

ตัวอย่างที่ 6 จงแยกตัวประกอบของ $x^2 + 5x - 6$

$c = -6$

$b = 5$

วิธีทำ

เนื่องจาก $(-1)(6) = -6$

และ $(-1) + 6 = 5$

ดังนั้น $x^2 + 5x - 6 = [x + (-1)][x + 6]$

นั่นคือ $x^2 + 5x - 6 = (x - 1)(x + 6)$

ตัวอย่างที่ 7 จงแยกตัวประกอบของ $x^2 - 2x - 24$

วิธีทำ

เนื่องจาก $(4)(-6) = -24$

และ $4 + (-6) = -2$

ดังนั้น $x^2 - 2x - 24 = (x + 4)[x + (-6)]$

นั่นคือ $x^2 - 2x - 24 = (x + 4)(x - 6)$

ตัวอย่างที่ 8 จงแยกตัวประกอบของ $x^2 + 2x + 1$

วิธีทำ เนื่องจาก $(1)(1) = 1$

และ $1 + 1 = 2$

ดังนั้น $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)(x + 1)$

ตัวอย่างที่ 9 จงแยกตัวประกอบของ $x^2 - 4x + 4$

วิธีทำ เนื่องจาก $(-2)(-2) = 4$

และ $(-2) + (-2) = -4$

ดังนั้น $x^2 - 4x + 4 = [x + (-2)][x + (-2)]$

นั่นคือ $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)(x - 2)$

ตัวอย่างที่ 10 จงแยกตัวประกอบของ $x^2 - 9$

$c = -9$

$b = 0$

วิธีทำ เนื่องจาก $(-3)(3) = -9$

และ $(-3) + 3 = 0$

ดังนั้น $x^2 - 9 = [x + (-3)](x + 3)$

นั่นคือ $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$

สำหรับพหุนามดีกรีสอง เช่น $x^2 + 3x + 1$ เนื่องจากไม่มีจำนวนเต็มสองจำนวนที่คูณกันได้ 1 และบวกกันได้ 3 ดังนั้น เราจึงไม่สามารถเขียนพหุนาม $x^2 + 3x + 1$ ให้อยู่ในรูปการคูณของพหุนามดีกรีหนึ่งที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม นั่นคือ เราไม่สามารถแยกตัวประกอบของ $x^2 + 3x + 1$ ตามเงื่อนไขดังกล่าวได้

โดยทั่วไปแล้ว ในการแยกตัวประกอบของพหุนาม $x^2 + bx + c$ เมื่อ b, c เป็นจำนวนเต็มและ $c \neq 0$ ถ้าเราไม่สามารถหาจำนวนเต็มสองจำนวนที่คูณกันได้เท่ากับ c และบวกกันได้เท่ากับ b เราก็ไม่สามารถแยกตัวประกอบของ $x^2 + bx + c$ ออกเป็นตัวประกอบที่เป็นพหุนามดีกรีหนึ่งซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม

หาได้หรือไม่

ให้นักเรียนหาจำนวนเต็ม m และ n ที่ทำให้ $m + n = b$ และ $mn = c$ โดยที่ b และ c มีค่าตามที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. $b = 19$ และ $c = 84$
2. $b = -5$ และ $c = -104$
3. $b = 2$ และ $c = -143$
4. $b = -23$ และ $c = 126$
5. $b = 21$ และ $c = 90$
6. $b = -7$ และ $c = -120$
7. $b = -8$ และ $c = -128$
8. $b = -24$ และ $c = 108$
9. $b = -2$ และ $c = -399$
10. $b = -11$ และ $c = -312$

แบบฝึกหัด 1.2 ก

จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้

1. $x^2 - 5x$
2. $3m^2 - 6m$
3. $-2y + y^2$
4. $-5x^2 - 10x$
5. $x^2 + 4x + 3x + 12$
6. $m^2 - 5m + 2m - 10$
7. $x^2 + 9x + 14$
8. $n^2 + 15n + 14$
9. $y^2 + 10y + 24$
10. $x^2 + 7x - 18$
11. $x^2 - 9x + 20$
12. $a^2 - 8a - 9$
13. $b^2 + 9b - 10$
14. $x^2 - 49$
15. $y^2 - 81$
16. $x^2 - 10x + 24$
17. $x^2 - 14x + 24$
18. $a^2 + 11a + 18$

19. $56 + 15a + a^2$	20. $m^2 - 13m + 42$
21. $x^2 - 20x - 21$	22. $x^2 - 15x + 36$
23. $y^2 + 13y + 12$	24. $t^2 - 11t + 30$
25. $a^2 - a - 72$	26. $x^2 - 17x + 70$
27. $y^2 - 18y + 81$	28. $n^2 + 15n - 54$
29. $x^2 - 30x - 99$	30. $y^2 - 729$
31. $m^2 - 22m + 121$	32. $x^2 - 12x - 85$
33. $144 + 24a + a^2$	34. $s^2 + 12s - 189$
35. $961 - m^2$	36. $x^2 - 28x + 195$
37. $225 + 34t + t^2$	38. $y^2 - 2y - 323$
39. $x^2 + 37x + 232$	40. $m^2 - 19m - 372$

การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองในรูป $ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนเต็ม และ $a \neq 0$, $a \neq 1$, $c \neq 0$

เพื่อความสะดวกในการหาข้อสรุปของวิธีการแยกตัวประกอบของพหุนาม $ax^2 + bx + c$ เราจะเรียก ax^2 ว่า*พจน์หน้า* เรียก bx ว่า*พจน์กลาง* และเรียก c ว่า*พจน์หลัง*

พิจารณาการคูณพหุนามดีกรีหนึ่ง ต่อไปนี้โดยใช้สมบัติการแจกแจง

$$\begin{aligned}(2x-3)(3x+1) &= (2x-3)(3x) + (2x-3)(1)\\ &= (6x^2 - 9x) + (2x - 3)\\ &= 6x^2 + (-9x + 2x) - 3\\ &= 6x^2 - 7x - 3\end{aligned}$$

จากการคูณข้างต้น เราอาจเขียนแผนภาพแสดงวิธีหาพจน์หน้า พจน์หลัง และพจน์กลางของพหุนามที่เป็นผลคูณได้ดังนี้

$6x^2$

$(2x - 3)(3x + 1)$

$(2x)(3x) = 6x^2$

จากแผนภาพ แสดงพจน์หน้าของพหุนามในวงเล็บแรกคูณกับพจน์หน้าของพหุนามในวงเล็บหลัง ได้พจน์หน้าของพหุนามที่เป็นผลคูณ

$$\overset{-3}{(2x - 3)(3x + 1)}$$

$$(-3)(1) = -3$$

จากแผนภาพ แสดงพจน์หลังของพหุนามในวงเล็บแรกคูณกับพจน์หลังของพหุนามในวงเล็บหลัง ได้พจน์หลังของพหุนามที่เป็นผลคูณ

$$\underset{2x}{\overset{-9x}{(2x - 3)(3x + 1)}}$$

$$\begin{aligned}(2x)(1) + (-3)(3x) &= 2x + (-9x)\\ &= -7x\end{aligned}$$

จากแผนภาพ แสดงผลคูณระหว่างพจน์หน้าของพหุนามในวงเล็บแรกกับพจน์หลังของพหุนามในวงเล็บหลัง บวกกับผลคูณระหว่างพจน์หลังของพหุนามในวงเล็บแรกกับพจน์หน้าของพหุนามในวงเล็บหลัง ได้พจน์กลางของพหุนามที่เป็นผลคูณ

ดังนั้นในการแยกตัวประกอบของ $6x^2 - 7x - 3$ จะทำดังนี้

1. หาพหุนามดีกรีหนึ่งสองพหุนามที่คูณกันแล้วได้พจน์หน้าคือ $6x^2$ ซึ่งอาจเป็น $2x$ กับ $3x$ หรือ x กับ $6x$ เขียนสองพหุนามนั้นเป็นพจน์หน้าของพหุนามในวงเล็บสองวงเล็บ ดังนี้

   $(2x \quad\quad)(3x \quad\quad)$ หรือ $(x \quad\quad)(6x \quad\quad)$

2. หาจำนวนสองจำนวนที่คูณกันแล้วได้พจน์หลังคือ -3 ซึ่งอาจเป็น 3 กับ -1 หรือ -3 กับ 1 แล้วเขียนจำนวนทั้งสองนี้เป็นพจน์หลังของพหุนามในแต่ละวงเล็บที่ได้ในข้อ 1 ซึ่งทำให้เกิดกรณีที่ต้องพิจารณา 8 กรณี ดังนี้

1) $(2x + 3)(3x - 1)$	2) $(2x - 1)(3x + 3)$
3) $(2x - 3)(3x + 1)$	4) $(2x + 1)(3x - 3)$
5) $(x + 3)(6x - 1)$	6) $(x - 1)(6x + 3)$
7) $(x - 3)(6x + 1)$	8) $(x + 1)(6x - 3)$

3. นำผลที่ได้ในข้อ 2 มาหาพจน์กลางทีละกรณี จนกว่าจะได้พจน์กลางเป็น $-7x$ ดังนี้

$9x$

1) $(2x + 3)(3x - 1)$ ได้พจน์กลางเป็น $9x + (-2x) = 7x$

$-2x$

$-3x$

2) $(2x - 1)(3x + 3)$ ได้พจน์กลางเป็น $(-3x) + 6x = 3x$

$6x$

$-9x$

3) $(2x - 3)(3x + 1)$ ได้พจน์กลางเป็น $(-9x) + 2x = -7x$

$2x$

จะเห็นว่าเมื่อถึงกรณี 3) จะได้พจน์กลางของพหุนามที่เป็นผลคูณเท่ากับ $-7x$ ดังนั้น ไม่ต้องพิจารณากรณีอื่น ๆ อีก

นั่นคือแยกตัวประกอบของพหุนาม $6x^2 - 7x - 3$ ได้ดังนี้

$$6x^2 - 7x - 3 = (2x - 3)(3x + 1)$$

ตัวอย่างที่ 11 จงแยกตัวประกอบของ $8x^2 - 26x + 15$

วิธีทำ $8x^2 - 26x + 15 = (2x - 5)(4x - 3)$

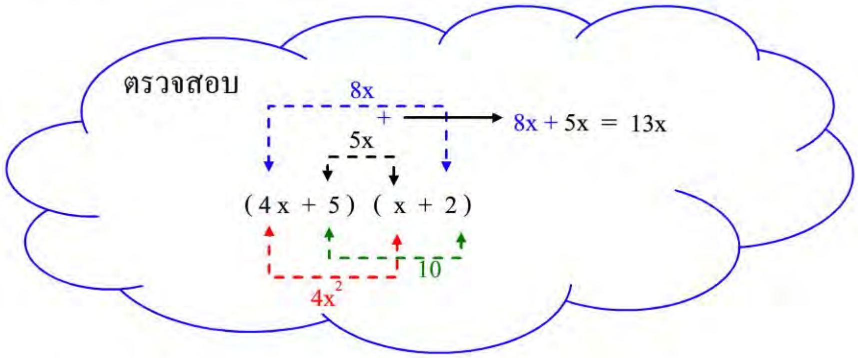
ตรวจสอบ

$(2x)(4x) = 8x^2$ และ $(-5)(-3) = 15$

$(2x)(-3) + (-5)(4x) = -6x + (-20x) = -26x$

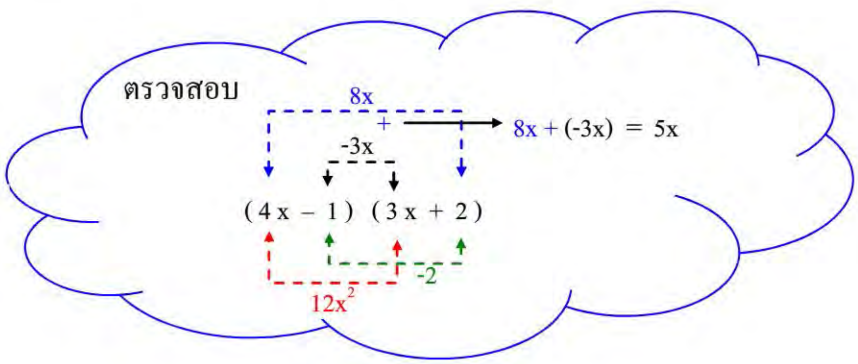
ตัวอย่างที่ 12 จงแยกตัวประกอบของ $4x^2 + 13x + 10$

วิธีทำ $4x^2 + 13x + 10 \;=\; (4x + 5)(x + 2)$



ตัวอย่างที่ 13 จงแยกตัวประกอบของ $12x^2 + 5x - 2$

วิธีทำ $12x^2 + 5x - 2 \;=\; (4x - 1)(3x + 2)$



ตัวอย่างที่ 14 จงแยกตัวประกอบของ $6x^2 - 10x - 4$

วิธีทำ

วิธีที่ 1 $6x^2 - 10x - 4 \;=\; 2(3x^2 - 5x - 2)$

ดังนั้น $6x^2 - 10x - 4 \;=\; 2(3x + 1)(x - 2)$

วิธีที่ 2 $6x^2 - 10x - 4 \;=\; (3x + 1)(2x - 4)$

ดังนั้น $6x^2 - 10x - 4 \;=\; 2(3x + 1)(x - 2)$

วิธีที่ 3 $6x^2 - 10x - 4 = (6x + 2)(x - 2)$

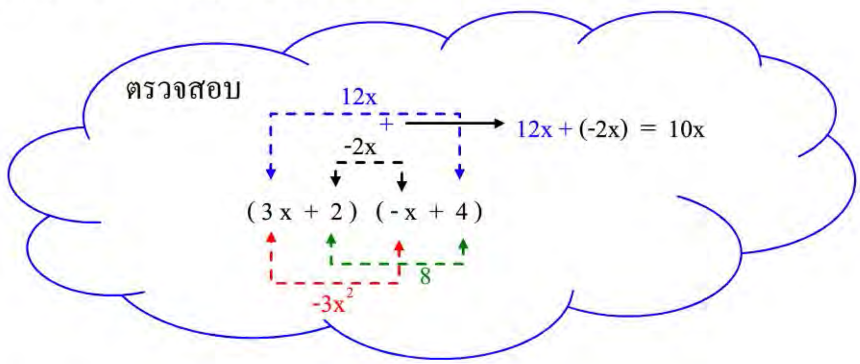
ดังนั้น $6x^2 - 10x - 4 = 2(3x + 1)(x - 2)$

การแยกตัวประกอบของพหุนามในตัวอย่างที่ 14 อาจใช้วิธีที่ 1 หรือวิธีที่ 2 หรือวิธีที่ 3 ก็ได้ แต่วิธีที่ 1 เป็นวิธีที่ง่ายกว่า

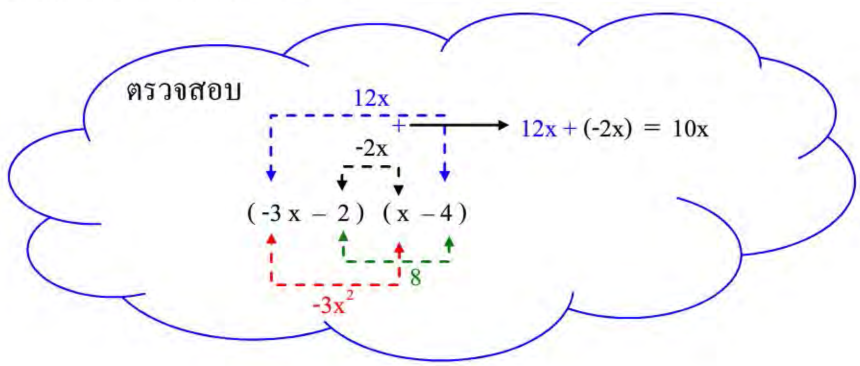
ตัวอย่างที่ 15 จงแยกตัวประกอบของ $-3x^2 + 10x + 8$

วิธีทำ

วิธีที่ 1 $-3x^2 + 10x + 8 = (3x + 2)(-x + 4)$



หรือ $-3x^2 + 10x + 8 = (-3x - 2)(x - 4)$



วิธีที่ 2 เนื่องจาก $-3x^2 + 10x + 8 = (-1)(3x^2 - 10x - 8)$

$= (-1)(3x + 2)(x - 4)$

ดังนั้น $-3x^2 + 10x + 8 = (3x + 2)(-x + 4)$

หรือ $-3x^2 + 10x + 8 = (-3x - 2)(x - 4)$

แบบฝึกหัด 1.2 ข

จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้

1. $3x^2 - 4x$
2. $4y^2 + 12y$
3. $6m^2 - 4m$
4. $3x^2 - 27$
5. $2x^2 - 2x - 4$
6. $2a^2 + 6a + 4$
7. $3x^2 - 6x - 9$
8. $6y^2 - y - 12$
9. $9y^2 - 6y + 1$
10. $6a^2 + a - 12$
11. $6a^2 + 17a + 12$
12. $5x^2 + 14x - 3$
13. $6 - 7x + x^2$
14. $4 + 10x + 6x^2$
15. $4x^2 + 16x - 9$
16. $9y^2 - 12y - 5$
17. $5x^2 + 4x - 1$
18. $12a^2 - a - 35$
19. $16y^2 - 8y + 1$
20. $4y^2 - 36$
21. $9a^2 - 64$
22. $15x^2 + 8x - 7$
23. $7a^2 + 49a + 84$
24. $35m^2 + 18m - 8$
25. $4 + 10x - 6x^2$
26. $9 - 42y + 49y^2$
27. $35 - 26b + 3b^2$
28. $4z^2 - 28z + 49$
29. $-12a^2 - 20a - 7$
30. $10 - 19x - 15x^2$
31. $6b^2 - 38b + 56$
32. $7m^2 + 72m - 55$
33. $20a^2 + 77a + 18$
34. $3x^2 - 40x + 117$
35. $-10x^2 + 81x - 45$
36. $13y^2 + 69y - 54$

1.3 การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์

พิจารณาการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองต่อไปนี้

1. $x^2 + 6x + 9 \quad = \quad (x + 3)(x + 3)$

   หรือ $x^2 + 6x + 9 \quad = \quad (x + 3)^2$

2. $x^2 - 8x + 16 \quad = \quad (x - 4)(x - 4)$

   หรือ $x^2 - 8x + 16 \quad = \quad (x - 4)^2$

3. $4x^2 + 4x + 1 \quad = \quad (2x + 1)(2x + 1)$

   หรือ $4x^2 + 4x + 1 \quad = \quad (2x + 1)^2$

4. $9x^2 - 24x + 16 \quad = \quad (3x - 4)(3x - 4)$

   หรือ $9x^2 - 24x + 16 \quad = \quad (3x - 4)^2$

ทุกพหุนามที่กำหนด
เขียนได้เป็นกำลังสองของ
พหุนามดีกรีหนึ่ง

จากตัวอย่างการแยกตัวประกอบของพหุนามทั้งสี่ข้อข้างต้น จะเห็นว่า การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองในแต่ละข้อ จะได้ตัวประกอบเป็นพหุนามดีกรีหนึ่งที่ซ้ำกัน จึงเขียนการแยกตัวประกอบของแต่ละพหุนามดีกรีสองข้างต้น ได้เป็นกำลังสองของพหุนามดีกรีหนึ่ง เรียกพหุนามดีกรีสองที่มีลักษณะเช่นนี้ว่า พหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์

พหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ดังตัวอย่างข้างต้น มีลักษณะพิเศษที่สังเกตได้ดังนี้

1. $$\begin{aligned} x^2 + 6x + 9 &= x^2 + 2(3)x + 3^2 \\ &= (x + 3)^2 \end{aligned}$$

   ถ้าให้ x เป็นพจน์หน้าและ 3 เป็นพจน์หลัง จะเขียนความสัมพันธ์ได้ดังนี้

   $$(\text{พจน์หน้า})^2 + 2(\text{พจน์หน้า})(\text{พจน์หลัง}) + (\text{พจน์หลัง})^2 = (\text{พจน์หน้า} + \text{พจน์หลัง})^2$$

2. $$\begin{aligned} x^2 - 8x + 16 &= x^2 - 2(4)x + 4^2 \\ &= (x - 4)^2 \end{aligned}$$

   ถ้าให้ x เป็นพจน์หน้าและ 4 เป็นพจน์หลัง จะเขียนความสัมพันธ์ได้ดังนี้

   $$(\text{พจน์หน้า})^2 - 2(\text{พจน์หน้า})(\text{พจน์หลัง}) + (\text{พจน์หลัง})^2 = (\text{พจน์หน้า} - \text{พจน์หลัง})^2$$

3. $4x^2 + 4x + 1 = (2x)^2 + 2(2x)(1) + 1^2$

$= (2x + 1)^2$

ถ้าให้ 2x เป็นพจน์หน้าและ 1 เป็นพจน์หลัง จะเขียนความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$(\text{พจน์หน้า})^2 + 2(\text{พจน์หน้า})(\text{พจน์หลัง}) + (\text{พจน์หลัง})^2 = (\text{พจน์หน้า} + \text{พจน์หลัง})^2$

4. $9x^2 - 24x + 16 = (3x)^2 - 2(3x)(4) + 4^2$

$= (3x - 4)^2$

ถ้าให้ 3x เป็นพจน์หน้าและ 4 เป็นพจน์หลัง จะเขียนความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$(\text{พจน์หน้า})^2 - 2(\text{พจน์หน้า})(\text{พจน์หลัง}) + (\text{พจน์หลัง})^2 = (\text{พจน์หน้า} - \text{พจน์หลัง})^2$

ในกรณีทั่วไป ถ้าให้ A แทนพจน์หน้า และ B แทนพจน์หลังจะแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ได้ตามสูตร ดังนี้

$$A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$$
$$A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$$

พิจารณาการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ โดยใช้สูตรข้างต้น เมื่อให้ A และ B เป็นเอกนาม ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงแยกตัวประกอบของ $x^2 + 24x + 144$

วิธีทำ $x^2 + 24x + 144 = x^2 + 2(12)x + (12)^2$

ดังนั้น $x^2 + 24x + 144 = (x + 12)^2$

ตัวอย่างที่ 2 จงแยกตัวประกอบของ $x^2 + 30x + 225$

วิธีทำ $x^2 + 30x + 225 = x^2 + 2(15)x + (15)^2$

ดังนั้น $x^2 + 30x + 225 = (x + 15)^2$

ตัวอย่างที่ 3 จงแยกตัวประกอบของ $x^2 - 26x + 169$

วิธีทำ $x^2 - 26x + 169 = x^2 - 2(13)x + (13)^2$

ดังนั้น $x^2 - 26x + 169 = (x - 13)^2$

ตัวอย่างที่ 4 จงแยกตัวประกอบของ $x^2 - 32x + 256$

วิธีทำ $x^2 - 32x + 256 = x^2 - 2(16)x + (16)^2$

ดังนั้น $x^2 - 32x + 256 = (x - 16)^2$

ตัวอย่างที่ 5 จงแยกตัวประกอบของ $25x^2 + 20x + 4$

วิธีทำ $25x^2 + 20x + 4 = (5x)^2 + 2(5x)(2) + 2^2$

ดังนั้น $25x^2 + 20x + 4 = (5x + 2)^2$

ตัวอย่างที่ 6 จงแยกตัวประกอบของ $4x^2 - 12x + 9$

วิธีทำ $4x^2 - 12x + 9 = (2x)^2 - 2(2x)(3) + 3^2$

ดังนั้น $4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$

แบบฝึกหัด 1.3 ก

1. จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้

1) $x^2 + 12x + 36$	2) $x^2 + 16x + 64$
3) $x^2 + 34x + 289$	4) $x^2 + 40x + 400$
5) $x^2 + 46x + 529$	6) $x^2 - 10x + 25$
7) $x^2 - 28x + 196$	8) $x^2 - 36x + 324$
9) $x^2 - 52x + 676$	10) $x^2 - 60x + 900$

2. จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้

1) $9x^2 + 30x + 25$	2) $16x^2 + 56x + 49$
3) $49x^2 + 42x + 9$	4) $100x^2 + 220x + 121$
5) $81x^2 + 360x + 400$	6) $4x^2 - 36x + 81$
7) $49y^2 - 70y + 25$	8) $64y^2 - 176y + 121$
9) $81x^2 - 180x + 100$	10) $225x^2 - 360x + 144$

เราสามารถใช้สูตร

$$A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$$

$$A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$$

ในกรณีที่ A และ B เป็นพหุนาม ในการแยกตัวประกอบ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 7 จงแยกตัวประกอบของ $(x + 1)^2 + 14(x + 1) + 49$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} (x + 1)^2 + 14(x + 1) + 49 &= (x + 1)^2 + 2(x + 1)(7) + 7^2 \\ &= [(x + 1) + 7]^2 \end{aligned}$$

A คือ $x + 1$
B คือ 7

ดังนั้น $(x + 1)^2 + 14(x + 1) + 49 = (x + 8)^2$

ตัวอย่างที่ 8 จงแยกตัวประกอบของ $4x^2 - 4(x^2 - 3x) + (x - 3)^2$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} 4x^2 - 4(x^2 - 3x) + (x - 3)^2 &= (2x)^2 - 4x(x - 3) + (x - 3)^2 \\ &= (2x)^2 - 2(2x)(x - 3) + (x - 3)^2 \\ &= [2x - (x - 3)]^2 \\ &= (2x - x + 3)^2 \end{aligned}$$

A คือ $2x$
B คือ $x - 3$

ดังนั้น $4x^2 - 4(x^2 - 3x) + (x - 3)^2 = (x + 3)^2$

จำไว้ใช้

จากสูตร $A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$ เรียก $(A + B)^2$ ว่าผลบวกทั้งหมดยกกำลังสอง

และ $A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$ เรียก $(A - B)^2$ ว่าผลต่างทั้งหมดยกกำลังสอง

เพื่อให้ง่ายต่อการจดจำในการนำไปใช้ อาจจำย่อ ๆ ดังนี้

$(\text{หน้า})^2 + 2\text{หน้าหลัง} + (\text{หลัง})^2 = (\text{หน้า} + \text{หลัง})^2$

และ $(\text{หน้า})^2 - 2\text{หน้าหลัง} + (\text{หลัง})^2 = (\text{หน้า} - \text{หลัง})^2$

แบบฝึกหัด 1.3 ข

จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้

1. $(x-2)^2 + 12(x-2) + 36$
2. $(2x+1)^2 + 20(2x+1) + 100$
3. $(x+3)^2 - 16(x+3) + 64$
4. $(4x-5)^2 - 26(4x-5) + 169$
5. $36(x+6)^2 + 108(x+6) + 81$
6. $9(x-1)^2 - 30(x-1) + 25$
7. $16x^2 + 8x(x+1) + (x+1)^2$
8. $(x-3)^2 - 12x(x-3) + 36x^2$
9. $49x^2 + 14(x^2-x) + (x-1)^2$
10. $(x+2)^2 - 18(x^2+2x) + 81x^2$

ทำได้ไหม

พิจารณาการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่มีสองตัวแปรและเป็นกำลังสองสมบูรณ์จากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง

1. $9x^2 + 12xy + 4y^2 = (3x)^2 + 2(3x)(2y) + (2y)^2 = (3x+2y)^2$
2. $36x^2 - 12xy + y^2 = (6x)^2 - 2(6x)(y) + y^2 = (6x-y)^2$

ตัวอย่างข้างต้นแสดงการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่มีสองตัวแปรและเป็นกำลังสองสมบูรณ์ ซึ่งทำได้เช่นเดียวกันกับพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ โดยใช้สูตรดังนี้

$(\text{หน้า})^2 + 2\text{หน้า}\text{หลัง} + (\text{หลัง})^2 = (\text{หน้า} + \text{หลัง})^2$

และ $(\text{หน้า})^2 - 2\text{หน้า}\text{หลัง} + (\text{หลัง})^2 = (\text{หน้า} - \text{หลัง})^2$

ให้นักเรียนแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้

1) $4x^2 + 4xy + y^2$
2) $m^2 + 44mn + 484n^2$
3) $100x^2 + 60xy + 9y^2$
4) $81t^2 + 90tk + 25k^2$
5) $x^2 - 16xy + 64y^2$
6) $9x^2 - 6xy + y^2$
7) $25m^2 - 40mn + 16n^2$
8) $36x^2 - 84xy + 49y^2$

