ฉบับคู่มือครู

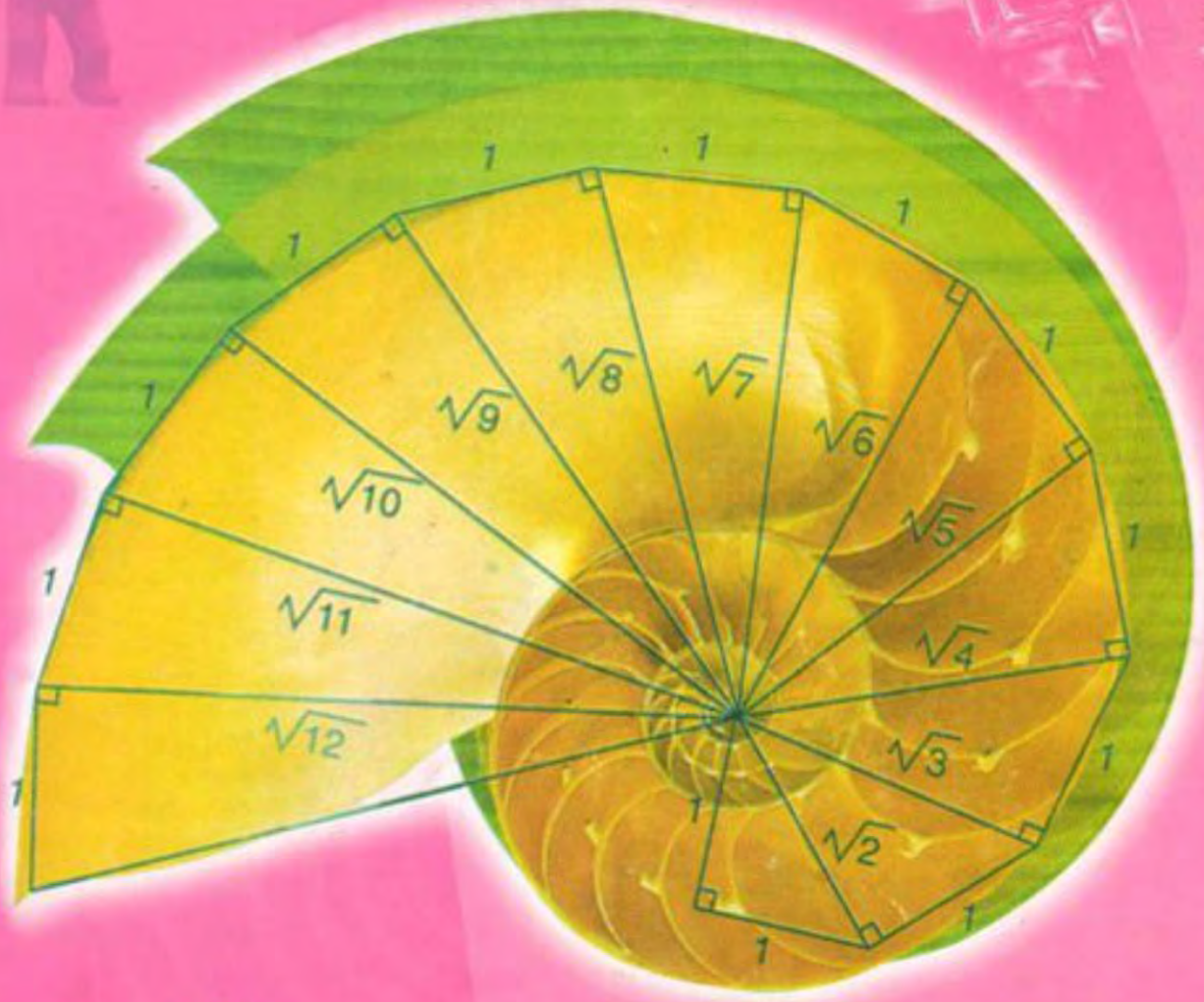
หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐาน

คณิตศาสตร์ เล่ม ๒

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๒

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑



กระทรวงศึกษาธิการ

๔๕.-

หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐาน
คณิตศาสตร์ เล่ม ๒
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๒

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑

จัดทำโดย

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

กระทรวงศึกษาธิการ

ISBN 978 - 974 - 01 - 9502 - 3

พิมพ์ครั้งที่หนึ่ง ๘๐๐,๐๐๐ เล่ม

พ.ศ. ๒๕๕๓

องค์การค้าของ สกสค. จัดพิมพ์จำหน่าย

พิมพ์ที่โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว

๒๒๔๘ ถนนลาดพร้าว วังทองหลาง กรุงเทพมหานคร

มีลิขสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติ

ประกาศสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน

เรื่อง อนุญาตให้ใช้สื่อการเรียนรู้ในสถานศึกษา

ด้วยสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน ได้มอบหมายให้ สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี จัดทำหนังสือเรียน รายวิชาพื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม ๒ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๒ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐานได้พิจารณาแล้ว อนุญาตให้ใช้ในสถานศึกษาได้