1.4 การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่เป็นผลต่างของกำลังสอง

พิจารณาการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองต่อไปนี้

1. $x^2 - 25 = x^2 - 5^2$

$= (x + 5)(x - 5)$

2. $36x^2 - 49 = (6x)^2 - 7^2$

$= (6x + 7)(6x - 7)$

จากตัวอย่างการแยกตัวประกอบของพหุนามทั้งสองข้างต้น จะเห็นว่าการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองในแต่ละข้อ จะได้ตัวประกอบเป็นพหุนามดีกรีหนึ่งที่มีพจน์เหมือนกัน แต่มีเครื่องหมายระหว่างพจน์ต่างกัน เรียกพหุนามดีกรีสองที่มีลักษณะเช่นนี้ว่า พหุนามดีกรีสองที่เป็นผลต่างของกำลังสอง

พหุนามดีกรีสองที่เป็นผลต่างของกำลังสองดังตัวอย่างข้างต้น มีลักษณะพิเศษที่สังเกตได้ดังนี้

1. $x^2 - 25 = x^2 - 5^2$

$= (x + 5)(x - 5)$

ถ้าให้ x เป็นพจน์หน้าและ 5 เป็นพจน์หลัง จะเขียนความสัมพันธ์ได้ดังนี้

(พจน์หน้า)^2 – (พจน์หลัง)^2 = (พจน์หน้า + พจน์หลัง)(พจน์หน้า – พจน์หลัง)

2. $36x^2 - 49 = (6x)^2 - 7^2$

$= (6x + 7)(6x - 7)$

ถ้าให้ 6x เป็นพจน์หน้าและ 7 เป็นพจน์หลัง จะเขียนความสัมพันธ์ได้ดังนี้

(พจน์หน้า)^2 – (พจน์หลัง)^2 = (พจน์หน้า + พจน์หลัง)(พจน์หน้า – พจน์หลัง)

ในกรณีทั่วไป ถ้าให้ A แทนพจน์หน้า และ B แทนพจน์หลัง จะแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่เป็นผลต่างของกำลังสองได้ตามสูตร ดังนี้

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$$

เราสามารถใช้สูตรนี้ ในกรณีที่ A และ B เป็นพหุนาม ในการแยกตัวประกอบได้ด้วย

ตัวอย่างที่ 1 จงแยกตัวประกอบของ $x^2 - 121$

วิธีทำ $x^2 - 121 = x^2 - 11^2$

ดังนั้น $x^2 - 121 = (x + 11)(x - 11)$

ตัวอย่างที่ 2 จงแยกตัวประกอบของ $16x^2 - 81$

วิธีทำ $16x^2 - 81 = (4x)^2 - 9^2$

ดังนั้น $16x^2 - 81 = (4x + 9)(4x - 9)$

ตัวอย่างที่ 3 จงแยกตัวประกอบของ $49x^2 - 196$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} 49x^2 - 196 &= (7x)^2 - 14^2 \\ &= (7x + 14)(7x - 14) \\ &= 7(x + 2)(7)(x - 2) \end{aligned}$$

ดังนั้น $49x^2 - 196 = 49(x + 2)(x - 2)$

ตัวอย่างที่ 4 จงแยกตัวประกอบของ $(x + 1)^2 - 36$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} (x + 1)^2 - 36 &= (x + 1)^2 - 6^2 \\ &= [(x + 1) + 6][(x + 1) - 6] \\ &= (x + 1 + 6)(x + 1 - 6) \end{aligned}$$

ดังนั้น $(x + 1)^2 - 36 = (x + 7)(x - 5)$

ตัวอย่างที่ 5 จงแยกตัวประกอบของ $x^2 - (x - 4)^2$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} x^2 - (x - 4)^2 &= [x + (x - 4)][x - (x - 4)] \\ &= (x + x - 4)(x - x + 4) \\ &= (2x - 4)(4) \\ &= 4(2)(x - 2) \end{aligned}$$

ดังนั้น $x^2 - (x - 4)^2 = 8(x - 2)$

ตัวอย่างที่ 6 จงแยกตัวประกอบของ $(x-2)^2-(x+3)^2$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
(x-2)^2-(x+3)^2 &= [(x-2)+(x+3)][(x-2)-(x+3)] \\
&= (x-2+x+3)(x-2-x-3) \\
&= (2x+1)(-5)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $(x-2)^2-(x+3)^2 = -5(2x+1)$

ตัวอย่างที่ 7 จงแยกตัวประกอบของ $(3x-2)^2-(x+5)^2$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
(3x-2)^2-(x+5)^2 &= [(3x-2)+(x+5)][(3x-2)-(x+5)] \\
&= (3x-2+x+5)(3x-2-x-5)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $(3x-2)^2-(x+5)^2 = (4x+3)(2x-7)$

ตัวอย่างที่ 8 จงแยกตัวประกอบของ $25(x+2)^2-144x^2$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
25(x+2)^2-144x^2 &= (5(x+2))^2-(12x)^2 \\
&= [5(x+2)+12x][5(x+2)-12x] \\
&= (5x+10+12x)(5x+10-12x) \\
&= (17x+10)(-7x+10) \\
&= (17x+10)(-1)(7x-10)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $25(x+2)^2-144x^2 = -(17x+10)(7x-10)$

หรือ $25(x+2)^2-144x^2 = (-17x-10)(7x-10)$

หรือ $25(x+2)^2-144x^2 = (17x+10)(-7x+10)$

จำไว้ใช้

จากสูตรผลต่างของกำลังสอง $A^2-B^2 = (A+B)(A-B)$

เพื่อให้ง่ายต่อการจดจำในการนำไปใช้ ให้จำย่อ ๆ ดังนี้

$(\text{หน้า})^2-(\text{หลัง})^2 = (\text{หน้า}+\text{หลัง})(\text{หน้า}-\text{หลัง})$

แบบฝึกหัด 1.4 ก

1. จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้

1) $x^2 - 1$	2) $16 - x^2$
3) $x^2 - 64$	4) $x^2 - 144$
5) $225 - x^2$	6) $x^2 - 361$
7) $x^2 - 625$	8) $x^2 - 900$
9) $9x^2 - 1$	10) $4x^2 - 49$
11) $16x^2 - 169$	12) $49x^2 - 81$
13) $25x^2 - 121$	14) $196x^2 - 100$
15) $81x^2 - 400$	16) $64x^2 - 225$
17) $144x^2 - 441$	18) $1 - 289x^2$
19) $529x^2 - 625$	20) $961 - 900x^2$

2. จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้

1) $(a - 2)^2 - 1$	2) $25 - (y + 1)^2$
3) $(x + 2)^2 - 4$	4) $(x - 3)^2 - 36$
5) $81 - (x + 5)^2$	6) $x^2 - (2x + 1)^2$
7) $4x^2 - (x - 2)^2$	8) $(2x + 3)^2 - 25x^2$
9) $(x + 6)^2 - (x + 4)^2$	10) $(x - 8)^2 - (x - 5)^2$
11) $(3x + 2)^2 - (x - 1)^2$	12) $(4x - 3)^2 - (5x + 2)^2$
13) $9(x - 7)^2 - 100x^2$	14) $144x^2 - (2x - 3)^2$
15) $25x^2 - 16(x - 5)^2$	16) $(5x + 3)^2 - 121x^2$

ตัวอย่างที่ 9 จงแยกตัวประกอบของ $(x^2 + 10x + 25) - 64x^2$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
(x^2 + 10x + 25) - 64x^2 &= (x + 5)^2 - (8x)^2 \\
&= [(x + 5) + 8x][(x + 5) - 8x] \\
&= (x + 5 + 8x)(x + 5 - 8x) \\
&= (9x + 5)(-7x + 5) \\
&= (9x + 5)(-1)(7x - 5)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $(x^2 + 10x + 25) - 64x^2 = -(9x + 5)(7x - 5)$

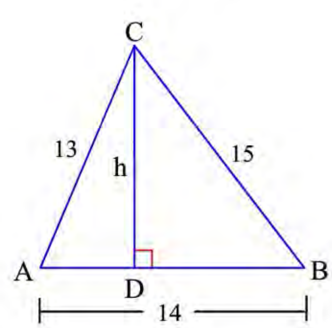
ตัวอย่างที่ 10 จงแยกตัวประกอบของ $121x^2 - (x^2 - 12x + 36)$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
121x^2 - (x^2 - 12x + 36) &= (11x)^2 - (x - 6)^2 \\
&= [11x + (x - 6)][11x - (x - 6)] \\
&= (11x + x - 6)(11x - x + 6) \\
&= (12x - 6)(10x + 6) \\
&= 6(2x - 1)(2)(5x + 3)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $121x^2 - (x^2 - 12x + 36) = 12(2x - 1)(5x + 3)$

ตัวอย่างที่ 11 จากรูป กำหนดให้ ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มี AB = 14 หน่วย, BC = 15 หน่วย และ AC = 13 หน่วย จงหาความสูง h



วิธีทำ เนื่องจาก ΔACD และ ΔBCD เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ให้ AD = x หน่วย จะได้ BD = 14 – x หน่วย

จาก Δ ACD จะได้ $13^2 = h^2 + x^2$ (ทฤษฎีบทพีทาโกรัส)

$h^2 = 13^2 - x^2$ (สมบัติของการเท่ากัน)

จาก Δ BCD จะได้ $15^2 = h^2 + (14 - x)^2$ (ทฤษฎีบทพีทาโกรัส)

$h^2 = 15^2 - (14 - x)^2$ (สมบัติของการเท่ากัน)

$= [15 + (14 - x)][15 - (14 - x)]$

$= (29 - x)(1 + x)$

$= 29 + 28x - x^2$

จากผลที่ได้ใน Δ ACD และ Δ BCD

จะได้ $13^2 - x^2 = 29 + 28x - x^2$ (สมบัติของการเท่ากัน)

$169 = 29 + 28x$

$28x = 140$

$x = 5$

เนื่องจาก $h^2 = 13^2 - x^2$

จะได้ $h^2 = 13^2 - 5^2$ (สมบัติของการเท่ากัน)

$= 169 - 25$

$= 144$

$= 12 \times 12$

ดังนั้น $h = 12$

นั่นคือความสูง h เท่ากับ 12 หน่วย

ตอบ 12 หน่วย

แบบฝึกหัด 1.4 ข

1. จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้

   1) $(x^2 - 16x + 64) - x^2$

   2) $y^2 - (y^2 - 30y + 225)$

   3) $4a^2 - (a^2 + 22a + 121)$

4) $(x^2 - 34x + 289) - 169x^2$

5) $9(y^2 - 20y + 100) - 441y^2$

6) $900a^2 - 16(a^2 + 40a + 400)$

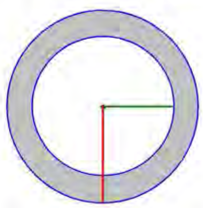
7) $(2a - 3)^2 - (a^2 - 18a + 81)$

8) $(4t^2 - 12t + 9) - (5t + 1)^2$

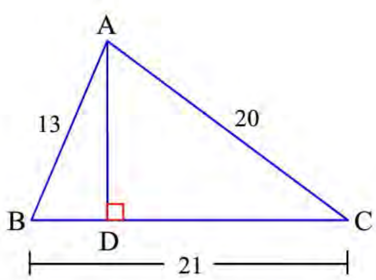
9) $(x^2 + 36x + 324) - (9x^2 - 90x + 225)$

10) $(4m^2 - 36m + 81) - (16m^2 + 56m + 49)$

2. วงกลมสองวงมีจุดศูนย์กลางร่วมกัน วงกลมวงใหญ่มีรัศมียาว 89 หน่วย วงกลมวงเล็กมีรัศมียาว 65 หน่วย วงกลมทั้งสองมีพื้นที่ต่างกันเท่าไร (กำหนดให้แทน π ด้วย $\frac{22}{7}$)

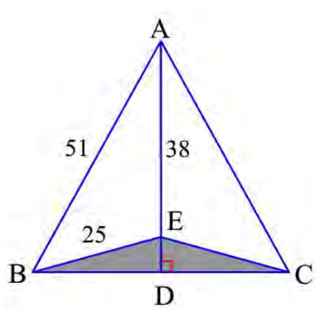


3.



จากรูป กำหนดให้ ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มี $\overline{AD}$ ตั้งฉากกับ $\overline{BC}$ ที่จุด D
AB = 13 หน่วย, AC = 20 หน่วย
และ BC = 21 หน่วย จงหาพื้นที่ของ ΔABC

4.



จากรูป กำหนดให้ ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มี $\overline{BC}$ เป็นฐาน AB = 51 เซนติเมตร,
AE = 38 เซนติเมตร และ BE = 25 เซนติเมตร
จงหาพื้นที่ของ ΔABC

น่าทำนะ

พิจารณาการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่มีสองตัวแปรและเป็นผลต่างของกำลังสองจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง

1. $9x^2 - 36y^2 = (3x)^2 - (6y)^2$

$= (3x + 6y)(3x - 6y)$

$= 9(x + 2y)(x - 2y)$

2. $(3x - 1)^2 - (y + 2)^2 = [(3x - 1) + (y + 2)][(3x - 1) - (y + 2)]$

$= (3x - 1 + y + 2)(3x - 1 - y - 2)$

$= (3x + y + 1)(3x - y - 3)$

ตัวอย่างข้างต้น แสดงการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่มีสองตัวแปรและเป็นผลต่างของกำลังสอง ซึ่งทำได้เช่นเดียวกันกับพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวที่เป็นผลต่างของกำลังสอง โดยใช้สูตรดังนี้

$(\text{หน้า})^2 - (\text{หลัง})^2 = (\text{หน้า} + \text{หลัง})(\text{หน้า} - \text{หลัง})$

จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้

1) $16x^2 - 81y^2$
2) $25t^2 - (k + t)^2$
3) $(m + 3)^2 - (2n + 5)^2$
4) $(2x - y)^2 - (x + 3y)^2$
5) $(x - 4y)^2 - (3x - 2y)^2$
6) $(x^2 - 4xy + 4y^2) - (x + 5y)^2$
7) $(2k - t)^2 - (4k^2 - 12kt + 9t^2)$
8) $(16m^2 + 40mn + 25n^2) - (4n^2 - 28mn + 49m^2)$

คำนวณได้เร็ว

เราสามารถใช้ความรู้เกี่ยวกับพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์และผลต่างของกำลังสอง มาช่วยในการคำนวณจำนวนนับบางจำนวนได้ง่ายขึ้น ดังตัวอย่าง

1. จงหาค่าของ 998^2

วิธีทำ $998^2 = (1,000 - 2)^2$

$= 1,000^2 - [2 \times 2(1,000)] + 2^2$

$= 1,000,000 - 4,000 + 4$

$= 996,000 + 4$

$= 996,004$

ดังนั้น $998^2 = 996,004$

ตอบ 996,004

2. จงหาค่าของ $999^2 - 998^2$

วิธีทำ $999^2 - 998^2 = (999 + 998)(999 - 998)$

$= 1,997 \times 1$

$= 1,997$

ดังนั้น $999^2 - 998^2 = 1,997$

ตอบ 1,997

จงหาค่าของ

1) 997^2
2) $2,015^2$
3) $1,002^2 - 999^2$
4) $3,012^2 - 3,008^2$
5) $2,004^2 - 1,996^2$
6) $2,547^2 - 453^2$

บทที่ 2

สมการกำลังสองตัวแปรเดียว

2.1 สมการกำลังสองตัวแปรเดียว

นักเรียนเคยทราบแล้วว่าพหุนาม เช่น $4x^2$, $x^2 - 5$, $3x^2 + x$ และ $x^2 - 4x + 1$ เป็นพหุนามดีกรีสองที่มีตัวแปรตัวเดียวคือ x พหุนามดังกล่าวมีรูปทั่วไปเป็น $ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b และ c เป็นค่าคงตัว และ $a \neq 0$ เราจะได้เห็นการนำมาใช้ในสมการกำลังสองตัวแปรเดียวดังนี้

> สมการซึ่งมี x เป็นตัวแปรและมีรูปทั่วไปเป็น $ax^2 + bx + c = 0$ เมื่อ a, b, c เป็นค่าคงตัวและ $a \neq 0$ เรียกว่า สมการกำลังสองตัวแปรเดียว

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างสมการกำลังสองตัวแปรเดียว

1. $4x^2 = 0$
2. $x^2 - 3 = 0$
3. $x^2 + 4x = 0$
4. $-3x^2 + 5x = 0$
5. $x^2 + 3x - 4 = 0$
6. $2x^2 - 3x + 1 = 0$
7. $y^2 - \frac{y}{6} - 2 = 0$
8. $1.5m^2 + 0.5m - 2 = 0$

ในบางครั้งเราอาจพบสมการกำลังสองตัวแปรเดียวที่ไม่ได้เขียนอยู่ในรูปทั่วไป แต่เราสามารถเขียนสมการเหล่านั้นให้อยู่ในรูปทั่วไปได้โดยใช้สมบัติของการเท่ากัน ดังตัวอย่าง

1.
$$x^2 - 1 = 3x$$
$$x^2 - 1 + (-3x) = 3x + (-3x)$$

บวกด้วย -3x ทั้งสองข้างของสมการ

จะได้ $x^2 + (-3x) - 1 = 0$

หรือ $x^2 - 3x - 1 = 0$

2.

$$
\begin{aligned}
2x(x+5) &= 7 \\
2x^2 + 10x &= 7 \\
2x^2 + 10x + (-7) &= 7 + (-7) \\
\text{จะได้} \quad 2x^2 + 10x - 7 &= 0
\end{aligned}
$$

สมบัติการแจกแจง

บวกด้วย -7 ทั้งสองข้างของสมการ

3.

$$
\begin{aligned}
x^2 + 6 &= -2x^2 - 5 \\
x^2 + 6 + 2x^2 &= -2x^2 - 5 + 2x^2 \\
3x^2 + 6 &= -5 \\
3x^2 + 6 + 5 &= -5 + 5 \\
\text{จะได้} \quad 3x^2 + 11 &= 0
\end{aligned}
$$

บวกด้วย $2x^2$ ทั้งสองข้างของสมการ

บวกด้วย 5 ทั้งสองข้างของสมการ

จากตัวอย่างข้างต้นจะเห็นว่าสมการ $x^2 - 1 = 3x$, $2x(x+5) = 7$ และ $x^2 + 6 = -2x^2 - 5$ สามารถเขียนเป็นสมการ $x^2 - 3x - 1 = 0$, $2x^2 + 10x - 7 = 0$ และ $3x^2 + 11 = 0$ ได้ตามลำดับ ดังนั้นแต่ละสมการดังกล่าวจึงเป็นสมการกำลังสองตัวแปรเดียว

ทำได้หรือไม่

1. สมการในข้อใดต่อไปนี้เป็นสมการกำลังสองตัวแปรเดียว

1) $5x - 3 = 0$	2) $t^2 = -3$
3) $8x - 1 = x^2$	4) $4y^2 - y = 5$
5) $y(y-6) = 2$	6) $x^2 - 8x = 2 + x^2$
7) $-2x^2 + 3 = x - 2x^2$	8) $(m-3)(m+1) = 0$
9) $\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} = 3x$	10) $4 + \frac{n}{2} - n^2 = 0$

2. จงเขียนสมการต่อไปนี้ให้อยู่ในรูป $ax^2 + bx + c = 0$ เมื่อ a, b, c เป็นค่าคงตัวและ $a \neq 0$ พร้อมทั้งบอกค่า a, b และ c ในแต่ละสมการที่ได้

1) $x^2 - 3x = 6$
2) $-3x^2 + 4x = 0$
3) $2m^2 - 7 = m$
4) $4x^2 = 10$
5) $-9x^2 = 0$
6) $1 - 5n = \frac{n^2}{3}$
7) $5x(x + 2) = 0$
8) $y(2y - 1) = -3$
9) $(t - 3)^2 = 1$
10) $(x + 2)(3x - 1) = 0$

คำตอบของสมการกำลังสองตัวแปรเดียว

คำตอบของสมการกำลังสองตัวแปรเดียว คือ จำนวนจริงซึ่งเมื่อแทนค่าตัวแปรในสมการแล้ว ทำให้สมการเป็นจริง

นักเรียนเคยทราบมาแล้วว่า *การแก้สมการเป็นการหาคำตอบของสมการ วิธีหนึ่งที่ทำให้ได้คำตอบของสมการ คือ การลองแทนค่าตัวแปรในสมการ*

ในทางคณิตศาสตร์สมการกำลังสองตัวแปรเดียวมีคำตอบได้ไม่เกินสองคำตอบ

ให้นักเรียนพิจารณาการหาคำตอบของสมการกำลังสองตัวแปรเดียว โดยวิธีลองแทนค่าตัวแปรในสมการต่อไปนี้

1. $x^2 - 3x - 4 = 0$

เมื่อแทน x ด้วย -1 ในสมการ

จะได้ $(-1)^2 - 3(-1) - 4 = 0$

$1 + 3 - 4 = 0$

$0 = 0$ เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น -1 เป็นคำตอบหนึ่งของสมการ $x^2 - 3x - 4 = 0$

และเมื่อแทน x ด้วย 4 ในสมการ

จะได้ $4^2 - 3(4) - 4 = 0$

$16 - 12 - 4 = 0$

$0 = 0$ เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น 4 เป็นอีกคำตอบหนึ่งของสมการ $x^2 - 3x - 4 = 0$

นั่นคือ สมการ $x^2 - 3x - 4 = 0$ มีสองคำตอบคือ -1 และ 4

2. $x^2 + 6x + 9 = 0$

เมื่อแทน x ด้วย -3 ในสมการ

จะได้ $(-3)^2 + 6(-3) + 9 = 0$

$9 - 18 + 9 = 0$

$0 = 0$ เป็นสมการที่เป็นจริง

เนื่องจากเมื่อแทน x ด้วยจำนวนจริงอื่น ๆ ที่ไม่ใช่ -3 ในสมการ $x^2 + 6x + 9 = 0$ แล้วจะได้สมการที่ไม่เป็นจริง

ดังนั้น สมการ $x^2 + 6x + 9 = 0$ มีคำตอบเดียวคือ -3

3. $x^2 + 1 = 0$

จากสมการ $x^2 + 1 = 0$ อาจใช้สมบัติของการเท่ากันเขียนเป็น

$x^2 = -1$

เนื่องจากจำนวนจริงใด ๆ ยกกำลังสองแล้ว จะต้องเป็นจำนวนจริงบวกหรือเท่ากับ 0

ดังนั้นไม่มีจำนวนจริงใดยกกำลังสองแล้วได้ผลลัพธ์เป็น -1

นั่นคือ สมการ $x^2 + 1 = 0$ ไม่มีคำตอบ

ตัวอย่างทั้งสามที่กล่าวข้างต้นแสดงให้เห็นว่า สมการกำลังสองตัวแปรเดียวอาจมีคำตอบหรือไม่มีคำตอบก็ได้ ถ้ามีคำตอบอาจมีคำตอบเดียวหรือสองคำตอบ

ให้นักเรียนหาคำตอบของสมการกำลังสองตัวแปรเดียวโดยใช้วิธีลองแทนค่าตัวแปรในกิจกรรมต่อไปนี้

ลองแทนค่า

1. จงหาว่าจำนวนที่กำหนดให้ในวงเล็บ แต่ละจำนวนเป็นคำตอบของสมการในแต่ละข้อหรือไม่

1) $x^2 - 5x - 14 = 0$	[7, -2]
2) $x^2 - 6x + 9 = 0$	[3, 0]
3) $2x^2 - 7x = 0$	[0, 7]
4) $2x^2 - 7x - 15 = 0$	[5, $-\frac{3}{2}$]
5) $x^2 + 4 = 0$	[-2]
6) $4x^2 + 4x + 1 = 0$	[$-\frac{1}{2}$]

2. จงหาคำตอบของสมการต่อไปนี้

   1) $x^2 - 1 = 0$

   2) $x^2 - 5x = 0$

   3) $x^2 + 3 = 0$

   4) $x^2 + x - 2 = 0$

   5) $x^2 + 3x + 2 = 0$

จากกิจกรรมข้างต้นนักเรียนคงจะพบว่าวิธีหาคำตอบของสมการกำลังสองตัวแปรเดียว โดยวิธีลองแทนค่าตัวแปรในสมการที่อยู่ในรูป $ax^2 + bx + c = 0$ เมื่อ a, b, c เป็นค่าคงตัว และ $a \neq 0$ อาจไม่สะดวกและอาจต้องใช้เวลามาก ในกรณีที่เราสามารถแยกตัวประกอบของ $ax^2 + bx + c$ ให้อยู่ในรูปการคูณกันของพหุนามดีกรีหนึ่งสองพหุนาม แล้วจึงแทนค่าตัวแปรในสมการที่ได้ จะทำให้หาคำตอบได้สะดวกและรวดเร็วขึ้น เช่น

การหาคำตอบของสมการ $x^2 - 5x - 14 = 0$

เนื่องจาก $x^2 - 5x - 14 = (x + 2)(x - 7)$

จะได้ $(x + 2)(x - 7) = 0$

จะเห็นว่าเมื่อแทน x ด้วย -2 จะได้ $(-2 + 2)(-2 - 7) = 0$ เป็นสมการที่เป็นจริง

เมื่อแทน x ด้วย 7 จะได้ $(7 + 2)(7 - 7) = 0$ เป็นสมการที่เป็นจริง

นั่นคือ -2 และ 7 เป็นคำตอบของสมการ $x^2 - 5x - 14 = 0$

จำนวนใดเป็นคำตอบ

ให้นักเรียนหาคำตอบของสมการกำลังสองตัวแปรเดียวต่อไปนี้

1. $(x + 1)(x - 7) = 0$
2. $(p - 1)(p - 3) = 0$
3. $(y + 5)(y + 4) = 0$
4. $(x - 2)(x - 5) = 0$
5. $(m - 3)(m + 3) = 0$
6. $(2x - 1)(x + 6) = 0$

ถึงแม้ว่าการแยกตัวประกอบจะช่วยให้การหาจำนวนมาลองแทนค่าตัวแปรในสมการทำได้ง่ายขึ้นก็ตาม แต่สำหรับบางสมการ เช่น $6x^2 + 11x + 4 = 0$ จะเห็นว่าเมื่อเขียนให้อยู่ในรูป $(3x + 4)(2x + 1) = 0$ ก่อน แล้วการหาจำนวนมาลองแทนค่า x เพื่อให้สมการเป็นจริง ก็ยังไม่ง่ายนัก ดังนั้นวิธีลองแทนค่าตัวแปรในสมการบางครั้งจึงไม่สะดวก ที่จริงแล้วยังมีอีกวิธีหนึ่งซึ่งเราสามารถใช้แก้สมการกำลังสองตัวแปรเดียวดังกล่าวได้ โดยใช้ความรู้เรื่องการแยกตัวประกอบและใช้สมบัติของจำนวนจริงที่กล่าวว่า ถ้ามีจำนวนจริงสองจำนวนคูณกันเท่ากับศูนย์แล้วจำนวนจริงอย่างน้อยหนึ่งจำนวนต้องเท่ากับศูนย์

สมบัติข้างต้นอาจกล่าวได้อีกอย่างหนึ่งว่า

ถ้า a, b เป็นจำนวนจริงและ $ab = 0$ แล้ว $a = 0$ หรือ $b = 0$

ให้นักเรียนพิจารณาการแก้สมการ $6x^2 + 11x + 4 = 0$ ดังต่อไปนี้

$$6x^2 + 11x + 4 = 0$$

$$(3x + 4)(2x + 1) = 0$$

จากสมบัติของจำนวนจริงข้างต้น จะได้

$$3x + 4 = 0 \quad \text{หรือ} \quad 2x + 1 = 0$$

เมื่อใช้ความรู้เรื่องการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว จะได้

$$3x = -4 \quad \text{หรือ} \quad 2x = -1$$

$$x = -\frac{4}{3} \quad \text{หรือ} \quad x = -\frac{1}{2}$$

นำค่า x ที่ได้ไปแทน x ในสมการ $6x^2 + 11x + 4 = 0$ เพื่อตรวจสอบว่าเป็นคำตอบของสมการหรือไม่ ดังนี้