ประกาศ ณ วันที่ ๒๐ ธันวาคม พ.ศ. ๒๕๕๓

(นายชินภัทร ภูมิรัตน)
เลขาธิการคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน

คำนำ

หนังสือเรียน รายวิชาพื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม ๒ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๒ นี้ จัดทำขึ้นตามตัวชี้วัดและมาตรฐานการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ สำหรับให้สถานศึกษาเลือกใช้ประกอบการเรียนการสอนและใช้เป็นแนวทางในการออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้ ให้ความรู้ความเข้าใจผู้เรียน นำไปสู่ทักษะการคิดวิเคราะห์ สังเคราะห์ ตามความสามารถและความแตกต่างระหว่างบุคคลของผู้เรียนได้ ในการจัดทำหนังสือเล่มนี้ ได้รับความช่วยเหลือจากคณาจารย์ ผู้ทรงคุณวุฒิ ผู้เชี่ยวชาญด้านคณิตศาสตร์จากสถาบันต่างๆ ทั้งภาครัฐและเอกชนเป็นอย่างดี

สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน หวังเป็นอย่างยิ่งว่าหนังสือเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการจัดการเรียนรู้ เพื่อประยุกต์ใช้พัฒนาการเรียนรู้ของผู้เรียนได้อย่างเหมาะสม ขอขอบคุณสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ตลอดจนบุคคลและหน่วยงานที่มีส่วนเกี่ยวข้องในการจัดทำหนังสือไว้ ณ โอกาสนี้

(นายชินภัทร ภูมิรัตน)
เลขาธิการคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน

คำชี้แจง

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้รับมอบหมายจากกระทรวงศึกษาธิการ ให้พัฒนาหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ กลุ่มสาระการเรียนรู้วิทยาศาสตร์ รวมทั้งสาระการออกแบบและ เทคโนโลยีและสาระเทคโนโลยีสารสนเทศในกลุ่มสาระการเรียนรู้การงานอาชีพและเทคโนโลยี ตลอดจนจัดทำสื่อการเรียนรู้ตามหลักสูตรดังกล่าว

หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ สำหรับระดับมัธยมศึกษาตอนต้น มีด้วยกันทั้งหมด 6 เล่ม จัดทำขึ้นเพื่อให้ผู้เรียนสามารถเรียนรู้และพัฒนาตนเอง นำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปพัฒนาชีวิต และเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตลอดจนศาสตร์อื่นๆ ในระดับที่สูงขึ้น ทั้งนี้สถานศึกษาสามารถปรับใช้เนื้อหาจากหนังสือเรียนทั้ง 6 เล่มนี้ เพื่อจัดการเรียนการสอนรายวิชาพื้นฐาน คณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ได้ตามความเหมาะสม

หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ประกอบด้วยเรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัส ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับจำนวนจริง การประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวและเส้นขนาน ซึ่งเป็นเนื้อหาสาระตามมาตรฐานการเรียนรู้ตามที่กำหนดไว้ในหลักสูตร อย่างไรก็ตามผู้สอนสามารถปรับบทเรียนให้เหมาะสมกับศักยภาพของผู้เรียนแต่ละกลุ่ม

การจัดทำหนังสือเรียนคณิตศาสตร์เล่มนี้ สสวท. ได้รับความร่วมมืออย่างดียิ่งจากคณาจารย์ ผู้ทรงคุณวุฒิ นักวิชาการ และครูผู้สอน จากหลายหน่วยงาน ทั้งภาครัฐและเอกชน สสวท. จึงขอขอบคุณทุกท่านไว้ ณ ที่นี้ และหวังเป็นอย่างยิ่งว่าหนังสือเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการศึกษาคณิตศาสตร์ อันเป็นรากฐานสำคัญของการพัฒนาทรัพยากรมนุษย์ของชาติต่อไป หากมีข้อเสนอแนะใดที่จะทำให้หนังสือเรียนเล่มนี้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น โปรดแจ้งให้สาขาคณิตศาสตร์มัธยมศึกษา สสวท. ทราบด้วย จักขอบคุณยิ่ง

(นางพรพรรณ ไวทยางกูร)
ผู้อำนวยการ
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

สารบัญ

	หน้า
บทที่ 1 ทฤษฎีบทพีทาโกรัส	**1**
1.1 สมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก	1
1.2 ทฤษฎีบทพีทาโกรัส	9
1.3 บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส	23
บทที่ 2 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับจำนวนจริง	**35**
2.1 จำนวนตรรกยะ	35
2.2 จำนวนอตรรกยะ	44
2.3 รากที่สอง	52
2.4 รากที่สาม	70
บทที่ 3 การประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว	**83**
3.1 ทบทวนการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว	83
3.2 การนำไปใช้	91
บทที่ 4 เส้นขนาน	**119**
4.1 เส้นขนานและมุมภายใน	119
4.2 เส้นขนานและมุมแย้ง	131
4.3 เส้นขนานและมุมภายนอกกับมุมภายใน	140
4.4 เส้นขนานและรูปสามเหลี่ยม	149