1) แทน x ด้วย $-\frac{4}{3}$ ในสมการ $6x^2 + 11x + 4 = 0$

จะได้
$$\begin{aligned} 6\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + 11\left(-\frac{4}{3}\right) + 4 &= 0 \\ \left(6 \times \frac{16}{9}\right) - \frac{44}{3} + 4 &= 0 \\ \frac{32}{3} - \frac{44}{3} + 4 &= 0 \\ 32 - 44 + 12 &= 0 \\ 0 &= 0 \quad \text{เป็นสมการที่เป็นจริง} \end{aligned}$$

ดังนั้น $-\frac{4}{3}$ เป็นคำตอบของสมการ $6x^2 + 11x + 4 = 0$

2) แทน x ด้วย $-\frac{1}{2}$ ในสมการ $6x^2 + 11x + 4 = 0$

จะได้
$$\begin{aligned} 6\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 11\left(-\frac{1}{2}\right) + 4 &= 0 \\ \left(6 \times \frac{1}{4}\right) - \frac{11}{2} + 4 &= 0 \\ \frac{3}{2} - \frac{11}{2} + 4 &= 0 \\ 3 - 11 + 8 &= 0 \\ 0 &= 0 \quad \text{เป็นสมการที่เป็นจริง} \end{aligned}$$

ดังนั้น $-\frac{1}{2}$ เป็นคำตอบของสมการ $6x^2 + 11x + 4 = 0$

นั่นคือ $-\frac{4}{3}$ และ $-\frac{1}{2}$ เป็นคำตอบของสมการ $6x^2 + 11x + 4 = 0$

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างการแก้สมการกำลังสองตัวแปรเดียวในรูป $x^2 + bx + c = 0$ หรือ $-x^2 + bx + c = 0$ เมื่อ b และ c เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่างที่ 1 จงแก้สมการ $x^2 - 4x = 0$

วิธีทำ

$x^2 - 4x = 0$

$x(x - 4) = 0$

ดังนั้น $x = 0$ หรือ $x - 4 = 0$

จะได้ $x = 0$ หรือ $x = 4$

ตรวจสอบ 1) แทน x ด้วย 0 ในสมการ $x^2 - 4x = 0$

จะได้ $0^2 - 4(0) = 0$

$0 = 0$ เป็นสมการที่เป็นจริง

2) แทน x ด้วย 4 ในสมการ $x^2 - 4x = 0$

จะได้ $4^2 - 4(4) = 0$

$16 - 16 = 0$

$0 = 0$ เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น 0 และ 4 เป็นคำตอบของสมการ $x^2 - 4x = 0$

ตอบ 0 และ 4

ตัวอย่างที่ 2 จงแก้สมการ $x^2 - 10x + 25 = 0$

วิธีทำ

$x^2 - 10x + 25 = 0$

$(x - 5)(x - 5) = 0$

ดังนั้น $x - 5 = 0$

$x = 5$

ตรวจสอบ แทน x ด้วย 5 ในสมการ $x^2 - 10x + 25 = 0$

จะได้ $5^2 - (10 \times 5) + 25 = 0$

$25 - 50 + 25 = 0$

$0 = 0$ เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น 5 เป็นคำตอบของสมการ $x^2 - 10x + 25 = 0$

ตอบ 5

ตัวอย่างที่ 3 จงแก้สมการ $-x^2 - 3x + 4 = 0$

วิธีทำ $-x^2 - 3x + 4 = 0$

นำ -1 มาคูณทั้งสองข้างของสมการ

จะได้ $(-1)(-x^2 - 3x + 4) = (-1)(0)$

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$(x + 4)(x - 1) = 0$$

ดังนั้น $x + 4 = 0$ หรือ $x - 1 = 0$

จะได้ $x = -4$ หรือ $x = 1$

ตรวจสอบ 1) แทน x ด้วย -4 ในสมการ $-x^2 - 3x + 4 = 0$

จะได้ $-(-4)^2 - 3(-4) + 4 = 0$

$$-16 + 12 + 4 = 0$$

$0 = 0$ เป็นสมการที่เป็นจริง

2) แทน x ด้วย 1 ในสมการ $-x^2 - 3x + 4 = 0$

จะได้ $-1^2 - 3(1) + 4 = 0$

$$-1 - 3 + 4 = 0$$

$0 = 0$ เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น -4 และ 1 เป็นคำตอบของสมการ $-x^2 - 3x + 4 = 0$

ตอบ -4 และ 1

ตัวอย่างที่ 4 จงแก้สมการ $x^2 = -8x - 12$

วิธีทำ $x^2 = -8x - 12$

จะได้ $x^2 + 8x + 12 = 0$

นำ 8x และ 12 บวกทั้งสองข้างของสมการ $x^2 = -8x - 12$

$$(x + 2)(x + 6) = 0$$

ดังนั้น $x + 2 = 0$ หรือ $x + 6 = 0$

จะได้ $x = -2$ หรือ $x = -6$

ตรวจสอบ 1) แทน x ด้วย -2 ในสมการ $x^2 = -8x - 12$

จะได้ $(-2)^2 = -8(-2) - 12$

$4 = 16 - 12$

$4 = 4$ เป็นสมการที่เป็นจริง

2) แทน x ด้วย -6 ในสมการ $x^2 = -8x - 12$

จะได้ $(-6)^2 = -8(-6) - 12$

$36 = 48 - 12$

$36 = 36$ เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น -2 และ -6 เป็นคำตอบของสมการ $x^2 = -8x - 12$

ตอบ -2 และ -6

ตัวอย่างที่ 5 จงแก้สมการ $x^2 - 64 = 0$

วิธีทำ $x^2 - 64 = 0$

$(x - 8)(x + 8) = 0$

ดังนั้น $x - 8 = 0$ หรือ $x + 8 = 0$

จะได้ $x = 8$ หรือ $x = -8$

ตรวจสอบ 1) แทน x ด้วย 8 ในสมการ $x^2 - 64 = 0$

จะได้ $8^2 - 64 = 0$

$64 - 64 = 0$

$0 = 0$ เป็นสมการที่เป็นจริง

2) แทน x ด้วย -8 ในสมการ $x^2 - 64 = 0$

จะได้ $(-8)^2 - 64 = 0$

$64 - 64 = 0$

$0 = 0$ เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น 8 และ -8 เป็นคำตอบของสมการ $x^2 - 64 = 0$

ตอบ 8 และ -8

การหาคำตอบของสมการดังในตัวอย่างที่ 5 ซึ่งอยู่ในรูปของผลต่างของกำลังสอง อาจทำได้อีกวิธีหนึ่ง โดยไม่ต้องแยกตัวประกอบแต่ใช้สมบัติของรากที่สองของจำนวนจริงดังนี้

จากสมการ $x^2 - 64 = 0$

เขียนเป็น $x^2 = 64$

เนื่องจาก $64 = 8 \times 8$ หรือ $64 = (-8) \times (-8)$

$= 8^2$ $= (-8)^2$

ดังนั้น $x^2 = 8^2$ หรือ $x^2 = (-8)^2$

จะได้ $x = 8$ หรือ $x = -8$

เมื่อนำค่าตัวแปรไปตรวจสอบคำตอบดังในตัวอย่างที่ 5 จะได้ 8 และ -8 เป็นคำตอบของสมการ $x^2 - 64 = 0$

คิดเร็ว – ตอบเร็ว

จงบอกคำตอบของสมการต่อไปนี้

1. $x^2 = 0$
2. $x^2 = 4$
3. $y^2 = 36$
4. $x^2 - 49 = 0$
5. $y^2 + 25 = 0$
6. $m(m + 2) = 0$
7. $(x - 5)x = 0$
8. $(x + 4)^2 = 0$
9. $(n - 5)^2 = 0$
10. $(s + 1)(s - 9) = 0$
11. $(x - 4)(x - 7) = 0$
12. $(y - 8)(y + 5) = 0$

แบบฝึกหัด 2.1 ก

จงแก้สมการต่อไปนี้

1. $x^2 = -7x$	2. $r^2 = 100$
3. $(y-13)^2 = 0$	4. $x^2-2x+1 = 0$
5. $x^2+4x+4 = 0$	6. $x^2-2x-8 = 0$
7. $x^2+6x+5 = 0$	8. $p^2+5p-14 = 0$
9. $x^2+5x+6 = 0$	10. $x^2-3x-10 = 0$
11. $a^2-7a+12 = 0$	12. $x^2+7x+12 = 0$
13. $y^2-4y+3 = 0$	14. $-x^2+8x-7 = 0$
15. $11-10x-x^2 = 0$	16. $x^2 = -8x-16$
17. $x^2+x = 30$	18. $m^2+35 = 12m$
19. $y^2 = 3y+18$	20. $7n+18 = n^2$
21. $-x^2-15x = 36$	22. $x^2-20x = -100$
23. $10b = b^2+25$	24. $(a+12)a = -32$
25. $m(m-9) = 36$	26. $x^2+21x = -110$
27. $-y(y+15) = 14$	28. $60-17r = r^2$
29. $x^2-100 = 21x$	30. $p^2 = 18p-81$

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างการแก้สมการกำลังสองตัวแปรเดียวในรูป $ax^2+bx+c = 0$ เมื่อ a, b, c เป็นค่าคงตัวและ $a \neq 0$

ตัวอย่างที่ 6 จงแก้สมการ $2x^2+7x+6 = 0$

วิธีทำ

$$2x^2+7x+6 = 0$$

$$(x+2)(2x+3) = 0$$

ดังนั้น $x+2 = 0$ หรือ $2x+3 = 0$

จะได้ $x = -2$ หรือ $2x = -3$

$x = -2$ หรือ $x = -\frac{3}{2}$

ตรวจสอบ 1) แทน x ด้วย -2 ในสมการ $2x^2 + 7x + 6 = 0$

จะได้ $2(-2)^2 + 7(-2) + 6 = 0$

$8 - 14 + 6 = 0$

$0 = 0$ เป็นสมการที่เป็นจริง

2) แทน x ด้วย $-\frac{3}{2}$ ในสมการ $2x^2 + 7x + 6 = 0$

จะได้ $2\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 7\left(-\frac{3}{2}\right) + 6 = 0$

$\frac{9}{2} - \frac{21}{2} + 6 = 0$

$-6 + 6 = 0$

$0 = 0$ เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น -2 และ $-\frac{3}{2}$ เป็นคำตอบของสมการ $2x^2 + 7x + 6 = 0$

ตอบ -2 และ $-\frac{3}{2}$

ตัวอย่างที่ 7 จงแก้สมการ $4x^2 = 10 - 3x$

วิธีทำ $4x^2 = 10 - 3x$

$4x^2 + 3x - 10 = 0$

$(4x - 5)(x + 2) = 0$

ดังนั้น $4x - 5 = 0$ หรือ $x + 2 = 0$

จะได้ $4x = 5$ หรือ $x = -2$

$x = \frac{5}{4}$ หรือ $x = -2$

ตรวจสอบ 1) แทน x ด้วย $\frac{5}{4}$ ในสมการ $4x^2 = 10 - 3x$

จะได้ $4\left(\frac{5}{4}\right)^2 = 10 - 3\left(\frac{5}{4}\right)$

$4\left(\frac{25}{16}\right) = 10 - \frac{15}{4}$

$\frac{25}{4} = \frac{25}{4}$ เป็นสมการที่เป็นจริง

2) แทน x ด้วย -2 ในสมการ $4x^2 = 10 - 3x$

จะได้ $4(-2)^2 = 10 - 3(-2)$

$$4 \times 4 = 10 + 6$$

$$16 = 16$$ เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น $\frac{5}{4}$ และ -2 เป็นคำตอบของสมการ $4x^2 = 10 - 3x$

ตอบ $\frac{5}{4}$ และ -2

ตัวอย่างที่ 8 จงแก้สมการ $y^2 = \frac{1}{6}y + 2$

วิธีทำ

$$y^2 = \frac{1}{6}y + 2$$

$$y^2 - \frac{y}{6} - 2 = 0$$

นำ 6 มาคูณทั้งสองข้างของสมการ

จะได้ $6(y^2 - \frac{y}{6} - 2) = 6 \times 0$

$$6y^2 - y - 12 = 0$$

$$(3y + 4)(2y - 3) = 0$$

ดังนั้น $3y + 4 = 0$ หรือ $2y - 3 = 0$

จะได้ $3y = -4$ หรือ $2y = 3$

$y = -\frac{4}{3}$ หรือ $y = \frac{3}{2}$

ตรวจสอบ 1) แทน y ด้วย $-\frac{4}{3}$ ในสมการ $y^2 = \frac{1}{6}y + 2$

จะได้ $\left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{6}\right)\left(-\frac{4}{3}\right) + 2$

$$\frac{16}{9} = -\frac{2}{9} + 2$$

$\frac{16}{9} = \frac{16}{9}$ เป็นสมการที่เป็นจริง

2) แทน y ด้วย $\frac{3}{2}$ ในสมการ $y^2 = \frac{1}{6}y + 2$

จะได้ $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{6}\left(\frac{3}{2}\right) + 2$

$$\frac{9}{4} = \frac{1}{4} + 2$$

$\frac{9}{4} = \frac{9}{4}$ เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น $-\frac{4}{3}$ และ $\frac{3}{2}$ เป็นคำตอบของสมการ $y^2 = \frac{1}{6}y + 2$

ตอบ $-\frac{4}{3}$ และ $\frac{3}{2}$

ตัวอย่างที่ 9 จงแก้สมการ $-6x^2 + 12x - 6 = 0$

วิธีทำ $-6x^2 + 12x - 6 = 0$

$-6(x^2 - 2x + 1) = 0$

นำ -6 มาหารทั้งสองข้างของสมการ

จะได้ $x^2 - 2x + 1 = 0$

$(x - 1)(x - 1) = 0$

ดังนั้น $x - 1 = 0$

จะได้ $x = 1$

ตรวจสอบ แทน x ด้วย 1 ในสมการ $-6x^2 + 12x - 6 = 0$

จะได้ $-6(1)^2 + 12(1) - 6 = 0$

$-6 + 12 - 6 = 0$ เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น 1 เป็นคำตอบของสมการ $-6x^2 + 12x - 6 = 0$

ตอบ 1

ตัวอย่างที่ 10 จงแก้สมการ $4.5y^2 - 6y - 6 = 0$

วิธีทำ $4.5y^2 - 6y - 6 = 0$

นำ 10 มาคูณทั้งสองข้างของสมการ

จะได้ $45y^2 - 60y - 60 = 0$

นำ 15 มาหารทั้งสองข้างของสมการ

จะได้ $3y^2 - 4y - 4 = 0$

$(3y + 2)(y - 2) = 0$

ดังนั้น $3y + 2 = 0$ หรือ $y - 2 = 0$

จะได้ $3y = -2$ หรือ $y = 2$

$y = -\frac{2}{3}$ หรือ $y = 2$

ตรวจสอบ 1) แทน y ด้วย $-\frac{2}{3}$ ในสมการ $4.5y^2 - 6y - 6 = 0$

จะได้ $\left(4\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 6\left(-\frac{2}{3}\right) - 6 = 0$

$\left(\frac{9}{2} \times \frac{4}{9}\right) + 4 - 6 = 0$

$2 + 4 - 6 = 0$

$0 = 0$ เป็นสมการที่เป็นจริง

2) แทน y ด้วย 2 ในสมการ $4.5y^2 - 6y - 6 = 0$

จะได้ $\left(4\frac{1}{2}\right)(2)^2 - (6 \times 2) - 6 = 0$

$\left(\frac{9}{2} \times 4\right) - 12 - 6 = 0$

$18 - 12 - 6 = 0$

$0 = 0$ เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น $-\frac{2}{3}$ และ 2 เป็นคำตอบของสมการ $4.5y^2 - 6y - 6 = 0$

ตอบ $-\frac{2}{3}$ และ 2

แบบฝึกหัด 2.1 ข

1. จงหาคำตอบของสมการต่อไปนี้

1) $5x^2 - 45 = 0$
2) $4x^2 - 9 = 0$
3) $-48 + 3x^2 = 0$
4) $6y^2 - 8y = 0$
5) $(2x + 5)^2 = 0$
6) $(3y - 2)^2 = 0$
7) $m(3m - 4) = 0$
8) $5n(4n + 3) = 0$

2. จงแก้สมการต่อไปนี้

1) $2x^2 - 5x - 3 = 0$
2) $3x^2 + 2x - 8 = 0$
3) $2m^2 + 7m - 4 = 0$
4) $3x^2 + 10x + 3 = 0$
5) $3y^2 - 5y + 2 = 0$
6) $6x^2 + 5x - 4 = 0$
7) $2y^2 - 9y - 18 = 0$
8) $8m^2 + 19m - 15 = 0$
9) $5n^2 - 7n = 0$
10) $4a^2 = 10 - 3a$

11) $3a^2 - 2a = 5$

12) $3x^2 = 8 - 2x$

13) $x(x + 2) = 3$

14) $(y + 12)y = -32$

15) $(x - 3)^2 = 4$

16) $1.2x^2 - 1.7x = -0.6$

17) $1.4x^2 + 3.1x = 1$

18) $\frac{x^2}{9} = x + 4$

19) $3m^2 + \frac{1}{4} = -2m$

20) $n + 3 = 2n^2$

21) $y^2 = 0.5y + 1.5$

22) $18m - 8 = -35m^2$

23) $\frac{1}{2}x^2 = 7x - 12$

24) $2x^2 - \frac{5}{3}x = 7$

25) $4x - 1.6x^2 = 2.5$

26) $(4a - 3)^2 = 49$

27) $x^2 - 3x = 4x^2 - 36$

28) $(x + 2)^2 - 4 = 0$

29) $x^2 - (2x + 1)^2 = 0$

30) $(2x - 3)^2 - (x + 2)^2 = 0$

น่าคิดนะ

จงหาคำตอบของสมการต่อไปนี้

1. $(x - 1)^2 = (1 - x)^2$
2. $x^2 - 1 = 1 - x^2$
3. $(x - 1)^2 = (x + 1)^2$
4. $x^2 - 1 = x^2 + 1$

อีกคำตอบอยู่ไหน

ป่านและปอทำการบ้านเรื่องการแก้สมการกำลังสองตัวแปรเดียวที่โรงเรียนขณะที่รอผู้ปกครองมารับ หลังจากทำเสร็จแล้วทั้งสองคนนำคำตอบมาตรวจความถูกต้องด้วยกัน มีโจทย์ข้อหนึ่งคือ ให้แก้สมการ $a(3a-1) = 8a$ ได้คำตอบไม่ตรงกัน แต่ละคนมีวิธีทำดังนี้

วิธีทำของป่าน

$$a(3a-1) = 8a$$
$$3a^2 - a - 8a = 0$$
$$3a^2 - 9a = 0$$
$$3a(a-3) = 0$$

จะได้ $3a = 0$ หรือ $a - 3 = 0$

ดังนั้น $a = 0$ หรือ $a = 3$

เมื่อตรวจสอบแล้ว จะได้ 0 และ 3 เป็นคำตอบของสมการ $a(3a-1) = 8a$

วิธีทำของปอ

$$a(3a-1) = 8a$$

นำ a มาหารทั้งสองข้างของสมการ

จะได้ $3a - 1 = 8$

$$3a = 9$$
$$a = 3$$

เมื่อตรวจสอบแล้ว จะได้ 3 เป็นคำตอบเดียวของสมการ $a(3a-1) = 8a$

นักเรียนทราบหรือไม่ว่า เพราะเหตุใดปอจึงหาได้คำตอบเดียว และอีกคำตอบหายไปไหน

2.2 โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการกำลังสองตัวแปรเดียว

ให้นักเรียนพิจารณาปัญหาต่อไปนี้

นักเรียนกลุ่มหนึ่งได้ตกลงร่วมกันว่าในช่วงปีใหม่นี้พวกเขาทุกคนจะทำบัตรอวยพรปีใหม่ส่งให้แก่เพื่อน ๆ ในกลุ่มทุกคน ถ้านักเรียนทุกคนในกลุ่มนี้ทำได้ตามข้อตกลงและมีบัตรอวยพรที่ส่งให้กันทั้งหมด 72 ใบ อยากทราบว่านักเรียนกลุ่มนี้มีกี่คน

จากปัญหานี้จะเห็นได้ว่านักเรียนแต่ละคนจะต้องเตรียมบัตรอวยพรให้เพื่อน ๆ ซึ่งจะมีจำนวนบัตรน้อยกว่าจำนวนนักเรียนในกลุ่มนั้นอยู่ 1 ดังนั้นอาจหาจำนวนนักเรียนทั้งหมดได้โดยเริ่มคำนวณหาจำนวนบัตรอวยพรตั้งแต่มีนักเรียน 1 คน ไปจนกว่าจะได้บัตร 72 ใบ ดังตารางต่อไปนี้

จำนวนนักเรียนในกลุ่ม (คน)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
จำนวนบัตร (ใบ)	0 1(1 – 1)	2 2(2 – 1)	6 3(3 – 1)	12 4(4 – 1)	20 5(5 – 1)	30 6(6 – 1)	42 7(7 – 1)	56 8(8 – 1)	72 9(9 – 1)

จากตารางข้างต้นจะได้คำตอบว่า นักเรียนกลุ่มนี้มี 9 คน และถ้าสังเกตความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนนักเรียนในกลุ่มกับจำนวนบัตรอวยพร จะเห็นว่าสามารถเขียนความสัมพันธ์ในรูปของสมการกำลังสองตัวแปรเดียวและหาคำตอบได้ ดังนี้

ให้ x แทนจำนวนนักเรียนในกลุ่มนี้

นักเรียนแต่ละคนจะส่งบัตรอวยพรให้เพื่อน ๆ $x - 1$ ใบ

จะได้จำนวนบัตรอวยพรที่ส่งทั้งหมด $x(x - 1)$ ใบ

จากปัญหานี้ เมื่อใช้ความรู้เรื่องสมการกำลังสองตัวแปรเดียวมาช่วยในการหาคำตอบจะได้สมการดังนี้

$$\begin{aligned} x(x-1) &= 72 \\ x^2 - x - 72 &= 0 \\ (x-9)(x+8) &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x-9 = 0$ หรือ $x+8 = 0$

$x = 9$ หรือ $x = -8$

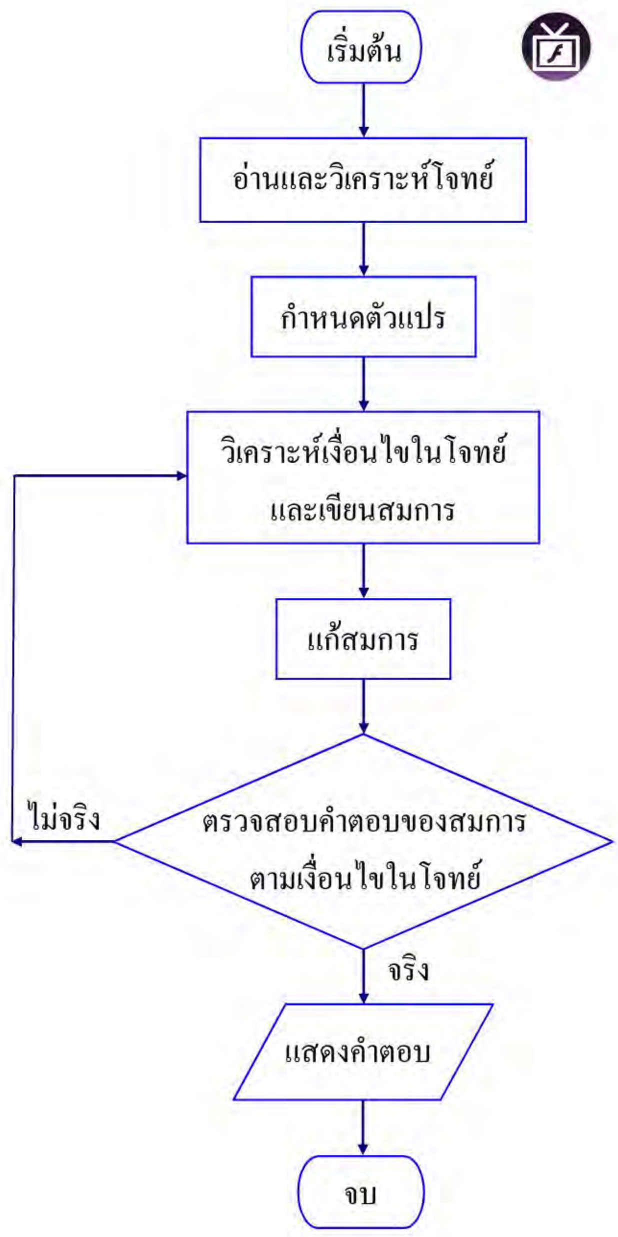
เนื่องจากจำนวนคนและจำนวนบัตรจะต้องเป็นจำนวนบวก

ดังนั้น -8 จึงไม่ใช่คำตอบของปัญหานี้

นั่นคือ นักเรียนกลุ่มนี้มี 9 คน

โจทย์ปัญหาในคณิตศาสตร์บางเรื่องสามารถแก้ได้โดยใช้สมการกำลังสองตัวแปรเดียว เช่น ปัญหาเกี่ยวกับจำนวน ความยาว พื้นที่ และปริมาตร

การแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการ มีขั้นตอนของแนวคิดและวิธีทำดังแผนภูมิต่อไปนี้



ตัวอย่างที่ 1 ให้ผลคูณของจำนวนคู่จำนวนหนึ่งกับจำนวนคู่อีกจำนวนหนึ่งที่อยู่ถัดไปเป็น 168 จงหาจำนวนคู่ทั้งสองจำนวนนั้น

วิธีทำ ให้ x แทนจำนวนคู่ที่เป็นจำนวนที่น้อยกว่า

จะได้ จำนวนคู่ที่ถัดขึ้นไปเป็น $x + 2$

เนื่องจากผลคูณของสองจำนวนนี้คือ 168

จะได้สมการเป็น

$$\begin{aligned} x(x+2) &= 168 \\ x^2 + 2x - 168 &= 0 \\ (x+14)(x-12) &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x + 14 = 0$ หรือ $x - 12 = 0$

จะได้ $x = -14$ หรือ $x = 12$

ตรวจสอบ เนื่องจากจำนวนคู่ที่โจทย์กำหนดให้เป็นได้ทั้งจำนวนคู่บวกและจำนวนคู่ลบ คำตอบจึงอาจมีได้ 2 แบบ ดังนี้

1) ถ้าให้ 12 เป็นจำนวนคู่บวกที่น้อยกว่า จะได้จำนวนคู่บวกที่ถัดขึ้นไปเป็น
   $12 + 2 = 14$
   ผลคูณของ 12 และ 14 เป็น $12 \times 14 = 168$
   ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

2) ถ้าให้ -14 เป็นจำนวนคู่ลบที่น้อยกว่า จะได้จำนวนคู่ลบที่ถัดขึ้นไปเป็น
   $-14 + 2 = -12$
   ผลคูณของ -14 และ -12 เป็น $(-14)(-12) = 168$
   ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

ดังนั้น จำนวนคู่ลบ คือ -14 และ -12

จำนวนคู่บวก คือ 12 และ 14

ตอบ $\begin{cases} 12 \text{ และ } 14 \\ -14 \text{ และ } -12 \end{cases}$

ตัวอย่างที่ 2 ผลบวกของสองเท่าของจำนวนจำนวนหนึ่งกับครึ่งหนึ่งของจำนวนนั้น เมื่อคูณด้วยจำนวนนั้นแล้ว จะได้จำนวนเท่าเดิม จงหาจำนวนจำนวนนั้น

วิธีทำ ให้ x แทนจำนวนจำนวนหนึ่ง

จะได้ผลบวกของสองเท่าของ x กับครึ่งหนึ่งของ x เป็น $2x + \frac{x}{2}$

จะได้สมการเป็น

$$\begin{aligned}(2x + \tfrac{x}{2})x &= x\\ \left(\frac{4x+x}{2}\right)x &= x\\ \left(\frac{5x}{2}\right)x &= x\\ 5x^2 &= 2x\\ 5x^2 - 2x &= 0\\ x(5x-2) &= 0\end{aligned}$$

ดังนั้น $x = 0$ หรือ $5x - 2 = 0$

จะได้ $x = 0$ หรือ $x = \frac{2}{5}$

ตรวจสอบ 1) ถ้าจำนวนจำนวนนั้นคือ 0

จะได้ สองเท่าของ 0 เป็น $2 \times 0 = 0$ และครึ่งหนึ่งของ 0 เป็น $\frac{1}{2} \times 0 = 0$

ดังนั้น $(0 + 0) \times 0 = 0$ ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

2) ถ้าจำนวนจำนวนนั้นคือ $\frac{2}{5}$

จะได้ สองเท่าของ $\frac{2}{5}$ เป็น $2 \times \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$ และครึ่งหนึ่งของ $\frac{2}{5}$ เป็น $\frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{10}$

ดังนั้น $\left(\frac{4}{5} + \frac{2}{10}\right)\frac{2}{5} = 1 \times \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$ ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

นั่นคือ จำนวนนั้น คือ 0 หรือ $\frac{2}{5}$

ตอบ 0 และ $\frac{2}{5}$

ตัวอย่างที่ 3 จำนวนจำนวนหนึ่งมากกว่า 5 ถ้ากำลังสองของผลต่างของจำนวนจำนวนนั้นกับ 5 เท่ากับสิบเท่าของผลต่างของจำนวนจำนวนนั้นกับ 5 จงหาจำนวนจำนวนนั้น

วิธีทำ ให้ x แทนจำนวนจำนวนหนึ่งที่มากกว่า 5

จะได้กำลังสองของผลต่างของ x กับ 5 เป็น $(x-5)^2$

และสิบเท่าของผลต่างของ x กับ 5 เป็น $10(x-5)$

จะได้สมการเป็น

$$
\begin{aligned}
(x-5)^2 &= 10(x-5) \\
x^2-10x+25 &= 10x-50 \\
x^2-10x-10x+25+50 &= 0 \\
x^2-20x+75 &= 0 \\
(x-15)(x-5) &= 0
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $x-15 = 0$ หรือ $x-5 = 0$

จะได้ $x = 15$ หรือ $x = 5$

ตรวจสอบ เนื่องจากโจทย์กำหนดให้จำนวนที่ต้องการหานั้นมากกว่า 5

ดังนั้น ค่า x ที่เท่ากับ 5 จึงไม่ใช่จำนวนที่ต้องการหา

ถ้าจำนวนจำนวนนั้นคือ 15

จะได้ $(15-5)^2 = 10^2$ และ $10(15-5) = 10^2$

ดังนั้น $(15-5)^2$ เท่ากับ $10(15-5)$ ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

นั่นคือ จำนวนนั้นคือ 15

ตอบ 15

แบบฝึกหัด 2.2 ก

1. ให้ผลคูณของจำนวนเต็มสองจำนวนที่เรียงติดกันเท่ากับ 420 จงหาจำนวนทั้งสองจำนวนนั้น
2. ให้ผลคูณของจำนวนคี่บวกจำนวนหนึ่งกับจำนวนคี่บวกอีกจำนวนหนึ่งที่อยู่ถัดไปเป็น 323 จงหาจำนวนคี่ทั้งสองจำนวนนั้น
3. จำนวนสองจำนวนต่างกันอยู่ 3 และผลบวกของกำลังสองของจำนวนทั้งสองเป็น 117 จงหาจำนวนทั้งสองจำนวนนั้น
4. กำลังสองของจำนวนหนึ่งน้อยกว่าสองเท่าของจำนวนนั้นอยู่ $\frac{15}{16}$ จงหาจำนวนจำนวนนั้น
5. ให้จำนวนจำนวนหนึ่งมากกว่า 7 ถ้าผลต่างของกำลังสองของจำนวนจำนวนนั้นกับ 7 มากกว่า 3 เท่าของกำลังสองของผลต่างของจำนวนนั้นกับ 7 อยู่ 54 จงหาจำนวนจำนวนนั้น
6. ถ้ากำลังสองของผลบวกของจำนวนจำนวนหนึ่งกับ 5 มากกว่าผลบวกของสองเท่าของกำลังสองของจำนวนจำนวนนั้นกับ 5 อยู่ 36 จงหาจำนวนจำนวนนั้น
7. จำนวนสองจำนวนต่างกันอยู่ 2 ถ้าผลต่างของกำลังสองของสองจำนวนนั้นเท่ากับ 80 จงหาจำนวนทั้งสองจำนวนนั้น
8. 40 เท่าของผลบวกของจำนวนคู่จำนวนหนึ่งกับจำนวนคู่อีกจำนวนหนึ่งที่อยู่ถัดไป เท่ากับ 9 เท่าของผลคูณของจำนวนทั้งสองนั้น จงหาจำนวนคู่สองจำนวนนั้น
9. พ่อมีอายุมากกว่าแม่ 5 ปี อีก 10 ปีข้างหน้ากำลังสองของอายุของพ่อจะมากกว่า 60 เท่าของอายุของแม่อยู่ 25 จงหาอายุปัจจุบันของพ่อและแม่
10. พี่น้องสองคนมีอายุต่างกัน 6 ปี 3 เท่าของกำลังสองของอายุของพี่มากกว่ากำลังสองของผลบวกของอายุของทั้งสองคนอยู่ 44 จงหาอายุของพี่น้องคู่นี้

ตัวอย่างที่ 4 รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งมีความยาวรอบรูป 20 เซนติเมตร มีพื้นที่ 24 ตารางเซนติเมตร จงหาความยาวของแต่ละด้านของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

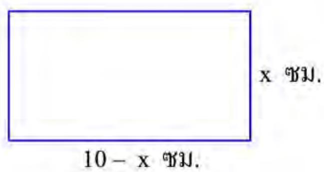
วิธีทำ ให้ด้านหนึ่งของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากรูปนี้ยาว x เซนติเมตร

เนื่องจาก ความยาวรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเป็น 20 เซนติเมตร

ดังนั้น ความยาวของอีกด้านหนึ่งของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากนี้เท่ากับ

$\dfrac{20-2x}{2}$ เซนติเมตร

$= 10 - x$ เซนติเมตร



เนื่องจากพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเท่ากับ 24 ตารางเซนติเมตร

จะได้สมการเป็น

$$\begin{aligned} x(10-x) &= 24 \\ 10x - x^2 &= 24 \\ x^2 - 10x + 24 &= 0 \\ (x-4)(x-6) &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x - 4 = 0$ หรือ $x - 6 = 0$

จะได้ $x = 4$ หรือ $x = 6$

ตรวจสอบ ถ้าให้รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากมีด้านหนึ่งยาว 4 เซนติเมตร จะได้อีกด้านหนึ่งยาว $\dfrac{20-(2\times 4)}{2} = 6$ เซนติเมตร

จะได้ ความยาวรอบรูปเป็น $2(4+6) = 20$ เซนติเมตร และได้พื้นที่เป็น $4 \times 6 = 24$ ตารางเซนติเมตร ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

นั่นคือ รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากกว้าง 4 เซนติเมตร และยาว 6 เซนติเมตร

ตอบ กว้าง 4 เซนติเมตร และยาว 6 เซนติเมตร

หมายเหตุ ในที่นี้ไม่ได้ตรวจสอบโดยให้ด้านหนึ่งยาว 6 เซนติเมตร เพราะจากการตรวจสอบข้างต้น จะเห็นว่าถ้าให้ด้านหนึ่งยาว 6 เซนติเมตร จะได้อีกด้านหนึ่งยาว 4 เซนติเมตร ซึ่งเป็นคำตอบเดียวกันกับคำตอบที่ได้

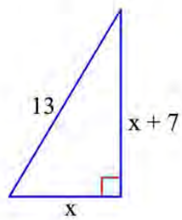
ตัวอย่างที่ 5 รูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่ง มีด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 13 เซนติเมตร ความยาวของด้านประกอบมุมฉากต่างกัน 7 เซนติเมตร จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปนี้

วิธีทำ ให้ด้านประกอบมุมฉากด้านหนึ่งเป็น x เซนติเมตร

ความยาวของด้านประกอบมุมฉากอีกด้านหนึ่งเป็น $x + 7$ เซนติเมตร

เนื่องจากด้านตรงข้ามมุมฉากมีความยาว 13 เซนติเมตร

จากสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก จะได้สมการเป็น



$$x^2 + (x+7)^2 = 13^2$$
$$x^2 + x^2 + 14x + 49 = 169$$
$$2x^2 + 14x - 120 = 0$$
$$x^2 + 7x - 60 = 0$$
$$(x-5)(x+12) = 0$$

ดังนั้น $x - 5 = 0$ หรือ $x + 12 = 0$

จะได้ $x = 5$ หรือ $x = -12$

ตรวจสอบ เนื่องจาก x แทนความยาวของด้านซึ่งจะต้องเป็นจำนวนบวก

ดังนั้น -12 จึงไม่ใช่ความยาวของด้าน

ถ้าให้ความยาวของด้านประกอบมุมฉากด้านหนึ่งเป็น 5 เซนติเมตร ความยาวของด้านประกอบมุมฉากอีกด้านหนึ่งจะเป็น $5 + 7 = 12$ เซนติเมตร

จะได้ผลบวกของกำลังสองของความยาวของด้านประกอบมุมฉากเป็น

$$5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$$

เนื่องจาก $169 = 13^2$

ดังนั้นด้านตรงข้ามมุมฉากของรูปสามเหลี่ยมรูปนี้ยาว 13 เซนติเมตร ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

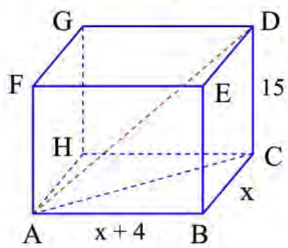
นั่นคือ รูปสามเหลี่ยมมุมฉากมีฐานยาว 12 เซนติเมตรหรือ 5 เซนติเมตรและ
สูง 5 เซนติเมตรหรือ 12 เซนติเมตร

ดังนั้น รูปสามเหลี่ยมมุมฉากมีพื้นที่เป็น $\frac{1}{2}(5 \times 12) = 30$ ตารางเซนติเมตร

ตอบ 30 ตารางเซนติเมตร

ตัวอย่างที่ 6 กล่องกระดาษทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากใบหนึ่งสูง 15 เซนติเมตร ความยาวของก้นกล่องมากกว่าความกว้างของก้นกล่องอยู่ 4 เซนติเมตร ถ้าความยาวของเส้นทแยงมุมที่ยาวที่สุดภายในกล่องเท่ากับ 25 เซนติเมตร จงหาความกว้างและความยาวของก้นกล่องใบนี้

วิธีทำ



ให้ความกว้างของก้นกล่องเป็น x เซนติเมตร
จะได้ความยาวของก้นกล่องเป็น $x + 4$ เซนติเมตร
จากรูปให้ AD เป็นความยาวของเส้นทแยงมุมที่ยาวที่สุดซึ่งเท่ากับ 25 เซนติเมตร

จากรูป จะได้ $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$AC^2 = (x+4)^2 + x^2$

เนื่องจาก $AD^2 = AC^2 + CD^2$ และ $CD = 15$

ดังนั้น $25^2 = \{(x+4)^2 + x^2\} + 15^2$

$$(x+4)^2 + x^2 + 15^2 = 25^2$$

$$x^2 + 8x + 16 + x^2 + 225 = 625$$

$$2x^2 + 8x + 16 + 225 - 625 = 0$$

$$2x^2 + 8x - 384 = 0$$

$$x^2 + 4x - 192 = 0$$

$$(x+16)(x-12) = 0$$

ดังนั้น $x + 16 = 0$ หรือ $x - 12 = 0$

จะได้ $x = -16$ หรือ $x = 12$

ตรวจสอบ เนื่องจาก x แทนความกว้างของกล่องซึ่งจะต้องเป็นจำนวนบวก
ดังนั้น -16 จึงไม่ใช่ความกว้างของกล่อง
ถ้าให้ความกว้าง (BC) ของก้นกล่องเป็น 12 เซนติเมตร
จะได้ความยาว (AB) ของก้นกล่องเป็น $12 + 4 = 16$ เซนติเมตร
เนื่องจาก $AC^2 = BC^2 + AB^2$
จะได้ $AC^2 = 12^2 + 16^2$

เนื่องจาก $\overline{AD}$ เป็นเส้นทแยงมุมที่ยาวที่สุดภายในกล่อง

จะได้ $AD^2 = AC^2 + CD^2$

ดังนั้น $AD^2 = (12^2 + 16^2) + 15^2$

$= 144 + 256 + 225$

$= 625$

จะได้ $AD = 25$ เซนติเมตร ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

นั่นคือ ก้นกล่องกว้าง 12 เซนติเมตรและยาว 16 เซนติเมตร

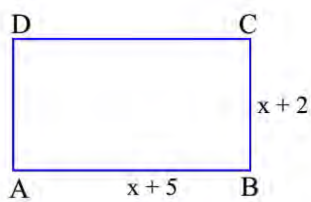
ตอบ ก้นกล่องกว้าง 12 เซนติเมตรและยาว 16 เซนติเมตร

ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้

ความยาวและพื้นที่

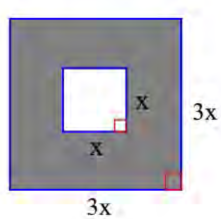
กำหนดให้ x แทนความยาวตามที่กำหนดให้ในรูปแต่ละข้อ จงตอบคำถามต่อไปนี้

1.



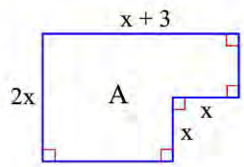
กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก มีพื้นที่ 130 ตารางหน่วย จงหาความยาวรอบรูปของ ABCD

2.



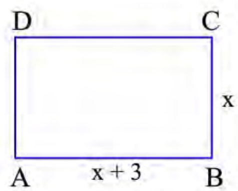
กำหนดให้พื้นที่ของส่วนที่แรเงาเป็น 200 ตารางหน่วย จงหาพื้นที่ของส่วนที่ไม่แรเงา

3.



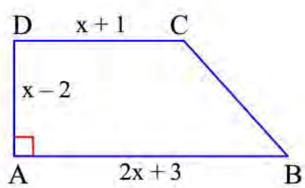
กำหนดให้รูป A มีพื้นที่ 27 ตารางหน่วย
จงหาความยาวรอบรูปของรูป A

4.



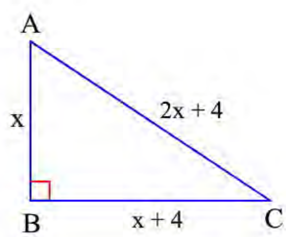
กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก
มีพื้นที่เท่ากับ 108 ตารางหน่วย
จงหาความยาวของเส้นทแยงมุม AC

5.



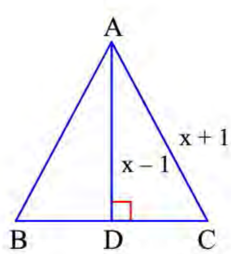
ให้รูปสี่เหลี่ยมคางหมู ABCD มีพื้นที่เท่ากับ
16 ตารางหน่วย จงหาส่วนสูงของ ABCD

6.



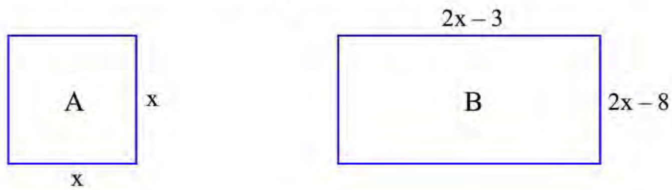
Δ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก จงหาพื้นที่ของ
Δ ABC

7.

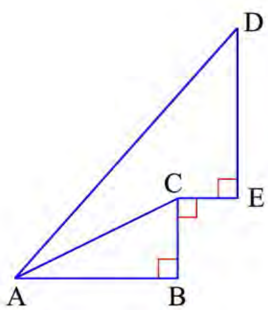


Δ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว $\overline{BC}$ ยาว x หน่วย
จงหาพื้นที่ของ Δ ABC

8. กำหนดให้พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า B มากกว่าพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส A 40 ตารางหน่วย จงหาความยาวของแต่ละด้านของรูปสี่เหลี่ยมทั้งสอง

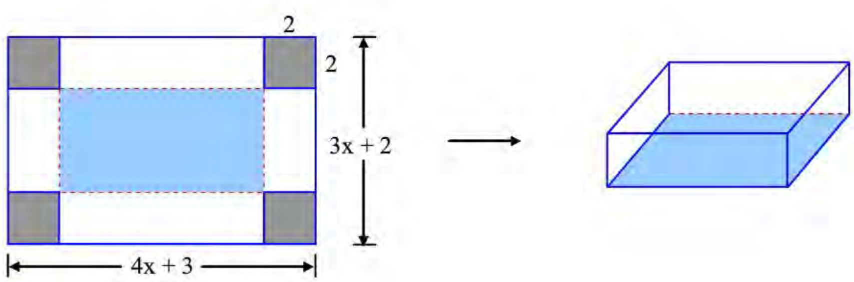


9.



จากรูปกำหนดให้ $AB = 2x + 2$ หน่วย $BC = x$ หน่วย $CE = 3$ หน่วย $DE = 3x$ หน่วย และ $AC = 2x + 3$ หน่วย จงหาว่า $\overline{AD}$ ยาวกว่า $\overline{AC}$ กี่หน่วย

10. ติ๊กมีกระดาษรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ากว้าง $3x + 2$ หน่วย ยาว $4x + 3$ หน่วย เมื่อตัดมุมทั้งสี่ออกเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีด้านยาว 2 หน่วย และนำมาพับขอบให้เป็นทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก จะมีปริมาตรเป็น 154 ลูกบาศก์หน่วย จงหาว่ากระดาษแผ่นนี้ก่อนตัดมุม มีความกว้างและความยาวเท่าใด



แบบฝึกหัด 2.2 ข

1. รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปใหญ่รูปหนึ่งมีพื้นที่ 441 ตารางเซนติเมตร จงหาว่ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปเล็กที่มีความยาวของด้านน้อยกว่ารูปใหญ่ด้านละ 3 เซนติเมตร จะมีพื้นที่เป็นกี่ตารางเซนติเมตร
2. รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งมีด้านยาวยาวกว่าด้านกว้าง 3 เซนติเมตร และมีพื้นที่เป็น 40 ตารางเซนติเมตร จงหาความกว้างของรูปสี่เหลี่ยม
3. รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนมีความสูงเป็นครึ่งหนึ่งของความยาวของด้าน ถ้าความยาวรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมเท่ากับพื้นที่ของรูปพอดี จงหาความยาวของด้านของรูปสี่เหลี่ยมรูปนี้
4. มีที่ดินรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าสองแปลง แปลงแรกมีพื้นที่ 99 ตารางเมตร และมีด้านยาวยาวกว่าด้านกว้าง 2 เมตร ที่ดินแปลงที่สองมีด้านยาวยาวกว่าด้านยาวของที่ดินแปลงแรก 6 เมตร และด้านกว้างสั้นกว่าด้านกว้างของที่ดินแปลงแรก 2 เมตร จงหาว่าที่ดินแปลงที่สองมีพื้นที่เท่าใด
5. ผลบวกของด้านประกอบมุมฉากของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งเป็น 28 เซนติเมตร และรูปสามเหลี่ยมนี้มีพื้นที่ 96 ตารางเซนติเมตร จงหาความยาวของด้านที่ยาวที่สุดของรูปสามเหลี่ยมนี้
6. รูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งมีความยาวของด้านประกอบมุมฉากและด้านตรงข้ามมุมฉากเป็นจำนวนเต็มสามจำนวนเรียงกัน จงหาความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมรูปนี้
7. รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสสองรูป รูปหนึ่งมีด้านหนึ่งยาวกว่าด้านของอีกรูปหนึ่งอยู่ 5 เซนติเมตร ผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสทั้งสองเป็น 193 ตารางเซนติเมตร รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสแต่ละรูปมีด้านยาวด้านละเท่าไร
8. รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนมีด้านยาว 10 เซนติเมตร เส้นทแยงมุมสองเส้นมีความยาวต่างกัน 4 เซนติเมตร จงหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมรูปนี้
9. ที่นารูปสี่เหลี่ยมมุมฉากแปลงหนึ่งมีความยาวโดยรอบ 94 เมตร และมีพื้นที่ 496 ตารางเมตร จงหาความกว้างและความยาวของที่นาแปลงนี้
10. รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งมีเส้นทแยงมุมยาวกว่าด้านยาวอยู่ 2 เซนติเมตร และด้านกว้างสั้นกว่าด้านยาว 7 เซนติเมตร จงหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากรูปนี้

11. สวนสาธารณะแห่งหนึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า กว้าง 14 เมตร ยาว 24 เมตร เมื่อทำทางเดินภายในรอบสวนให้มีความกว้างเท่ากันโดยตลอดแล้ว จะเหลือบริเวณสวนที่ไม่รวมทางเดินคิดเป็นพื้นที่ 200 ตารางเมตร จงหาความกว้างของทางเดินรอบสวนนี้

12. ถ้าความยาวของด้านคู่ขนานคู่หนึ่งของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเพิ่มขึ้น 6 เซนติเมตร และความยาวของด้านคู่ขนานกันอีกคู่หนึ่งลดลง 2 เซนติเมตร รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่เกิดขึ้นจะมีพื้นที่เป็น $1\frac{1}{4}$ เท่าของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปเดิม จงหาความยาวของแต่ละด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปนี้
13. กล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากใบหนึ่งมีพื้นที่ก้นกล่อง 120 ตารางเซนติเมตร ความยาวรอบปากกล่องภายในเป็น 46 เซนติเมตร จุน้ำได้ 720 ลูกบาศก์เซนติเมตร จงหาขนาดภายในของกล่องใบนี้
14. กระดาษรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีด้านยาวยาวกว่าด้านกว้าง 4 เซนติเมตร เมื่อตัดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ยาวด้านละ 4 เซนติเมตรออกจากมุมทั้งสี่ของแผ่นกระดาษ แล้วยกด้านที่เหลือประกอบเป็นรูปกล่องไม่มีฝา จะได้กล่องที่มีปริมาตร 884 ลูกบาศก์เซนติเมตร จงหาความยาวและความกว้างของกระดาษรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าก่อนตัด
15. เมื่อปล่อยวัตถุให้ตกลงมาจากที่สูง ระยะทางที่วัตถุตกจะเปลี่ยนแปลงไปตามเวลาที่ผ่านไป และเป็นไปตามสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุที่ตกในแนวดิ่งคือ $S = 4.9t^2$ เมื่อ S แทนระยะทางเป็นเมตร และ t แทนเวลาเป็นวินาที ถ้าพีระโยนก้อนหินก้อนหนึ่งจากหน้าผาที่สูง 1,960 เมตร จงหาว่าก้อนหินตกถึงพื้นดินเมื่อเวลาผ่านไปกี่วินาที

16. จากจุดเริ่มต้นเดียวกัน รถยนต์ A วิ่งไปทางทิศตะวันออก ในขณะที่รถยนต์ B วิ่งไปทางทิศเหนือด้วยอัตราเร็วที่มากกว่าอัตราเร็วของรถยนต์ A 15 กิโลเมตรต่อชั่วโมง หลังจากที่รถทั้งสองวิ่งไปได้ 1 ชั่วโมง 20 นาที รถทั้งสองคันอยู่ห่างกัน 100 กิโลเมตร จงหาอัตราเร็วของรถทั้งสองคัน

17. สมนึกต้องการสร้างบ้านทรงไทย ซึ่งมีส่วนของหลังคาที่มองเห็นจากหน้าบ้านเป็น*หน้าบัน*

รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีฐานยาว 8 เมตร ถ้าสมนึกบอกให้ช่างไม้ทำหน้าบันสูง 3 เมตร ช่างไม้จะต้องหาไม้มาประกอบเป็นโครงภายในหลังคาบ้านซึ่งเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่แต่ละด้านยาวกี่เมตร

นักเรียนเคยทราบมาแล้วว่า ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนสองจำนวนที่มีแบบรูปชัดเจน เราอาจเขียนความสัมพันธ์นั้นให้อยู่ในรูปทั่วไป ซึ่งเป็นพหุนามที่มีตัวแปร บางครั้งอาจเป็นพหุนามดีกรีสอง ดังตัวอย่างกิจกรรมต่อไปนี้

ตอบได้หรือไม่

จงพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนสองจำนวนที่มีแบบรูปดังตารางในแต่ละข้อ พร้อมทั้งตอบคำถามต่อไปนี้

1.

พจน์ที่	1	2	3	4	…	11	…	n
ค่าของพจน์	4 $(1+1)^2$	9 $(2+1)^2$	16 $(3+1)^2$	25 $(4+1)^2$	…		…	

1) พจน์ที่ 11 มีค่าเท่ากับจำนวนใด

2) พจน์ที่ n มีค่าเท่ากับพหุนามใด

3) ถ้าพจน์ที่ m มีค่าเท่ากับ 441 แล้ว m แทนจำนวนใด

2.

พจน์ที่	1	2	3	4	…	10	…	n
ค่าของพจน์	2 1(1+1)	6 2(2+1)	12 3(3+1)	20 4(4+1)	…		…	

1) พจน์ที่ 10 มีค่าเท่ากับจำนวนใด
2) พจน์ที่ n มีค่าเท่ากับพหุนามใด
3) ถ้าพจน์ที่ m มีค่าเท่ากับ 650 แล้ว m แทนจำนวนใด

3.