ภาคผนวก 1 **163**

คณิตศาสตร์ที่ใช้เครื่องคิดเลข

ภาคผนวก 2 **167**

ตารางแสดง กำลังสอง กำลังสาม รากที่สองที่เป็นบวก

และรากที่สามของจำนวนตั้งแต่ 1 ถึง 100 167

บัญชีศัพท์ 170

บัญชีสัญลักษณ์ 171

บรรณานุกรม **172**

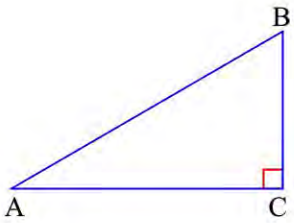
บทที่ 1
ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

1.1 สมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

นักเรียนเคยสังเกตหรือไม่ว่า ชีวิตประจำวันของเราเกี่ยวข้องกับรูปเรขาคณิตเสมอ เราใช้สมบัติของรูปเรขาคณิตในงานก่อสร้าง เช่นใช้สมบัติของรูปสามเหลี่ยมในการประกอบโครงของบ้านหรืออาคารให้มีความแข็งแรง ใช้มุมฉากในการตั้งเสาบ้านให้ตั้งฉากกับพื้นดิน เพื่อให้บ้านแข็งแรงและรับน้ำหนักได้ดี สร้างหน้าต่างและประตูให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเพื่อความสวยงามและมองเห็นภายนอกได้กว้าง หรือสร้างไม้ค้ำประกอบเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากค้ำชายคาบ้านให้แข็งแรงมั่นคง

ต่อไปนี้นักเรียนจะได้เรียนเกี่ยวกับสมบัติที่สำคัญของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก อีกประการหนึ่ง

พิจารณารูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่มี $A\hat{C}B$ เป็นมุมฉาก



เรียก $\overline{AB}$ ว่า *ด้านตรงข้ามมุมฉาก*

เรียก $\overline{AC}$ และ $\overline{BC}$ ว่า *ด้านประกอบมุมฉาก*

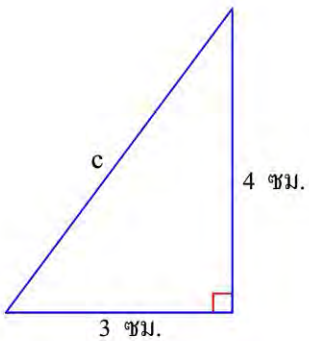
ให้สังเกตว่า *ด้านตรงข้ามมุมฉากเป็นด้านที่ยาวที่สุด*

ลองวัดดูซิ

1. กำหนดให้รูปสามเหลี่ยมมุมฉากต่อไปนี้มีด้านตรงข้ามมุมฉากยาว c เซนติเมตร และด้านประกอบมุมฉากยาว a เซนติเมตร และ b เซนติเมตร

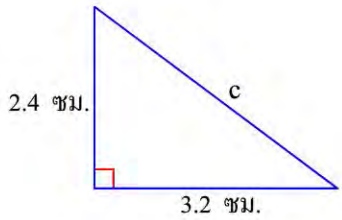
   ในแต่ละข้อต่อไปนี้ กำหนดค่า a และ b ให้ดังรูป จงวัดความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉากแล้วเติมค่า c ลงในช่องว่าง

   1)



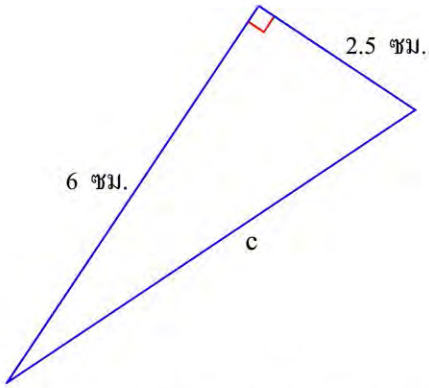
a = 3 เซนติเมตร, b = 4 เซนติเมตร และ c = ... เซนติเมตร

2)