พจน์ที่	1	2	3	4	…	20	…	n
ค่าของพจน์	0 $1^2 - 1$	3 $2^2 - 1$	8 $3^2 - 1$	15 $4^2 - 1$	…		…	

1) พจน์ที่ 20 มีค่าเท่ากับจำนวนใด
2) พจน์ที่ n มีค่าเท่ากับพหุนามใด
3) ถ้าพจน์ที่ m มีค่าเท่ากับ 960 แล้ว m แทนจำนวนใด

ลองหาดู

x	…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…
y	…	12	5	0	-3	-4	-3	0	5	12	…

ให้นักเรียนสังเกตแบบรูปจากตารางที่กำหนดให้ข้างต้น แล้ววิเคราะห์ความสัมพันธ์ของ x และ y โดยที่ $y = x^2 + bx + c$ เมื่อ b และ c เป็นจำนวนเต็ม

1. จงหาค่า b และ c ในสมการ $y = x^2 + bx + c$
2. ถ้าให้ $x = 5$ แล้ว y จะเป็นเท่าไร

ราคาขึ้น – ลง

ประเทศไทยของเราอุดมสมบูรณ์ด้วยพืชผักและผลไม้ที่มีหลากหลายให้ได้รับประทานกัน

ในทุกฤดูกาล ผลไม้บางชนิดมีวางขายตลอดทั้งปี เช่น มะละกอ สับปะรด แตงโม ผลไม้บางชนิดจะออกเป็นฤดูกาล เช่น ทุเรียน มังคุด เงาะ ลิ้นจี่ ลำไย ราคาของผลไม้ที่ออกตามฤดูกาลจึงไม่ค่อยแน่นอน ดังตัวอย่าง

ลิ้นจี่เป็นผลไม้ที่มีการปลูกกันมากทางภาคเหนือและภาคกลางของประเทศไทย มีผลสีแดงอมชมพูมีลักษณะกลมรี บางชนิดมีลักษณะคล้ายรูปหัวใจ มีผลเป็นช่อ แต่ละพันธุ์จะติดดอกออกผลและสุกไม่พร้อมกัน พันธุ์ลิ้นจี่ที่ปลูกทางภาคเหนือ ได้แก่พันธุ์ที่ต้องการความหนาวเย็นและยาวนาน เช่น พันธุ์ฮงฮวย กิมเจง โอวเฮียะ กวางเจา และจักรพรรดิ์ ส่วนใหญ่ปลูกที่จังหวัดเชียงรายและเชียงใหม่ พันธุ์ลิ้นจี่ที่ปลูกทางภาคกลางต้องการความหนาวเย็นไม่มากนัก ส่วนใหญ่ปลูกที่อำเภออัมพวา อำเภอบางคนที จังหวัดสมุทรสงคราม เช่น พันธุ์พื้นเมือง ค่อมลำเจียก และสำเภาแก้ว

สำหรับลิ้นจี่ที่ปลูกทางภาคเหนือจะเริ่มติดดอกในฤดูหนาว บางพันธุ์จะเริ่มทยอยติดดอกและออกผลตั้งแต่เดือนธันวาคม และมีผลแก่ประมาณกลางเดือนพฤษภาคม พวกเราจึงมีลิ้นจี่จากภาคเหนือรับประทานกันตั้งแต่เดือนพฤษภาคมจนถึงกลางเดือนกรกฎาคม ประมาณ 8 – 9 สัปดาห์ ราคาของลิ้นจี่ที่ขายปลีกตามท้องตลาดมีราคาแตกต่างกันตามช่วงของเวลา

ถ้าในปีหนึ่งพบว่า ช่วงเวลาที่มีลิ้นจี่ภาคเหนือวางขายตามท้องตลาดสัมพันธ์กับราคาลิ้นจี่และเขียนเป็นสมการได้ $y = 4x^2 - 40x + 120$

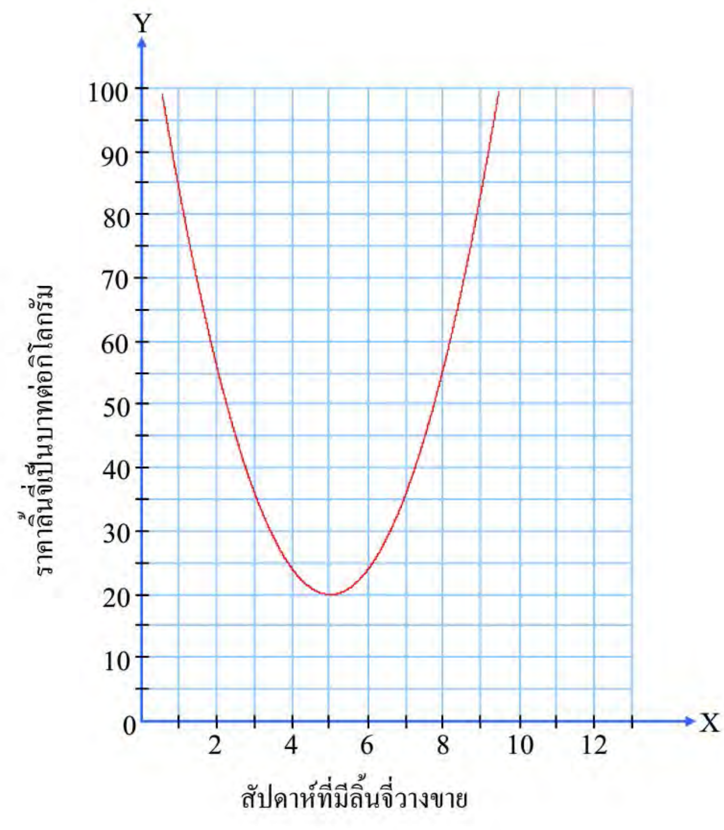
เมื่อ x แทนเวลาเป็นสัปดาห์ที่มีลิ้นจี่ภาคเหนือวางขายตามท้องตลาด

y แทนราคาลิ้นจี่เป็นบาทต่อกิโลกรัม

จากสมการ $y = 4x^2 - 40x + 120$ ได้ความสัมพันธ์ระหว่างเวลาซึ่งคิดเป็นสัปดาห์ที่มีลิ้นจี่ภาคเหนือวางขายกับราคาลิ้นจี่ต่อกิโลกรัม ดังตารางต่อไปนี้

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$y = 4x^2 - 40x + 120$	84	56	36	24	20	24	36	56	84

จากความสัมพันธ์ในตาราง สามารถเขียนกราฟในลักษณะต่อเนื่องกันของคู่อันดับ (x, y) ให้พิกัด x แทนเวลาเป็นสัปดาห์ที่มีลิ้นจี่ภาคเหนือวางขายในท้องตลาดและพิกัด y แทนราคาลิ้นจี่เป็นบาทต่อกิโลกรัม แสดงด้วยกราฟได้ดังนี้



ให้นักเรียนพิจารณากราฟและตอบคำถามต่อไปนี้

1. ในสัปดาห์ที่ 4 ลิ้นจี่มีราคาประมาณกิโลกรัมละกี่บาท
2. ในช่วงสัปดาห์ที่เท่าใดที่ลิ้นจี่มีราคาสูงและมีราคาประมาณกิโลกรัมละกี่บาท
3. ราคาลิ้นจี่ในช่วงต้นฤดูและปลายฤดูเมื่อเปรียบเทียบกับราคาลิ้นจี่กลางฤดูเป็นอย่างไร
4. เมื่อพิจารณาในแง่ของราคาและคุณภาพของลิ้นจี่ นักเรียนควรซื้อลิ้นจี่รับประทานประมาณสัปดาห์ที่เท่าใดหรือในเดือนใด นักเรียนมีเหตุผลอย่างไร
5. ราคาลิ้นจี่ต่ำสุดประมาณกิโลกรัมละกี่บาท
6. ถ้านักเรียนเป็นเจ้าของสวนลิ้นจี่ นักเรียนอยากให้ลิ้นจี่ของสวนได้วางขายตามท้องตลาดให้มากที่สุดในช่วงสัปดาห์ที่เท่าใด เพราะเหตุใด

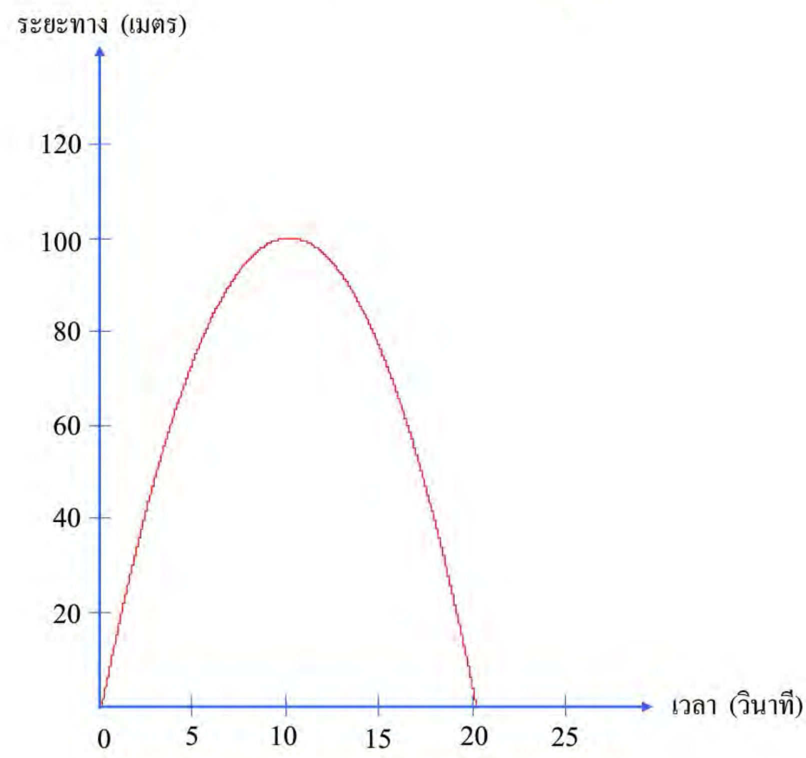
บั้งไฟ จรวดแบบไทย

นักเรียนคงเคยได้ยินหรือได้เห็นงานบุญบั้งไฟหรือบุญเดือนหกของชาวอีสานกันมาบ้างแล้ว *บั้งไฟ* หมายถึง บั้งหรือกระบอกที่อัดแน่นด้วย *หมื่อ* คำว่า *หมื่อ* เป็นภาษาพื้นบ้านหมายถึง ส่วนผสมของกำมะถัน ดินปะสิว และถ่าน ตามสูตรลับของแต่ละหมู่บ้าน นำส่วนผสมมาตำให้ละเอียดก่อนแล้วนำไปอัดแน่นในกระบอก ขนาดของบั้งไฟเรียกตามน้ำหนักของหมื่อ เช่น บั้งไฟหมื่นจะมีน้ำหนักประมาณ 12 กิโลกรัม บั้งไฟแสนจะมีน้ำหนักประมาณ 120 กิโลกรัม

พิธีบุญบั้งไฟทำเพื่อบูชาเทพยดาอารักษ์ หลักบ้านหลักเมืองและเพื่อสักการะบูชาพระยาแถน ซึ่งชาวอีสานเชื่อว่าเป็นเทพเจ้าแห่งฝน เป็นการบูชาเพื่อให้ฝนฟ้าตกตามฤดูกาล ทำไร่ทำนาได้พืชพันธุ์ธัญญาหารอุดมสมบูรณ์ ในพิธีบุญบั้งไฟ ชาวบ้านจะจัดขบวนแห่ไปรอบ ๆ เมือง และนำบั้งไฟทั้งหมดไปรวมกันที่วัดหรือสถานที่ใด สถานที่หนึ่งตามที่กำหนด หลังจากทำบุญตักบาตรและทำพิธีทางศาสนาแล้วจะมีการจุดบั้งไฟให้พุ่งขึ้นไปบนท้องฟ้าเพื่อเป็นการสักการะบูชา

การยิงบั้งไฟขึ้นฟ้าในแต่ละครั้ง จะมีความสัมพันธ์ระหว่างเวลาที่ผ่านไปหลังจากยิงและระยะทางที่บั้งไฟอยู่เหนือพื้นดิน ซึ่งอาจกำหนดเป็นสมการได้ ดังตัวอย่าง

ถ้าการยิงบั้งไฟบั้งหนึ่งสามารถกำหนดเป็นสมการได้ $h = 20t - t^2$ เมื่อ h แทนความสูงที่บั้งไฟอยู่เหนือพื้นดินเป็นเมตร และ t แทนเวลาที่ผ่านไปเป็นวินาทีหลังจากการยิง และเขียนกราฟของสมการได้ดังนี้



จากกราฟข้างต้นให้นักเรียนบรรยายถึงลักษณะการเคลื่อนที่ของบั้งไฟในช่วงเวลาต่าง ๆ หลังจากการยิงบั้งไฟขึ้นฟ้า

บทที่ 3
การแปรผัน

3.1 การแปรผันตรง

ในชีวิตประจำวันเรามักจะพบความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณสองปริมาณ เช่น ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนผู้โดยสารรถประจำทางและค่าโดยสาร ความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณน้ำมันและจำนวนเงินที่จ่าย เป็นต้น

ให้นักเรียนพิจารณาสถานการณ์ที่มีตารางแสดงความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณน้ำมันและจำนวนเงินที่จ่าย ดังต่อไปนี้

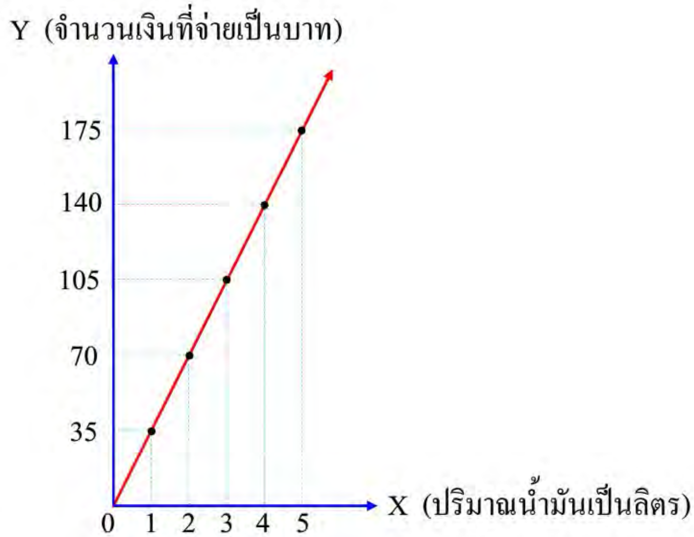
ปริมาณน้ำมัน (ลิตร)	จำนวนเงินที่จ่าย (บาท)
0	0
1	35
2	70
3	105
4	140
5	175
⋮	⋮

ให้ x แทน ปริมาณน้ำมันเป็นลิตร

y แทน จำนวนเงินที่จ่ายเป็นบาท

จากแบบรูปในตารางสามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y ได้เป็น $y = 35x$

จะเห็นว่า เมื่อปริมาณน้ำมัน x เพิ่มขึ้น จำนวนเงินที่จ่าย y ก็จะสูงขึ้นตามในอัตราที่คงตัวคือ 35 บาทต่อลิตร และเนื่องจากเราสามารถหาจำนวนเงินที่จ่ายได้เสมอ ไม่ว่าน้ำมันจะมีปริมาณเท่าใดก็ตาม จึงเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณน้ำมันและจำนวนเงินที่จ่ายข้างต้นได้ในลักษณะที่ต่อเนื่องกันเป็นส่วนหนึ่งของเส้นตรง และกราฟที่ได้จะผ่านจุด (0, 0) ดังรูป



ความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณน้ำมันและจำนวนเงินที่จ่ายดังกล่าว เป็นตัวอย่างหนึ่งของ การแปรผันตรง

บทนิยาม ให้ x และ y แทนปริมาณใด ๆ
y แปรผันตรงกับ x เมื่อ $y = kx$ โดยที่ k เป็นค่าคงตัว และ $k \neq 0$

สมการ $y = kx$ โดยที่ k เป็นค่าคงตัว และ $k \neq 0$ เรียกว่า สมการแสดงการแปรผันของการแปรผันตรง เรียก k ว่า ค่าคงตัวของการแปรผัน และเขียนแทน y แปรผันตรงกับ x ด้วย $y \propto x$

จากความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณน้ำมันและจำนวนเงินที่จ่ายซึ่งแสดงด้วยสมการ $y = 35x$ ข้างต้น จะได้ว่า y แปรผันตรงกับ x โดยมีสมการแสดงการแปรผันเป็น $y = 35x$ และมีค่าคงตัวของการแปรผันเป็น 35

ให้นักเรียนพิจารณาสถานการณ์ต่อไปนี้

ในการทดลองปรับลดอุณหภูมิของห้องควบคุมอุณหภูมิแห่งหนึ่ง สามารถปรับอุณหภูมิของห้องควบคุมให้ลดลงเรื่อย ๆ ในอัตราที่คงตัวจาก 0 องศาเซลเซียสตามเวลาที่ผ่านไป จาก 0 นาทีถึง 5 นาที ปรากฏผลการทดลองเป็นแบบรูปดังตารางต่อไปนี้

เวลา (นาที)	0	1	2	3	4	5
อุณหภูมิ ($^{\circ}$C)	0	-2	-4	-6	-8	-10

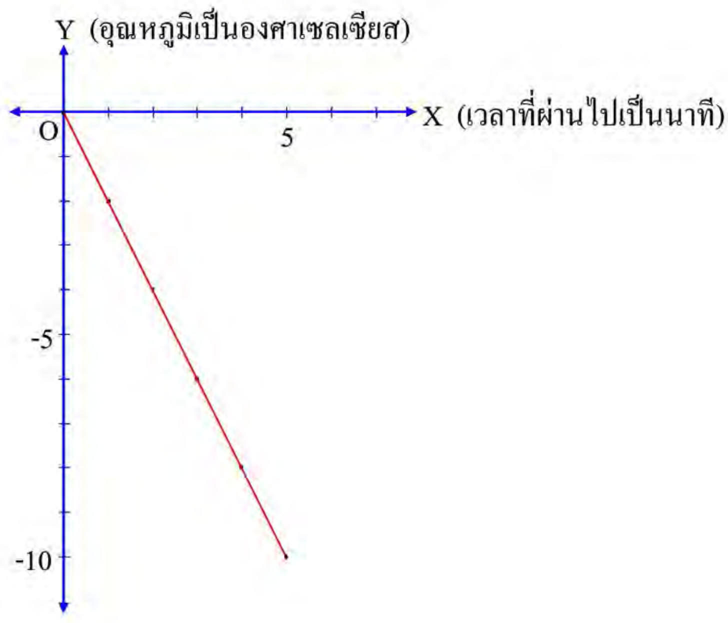
ให้ x แทนเวลาที่ผ่านไปเป็นนาที

y แทนอุณหภูมิของห้องควบคุมเป็นองศาเซลเซียส

จากแบบรูปในตารางสามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y ได้เป็น $y = -2x$

ดังนั้น y แปรผันตรงกับ x โดยมีสมการแสดงการแปรผันเป็น $y = -2x$ และมีค่าคงตัวของการแปรผันเป็น -2

เนื่องจากเราสามารถหาอุณหภูมิของห้องควบคุมได้เสมอ ณ เวลาใด ๆ ตั้งแต่ 0 นาที ถึง 5 นาที จึงเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวลาที่ผ่านไปกับอุณหภูมิของห้องควบคุมข้างต้นได้ในลักษณะที่ต่อเนื่องกันเป็นส่วนหนึ่งของเส้นตรง และกราฟที่ได้จะผ่านจุด (0, 0) ดังรูป



จะเห็นว่าเมื่อเวลา x เพิ่มขึ้น อุณหภูมิ y จะลดลงในอัตราที่คงตัว ซึ่งแตกต่างจากสถานการณ์ปริมาณน้ำมันและจำนวนเงินที่จ่าย ที่เมื่อปริมาณน้ำมัน x เพิ่มขึ้น จำนวนเงินที่จ่าย y จะสูงขึ้นตามไปด้วย อีกทั้งกราฟของทั้งสองสถานการณ์ก็มีทิศทางแตกต่างกัน

จากตัวอย่างสถานการณ์ข้างต้น จะเห็นว่า ค่าคงตัวของการแปรผันอาจเป็นจำนวนจริงบวกหรือจำนวนจริงลบก็ได้ และกราฟแสดงความสัมพันธ์ที่เป็นการแปรผันตรงจะเป็นส่วนของเส้นตรง รังสีหรือเส้นตรงที่ผ่านจุด (0, 0) อย่างใดอย่างหนึ่ง

ในชีวิตประจำวัน เรามักจะพบการแปรผันตรงระหว่างปริมาณสองปริมาณในลักษณะที่ค่าคงตัวของการแปรผันเป็นจำนวนจริงบวกเป็นส่วนมาก ในบทเรียนนี้จึงจะเน้นการแปรผันตรงที่ค่าคงตัวของการแปรผันเป็นจำนวนจริงบวก

เนื่องจาก $y \propto x$ เมื่อ $y = kx,\ k \neq 0$ และเมื่อ $x \neq 0$ สามารถเขียน $y = kx,\ k \neq 0$ ได้เป็น $\frac{y}{x} = k,\ k \neq 0$

ดังนั้นอาจกล่าวอีกอย่างหนึ่งได้ว่า *$y \propto x$ เมื่อ $\frac{y}{x}$ เป็นค่าคงตัวตัวเดียวกันสำหรับทุกคู่ของ x และ y ที่ $x \neq 0$ และค่าคงตัวนี้เป็นค่าคงตัวของการแปรผัน*

จากตัวอย่างตารางแสดงความเกี่ยวข้องระหว่างปริมาณน้ำมันและจำนวนเงินที่จ่ายดังกล่าวมาแล้วข้างต้น เมื่อให้ y แทนจำนวนเงินที่จ่ายเป็นบาท และ x แทนปริมาณน้ำมันเป็นลิตร อาจหา $\frac{y}{x}$ ได้ดังนี้

x	y	$\frac{y}{x}$
1	35	$\frac{35}{1} = 35$
2	70	$\frac{70}{2} = 35$
3	105	$\frac{105}{3} = 35$
4	140	$\frac{140}{4} = 35$
5	175	$\frac{175}{5} = 35$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

จากตารางจะเห็นว่า $\frac{y}{x} = 35$ สำหรับทุกคู่ของ x และ y ที่ $x \neq 0$

ฉะนั้นในการพิจารณาว่า ปริมาณ y แปรผันตรงกับปริมาณ x หรือไม่ เราอาจพิจารณาจากค่าของ $\frac{y}{x}$ สำหรับทุกคู่ของ x และ y ที่ $x \neq 0$ ว่าเป็นค่าคงตัวตัวเดียวกันหรือไม่ ถ้าเป็นค่าคงตัวตัวเดียวกัน แล้วความสัมพันธ์ระหว่างสองปริมาณนั้นก็เป็นการแปรผันตรง แต่ถ้ามี x และ y บางคู่ที่ค่าของ $\frac{y}{x}$ ต่างจาก x และ y คู่อื่น ๆ แล้วความสัมพันธ์ระหว่างสองปริมาณนั้นก็ไม่เป็นการแปรผันตรง

บอกได้ไหม

ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

1. จากสิ่งที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงเขียนสมการแสดงการแปรผัน
   1) $y \propto x$ และ 4 เป็นค่าคงตัวของการแปรผัน
   2) $u \propto v$ และ $\frac{1}{3}$ เป็นค่าคงตัวของการแปรผัน
   3) $s \propto t$ และ 0.7 เป็นค่าคงตัวของการแปรผัน
2. จากสมการแสดงการแปรผันที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงบอกความเกี่ยวข้องระหว่างตัวแปรและค่าคงตัวของการแปรผัน

   ตัวอย่าง $y = 2x$

   แสดงว่า y แปรผันตรงกับ x และ 2 เป็นค่าคงตัวของการแปรผัน

   1) $x = \frac{2}{3}y$
   2) $F = x$
   3) $u = -0.5v$
   4) $s = vt$ โดยที่ t เป็นค่าคงตัว และ $t \neq 0$
   5) $u = -v$

3. จากตารางแสดงแบบรูปของความเกี่ยวข้องระหว่าง x และ y ตารางใดแสดงว่า y แปรผันตรงกับ x และถ้า y แปรผันตรงกับ x ให้หาค่าคงตัวของการแปรผันและเขียนสมการแสดงการแปรผันด้วย

1)

x	2	3	4	5
y	10	15	20	25

2)

x	1	-1	2	-3
y	-1	3	-3	7

3)

x	-2	-4	-6	-8
y	1	2	3	4

4)

x	2	3	4	5
y	5	7.5	10	12

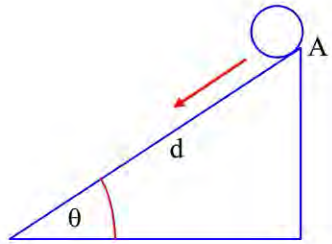
4. 1) จากข้อ 3. ในกรณีที่ $y \propto x$ แล้ว $x \propto y$ ด้วยหรือไม่ และถ้า $x \propto y$ แล้ว จงหาค่าคงตัวของการแปรผันและสมการแสดงการแปรผัน

2) นักเรียนคิดว่า โดยทั่วไป ถ้า $y \propto x$ แล้ว $x \propto y$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

นอกจากจะมี $y \propto x$ ตามที่กล่าวมาข้างต้นแล้ว y ยังอาจแปรผันตรงกับปริมาณอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องกับ x เช่น $y \propto x^2$ และ $y \propto \sqrt{x}$

ให้นักเรียนพิจารณาผลการทดลองต่อไปนี้

นักเรียนคนหนึ่งปล่อยลูกบอลลูกหนึ่งให้กลิ้งจากจุด A ไปตามรางซึ่งเอียงทำมุม θ กับแนวราบ ดังแผนภาพ (θ อ่านว่า ทีตา (theta))



ให้ d แทน ระยะทางเป็นเมตรที่ลูกบอลกลิ้งจากจุด A ในเวลา t วินาที ความเกี่ยวข้องระหว่าง t กับ d ปรากฏเป็นแบบรูป ดังตารางต่อไปนี้

t (วินาที)	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
d (เมตร)	0.5	2.0	4.5	8.0	12.5	18.0

จากตารางที่กำหนดให้ หา $\frac{d}{t}$ ได้ดังตารางต่อไปนี้

t	d	$\frac{d}{t}$
0.5	0.5	1
1.0	2.0	2
1.5	4.5	3
2.0	8.0	4
2.5	12.5	5
3.0	18.0	6

จากตาราง จะเห็นว่า $\frac{d}{t}$ ไม่เป็นค่าคงตัวตัวเดียวกัน สำหรับทุกคู่ของ t และ d ดังนั้น d ไม่แปรผันตรงกับ t

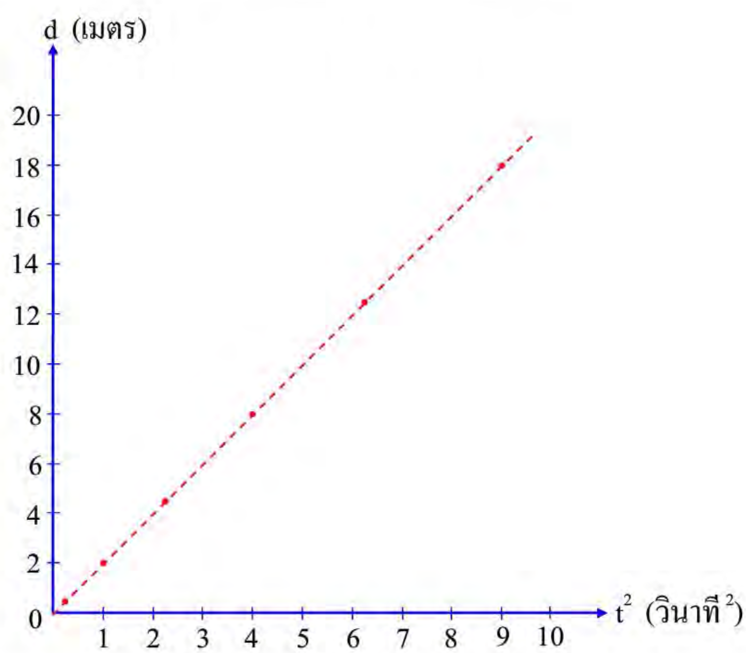
แต่เมื่อหา $\frac{d}{t^2}$ ดังตารางต่อไปนี้

t	t^2	d	$\frac{d}{t^2}$
0.5	0.25	0.5	2
1.0	1.00	2.0	2
1.5	2.25	4.5	2
2.0	4.00	8.0	2
2.5	6.25	12.5	2
3.0	9.00	18.0	2

จากตาราง จะเห็นว่า $\frac{d}{t^2}$ เป็นค่าคงตัวตัวเดียวกันคือ 2 สำหรับทุกคู่ของ t^2 และ d

ดังนั้น d แปรผันตรงกับ t^2 โดยมีค่าคงตัวของการแปรผันเป็น 2 และมีสมการแสดงการแปรผันเป็น $d = 2t^2$

กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง t^2 และ d เป็นดังนี้



ยังบอกได้ไหม

1. จากสิ่งที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงเขียนสมการแสดงการแปรผัน
    1) $s \propto t^3$ และ 2 เป็นค่าคงตัวของการแปรผัน
    2) $t \propto \sqrt{\ell^2}$ และ $\frac{1}{3}$ เป็นค่าคงตัวของการแปรผัน
    3) $H \propto I^2$ และ -3 เป็นค่าคงตัวของการแปรผัน
2. จากสมการแสดงการแปรผันต่อไปนี้ จงบอกว่าปริมาณใดแปรผันตรงกับปริมาณใด พร้อมทั้งระบุค่าคงตัวของการแปรผัน
    1) $A = \pi r^2$ เมื่อ A แทนพื้นที่ของวงกลม และ r แทนรัศมีของวงกลม
    2) $A = s^2$ เมื่อ A แทนพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และ s แทนความยาวของด้าน
    3) $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ เมื่อ V แทนปริมาตรของทรงกลม และ r แทนรัศมีของทรงกลม
    4) $D = \frac{M}{V}$ เมื่อ D แทนความหนาแน่นของสาร M แทนมวลของสารที่เป็นค่าคงตัว และ V แทนปริมาตรของสารที่ไม่เท่ากับศูนย์

ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้

กฎของโอห์ม

ให้นักเรียนพิจารณาการทดลองต่อไปนี้

ในการทดลองเพื่อหาความเกี่ยวข้องระหว่างความต่างศักย์ และปริมาณกระแสไฟฟ้า นักเรียนคนหนึ่งบันทึกข้อมูลจากการทดลองหาปริมาณกระแสไฟฟ้าที่เกิดขึ้นในวงจร ที่ได้จากการต่อถ่านไฟฉายกับเครื่องวัดกระแสไฟฟ้า ปรากฏผลการทดลองเป็นแบบรูปดังตารางต่อไปนี้

จำนวนถ่านไฟฉาย (ก้อน)	1	2	3	4
ความต่างศักย์ V (โวลต์)	1.5	3	4.5	6
ปริมาณกระแสไฟฟ้า I (มิลลิแอมแปร์)	25	50	75	100

ให้ V แทน ความต่างศักย์ มีหน่วยเป็น โวลต์

I แทน ปริมาณกระแสไฟฟ้า มีหน่วยเป็น มิลลิแอมแปร์

1. $\frac{I}{V}$ เป็นค่าคงตัวตัวเดียวกัน สำหรับทุกคู่ของ V และ I ที่กำหนดให้หรือไม่
2. I แปรผันตรงกับ V หรือไม่
3. จงเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง V และ I
4. จงเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง V กับ I โดยให้แกนนอนแสดงค่า V และ แกนตั้งแสดงค่า I
5. ถ้าความต่างศักย์เป็น 24 โวลต์ จะมีปริมาณกระแสไฟฟ้าที่เกิดขึ้นในวงจรเท่าใด
6. ถ้าปริมาณกระแสไฟฟ้าที่เกิดขึ้นในวงจรเป็น 300 มิลลิแอมแปร์ จะมีความต่างศักย์เป็นเท่าใด

กฎของโอห์ม (Ohm's Law)

กฎของโอห์มเป็นกฎพื้นฐานสำคัญของไฟฟ้ากระแส ค้นพบโดยเกออร์ก ซีมอน โอห์ม

(Georg Simon Ohm ; พ.ศ. 2330 - 2397) นักฟิสิกส์ชาวเยอรมัน เป็นกฎแสดงความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณกระแสไฟฟ้า และความต่างศักย์ไฟฟ้า ซึ่งมีใจความว่า "เมื่ออุณหภูมิคงตัว ค่าของกระแสไฟฟ้าที่ผ่านตัวนำหนึ่งจะแปรผันตรงกับความต่างศักย์ไฟฟ้าระหว่างปลายทั้งสองของตัวนำนั้น"

เมื่อ I แทน ปริมาณกระแสไฟฟ้าที่ผ่านตัวนำ มีหน่วยเป็นแอมแปร์

V แทน ความต่างศักย์ไฟฟ้า มีหน่วยเป็นโวลต์

จากกฎของโอห์ม จะได้ $I \propto V$ หรือ $I = kV$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว $k \neq 0$ และ
จะได้ $\frac{V}{I} = \frac{1}{k}$

ค่าคงตัว $\frac{1}{k}$ เรียกว่า ความต้านทานของตัวนำ เขียนแทนด้วย R มีหน่วยเป็นโวลต์ต่อแอมแปร์ หรือเรียกว่า โอห์ม ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ Ω

นั่นคือ $V = IR$ หรือ $I = \frac{V}{R}$

ตัวอย่างที่ 1 ถ้า y แปรผันตรงกับ x และ $y = 12$ เมื่อ $x = 3$ จงหาค่าคงตัวของการแปรผัน

วิธีทำ กำหนดให้ $y \propto x$

จะได้ $y = kx$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัวของการแปรผัน

แทน y ด้วย 12 และแทน x ด้วย 3 ในสมการ

จะได้ $12 = k \times 3$

$k = \frac{12}{3}$

หรือ $k = 4$

ดังนั้น ค่าคงตัวของการแปรผันคือ 4

ตอบ 4

ตัวอย่างที่ 2 ถ้า a แปรผันตรงกับ $\frac{1}{b}$ และ $a = 5$ เมื่อ $b = 3$ จงเขียนสมการแสดงการแปรผัน

วิธีทำ กำหนดให้ $a \propto \frac{1}{b}$

จะได้ $a = k \times \frac{1}{b}$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัวของการแปรผัน

แทน a ด้วย 5 และแทน b ด้วย 3 ในสมการ

จะได้ $5 = k \times \frac{1}{3}$

$k = 5 \times 3$

หรือ $k = 15$

ดังนั้น ค่าคงตัวของการแปรผันคือ 15

นั่นคือ สมการของการแปรผันคือ $a = \frac{15}{b}$

ตอบ $a = \frac{15}{b}$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ s แปรผันตรงกับ t^2 และ $s = 15$ เมื่อ $t = 5$

1) จงหาค่า s เมื่อ $t = 10$

2) ถ้า t เป็น $\frac{1}{4}$ เท่าของปริมาณเดิม s จะเป็นกี่เท่าของปริมาณเดิม

วิธีทำ กำหนดให้ $s \propto t^2$

จะได้ $s = kt^2$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัวของการแปรผัน

1) แทน s ด้วย 15 และแทน t ด้วย 5 ในสมการ

จะได้ $15 = k \times 5^2$

$k = \frac{15}{25}$

หรือ $k = \frac{3}{5}$

นั่นคือ $s = \frac{3}{5}t^2$

เมื่อ $t = 10$ จะได้ $s = \frac{3}{5} \times 100$

หรือ $s = 60$

ดังนั้น $s = 60$ เมื่อ $t = 10$

2) ถ้า t เป็น $\frac{1}{4}$ เท่าของปริมาณเดิม จึงต้องแทน t ด้วย $\frac{1}{4}t$ ในสมการ $s = kt^2$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัวของการแปรผัน

จะได้ $s = k \times \left(\frac{1}{4}t\right)^2$ kt^2 เป็นปริมาณเดิม

$s = \frac{1}{4^2} \times kt^2$

หรือ $s = \frac{1}{16} \times kt^2$

ดังนั้น s เป็น $\frac{1}{16}$ เท่าของปริมาณเดิม

ตอบ
1) $s = 60$ เมื่อ $t = 10$
2) s เป็น $\frac{1}{16}$ เท่าของปริมาณเดิม เมื่อ t เป็น $\frac{1}{4}$ เท่าของปริมาณเดิม

ข้อสังเกต ปริมาณเดิมของ t เป็น t

ถ้า t เป็น $\frac{1}{4}$ เท่าของปริมาณเดิม ดังนั้น แทน t ด้วย $\frac{1}{4}t$

จาก $s = kt^2$ จะได้ปริมาณเดิมของ s เป็น kt^2

ปริมาณใหม่ของ s หาได้ด้วยการแทน t ด้วย $\frac{1}{4}t$ ในสมการ $s = kt^2$

จะได้ $s = k\left(\frac{1}{4}t\right)^2 = \frac{1}{16} \times kt^2$ ซึ่งในที่นี้จะเห็นว่า ไม่จำเป็นต้องแทน k ด้วย $\frac{3}{5}$ ในสมการแสดงการแปรผัน เพราะไม่ได้นำค่านี้มาใช้โดยตรง

ตัวอย่างที่ 4 เมื่อปล่อยน้ำจากถังให้ไหลออกจากท่อที่อยู่ก้นถัง พบว่าอัตราเร็วของการไหลของน้ำ v (ลูกบาศก์เมตรต่อนาที) แปรผันตรงกับกรณฑ์ที่สองของความสูงของน้ำ h (เซนติเมตร) ที่วัดจากก้นถัง และเมื่อความสูงของน้ำเป็น 9 เซนติเมตร น้ำจะไหลออกจากท่อด้วยอัตราเร็ว 42.6 ลูกบาศก์เมตรต่อนาที จงหา

1) สมการแสดงความเกี่ยวข้องระหว่างอัตราเร็วของการไหลของน้ำกับความสูงของน้ำ
2) อัตราเร็วของการไหลของน้ำที่มีความสูง 36 เซนติเมตร
3) ความสูงของน้ำที่ไหลด้วยอัตราเร็ว 56.8 ลูกบาศก์เมตรต่อนาที

วิธีทำ ให้น้ำที่มีความสูง h เซนติเมตร ไหลออกจากท่อด้วยอัตราเร็ว v ลูกบาศก์เมตรต่อนาที

กำหนดให้ $v \propto \sqrt{h}$

ดังนั้น $v = k\sqrt{h}$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัวของการแปรผัน

1) เมื่อความสูงของน้ำเป็น 9 เซนติเมตร น้ำไหลด้วยอัตราเร็ว 42.6 ลูกบาศก์เมตรต่อนาที

แทน v ด้วย 42.6 และแทน h ด้วย 9

จะได้ $42.6 = k\sqrt{9}$

ดังนั้น $k = \frac{42.6}{3}$

หรือ $k = 14.2$

สมการแสดงความเกี่ยวข้องระหว่าง v กับ h คือ $v = 14.2\sqrt{h}$

2) แทน h ด้วย 36 ในสมการ $v = 14.2\sqrt{h}$

จะได้ $v = 14.2\sqrt{36}$

$= 14.2 \times 6$

$= 85.2$

ดังนั้นอัตราเร็วของการไหลของน้ำเท่ากับ 85.2 ลูกบาศก์เมตรต่อนาที เมื่อน้ำมีความสูง 36 เซนติเมตร

3) แทน v ด้วย 56.8 ในสมการ $v = 14.2\sqrt{h}$

จะได้ $56.8 = 14.2\sqrt{h}$

ดังนั้น $\sqrt{h} = \frac{56.8}{14.2}$

หรือ $\sqrt{h} = 4$

ยกกำลังสองทั้งสองข้างของสมการ

จะได้ $(\sqrt{h})^2 = 4^2$

หรือ $h = 16$

ดังนั้น ความสูงของน้ำเป็น 16 เซนติเมตร เมื่อน้ำไหลด้วยอัตราเร็ว 56.8 ลูกบาศก์เมตรต่อนาที

ตอบ

1) สมการแสดงความเกี่ยวข้องระหว่างอัตราเร็วของการไหลของน้ำกับความสูงของน้ำคือ $v = 14.2\sqrt{h}$
2) อัตราเร็วของการไหลของน้ำที่มีความสูง 36 เซนติเมตรเท่ากับ 85.2 ลูกบาศก์เมตรต่อนาที
3) เมื่อน้ำไหลด้วยอัตราเร็ว 56.8 ลูกบาศก์เมตรต่อนาที ความสูงของน้ำเป็น 16 เซนติเมตร

แบบฝึกหัด 3.1

1. จากสิ่งที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงเขียนสมการแสดงการแปรผันโดยใช้สัญลักษณ์ที่กำหนดให้ในแต่ละข้อ
   1) ระยะทางที่รถยนต์คันหนึ่งแล่นได้ s (กิโลเมตร) เมื่อใช้อัตราเร็วคงที่ แปรผันตรงกับเวลาในการเดินทาง t (ชั่วโมง) และค่าคงตัวของการแปรผันคือ 60
   2) ค่าขนถ่ายสินค้า P (บาท) แปรผันตรงกับระยะทางที่ขนถ่ายสินค้า d (กิโลเมตร) และค่าคงตัวของการแปรผันคือ 10
   3) ดอกเบี้ยจากเงินกู้ I (บาท) แปรผันตรงกับจำนวนเงินที่ให้กู้ P (บาท) และค่าคงตัวของการแปรผันคือ 0.15
   4) ปริมาณเกลือแกงที่ละลาย s (กรัม) แปรผันตรงกับอุณหภูมิ t (องศาเซลเซียส) และค่าคงตัวของการแปรผันคือ 0.5
   5) พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส A (ตารางหน่วย) แปรผันตรงกับกำลังสองของความยาวของเส้นทแยงมุม d (หน่วย) และค่าคงตัวของการแปรผันคือ $\frac{1}{2}$
   6) พื้นที่ผิวของทรงกลม A (ตารางหน่วย) แปรผันตรงกับกำลังสองของความยาวของรัศมีของทรงกลม r (หน่วย) และค่าคงตัวของการแปรผันคือ 4π

2. สมการต่อไปนี้แสดงการแปรผันตรง จงบอกว่าปริมาณใดแปรผันตรงกับปริมาณใด พร้อมทั้งบอกค่าคงตัวของการแปรผันนั้น
   1) $C = 2\pi r$
   2) $e = 0.05m$
   3) $T = \frac{2\pi}{w}$
   4) $P = \frac{3q}{2}$
   5) $V = PT$ เมื่อ T เป็นค่าคงตัวและ $T \neq 0$

3. ถ้า y แปรผันตรงกับ x และ y = 6 เมื่อ x = 3
   1) จงหาค่าคงตัวของการแปรผัน
   2) y มีค่าเท่าใด เมื่อ x = 11
   3) ถ้า x เป็น 3 เท่าของปริมาณเดิม y จะเป็นกี่เท่าของปริมาณเดิม
   4) ถ้า x เพิ่มขึ้น 50% y จะเพิ่มขึ้นหรือลดลงกี่เปอร์เซ็นต์
4. ถ้า P แปรผันตรงกับ Q^2 และ P = 9 เมื่อ Q = 3 จงหาค่า P เมื่อ $Q = \frac{5}{2}$
5. ถ้า y แปรผันตรงกับ $\sqrt{x^3}$ และ y = 9 เมื่อ x = 9 จงหาค่า y เมื่อ x = 4
6. ถ้า y แปรผันตรงกับ $3x+2$ และ y = 4 เมื่อ x = 2 จงหาค่า y เมื่อ x = 5
7. ถ้า y แปรผันตรงกับ $x+1$ และ y = 3 เมื่อ x = 5 จงแสดงว่า $2y-x = 1$
8. กำหนดให้ y แปรผันตรงกับ x^2 จงหาว่า
   1) ถ้า x เป็น 2 เท่าของปริมาณเดิม y จะเป็นกี่เท่าของปริมาณเดิม
   2) ถ้า x เป็น $\frac{1}{3}$ ของปริมาณเดิม y จะเป็นกี่เท่าของปริมาณเดิม
   3) ถ้า x ลดลง 30% y จะเพิ่มขึ้นหรือลดลงกี่เปอร์เซ็นต์
9. ภาษีขาเข้าของสินค้าชนิดหนึ่งแปรผันตรงกับต้นทุนของสินค้านั้น ถ้าสินค้าชนิดนี้ต้องเสียภาษีขาเข้า 25% ของต้นทุน จงเขียนสมการแสดงความเกี่ยวข้องระหว่างภาษีขาเข้ากับต้นทุนของสินค้า
10. กำหนดให้ $y \alpha x^2$ จงหาสมการของการแปรผัน และเติมจำนวนที่เว้นไว้ให้ถูกต้อง เมื่อกำหนดค่า x และ y ดังในตาราง

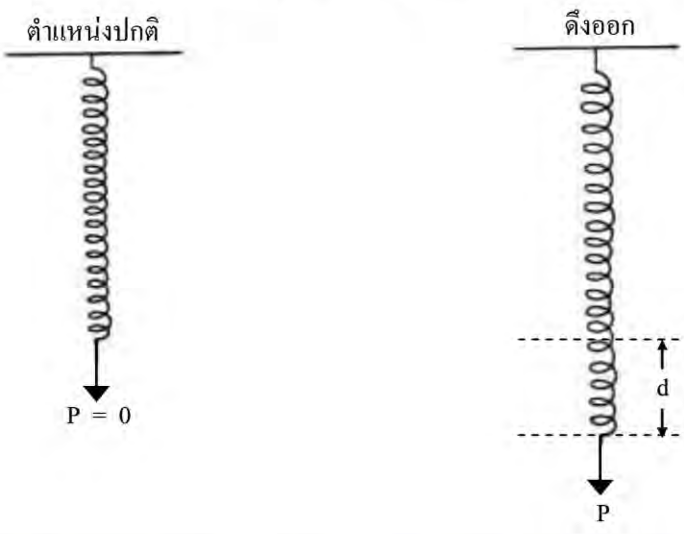
x	1	2	3	4		
y	2	8	18		50	98

11. เมื่อปล่อยก้อนหินให้ตกอย่างอิสระในแนวดิ่งจะพบว่า ระยะทาง s เมตร ที่ก้อนหินตกลงมาแปรผันตรงกับกำลังสองของเวลาที่ตก t วินาที ถ้าในเวลา 2 วินาที ก้อนหินตกลงมาเป็นระยะทาง 20 เมตร จงหาว่า

1) เมื่อปล่อยก้อนหินให้ตกโดยอิสระนาน 6 วินาที จะได้ระยะทางเท่าใด
2) เมื่อก้อนหินตกโดยอิสระเป็นระยะทาง 15 เมตร จะใช้เวลาประมาณเท่าไร (ตอบเป็นทศนิยม 1 ตำแหน่ง)

12. ปริมาณความร้อนที่เกิดขึ้นบนลวดตัวนำที่มีกระแสไฟฟ้าผ่านในช่วงเวลาหนึ่งแปรผันตรงกับความต้านทานของลวดตัวนำ ลวดตัวนำที่มีความต้านทาน 10 โอห์ม จะมีปริมาณความร้อน 1,536 แคลอรี เกิดขึ้นบนเส้นลวด จงหาว่า ถ้าผ่านกระแสไฟฟ้าไปบนเส้นลวดที่มีความต้านทาน 15 โอห์ม จะมีปริมาณความร้อนเกิดขึ้นบนเส้นลวดเท่าใด

13. ในการออกแรงดึงลวดสปริงให้ยืดออก ปรากฏผลการทดลองเป็นแบบรูปดังตารางต่อไปนี้



แรงที่ใช้ดึงสปริง P (นิวตัน)	0.6	1.2	1.8	2.4	3.0	3.6
ความยาวที่สปริงยืดออก d (เมตร)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6

1) จากตารางนักเรียนสรุปได้หรือไม่ว่า แรงที่ใช้ดึงสปริงแปรผันตรงกับความยาวที่สปริงยืดออก
2) จงหาสมการแสดงความเกี่ยวข้องระหว่าง P กับ d
3) ถ้าผู้ทดลองใช้แรงดึง 5.4 นิวตัน ลวดสปริงจะยืดออกเท่าใด
4) ถ้าต้องการให้ลวดสปริงยืดออก 1 เมตรพอดี จะต้องออกแรงดึงเท่าไร

14. ตุ้มน้ำหนักอันหนึ่งห้อยอยู่ที่ปลายเชือกเส้นหนึ่ง พบว่าเวลาของการแกว่งครบรอบของตุ้มน้ำหนักแปรผันตรงกับกรณฑ์ที่สองของความยาวของเชือก ถ้าเชือกยาว 25 เซนติเมตร จะแกว่งครบรอบในเวลา 1 วินาที จงหาว่า

1) ถ้าเชือกยาว 1 เมตร ตุ้มน้ำหนักจะแกว่งครบรอบในเวลากี่วินาที
2) ถ้าต้องการให้ตุ้มน้ำหนักนี้แกว่งได้นาทีละ 75 รอบ จะต้องแขวนตุ้มน้ำหนักด้วยเชือกยาวเท่าไร

15. ในการหยุดรถยนต์ เมื่อผู้ขับขี่แตะเบรกกะทันหันรถจะไม่หยุดทันที แต่จะมีการลื่นไถล ความยาวของรอยลื่นไถล L (เมตร) แปรผันตรงกับกำลังสองของอัตราเร็วของรถยนต์ V (กิโลเมตรต่อชั่วโมง) ขณะที่แตะเบรก ถ้ารอยลื่นไถลของรถยนต์คันหนึ่งยาว 6 เมตร เกิดจากการหยุดรถขณะที่อัตราเร็วของรถเป็น 48 กิโลเมตรต่อชั่วโมง จงหาว่า
1) เมื่อหยุดรถขณะที่อัตราเร็วเป็น 60 กิโลเมตรต่อชั่วโมง รอยลื่นไถลจะยาวเท่าใด
2) ถ้าวัดรอยลื่นไถลได้ยาว 37.5 เมตร ขณะนั้นรถแล่นอยู่ด้วยอัตราเร็วเท่าใด

16. ค่าของอุณหภูมิในหน่วยองศาเซลเซียส C แปรผันตรงกับค่าของอุณหภูมิในหน่วยองศาฟาเรนไฮต์ F ลบด้วย 32 เมื่อค่าของอุณหภูมิในหน่วยองศาเซลเซียสเป็น 30 ค่าของอุณหภูมินั้นในหน่วยองศาฟาเรนไฮต์จะเป็น 86 จงตอบคำถามต่อไปนี้
1) จงเขียนสมการของการแปรผัน
2) ค่าคงตัวของการแปรผันเป็นเท่าใด
3) อุณหภูมิ 0 องศาเซลเซียส จะเท่ากับกี่องศาฟาเรนไฮต์
4) อุณหภูมิ 5 องศาฟาเรนไฮต์ จะเท่ากับกี่องศาเซลเซียส

5) อุณหภูมิของร่างกายคนปกติเท่ากับ 37 องศาเซลเซียส ในหน่วยองศาฟาเรนไฮต์จะเป็นเท่าใด

น่ารู้

เมื่อ y แปรผันตรงกับ x ในบางครั้งจะกล่าวได้อีกอย่างหนึ่งว่า y เป็น*สัดส่วน*กับ x

3.2 การแปรผกผัน

ให้นักเรียนพิจารณาตารางแสดงแบบรูปของความสัมพันธ์ระหว่างอัตราเร็วเฉลี่ยและเวลาที่ใช้ในการเดินทางของรถยนต์คันหนึ่ง ซึ่งแล่นได้ระยะทาง 240 กิโลเมตร

ให้ v แทน อัตราเร็วเฉลี่ยของรถยนต์เป็นกิโลเมตรต่อชั่วโมง

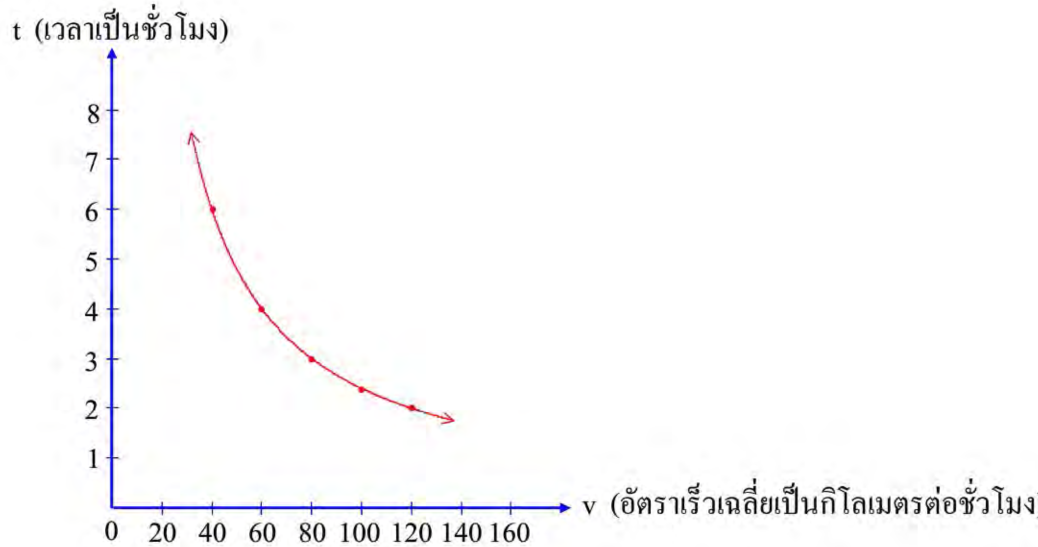
t แทน เวลาที่ใช้ในการเดินทางเป็นชั่วโมงในระยะทาง 240 กิโลเมตร

v	t	$\frac{t}{v}$	$v \times t$
40	6	$\frac{3}{20}$	240
60	4	$\frac{1}{15}$	240
80	3	$\frac{3}{80}$	240
100	$\frac{12}{5}$	$\frac{3}{125}$	240
120	2	$\frac{1}{60}$	240

จากตารางจะเห็นว่า เมื่ออัตราเร็วเฉลี่ย v ของรถยนต์เพิ่มขึ้น เวลา t ที่ใช้ในการเดินทางจะลดลงในอัตราที่ไม่คงตัว เมื่อพิจารณา $\frac{t}{v}$ จะพบว่าค่า $\frac{t}{v}$ สำหรับ v และ t แต่ละคู่ที่หาได้ไม่เท่ากัน ดังนั้น t ไม่แปรผันตรงกับ v แต่เมื่อพิจารณาค่า $v \times t$ จากตาราง จะเห็นว่า $v \times t$ เป็นค่าคงตัวเท่ากับ 240 สำหรับทุกคู่ของ v และ t

นั่นคือ ความสัมพันธ์ระหว่าง v และ t เขียนแสดงได้ด้วยสมการ $vt = 240$ หรือ $t = 240 \times \frac{1}{v}$

เนื่องจากเราสามารถหาเวลาที่ใช้ในการเดินทางได้เสมอ ไม่ว่าอัตราเร็วเฉลี่ยของรถยนต์จะเป็นเท่าใดก็ตามที่มากกว่าศูนย์ จึงเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวลาที่ใช้ในการเดินทางกับอัตราเร็วเฉลี่ยของรถยนต์ โดยให้แกนนอนแสดงค่า v และแกนตั้งแสดงค่า t ได้ดังรูป



ความสัมพันธ์ระหว่างอัตราเร็วเฉลี่ยของรถยนต์และเวลาที่ใช้ในการเดินทางดังกล่าวนี้เป็นตัวอย่างหนึ่งของการแปรผกผัน

บทนิยาม ให้ x และ y แทนปริมาณใด ๆ ที่ไม่ใช่ศูนย์

y แปรผกผันกับ x เมื่อ $y = k \times \frac{1}{x}$ โดยที่ k เป็นค่าคงตัว และ $k \neq 0$

สมการ $y = k \times \frac{1}{x}$ โดยที่ k เป็นค่าคงตัว และ $k \neq 0$ เรียกว่า *สมการแสดงการแปรผัน* ของการแปรผกผัน เรียก k ว่า *ค่าคงตัวของการแปรผัน* และเขียนแทน y แปรผกผันกับ x ด้วย $y \propto \frac{1}{x}$

จากความสัมพันธ์ระหว่างอัตราเร็วเฉลี่ยและเวลาที่ใช้ในการเดินทาง ซึ่งแสดงด้วยสมการ $vt = 240$ หรือ $t = 240 \times \frac{1}{v}$ ข้างต้น จะได้ว่า t แปรผกผันกับ v โดยมีสมการแสดงการแปรผันเป็น $t = 240 \times \frac{1}{v}$ และมีค่าคงตัวของการแปรผันเป็น 240

ให้นักเรียนพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณ x และปริมาณ y ที่เป็นแบบรูป ดังในตาราง ต่อไปนี้

x	y	$\frac{y}{x}$	$x \times y$
1	-12	-12	-12
2	-6	-3	-12
3	-4	$-\frac{4}{3}$	-12
4	-3	$-\frac{3}{4}$	-12

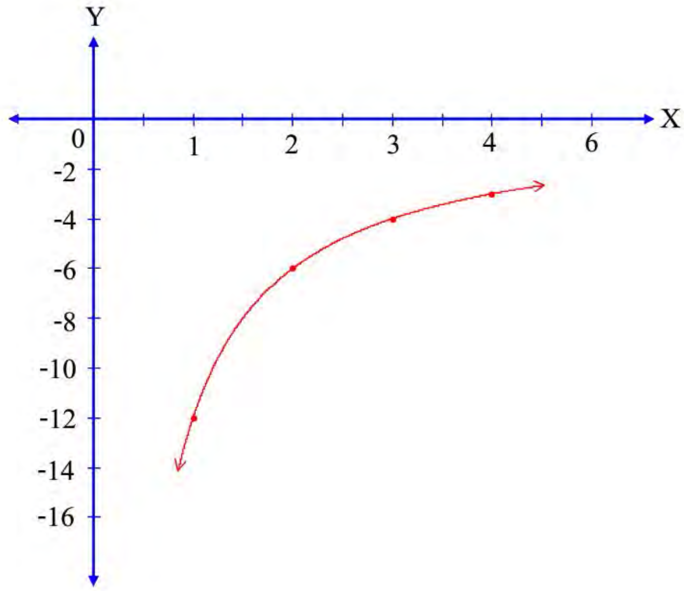
จากตารางจะเห็นว่า $\frac{y}{x}$ ไม่เป็นค่าคงตัวตัวเดียวกัน สำหรับทุกคู่ของ x และ y ดังนั้น y ไม่แปรผันตรงกับ x

เมื่อพิจารณาค่า $x \times y$ จากตาราง จะเห็นว่า $x \times y$ เป็นค่าคงตัวเท่ากับ -12 สำหรับทุกคู่ของ x และ y

นั่นคือ ความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y เขียนแสดงได้ด้วยสมการ $xy = -12$ หรือ $y = -12 \times \frac{1}{x}$