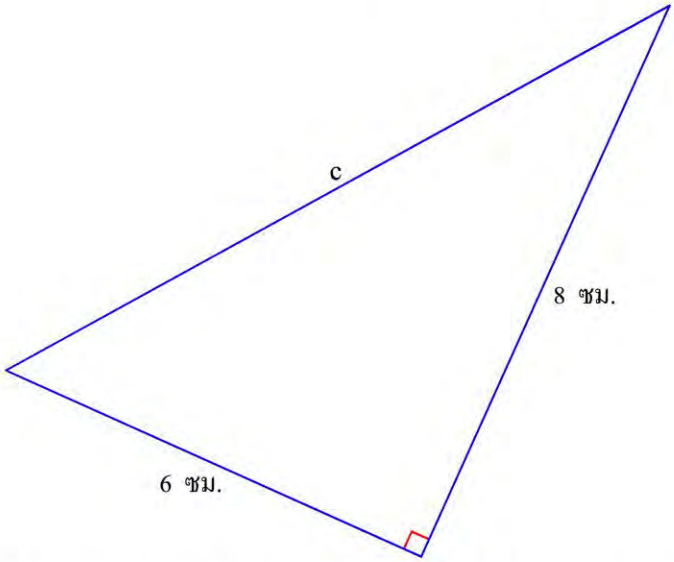
a = 2.4 เซนติเมตร, b = 3.2 เซนติเมตร และ c = ... เซนติเมตร

3)



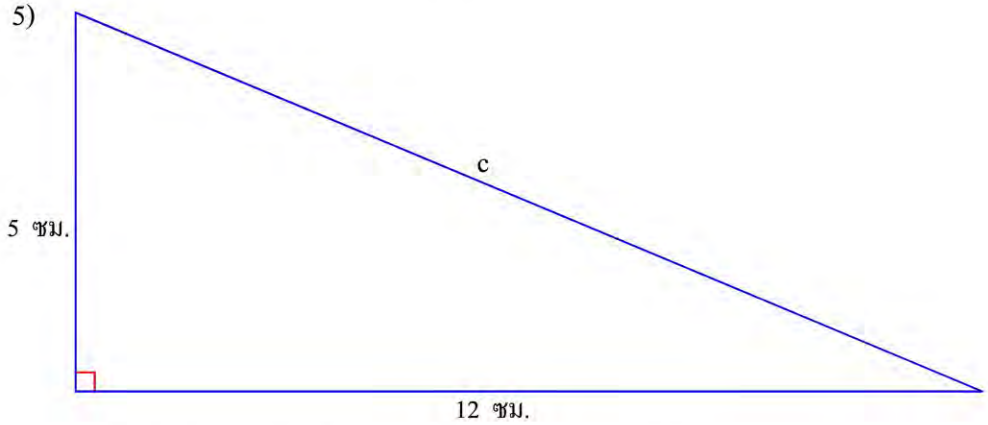
a = 2.5 เซนติเมตร, b = 6 เซนติเมตร และ c = ... เซนติเมตร

4)



a = 6 เซนติเมตร, b = 8 เซนติเมตร และ c = ... เซนติเมตร

5)



a = 5 เซนติเมตร, b = 12 เซนติเมตร และ c = ... เซนติเมตร

2. ให้นักเรียนเติมค่า c ที่ได้จากข้อ 1 และค่าอื่น ๆ ลงในตารางให้สมบูรณ์

ข้อที่	a	b	c	a^2	b^2	c^2	$a^2 + b^2$
1)	3	4					
2)	2.4	3.2					
3)	2.5	6					
4)	6	8					
5)	5	12					

จากตาราง นักเรียนบอกได้หรือไม่ว่าด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเหล่านั้นมีความสัมพันธ์กันอย่างไร

จากผลที่ได้ในกิจกรรมข้างต้น เมื่อกำหนดให้ ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มี $A\hat{C}B$ เป็นมุมฉาก ดังรูป

c แทนความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก

a และ b แทนความยาวของด้านประกอบมุมฉาก

จะได้ $c^2 = a^2 + b^2$

ความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากข้างต้น เป็นไปตามสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่กล่าวว่า

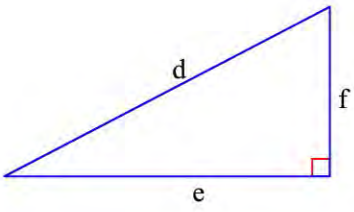
สำหรับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ กำลังสองของความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก เท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวของด้านประกอบมุมฉาก

สมบัติข้างต้นนี้เรียกว่า ทฤษฎีบทพีทาโกรัส และเชื่อกันว่า นักคณิตศาสตร์ชาวกรีกชื่อพีทาโกรัสเป็นผู้พิสูจน์ได้เป็นคนแรก

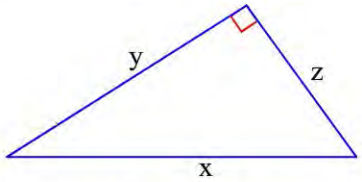
เขียนได้หรือไม่

สำหรับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้ ตัวอักษรหรือตัวเลขที่กำกับด้านเป็นความยาวของด้าน จงใช้สมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเขียนแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของด้านทั้งสาม

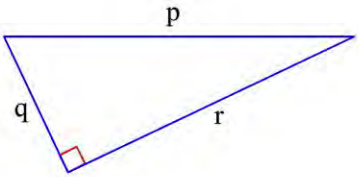
1.