ดังนั้น y แปรผกผันกับ x โดยมีสมการแสดงการแปรผันเป็น $y = -12 \times \frac{1}{x}$ และมีค่าคงตัวของการแปรผันเป็น -12

เมื่อนำปริมาณทั้งสองมาเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y จะมีลักษณะดังรูป



จากบทนิยามของการแปรผกผัน เราทราบว่า ค่าคงตัวของการแปรผันต้องไม่เท่ากับศูนย์ จากตัวอย่างแสดงความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณสองปริมาณข้างต้น จะเห็นว่า ค่าคงตัวของการแปรผันอาจเป็นจำนวนจริงบวกหรือจำนวนจริงลบก็ได้ กราฟแสดงความสัมพันธ์ที่เป็นการแปรผกผัน จะไม่ผ่านจุด (0, 0) ไม่เป็นส่วนของเส้นตรง ไม่เป็นรังสีและไม่เป็นเส้นตรง

ในชีวิตประจำวัน เรามักจะพบการแปรผกผันระหว่างปริมาณสองปริมาณในลักษณะที่ค่าคงตัวของการแปรผันเป็นจำนวนจริงบวกเป็นส่วนมาก ในบทเรียนนี้จึงจะเน้นการแปรผกผันที่ค่าคงตัวของการแปรผันเป็นจำนวนจริงบวก

เนื่องจาก $y \propto \frac{1}{x}$ เมื่อ $y = k \times \frac{1}{x},\ k \neq 0$ และ $y = k \times \frac{1}{x},\ k \neq 0$ สามารถเขียนได้เป็น $xy = k,\ k \neq 0$

ดังนั้นอาจกล่าวได้อีกอย่างหนึ่งว่า $y \propto \frac{1}{x}$ *เมื่อ* xy *เป็นค่าคงตัวตัวเดียวกัน ที่ไม่เท่ากับศูนย์ สำหรับทุกคู่ของ* x *และ* y

ฉะนั้นในการพิจารณาว่า ความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณ x *และปริมาณ* y *ที่กำหนดให้มีความสัมพันธ์กันแบบการแปรผกผันหรือไม่ เราอาจพิจารณาว่าผลคูณของปริมาณทั้งสองนั้นเป็นค่าคงตัวตัวเดียวกันที่ไม่เท่ากับศูนย์ สำหรับทุกคู่ของ* x *และ* y *หรือไม่ ถ้าเป็นค่าคงตัว*

ตัวเดียวกันที่ไม่เท่ากับศูนย์ แล้วความสัมพันธ์ระหว่างสองปริมาณนั้นก็เป็นการแปรผกผัน ที่มีค่าคงตัวดังกล่าวเป็นค่าคงตัวของการแปรผัน แต่ถ้ามี x และ y บางคู่ที่ทำให้ผลคูณต่างจากผลคูณของ x และ y คู่อื่น ๆ แล้วความสัมพันธ์ระหว่างสองปริมาณนั้นก็ไม่เป็นการแปรผกผัน

เขียนได้ไหม

ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

1. จงเขียนสมการแสดงการแปรผันจากสิ่งที่กำหนดให้ต่อไปนี้
   1) $y \propto \frac{1}{x^2}$ และ 2 เป็นค่าคงตัวของการแปรผัน
   2) $s \propto \frac{1}{\sqrt{2t}}$ และ $\frac{1}{5}$ เป็นค่าคงตัวของการแปรผัน
   3) $v \propto \frac{1}{\sqrt{t}}$ และ 0.5 เป็นค่าคงตัวของการแปรผัน
2. ในแต่ละสมการต่อไปนี้ y แปรผกผันกับปริมาณใด และค่าคงตัวของการแปรผันเป็นเท่าใด
   1) $y = \frac{k}{2x}$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว และ $k \neq 0$
   2) $y = \frac{1}{2t^3}$
   3) $y = \frac{7}{x+1}$
   4) $y = \frac{k^2}{(x-1)^2}$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว และ $k \neq 0$

3. จากตารางแสดงแบบรูปของความเกี่ยวข้องระหว่าง x และ y ตารางใดแสดงว่า y แปรผกผันกับ x และถ้า y แปรผกผันกับ x ให้หาค่าคงตัวของการแปรผันและเขียนสมการแสดงการแปรผันด้วย

1)

x	1	2	3	4
y	12	6	4	3

2)

x	3	6	9	12
y	6	9	12	15

3)

x	-2	-1	$\frac{1}{2}$	6
y	2	4	-8	$-\frac{2}{3}$

4)

x	3	2	1	$\frac{1}{2}$
y	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$	3

4. 1) จากข้อ 3 ในกรณีที่ y แปรผกผันกับ x แล้ว x แปรผกผันกับ y ด้วยหรือไม่ ถ้า x แปรผกผันกับ y แล้วจงหาค่าคงตัวของการแปรผันและสมการแสดงการแปรผัน

   2) นักเรียนคิดว่าในกรณีทั่วไป ถ้า y แปรผกผันกับ x แล้ว x แปรผกผันกับ y หรือไม่ เพราะเหตุใด

5. นักเรียนคิดว่าถ้า y แปรผกผันกับ x แล้ว สามารถกล่าวได้ว่า y แปรผันตรงกับ $\frac{1}{x}$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

นอกจากจะมี y แปรผกผันกับ x ตามที่กล่าวมาแล้วข้างต้น y ยังอาจแปรผกผันกับปริมาณอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องกับ x เช่น y แปรผกผันกับ x^2 และ y แปรผกผันกับ $\sqrt{x}$

ความเข้มเสียง

เมื่อแหล่งกำเนิดเสียงเกิดการสั่น พลังงานจากการสั่นจะถ่ายโอนต่อ ๆ กันมาผ่านอนุภาคของอากาศจนถึงหูของผู้ฟัง ทำให้ผู้ฟังได้ยินเสียง เสียงที่ได้ยินอาจจะดังหรือค่อย ขึ้นกับพลังงานของเสียงที่มาถึงผู้ฟัง

อัตราการถ่ายโอนพลังงานเสียงของแหล่งกำเนิด คือปริมาณพลังงานเสียงที่ส่งออกจากแหล่งกำเนิดในหนึ่งหน่วยเวลา ซึ่งเรียกว่า กำลังเสียง มีหน่วยเป็นวัตต์

กำลังเสียงที่แหล่งกำเนิดเสียงส่งออกไปต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ของหน้าคลื่นทรงกลม เรียกว่า ความเข้มเสียง

ในการทดลองหาความสัมพันธ์ระหว่างระยะ d เป็นเมตรที่ผู้ฟังอยู่ห่างจากแหล่งกำเนิดเสียงและความเข้มเสียง I เป็นวัตต์ต่อตารางเมตร เมื่อกำหนดให้กำลังเสียงจากแหล่งกำเนิดเสียงมีค่าคงตัว ปรากฏผลการทดลองเป็นแบบรูปดังตารางต่อไปนี้

d (เมตร)	1	2	3	4	5
I (วัตต์ต่อตารางเมตร)	0.80	0.20	0.09	0.05	0.032

จากตารางจะเห็นว่า เมื่อระยะที่ผู้ฟังอยู่ห่างจากแหล่งกำเนิดเสียง d เพิ่มขึ้น ความเข้มเสียง I จะลดลง และ $\frac{I}{d}$ เป็นจำนวนจริงบวกสำหรับทุกคู่ของ d และ I จึงคาดการณ์ได้ว่า I น่าจะแปรผกผันกับ d จึงลองหาผลคูณระหว่าง d กับ I ได้ดังตาราง

d (เมตร)	1	2	3	4	5
I (วัตต์ต่อตารางเมตร)	0.80	0.20	0.09	0.05	0.032
dI	0.80	0.40	0.27	0.20	0.16

จะเห็นว่า dI ไม่เป็นค่าคงตัวตัวเดียวกัน สำหรับทุกคู่ของ d และ I ดังนั้น I ไม่แปรผกผันกับ d

เมื่อลองหาผลคูณระหว่าง d^2 กับ I จะได้ดังตาราง

d (เมตร)	1	2	3	4	5
I (วัตต์ต่อตารางเมตร)	0.80	0.20	0.09	0.05	0.032
d^2	1	4	9	16	25
d^2I	0.80	0.80	0.81	0.80	0.80

จากตารางจะเห็นว่า d^2I เป็นค่าคงตัวประมาณ 0.8 สำหรับทุกคู่ของ d^2 และ I ดังนั้น I แปรผกผันกับ d^2 โดยมีค่าคงตัวของการแปรผันเป็น 0.8 และสมการแสดงการแปรผันเป็น $I = 0.8 \times \frac{1}{d^2}$

หมายเหตุ 1. การแปรผันในรูป $y \propto \frac{1}{x^2}$ มีความสำคัญมากในวิชาวิทยาศาสตร์ และปริมาณสองปริมาณที่มีความเกี่ยวข้องกันเช่นนี้ เราเรียกว่า มีความเกี่ยวข้องกันตาม กฎกำลังสองผกผัน

2. เนื่องจากมีความคลาดเคลื่อนในการวัด ดังนั้นในการทดลองจึงยอมรับกรณีที่ได้ค่า d^2I แตกต่างกันเพียงเล็กน้อย

ตัวอย่างที่ 1 ถ้า v แปรผกผันกับ t และ v = 30 เมื่อ t = 4 จงเขียนสมการแสดงการแปรผัน

วิธีทำ กำหนดให้ $v \propto \frac{1}{t}$

จะได้ $v = k \times \frac{1}{t}$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัวของการแปรผัน

แทน v ด้วย 30 และแทน t ด้วย 4 ในสมการ $v = k \times \frac{1}{t}$

จะได้ $30 = k \times \frac{1}{4}$

$k = 4 \times 30$

หรือ $k = 120$

ดังนั้น สมการแสดงการแปรผันคือ $v = 120 \times \frac{1}{t}$ หรือ $v = \frac{120}{t}$

ตอบ $v = \frac{120}{t}$

ตัวอย่างที่ 2 ถ้า y แปรผกผันกับ x^2 และ $y = 2$ เมื่อ $x = 10$ แล้ว

1) จงหาค่า y เมื่อ $x = 5$

2) ถ้า x เป็น 2 เท่าของปริมาณเดิม y จะเป็นกี่เท่าของปริมาณเดิม

วิธีทำ กำหนดให้ $y \propto \frac{1}{x^2}$

จะได้ $y = k \times \frac{1}{x^2}$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัวของการแปรผัน

1) แทน y ด้วย 2 และแทน x ด้วย 10 ในสมการ $y = k \times \frac{1}{x^2}$

จะได้ $2 = k \times \frac{1}{10^2}$

$k = 2 \times 100$

หรือ $k = 200$

ดังนั้น $y = 200 \times \frac{1}{x^2}$

ถ้า $x = 5$

จะได้ $y = 200 \times \frac{1}{25}$

ดังนั้น $y = 8$

2) ถ้า x เป็น 2 เท่าของปริมาณเดิม จึงแทน x ด้วย 2x ในสมการ

$y = k \times \frac{1}{x^2}$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัวของการแปรผัน

จะได้ $y = k \times \frac{1}{(2x)^2}$

$y = k \times \frac{1}{4x^2}$

$y = \frac{1}{4} \times \left(k \times \frac{1}{x^2}\right)$

$k \times \frac{1}{x^2}$ เป็นปริมาณเดิม

ดังนั้น y เป็น $\frac{1}{4}$ เท่าของปริมาณเดิม

ตอบ
1) $y = 8$ เมื่อ $x = 5$
2) y เป็น $\frac{1}{4}$ เท่าของปริมาณเดิม เมื่อ x เป็น 2 เท่าของปริมาณเดิม

ตัวอย่างที่ 3 ที่อุณหภูมิหนึ่ง ความดันของก๊าซแปรผกผันกับปริมาตรของก๊าซ ก๊าซชนิดหนึ่งมีปริมาตร 2.0×10^{-3} ลูกบาศก์เมตรที่ความดัน 2 บรรยากาศ จงหาความดันของก๊าซเมื่อมีปริมาตร 1.5×10^{-2} ลูกบาศก์เมตร

วิธีทำ ให้ P แทนความดันของก๊าซ มีหน่วยเป็นบรรยากาศ

V แทนปริมาตรของก๊าซ มีหน่วยเป็นลูกบาศก์เมตร

เนื่องจากความดันของก๊าซแปรผกผันกับปริมาตรของก๊าซ

นั่นคือ $P \propto \frac{1}{V}$

ดังนั้น $P = k \times \frac{1}{V}$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัวของการแปรผัน

ก๊าซชนิดหนึ่งมีปริมาตร 2.0×10^{-3} ลูกบาศก์เมตรที่ความดัน 2 บรรยากาศ

แทน P ด้วย 2 และ แทน V ด้วย 2.0×10^{-3}

จะได้ $2 = k \times \frac{1}{2.0 \times 10^{-3}}$

หรือ $k = 4.0 \times 10^{-3}$

ดังนั้น $P = 4.0 \times 10^{-3} \times \frac{1}{V}$

ถ้า $V = 1.5 \times 10^{-2}$

จะได้ $P = \frac{4.0 \times 10^{-3}}{1.5 \times 10^{-2}} = \frac{4}{15}$

ดังนั้น ความดันของก๊าซเป็น $\frac{4}{15}$ บรรยากาศ

ตอบ $\frac{4}{15}$ บรรยากาศ

แบบฝึกหัด 3.2

1. จากสิ่งที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงเขียนสมการแสดงการแปรผันโดยใช้สัญลักษณ์ที่กำหนดให้ในแต่ละข้อ
    1) ความสูง (h) ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน แปรผกผันกับความยาวฐาน (b) โดยค่าคงตัวของการแปรผันคือ 120
    2) พื้นที่ฐาน (A) ของทรงกระบอก แปรผกผันกับความสูง (h) โดยค่าคงตัวของการแปรผันคือ 154

3) ปริมาณกระแสไฟฟ้า (I) แปรผกผันกับความต้านทาน (R) โดยค่าคงตัวของการแปรผันคือ 220
4) ความถี่ (f) ของเสียง แปรผกผันกับความยาวคลื่น (L) โดยค่าคงตัวของการแปรผันคือ 346
5) ความดัน (P) ของก๊าซ แปรผกผันกับปริมาตร (V) ของก๊าซ โดยค่าคงตัวของการแปรผันคือ 0.004
6) ปริมาณ y แปรผกผันกับปริมาณ $x^3 + 2$ โดยค่าคงตัวของการแปรผันคือ -5

2. สมการต่อไปนี้แสดงการแปรผกผัน จงบอกว่าปริมาณใดแปรผกผันกับปริมาณใด พร้อมทั้งบอกค่าคงตัวของการแปรผันนั้น
   1) $y = \frac{2}{x}$
   2) $P = -\frac{3}{5q}$
   3) $T = \frac{20}{w^2}$
   4) $h = \frac{500}{\pi r^2}$
   5) $y = \frac{m}{x^3}$ เมื่อ m เป็นค่าคงตัว และ $m \neq 0$
3. ถ้า y แปรผกผันกับ x และ y = 8 เมื่อ x = 3 จงหา
   1) สมการแสดงความเกี่ยวข้องระหว่าง y กับ x
   2) ค่า y เมื่อ x = 84
   3) ค่า x เมื่อ y = 9
   4) y จะเป็นกี่เท่าของปริมาณเดิม เมื่อ x เป็นสองเท่าของปริมาณเดิม
   5) y จะเพิ่มขึ้นหรือลดลงกี่เปอร์เซ็นต์ เมื่อ x เพิ่มขึ้น 20 เปอร์เซ็นต์
4. เมื่อ y แปรผกผันกับ $\sqrt{x}$ และ y = 5 เมื่อ x = 16 จงหา
   1) ค่า y เมื่อ x = 100
   2) ค่า x เมื่อ y = 60
   3) y จะเป็นกี่เท่าของปริมาณเดิม เมื่อ x เป็น $\frac{1}{4}$ เท่าของปริมาณเดิม

5. ปริมาณกระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านเส้นลวดแปรผกผันกับความต้านทานของเส้นลวดนั้น ลวดเส้นหนึ่งมีความต้านทาน $1\frac{7}{8}$ โอห์ม มีกระแสไฟฟ้า 2.0 แอมแปร์ไหลผ่าน จงหากระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านลวดซึ่งมีความต้านทาน
    1) 3 โอห์ม
    2) 5 โอห์ม
6. ความถี่ F (กิโลเฮิรตซ์) ของคลื่นวิทยุแปรผกผันกับความยาวคลื่น L (เมตร) และ $F = 375$ เมื่อ $L = 800$ จงหา
    1) สมการแสดงความเกี่ยวข้องระหว่าง F กับ L
    2) ความยาวคลื่นของวิทยุเมื่อมีความถี่ 200 กิโลเฮิรตซ์
    3) ความถี่ของคลื่นวิทยุ ถ้าความยาวคลื่นเป็น 464 เมตร (ตอบเป็นจำนวนเต็มหน่วย)
7. น้ำหนักของวัตถุที่ไม่อยู่ใต้ระดับน้ำทะเลแปรผกผันกับกำลังสองของระยะทางที่วัตถุอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางของโลก ชายคนหนึ่งหนัก 80 กิโลกรัมที่ระดับน้ำทะเล จงหาน้ำหนักของชายคนนี้บนยอดเขาซึ่งสูงจากระดับน้ำทะเล 6,000 เมตร (กำหนดให้รัศมีของโลกยาว 6,400 กิโลเมตร)
8. ระยะเวลาในการใส่น้ำให้เต็มถังแปรผกผันกับกำลังสองของความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของท่อส่งน้ำ นายแดงต้องการใส่น้ำให้เต็มถังใบหนึ่ง ปรากฏว่าท่อสายยางที่ใช้มีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 3 เซนติเมตร ใช้เวลา 1 ชั่วโมง น้ำจึงจะเต็มถัง ถ้านายแดงเปลี่ยนท่อสายยางเป็นขนาดที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 6 เซนติเมตร จะใช้เวลานานเท่าใด น้ำจึงจะเต็มถัง
9. เมื่อระยะทางคงที่ จะได้ว่า อัตราเร็ว v แปรผกผันกับเวลา t ตำรวจจึงใช้ความเกี่ยวข้องดังกล่าวในการตรวจจับอัตราเร็วของรถยนต์บนท้องถนน สำหรับระยะทางคงที่ระยะหนึ่ง ตำรวจรู้ว่า รถที่วิ่งด้วยอัตราเร็ว 50 กิโลเมตรต่อชั่วโมง จะใช้เวลาวิ่งบนระยะทางนั้น 6 วินาที ถ้ารถคันหนึ่งใช้เวลาในการวิ่งบนระยะทางดังกล่าวเพียง 5 วินาที รถคันนั้นวิ่งด้วยอัตราเร็วเท่าใด

10. บริษัทรับเหมาก่อสร้างจ้างคนงาน 30 คน ซ่อมถนนสายหนึ่ง คนงานทั้งหมดช่วยกันซ่อมถนนไปได้ครึ่งหนึ่งใช้เวลา 16 วัน ถ้ากำหนดให้เวลาทำงานแล้วเสร็จแปรผกผันกับจำนวนคนงาน จงหาว่าบริษัทรับเหมาจะต้องเพิ่มคนงานอีกกี่คนจึงจะทำให้งานที่เหลือเสร็จใน
    1) 12 วัน
    2) 8 วัน
11. ความเข้มเสียง I วัตต์ / ตารางเมตร แปรผกผันกับกำลังสองของระยะที่ผู้ฟังอยู่ห่างจากแหล่งกำเนิดเสียง d เมตร เมื่อสมจิตรอยู่ห่างจากเครื่องกระจายเสียงเครื่องหนึ่งในระยะ 5 เมตร สมจิตรวัดความเข้มเสียงได้เป็น 0.032 วัตต์ / ตารางเมตร จงหาว่า
    1) ถ้าสมจิตรอยู่ห่างจากเครื่องกระจายเสียงดังกล่าว 12 เมตร จะวัดความเข้มเสียงได้เป็นเท่าใด
    2) ถ้าสมจิตรวัดความเข้มเสียงได้เป็น 0.2 วัตต์ / ตารางเมตร ขณะนั้นสมจิตรอยู่ห่างจากเครื่องกระจายเสียงดังกล่าวเท่าใด
12. w แปรผกผันกับ u และ u แปรผันตรงกับ t^2 ถ้า t ลดลงครึ่งหนึ่งของปริมาณเดิม w จะเปลี่ยนแปลงอย่างไร

3.3 การแปรผันเกี่ยวเนื่อง

นักเรียนได้รู้จักความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณสองปริมาณ เช่น x และ y มาแล้วดังนี้

1. y แปรผันตรงกับ x เมื่อ $y = kx$ โดยที่ k เป็นค่าคงตัวและ $k \neq 0$
2. y แปรผกผันกับ x เมื่อ $y = k \times \frac{1}{x}$ โดยที่ k เป็นค่าคงตัวและ $k \neq 0$

การแปรผันตรงและการแปรผกผันข้างต้น ถ้า x แปรเปลี่ยนไป y จะเปลี่ยนตามไปด้วย กล่าวคือ ค่า y ขึ้นอยู่กับค่า x เพียงตัวเดียว

เรามักจะพบว่าในชีวิตประจำวัน การแปรเปลี่ยนของปริมาณใดปริมาณหนึ่งขึ้นอยู่กับหลายปริมาณ เช่น ระยะทางที่เดินทางโดยรถยนต์ จะขึ้นอยู่กับอัตราเร็วเฉลี่ยของรถยนต์และเวลาที่ใช้ในการเดินทาง ดังตัวอย่างข้อมูลในตารางต่อไปนี้

อัตราเร็วเฉลี่ย v (กิโลเมตรต่อชั่วโมง)	เวลา t (ชั่วโมง)	ระยะทาง s (กิโลเมตร)
40	1	40
60	2	120
90	4	360
135	8	1,080
202.5	16	3,240

จากตารางจะพบแบบรูปที่สรุปเป็นความสัมพันธ์ได้ว่า ระยะทาง s ที่รถยนต์วิ่งได้เท่ากับ ผลคูณของอัตราเร็วเฉลี่ย v และเวลา t ที่ใช้ในการเดินทาง กล่าวคือ $s = vt$

ความสัมพันธ์ระหว่างระยะทางกับอัตราเร็วเฉลี่ยและเวลาดังกล่าว เป็นตัวอย่างหนึ่งของการแปรผันเกี่ยวเนื่อง

บทนิยาม ให้ $y, x_1, x_2, \ldots, x_n$ แทนปริมาณใด ๆ
y แปรผันเกี่ยวเนื่องกับ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เมื่อ y แปรผันตรงกับผลคูณของ $x_1, x_2, \ldots, x_n$

นั่นคือ y แปรผันเกี่ยวเนื่องกับ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เมื่อ $y = k(x_1)(x_2)\ldots(x_n)$ โดยที่ k เป็นค่าคงตัว และ $k \neq 0$

จากความสัมพันธ์ระหว่างระยะทางกับอัตราเร็วเฉลี่ยและเวลาที่ใช้ในการเดินทางโดยรถยนต์ ซึ่งแสดงด้วยสมการ $s = vt$ ข้างต้น จะได้ว่า s แปรผันเกี่ยวเนื่องกับ v และ t โดยมีสมการแสดงการแปรผันเป็น $s = vt$ และมีค่าคงตัวของการแปรผันเป็น 1

นักเรียนคงเคยได้พบความเกี่ยวข้องระหว่างการเปลี่ยนแปลงของปริมาณหนึ่ง ซึ่งขึ้นอยู่กับปริมาณอื่น ๆ ตั้งแต่สองปริมาณขึ้นไป ในลักษณะของสูตรหรือกฎต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ เช่น สูตรการหาพื้นที่ และสูตรการหาดอกเบี้ย

พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม

นักเรียนทราบมาแล้วว่า สูตรการหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมคือ

$$A = \frac{1}{2} \times b \times h$$

เมื่อ A แทนพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม

b แทนความยาวของฐาน

h แทนความสูง

จากสูตรการหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม $A = \frac{1}{2} \times b \times h$ จะได้ว่า A แปรผันตรงกับ $b \times h$ โดยมี $\frac{1}{2}$ เป็นค่าคงตัวของการแปรผัน และจากบทนิยามของการแปรผันเกี่ยวเนื่อง จะได้ว่า A แปรผันเกี่ยวเนื่องกับ b และ h โดยมีสมการแสดงการแปรผันเป็น $A = \frac{1}{2} \times b \times h$ และมีค่าคงตัวของการแปรผันเป็น $\frac{1}{2}$

ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

1. ถ้าให้ b เป็นค่าคงตัว แล้ว A จะแปรผันตรงกับ h หรือไม่ เพราะเหตุใด
2. ถ้าให้ h เป็นค่าคงตัว แล้ว A จะแปรผันตรงกับ b หรือไม่ เพราะเหตุใด

การแปรผันที่กล่าวมาแล้วข้างต้น เป็นการแปรผันเกี่ยวเนื่องระหว่างปริมาณหนึ่งกับอีกสองปริมาณ ต่อไปจะเป็นตัวอย่างของการแปรผันเกี่ยวเนื่องระหว่างปริมาณหนึ่งกับอีกสามปริมาณ

การหาดอกเบี้ย

นักเรียนเคยรู้จักสูตรการคิดดอกเบี้ยเงินฝากของธนาคาร

$$ด = \frac{ต \times ป \times อ}{100}$$

เมื่อ ด แทนดอกเบี้ยที่ได้ในช่วงเวลาที่ฝาก

ต แทนจำนวนเงินที่ฝากธนาคาร

ป แทนระยะเวลาที่ฝากคิดเป็นปี

อ แทนอัตราดอกเบี้ยเงินฝากที่ธนาคารกำหนดให้ต่อปี

จากสูตรการคิดดอกเบี้ย จะเขียนได้เป็น $ด = \frac{1}{100} \times (ต \times ป \times อ)$

จะเห็นว่า ด แปรผันตรงกับ $ต \times ป \times อ$ โดยมี $\frac{1}{100}$ เป็นค่าคงตัวของการแปรผัน และจากบทนิยามของการแปรผันเกี่ยวเนื่อง จะได้ว่า ด แปรผันเกี่ยวเนื่องกับ ต, ป และ อ โดยมีสมการแสดงการแปรผันเป็น $ด = \frac{ต \times ป \times อ}{100}$ และมีค่าคงตัวของการแปรผันเป็น $\frac{1}{100}$

ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

1. ถ้า ป และ อ เป็นค่าคงตัว นักเรียนคิดว่า ด จะแปรผันตรงกับ ต หรือไม่ เพราะเหตุใด
2. ถ้า ต และ อ เป็นค่าคงตัว นักเรียนคิดว่า ด จะแปรผันตรงกับ ป หรือไม่ เพราะเหตุใด
3. ถ้า ต และ ป เป็นค่าคงตัว นักเรียนคิดว่า ด จะแปรผันตรงกับ อ หรือไม่ เพราะเหตุใด

โดยทั่วไป เมื่อปริมาณหนึ่งแปรผันเกี่ยวเนื่องกับปริมาณต่าง ๆ จะได้ว่า ปริมาณนั้นแปรผันตรงกับแต่ละปริมาณ เมื่อปริมาณอื่น ๆ ที่เหลือเป็นค่าคงตัว เช่น

ถ้า y แปรผันเกี่ยวเนื่องกับ x และ z จะได้ว่า y แปรผันตรงกับ x เมื่อ z เป็นค่าคงตัว และ y แปรผันตรงกับ z เมื่อ x เป็นค่าคงตัว เป็นต้น

ตัวอย่างที่ 1 ปริมาตรของทรงกระบอกแปรผันเกี่ยวเนื่องกับกำลังสองของรัศมีของฐานและความสูง กระป๋องทรงกระบอกใบหนึ่ง ฐานมีรัศมี 5 เซนติเมตร สูง 16 เซนติเมตร มีปริมาตร 400π ลูกบาศก์เซนติเมตร จงหา

1) ปริมาตรของกระป๋องทรงกระบอกอีกใบหนึ่งซึ่งฐานมีรัศมี 2 เซนติเมตร สูง 10 เซนติเมตร
2) ปริมาตรของทรงกระบอกจะเปลี่ยนแปลงอย่างไร ถ้ารัศมีของฐานเพิ่มเป็น 3 เท่าของรัศมีเดิม และความสูงลดลงครึ่งหนึ่งของความสูงเดิม

วิธีทำ ให้ V แทนปริมาตรของทรงกระบอก มีหน่วยเป็นลูกบาศก์เซนติเมตร

r แทนรัศมีของฐาน มีหน่วยเป็นเซนติเมตร

h แทนความสูง มีหน่วยเป็นเซนติเมตร

จากที่กำหนดให้ จะได้ $V \propto r^2h$

นั่นคือ $V = mr^2h$ เมื่อ m เป็นค่าคงตัว และ $m \neq 0$

กระป๋องทรงกระบอกมีรัศมีของฐาน 5 เซนติเมตร สูง 16 เซนติเมตร มีปริมาตร 400π ลูกบาศก์เซนติเมตร

แทน $V = 400\pi$, $r = 5$ และ $h = 16$ ในสมการ $V = mr^2h$

จะได้ $400\pi = m \times 5^2 \times 16$

หรือ $m = \dfrac{400\pi}{25 \times 16} = \pi$

ดังนั้น สมการแสดงการแปรผันคือ $V = \pi r^2h$

1) แทน $r = 2$ และ $h = 10$ ในสมการ $V = \pi r^2h$

จะได้ $V = \pi \times 2^2 \times 10$

$= 40\pi$

ดังนั้น กระป๋องทรงกระบอกนี้มีปริมาตร 40π ลูกบาศก์เซนติเมตร

2) จากสมการแสดงการแปรผัน $V = \pi r^2h$

ถ้า r เพิ่มเป็น 3 เท่า และ h ลดลงครึ่งหนึ่ง จึงแทน r ด้วย 3r และแทน h ด้วย $\frac{1}{2}h$ ในสมการ $V = \pi r^2h$

จะได้ $V = \pi(3r)^2 \times \left(\frac{1}{2}h\right)$

$= 4.5\pi r^2 h$

ดังนั้น ปริมาตรของทรงกระบอกนี้จะเพิ่มเป็น 4.5 เท่าของปริมาตรเดิม

ตอบ 1) กระป๋องทรงกระบอกมีปริมาตร 40π ลูกบาศก์เซนติเมตร
2) ปริมาตรของทรงกระบอกจะเพิ่มเป็น 4.5 เท่าของปริมาตรเดิม

เมื่อกล่าวว่า *y แปรผันตรงกับ x และแปรผกผันกับ z* มีความหมายเช่นเดียวกับ *y แปรผันเกี่ยวเนื่องกับ x และ $\frac{1}{z}$ นั่นคือ y แปรผันตรงกับ $x \times \frac{1}{z}$* เช่น

ความสัมพันธ์ของระยะทาง กับอัตราเร็วเฉลี่ยและเวลาที่ใช้ในการเดินทาง ซึ่งมีสมการเป็น

$s = vt$ หรือ $v = \frac{s}{t}$

จะเห็นว่า v แปรผันเกี่ยวเนื่องกับ s และ $\frac{1}{t}$

นั่นคือ v แปรผันตรงกับ s และแปรผกผันกับ t

ตัวอย่างที่ 2 ความต้านทานไฟฟ้า R (โอห์ม) ของลวดเส้นหนึ่งแปรผันตรงกับความยาวของเส้นลวด L (เมตร) และแปรผกผันกับกำลังสองของความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของหน้าตัด D (มิลลิเมตร) เมื่อเส้นลวดขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 1 มิลลิเมตร และยาว 1 เมตร จะมีความต้านทานไฟฟ้า 0.5 โอห์ม จงหาว่าเส้นลวดขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 0.5 มิลลิเมตร และยาว 100 เมตร จะมีความต้านทานไฟฟ้ากี่โอห์ม

วิธีทำ จากที่กำหนดให้ จะได้ $R \propto L \times \frac{1}{D^2}$

นั่นคือ $R = k \times \frac{L}{D^2}$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว และ $k \neq 0$

เมื่อ L = 1 และ D = 1 ทำให้ R = 0.5

แทนค่า R, L และ D ในสมการ $R = k \times \frac{L}{D^2}$

จะได้ $0.5 = k \times \frac{1}{1^2}$

หรือ $k = \frac{1}{2}$

ดังนั้น $R = \frac{1}{2} \times \frac{L}{D^2}$

ถ้า $L = 100$ และ $D = 0.5$

แทนค่า L และ D ในสมการ $R = \frac{1}{2} \times \frac{L}{D^2}$

จะได้ $R = \frac{1}{2} \times \frac{100}{(0.5)^2} = 200$

ดังนั้น ลวดซึ่งยาว 100 เมตร และมีเส้นผ่านศูนย์กลางของหน้าตัดยาว 0.5 มิลลิเมตร มีความต้านทาน 200 โอห์ม

ตอบ 200 โอห์ม

ตัวอย่างที่ 3 y แปรผันเกี่ยวเนื่องกับ x, z และ $\frac{1}{u}$ ถ้า $y = 6$ เมื่อ $x = 2$, $z = 3$ และ $u = 4$ จงหาค่า y เมื่อ $x = 4$, $z = 3$ และ $u = 8$

วิธีทำ จากโจทย์กำหนดให้ y แปรผันเกี่ยวเนื่องกับ x, z และ $\frac{1}{u}$

จะได้ $y \propto \frac{xz}{u}$

นั่นคือ $y = k \times \frac{xz}{u}$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว และ $k \neq 0$

ถ้า $y = 6$ เมื่อ $x = 2$, $z = 3$ และ $u = 4$

แทนค่า y, x, z และ u ในสมการ $y = k \times \frac{xz}{u}$

จะได้ $6 = k \times \frac{2 \times 3}{4}$

หรือ $k = 4$

ดังนั้น สมการแสดงการแปรผันคือ $y = 4 \times \frac{xz}{u}$

หรือ $y = \frac{4xz}{u}$

ถ้า $x = 4$, $z = 3$ และ $u = 8$

แทนค่า x, z และ u ในสมการ $y = \frac{4xz}{u}$

จะได้ $y = \frac{4 \times 4 \times 3}{8}$

$= 6$

ตอบ 6

แบบฝึกหัด 3.3

1. จงเปลี่ยนข้อความต่อไปนี้เป็นสมการ
   1) A แปรผันเกี่ยวเนื่องกับ B และ C โดยค่าคงตัวของการแปรผันคือ 0.75
   2) Q แปรผันเกี่ยวเนื่องกับ x และกำลังสองของ y โดยค่าคงตัวของการแปรผันคือ -1
   3) F แปรผันเกี่ยวเนื่องกับ m_1, m_2 และกำลังสองของ d โดยค่าคงตัวของการแปรผันคือ 9
   4) y แปรผันเกี่ยวเนื่องกับ x และ $\frac{1}{z^2}$ โดยค่าคงตัวของการแปรผันคือ $\frac{1}{2}$
2. y แปรผันเกี่ยวเนื่องกับ x, z และ $\frac{1}{\sqrt{t}}$ ถ้า $x = 25$, $z = 2$ และ $t = 1$ จะได้ $y = 100$ จงหา
   1) ค่า y เมื่อ $x = 12$, $z = 5$ และ $t = 4$
   2) ค่า x เมื่อ $y = 36$, $z = 3$ และ $t = 2$
3. ปริมาตร V (ลูกบาศก์เซนติเมตร) ของก๊าซจำนวนหนึ่งแปรผันตรงกับอุณหภูมิสัมบูรณ์ T (เคลวิน) และแปรผกผันกับความดัน P (มิลลิเมตรของปรอท) ของก๊าซจำนวนนั้น ถ้าก๊าซจำนวนหนึ่งมีปริมาตร 450 ลูกบาศก์เซนติเมตร ที่อุณหภูมิ 360 เคลวิน ภายใต้ความดัน 736 มิลลิเมตรของปรอท
   1) จงหาสูตรเพื่อหาปริมาตรของก๊าซที่อุณหภูมิและความดันใด ๆ
   2) จงหาปริมาตรของก๊าซที่อุณหภูมิ 312 เคลวิน เมื่อมีความดันเท่ากับ 96 มิลลิเมตรของปรอท
   3) ถ้าให้ความดันของก๊าซเป็นค่าคงตัว และเพิ่มอุณหภูมิเป็นสองเท่าของอุณหภูมิเดิม ปริมาตรของก๊าซจะเปลี่ยนแปลงอย่างไร
   4) ถ้าให้อุณหภูมิของก๊าซเป็นค่าคงตัว และเพิ่มความดันเป็นสองเท่าของความดันเดิม ปริมาตรของก๊าซจะเปลี่ยนแปลงอย่างไร
4. เมื่อวัตถุเคลื่อนที่อย่างสม่ำเสมอเป็นวงกลม แรงสู่ศูนย์กลาง F แปรผันตรงกับกำลังสองของความเร็ว v ของวัตถุ และแปรผกผันกับรัศมีของวงกลม r เมื่อ $v = 2$ และ $r = 5$ เมตร จะได้ $F = 64$ นิวตัน จงหา F เมื่อ $v = 3$ เมตร/วินาที และ $r = 4$ เมตร

5. ความต้านทานไฟฟ้า R (โอห์ม) ของลวดเส้นหนึ่งแปรผันตรงกับความยาวของเส้นลวด L (เมตร) และแปรผกผันกับกำลังสองของความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของหน้าตัด D (มิลลิเมตร) ถ้าลวดเส้นหนึ่งยาว 10 เมตร และมีเส้นผ่านศูนย์กลางของหน้าตัดยาว 0.20 มิลลิเมตร มีความต้านทาน 6.0 โอห์ม จงหาความยาวของลวดทองแดงที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางของหน้าตัดยาว 0.50 มิลลิเมตร และมีความต้านทาน 2.0 โอห์ม
6. ปริมาณน้ำมันเป็นแกลลอนในถังทรงกระบอกแปรผันเกี่ยวเนื่องกับกำลังสองของรัศมีและความสูงของถัง ถังใส่น้ำมันใบหนึ่งสูง 35 เซนติเมตร รัศมีของก้นถังเป็น 21 เซนติเมตร จุน้ำมัน 12 แกลลอน จงหาว่าถังที่มีรัศมี 28 เซนติเมตร สูง 105 เซนติเมตร จะจุน้ำมันเท่าไร
7. ความดัน P (นิวตันต่อตารางเมตร) ของของเหลวที่กระทำต่อจานกลมใบหนึ่งที่จมอยู่ในของเหลวนั้น แปรผันตรงกับระดับความลึกของจานในของเหลว d (เมตร) และกำลังสองของรัศมี r (เมตร) ของจานกลม ถ้าจานอยู่ลึก 3 เมตร รัศมีของจานเป็น 2 เมตร ความดันของของเหลวบนจานเป็น 3,000 นิวตันต่อตารางเมตร จงหาว่าเมื่อจานกลมมีรัศมี 1.5 เมตร อยู่ลึก 4 เมตร ความดันของของเหลวที่กระทำต่อจานเป็นเท่าใด
8. P แปรผันเกี่ยวเนื่องกับ a, b และ $\frac{1}{d}$ ถ้า a เพิ่มขึ้น 50% b ลดลง 50% และ d เพิ่มขึ้น 20% P จะเพิ่มขึ้นหรือลดลงกี่เปอร์เซ็นต์
9. 1) ให้ A แปรผันตรงกับกำลังสองของ x และแปรผกผันกับ y ถ้า x และ y ต่างก็แปรผันตรงกับ t จงหาว่า A แปรผันอย่างไรกับ t
   2) ให้ V แปรผันตรงกับ x และแปรผกผันกับ $\sqrt{y}$ จงแสดงว่า y แปรผันตรงกับ x^2 และแปรผกผันกับ V^2
10. ความหมดเปลืองถ่านหินของเรือลำหนึ่งแปรผันเกี่ยวเนื่องกับระยะทางที่เรือแล่นได้ และกำลังสองของอัตราเร็ว ถ้าระยะทางที่เรือแล่นได้แปรผันเกี่ยวเนื่องกับเวลา และอัตราเร็วของเรือ จงแสดงว่าความหมดเปลืองถ่านหินของเรือลำนี้จะแปรผันเกี่ยวเนื่องกับเวลาในการเดินทาง และกำลังสามของอัตราเร็วของเรือ

11. ความสิ้นเปลืองพลังงานไฟฟ้า W (ยูนิต) แปรผันเกี่ยวเนื่องกับกำลังไฟฟ้า P (วัตต์) ของเครื่องใช้ไฟฟ้า และเวลา h (ชั่วโมง) ที่ใช้เครื่องใช้ไฟฟ้านั้น เมื่อใช้หม้อหุงข้าวขนาด 650 วัตต์ในเวลา $\frac{1}{2}$ ชั่วโมง จะสิ้นเปลืองพลังงานไฟฟ้า 0.325 ยูนิต จงหาว่า
    1) ถ้าใช้หลอดไฟเรืองแสงขนาด 40 วัตต์ วันละ 6 ชั่วโมง จะสิ้นเปลืองพลังงานไฟฟ้าวันละกี่ยูนิต
    2) ถ้าใช้เตารีดไฟฟ้าขนาด 750 วัตต์ ทุกวันวันละ 30 นาที ใน 1 เดือน (30 วัน) จะสิ้นเปลืองพลังงานไฟฟ้าเท่าใด
12. นักจิตวิทยาที่ศึกษาเกี่ยวกับสติปัญญามนุษย์ พบว่าสำหรับคนที่มีอายุไม่เกิน 15 ปี ระดับสติปัญญา (IQ) จะแปรผันตรงกับอายุสมอง (MA) และแปรผกผันกับอายุ (CA) ของคน ๆ นั้น เด็กชายคนหนึ่งอายุ 12 ปี มีอายุสมอง 14.4 IQ ของเด็กคนนั้นเป็น 120 จงหาว่า
    1) ถ้าเด็กชายคนหนึ่งมีอายุสมองเท่ากับอายุของเขา เด็กชายคนนั้นมี IQ เท่าไร
    2) เด็กหญิงคนหนึ่งมีอายุ 11 ปี และมีอายุสมองเป็น 15.4 จะมี IQ เท่าไร
13. สปุตนิค 1 เป็นชื่อของดาวเทียมดวงแรกของโลกที่อดีตประเทศสหภาพโซเวียตส่งออกสู่

อวกาศเมื่อวันที่ 4 ตุลาคม พ. ศ. 2500 มีผลให้สหรัฐอเมริกาและหลายประเทศทั่วโลกตื่นตัวพัฒนาการเรียนการสอนทางคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์เป็นแนวใหม่ ให้ทันกับความก้าวหน้าของอดีตประเทศสหภาพโซเวียต

เนื่องจากระยะเวลาที่ดาวเทียมโคจรรอบโลกในแต่ละรอบ แปรผันตรงกับรัศมีของวงโคจรและอัตราเร็วของดาวเทียมขณะที่โคจรในรอบนั้น ถ้าดาวเทียมสปุตนิค 1 ใช้เวลาในการโคจรรอบโลก 1.42 ชั่วโมง เมื่อรัศมีของวงโคจรเป็น 6,480 กิโลเมตร และอัตราเร็วเท่ากับ 28,800 กิโลเมตรต่อชั่วโมง จงหาระยะเวลาในการโคจรรอบโลก เมื่อรัศมีของวงโคจรเป็น 6,880 กิโลเมตร และอัตราเร็วเท่ากับ 29,600 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

จ่ายเท่าไร

ค่าโทรศัพท์พื้นฐานภายในจังหวัดแต่ละเดือนเป็นผลรวมของสองส่วน ส่วนหนึ่งเป็นค่าบริการรายเดือนซึ่งต้องจ่ายเป็นค่าคงตัว 100 บาททุกเดือน อีกส่วนหนึ่งเป็นค่าใช้โทรศัพท์ที่แปรผันตรงกับจำนวนครั้งที่ใช้โทรศัพท์

ให้ C เป็นค่าโทรศัพท์ในแต่ละเดือน

A เป็นค่าบริการรายเดือน

B เป็นค่าใช้โทรศัพท์ที่แปรผันตรงกับจำนวนครั้งที่ใช้โทรศัพท์

n เป็นจำนวนครั้งที่ใช้โทรศัพท์

ถ้าในเดือนหนึ่งมีการใช้โทรศัพท์ 150 ครั้ง ค่าโทรศัพท์ตลอดเดือนเป็นเงิน 550 บาท จงหา

1) อัตราค่าโทรศัพท์ต่อครั้ง

2) ถ้าในเดือนถัดมาใช้โทรศัพท์ 131 ครั้ง จงหาค่าโทรศัพท์ตลอดเดือนนั้น

วิธีทำ จากสิ่งที่กำหนดให้ข้างต้น จะได้ $C = A + B$ และ $B \propto n$

ดังนั้น $B = kn$ โดยที่ k เป็นค่าคงตัวและ $k \neq 0$

นั่นคือ $C = A + kn$

1) เมื่อใช้โทรศัพท์ 150 ครั้ง ค่าบริการรายเดือนเป็น 100 บาท และค่าโทรศัพท์ทั้งหมดเป็น 550 บาท

แทน C ด้วย 550 แทน A ด้วย 100 และแทน n ด้วย 150 ในสมการ

$C = A + kn$

จะได้

$$550 = 100 + (k \times 150)$$

$$550 = 100 + 150k$$

$$450 = 150k$$

$$k = \frac{450}{150}$$

หรือ $k = 3$

สมการแสดงความเกี่ยวข้องระหว่าง C และ n คือ $C = 100 + 3n$
ดังนั้น อัตราค่าบริการโทรศัพท์ต่อครั้งเป็น 3 บาท

2) เมื่อใช้โทรศัพท์ 131 ครั้ง แทน n ด้วย 131 ในสมการ $C = 100 + 3n$

จะได้ $C = 100 + (3 \times 131)$

$= 100 + 393$

$= 493$

ดังนั้น ค่าโทรศัพท์ตลอดเดือนเป็นเงิน 493 บาท

ตอบ 1) 3 บาท
2) 493 บาท

ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดต่อไปนี้

1. บริษัทรถโดยสารจ่ายรายได้ประจำเดือนของพนักงานขับรถเป็นสองส่วน ส่วนหนึ่งได้แก่เงินเดือน 5,000 บาท อีกส่วนหนึ่งแปรผันตรงกับค่าโดยสารที่เก็บได้ตลอดเดือนซึ่งคิดเป็นร้อยละของค่าโดยสารที่เก็บได้ ถ้าในเดือนหนึ่งพนักงานขับรถโดยสารคนหนึ่งมีรายได้จากการขับรถโดยสารเป็นเงินทั้งสิ้น 9,500 บาท โดยที่เขาเก็บค่าโดยสารได้ 90,000 บาท จงหาว่า
   1) เขาจะมีรายได้ส่วนที่แปรผันกับค่าโดยสารที่เก็บได้ร้อยละเท่าใดของค่าโดยสารที่เก็บได้ตลอดเดือน
   2) ถ้าเดือนถัดมาเขาเก็บค่าโดยสารได้ 95,000 บาท เขาจะมีรายได้จากการขับรถทั้งสิ้นเท่าใด
   3) ถ้าเขามีรายได้จากการขับรถในเดือนหนึ่งเป็นเงิน 10,000 บาท เขาจะเก็บค่าโดยสารได้ทั้งสิ้นเท่าใด

2. ในการล้างและอัดรูปชนิดฟิล์ม ค่าใช้จ่ายครั้งแรกประกอบด้วยค่าล้างฟิล์มและค่าอัดรูป ค่าล้างฟิล์มแปรผันตรงกับจำนวนม้วนของฟิล์มที่นำไปล้าง ค่าอัดรูปแปรผันตรงกับจำนวนรูปทั้งหมดที่อัด ถ้าอ้อยนำฟิล์ม 2 ม้วนไปล้างในราคาม้วนละ 30 บาท จำนวนรูปทั้งหมดที่อัดเป็น 73 รูป จะเสียค่าใช้จ่าย 352 บาท จงหา
    1) ราคาในการอัดรูป 1 รูป
    2) ถ้าอ้อยนำฟิล์มไปล้าง 2 ม้วน รูปที่อัดมีจำนวน 77 รูป จะเสียค่าใช้จ่ายในการล้างอัดรูปเท่าไร
    3) ถ้าอ๊อดนำฟิล์มไปล้างและอัดรูปออกมาทั้งหมด 113 รูป เสียค่าใช้จ่าย 542 บาท อ๊อดนำฟิล์มไปล้างทั้งหมดกี่ม้วน

เล่นไม้กระดก

เด็ก ๆ ชอบเล่นไม้กระดกอย่างสนุกสนาน ด้วยการนั่งที่ปลายไม้แต่ละข้าง แล้วใช้เท้ายันพื้น เพื่อให้ไม้กระดกขึ้นลงตามจังหวะที่ต้องการ

เมื่อเด็กที่มีน้ำหนักต่างกันนั่งอยู่คนละปลายของไม้กระดก จะต้องนั่งห่างจากจุดกึ่งกลางของไม้ไม่เท่ากัน ไม้จึงจะไม่กระดก แต่อยู่ในระดับขนานกับพื้นพอดี

ถ้าต้องการให้ไม้กระดกที่มีเด็กสองคนนั่งอยู่คนละข้างของไม้กระดกอยู่ในระดับขนานกับพื้นพอดี น้ำหนักของเด็กที่อยู่คนละข้างของไม้กระดกจะต้องแปรผกผันกับระยะที่เด็กแต่ละคนนั่งห่างจากจุดกึ่งกลางของไม้กระดก และค่าคงตัวของการแปรผันจะต้องเท่ากัน

ถ้าเด็กคนหนึ่งหนัก 30 กิโลกรัม นั่งห่างจากจุดกึ่งกลางของไม้กระดก 100 เซนติเมตร เด็กอีกคนหนัก 20 กิโลกรัม จะต้องนั่งห่างจากจุดกึ่งกลางออกไปอีกทางด้านหนึ่งของไม้กระดก 150 เซนติเมตร ไม้กระดกจึงจะขนานกับพื้นพอดี อยากทราบว่า ถ้าให้เด็กหนัก 50 กิโลกรัม นั่งแทนเด็กหนัก 20 กิโลกรัม จะต้องนั่งห่างจากจุดกึ่งกลางเท่าใด จึงจะทำให้ไม้กระดกขนานกับพื้นพอดี

บรรณานุกรม

ศึกษาธิการ, กระทรวง. (2525). **หนังสือประกอบการสอน วิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่หนึ่ง.** กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2537). **คู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์ รายวิชา ค 203 คณิตศาสตร์ 3 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่สอง หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533).** พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2540). **คู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์ รายวิชา ค 011 ชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533).** พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2540). **คู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์ รายวิชา ค 012 ชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533).** พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2540). **คู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์ รายวิชา ค 022 ชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533).** พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2540). **คู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์ รายวิชา ค 204 คณิตศาสตร์ 4 ชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533).** พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2541). **คู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์ รายวิชา ค 101 คณิตศาสตร์ 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่หนึ่ง หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533).** พิมพ์ครั้งที่ 4. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2541). **คู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์ รายวิชา ค 102 คณิตศาสตร์ 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่หนึ่ง หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533).** พิมพ์ครั้งที่ 4. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2546). **หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้พื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม 2 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 .** พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2546). **หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 1 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 .** พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2546). **หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 2 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 .** พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

Boourke A., and others. (2000). **Cornerstone Mathematics Second Edition Book 1.** Australia : Addison Wesley Longman.

Dolciani, Wooton, and others. (1970). **Modern School Mathematics : Algebra 1.** U.S.A. : Houghton Miffin Company.

Fey, James T., and others. (1998). **Frogs, Fleas, and Painted Cubes : Quadratic Relationships**. U.S.A. : Dale Seymour Publications.

Hong ,Tay Choon, and others. (2001). **New Mathematics Counts For Secondary Normal (Academic) 2,** Singapore : Federal Publications.

Lial, Margaret L. and others. (1988). **Intermediate Algebra. 5 th.** U.S.A. : Scott, Foresman and Company.

Munem, M.A. and Foulis, O.J. (1986). **College Algebra with Applications.** New York, U.S.A. : Worth publishers, Inc.

Price, Rath and others. (1997). **Pre – Algebra : An Integrated Transition to Algebra & Geometry.** U.S.A. : Me Graw – Hill Companies, Inc.

Rising, Gerald R., and others. (1989). **Houghton Mifflin Unified Mathematics, Book 2.** Boston, MA. U.S.A. : Houghton Miffin Company.

Thomson, Sue and Forster Ian (2001). **Maths in the Workplace.** Australia. : Emerald City Book.

ภาคผนวก

บัญชีศัพท์

บทที่ 1

พหุนามดีกรีสอง	quadratic polynomial
การแยกตัวประกอบ	factoring
ตัวประกอบ	factor
ตัวประกอบร่วม	common factor
พหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว	quadratic polynomial with one variable
กำลังสองสมบูรณ์	perfect square
ผลต่างของกำลังสอง	difference of two squares

บทที่ 2

สมการกำลังสองตัวแปรเดียว	quadratic equation with one variable
คำตอบของสมการ	solution of the equation

บทที่ 3

การแปรผัน	variation
การแปรผันตรง	direct variation
สมการแสดงการแปรผัน	variation equation
ค่าคงตัว	constant
การแปรผกผัน	inverse variation
การแปรผันเกี่ยวเนื่อง	joint variation

บัญชีสัญลักษณ์

$y \propto x$	y แปรผันตรงกับ x
$y \propto \frac{1}{x}$	y แปรผกผันกับ x

คณะกรรมการจัดทำสื่อการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

นางปิยรัตน์ จาตุรันตบุตร	สถาบันราชภัฏสวนดุสิต
นางสาวลัดดาวัลย์ เพ็ญสุภา	มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์
นายปรีชา เนาว์เย็นผล	มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช
นางสาวอัมพร ม้าคนอง	จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
นายสมนึก บุญพาไสว	มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานคร
นางจรรยา ภูอุดม	โรงเรียนดอนเมืองจาตุรจินดา
นางสาวกัลยาณี แคนยุกต์	โรงเรียนบดินทร์เดชา (สิงห์ สิงหเสนี)
นางสุวรรณา คล้ายกระแส	ข้าราชการบำนาญ
นางยุพิน พิพิธกุล	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางจารุนี สูตะบุตร	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นายสมพล เล็กสกุล	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางอารียา สุวรรณคำ	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางเจริญศรี จันไพบูลย์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวจันทร์เพ็ญ ชุมคช	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวจารุวรรณ แสงทอง	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวปานทอง กุลนาถศิริ	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางชุลีพร สุภธีระ	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางชมัยพร ตั้งตน	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวรจนา รัตนานิคม	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาววันดี ตีระสหกุล	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวดนิตา ชื่นอารมณ์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวพิลาลักษณ์ ทองทิพย์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

คณะบรรณาธิการ

นางยุพิน พิพิธกุล นางปิยรัตน์ จาตุรันตบุตร

นางจารุนี สูตะบุตร นางสาวจารุวรรณ แสงทอง

นายสมพล เล็กสกุล นางชุลีพร สุภธีระ

คณะบรรณาธิการดำเนินงานปรับปรุงหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์

นายดนัย ยังคง นางชมัยพร ตั้งตน

นางสุวรรณา คล้ายกระแส นางสาวลัดดาวัลย์ เพ็ญสุภา

นางสาวอัมพร ม้าคะนอง นายปรีชา เนาว์เย็นผล

นายสมนึก บุญพาไสว

ภาพ

นางวรพรรณ ทิณพงษ์ นางสาวดนพร จรัสแสงสกุล

นางสาววีราพัชร์ จิรเทียนธรรม

ผู้จัดพิมพ์ต้นฉบับ

นางสาวเสาวนีย์ ประมูลทรัพย์

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

พต.คณิตฯล.2ม.2

9 789740 195054

ราคา 42.00 บาท

ศึกษาภัณฑ์พาณิชย์

พิมพ์ที่โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว

นายสันติภาพ อินทรพัฒน์ ผู้พิมพ์และผู้โฆษณา

๕๔๐๐๐๑๓

องค์การค้าของ สกสค.

www.suksapan.or.th