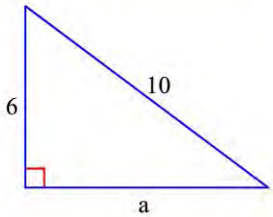
2.



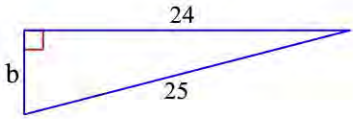
3.



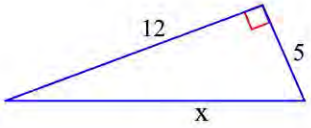
4.



5.

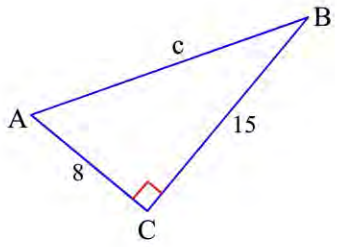


6.



เราสามารถใช้ความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากดังกล่าวข้างต้น หาความยาวของด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่ต้องการทราบได้เสมอ เมื่อทราบความยาวของด้านอีกสองด้านของรูปสามเหลี่ยมนั้น ดังตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 1 จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่กำหนดให้ จงหาค่า c



จากความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

จะได้ $c^2 = 8^2 + 15^2$

$= 64 + 225$

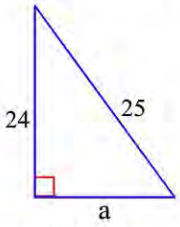
$= 289$

$= 17 \times 17$

ดังนั้น $c = 17$

ตอบ 17 หน่วย

ตัวอย่างที่ 2 จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่กำหนดให้ จงหาค่า a



จากความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

จะได้ $25^2 = a^2 + 24^2$

$a^2 = 25^2 - 24^2$

$= 625 - 576$

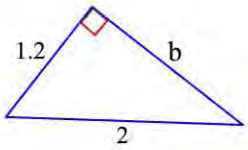
$= 49$

$= 7 \times 7$

ดังนั้น $a = 7$

ตอบ 7 หน่วย

ตัวอย่างที่ 3 จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่กำหนดให้ จงหาค่า b



จากความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

จะได้ $2^2 = (1.2)^2 + b^2$

$b^2 = 2^2 - (1.2)^2$

$= 4 - 1.44$

$= 2.56$

$= 1.6 \times 1.6$

ดังนั้น $b = 1.6$

ตอบ 1.6 หน่วย

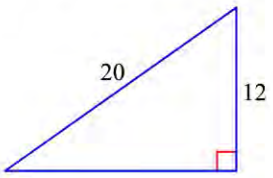
แบบฝึกหัด 1.1

1. จำนวนที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้ เป็นความยาวของด้านประกอบมุมฉากของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ให้นักเรียนหาความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก

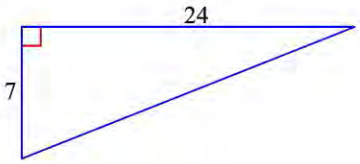
   1) 9, 12
   2) 11, 60
   3) 20, 21
   4) 0.8, 1.5
   5) 0.5, 1.2
   6) $2\frac{2}{5}$, 7

2. สำหรับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้ ตัวเลขที่กำกับด้านแสดงความยาวของด้าน จงหาความยาวของด้านที่เหลือ

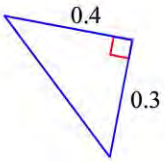
   1)



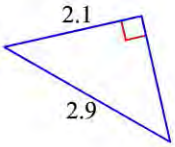
   2)



   3)

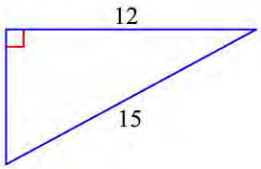


   4)

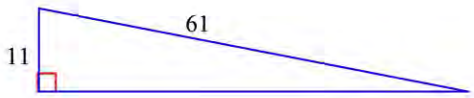


3. สำหรับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้ ตัวเลขที่กำกับด้านแสดงความยาวของด้าน จงหาความยาวรอบรูป

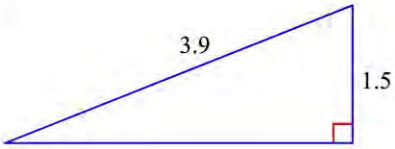
   1)



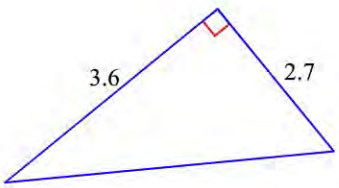
   2)



   3)



   4)

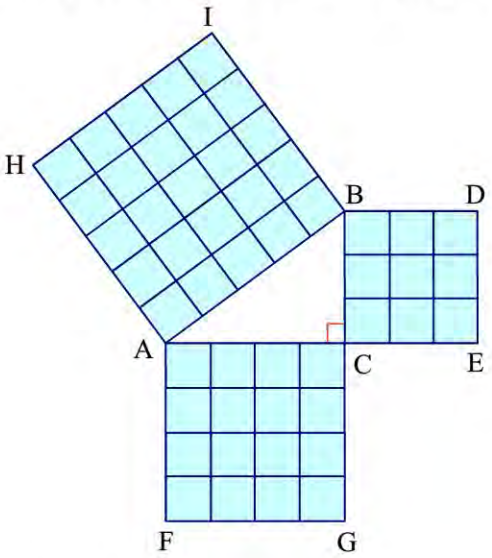


1.2 ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

นักเรียนเคยทราบมาแล้วว่า ความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากมีความสัมพันธ์กัน ดังนี้ *กำลังสองของความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก เท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวของด้านประกอบมุมฉาก*

ความสัมพันธ์ดังกล่าวเป็นที่รู้จักกันมานานกว่า 3,000 ปีมาแล้ว ในชื่อของทฤษฎีบทพีทาโกรัส แต่คนในสมัยนั้นสังเกตเห็นความสัมพันธ์นี้ ในลักษณะที่เป็นความสัมพันธ์ของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ให้ ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มี $A\hat{C}B$ เป็นมุมฉาก มี BC = 3 หน่วย, AC = 4 หน่วย และ AB = 5 หน่วย สร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ABIH รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส BCED และรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ACGF บนด้าน AB ด้าน BC และด้าน AC ตามลำดับ ดังรูป



จะได้ พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ABIH เท่ากับ 5^2 = 25 ตารางหน่วย
พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส BCED เท่ากับ 3^2 = 9 ตารางหน่วย
พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ACGF เท่ากับ 4^2 = 16 ตารางหน่วย
ซึ่ง 25 = 9 + 16

ดังนั้น พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ABIH เท่ากับ ผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส BCED และพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ACGF

ตัวอย่างข้างต้นเป็นการแสดงความสัมพันธ์ตาม*ทฤษฎีบทพีทาโกรัส*ที่กล่าวอีกแบบหนึ่ง ดังนี้

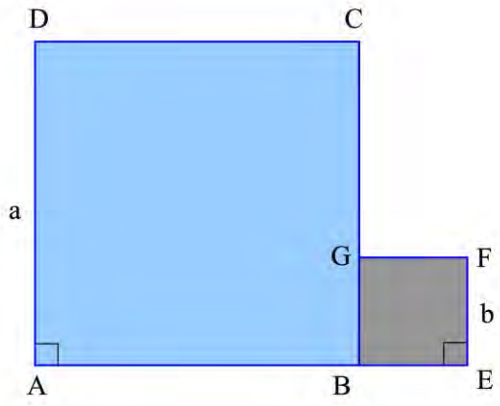
สำหรับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉาก เท่ากับผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉาก

ตั้งแต่สมัยกรีกโบราณ นักคณิตศาสตร์ได้พยายามหาวิธีพิสูจน์ทฤษฎีบทพีทาโกรัสหลาย ๆ วิธี วิธีพิสูจน์ที่ปัจจุบันยอมรับกันมีประมาณ 400 วิธี ต่อไปนี้เป็นกิจกรรมที่แสดงแนวการพิสูจน์ทฤษฎีบทพีทาโกรัสวิธีหนึ่ง

หมุนแล้วเห็น

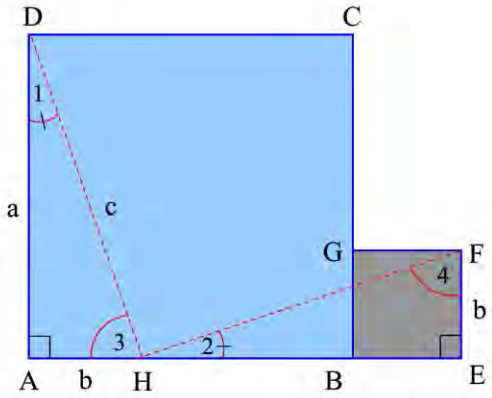
ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้

1. กำหนดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ABCD ยาวด้านละ a หน่วย และรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส BEFG ยาวด้านละ b หน่วย ดังรูป



พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสแต่ละรูปเป็นเท่าไร

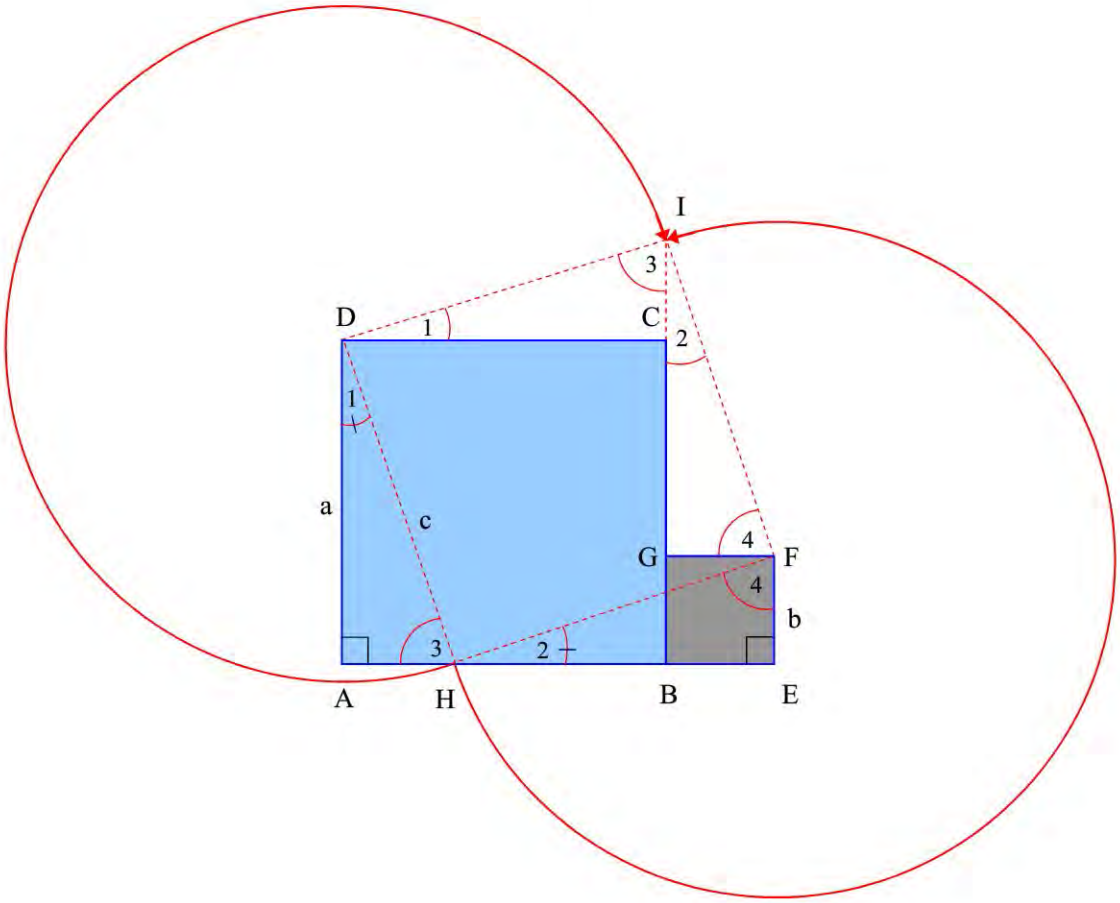
2. กำหนดจุด H บนด้าน AB โดยให้ AH ยาว b หน่วย ลาก $\overline{DH}$ จะได้ Δ DAH เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ให้ $\overline{DH}$ ยาว c หน่วย ลาก $\overline{HF}$



1) Δ HEF เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหรือไม่ เพราะเหตุใด
2) $\overline{HE}$ ยาวเท่ากับ a หน่วย หรือไม่ เพราะเหตุใด
3) $\overline{EF}$ ยาวเท่ากับ b หน่วย หรือไม่ เพราะเหตุใด
4) Δ DAH $\cong$ Δ HEF หรือไม่ เพราะเหตุใด
5) $\overline{HF}$ ยาวเท่ากับ c หน่วย หรือไม่ เพราะเหตุใด

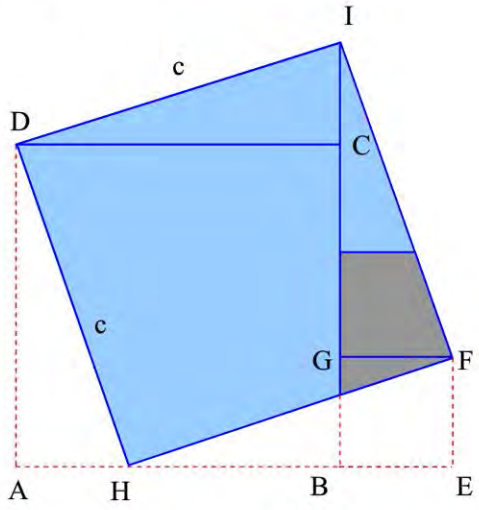
3. จากผลในข้อ 2 ซึ่งได้ Δ DAH $\cong$ Δ HEF
1) $\hat{1}$ เท่ากับ $\hat{2}$ หรือไม่ เพราะเหตุใด
2) $\hat{1} + \hat{3}$ มีขนาดเท่าไร
3) $\hat{2} + \hat{3}$ มีขนาดเท่าไร
4) $D\hat{H}F$ มีขนาดเท่าไร

4. ใช้ F เป็นจุดหมุน หมุน ΔHEF ทวนเข็มนาฬิกาด้วยมุมขนาด 270° และใช้ D เป็นจุดหมุน หมุน ΔDAH ตามเข็มนาฬิกาด้วยมุมขนาด 270°



1) ΔIGF เป็นภาพที่ได้จากการหมุน ΔHEF ใช่หรือไม่
2) ΔDCI เป็นภาพที่ได้จากการหมุน ΔDAH ใช่หรือไม่
3) $H\hat{F}I$ เป็นมุมฉากหรือไม่ เพราะเหตุใด
4) $H\hat{D}I$ เป็นมุมฉากหรือไม่ เพราะเหตุใด
5) $D\hat{I}F$ เป็นมุมฉากหรือไม่ เพราะเหตุใด

5. รูปที่ได้จากการหมุนในข้อ 4 เป็นดังนี้

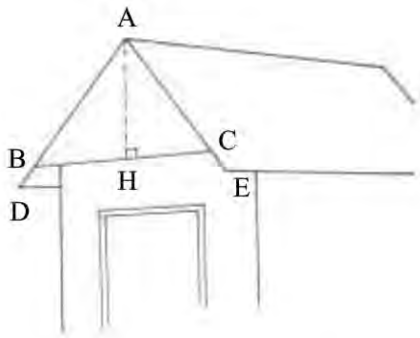


นักเรียนคิดว่ารูปสี่เหลี่ยม DHFI เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสหรือไม่ เพราะเหตุใด

6. นักเรียนคิดว่าเพราะเหตุใด พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม DHFI เท่ากับผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ABCD และพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส BEFG หรือ $c^2 = a^2 + b^2$

จากกิจกรรมข้างต้นจะได้ว่า ความสัมพันธ์ที่ได้ในข้อ 6 เป็นการยืนยันทฤษฎีบทพีทาโกรัส

ตัวอย่างที่ 1 จั่วเป็นส่วนหนึ่งของโครงหลังคา



จากรูป ส่วนต่าง ๆ ของจั่วมีชื่อเรียก ดังนี้

$\overline{AD}$ และ $\overline{AE}$ เรียกว่า *กลอน*

$\overline{BD}$ และ $\overline{CE}$ เรียกว่า *ชายคา*

$\overline{BC}$ เรียกว่า *ขื่อ*

$\overline{AH}$ เรียกว่า *ดั้ง* ส่วนที่เป็นดั้งจะต้องตั้งฉากกับขื่อ

Δ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว เรียกส่วนนี้ของบ้านว่า *หน้าจั่ว*

ถ้ากลอนของจั่วบ้านยาว 4.9 เมตร ดั้งยาว 1.6 เมตร และขื่อยาว 6 เมตร ชายคาจะมีความยาวเท่าใด

วิธีทำ จากรูป AE = 4.9 เมตร AH = 1.6 เมตร และ BC = 6 เมตร

เนื่องจาก Δ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ดังนั้น $BH = HC = \frac{6}{2} = 3$

และเนื่องจาก Δ AHC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากซึ่งมี $A\hat{H}C$ เป็นมุมฉาก

จะได้ $AC^2 = AH^2 + HC^2$

$= (1.6)^2 + 3^2$

$= 2.56 + 9$

$= 11.56$

$AC = 3.4$

ดังนั้น $CE = AE - AC$

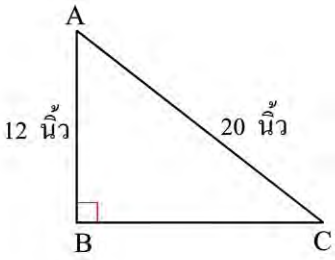
$= 4.9 - 3.4$

$= 1.5$

นั่นคือ ชายคามีความยาว 1.5 เมตร

ตอบ ชายคามีความยาว 1.5 เมตร

ตัวอย่างที่ 2 เราใช้ความยาวของเส้นทแยงมุมของหน้าจอโทรทัศน์ เพื่อบอกขนาดของโทรทัศน์ โทรทัศน์เครื่องหนึ่งมีหน้าจอที่วัดตามแนวเส้นทแยงมุมได้ 20 นิ้ว ถ้าหน้าจอโทรทัศน์สูง 12 นิ้ว จงหาว่าหน้าจอโทรทัศน์ยาวเท่าไร



วิธีทำ กำหนดให้ ΔABC เป็นแบบจำลองส่วนหนึ่งของหน้าจอโทรทัศน์โดยมี BC เป็นความยาวของหน้าจอโทรทัศน์

จะได้ $AB^2 + BC^2 = AC^2$

$12^2 + BC^2 = 20^2$

$BC^2 = 20^2 - 12^2$

$= 400 - 144$

$= 256$

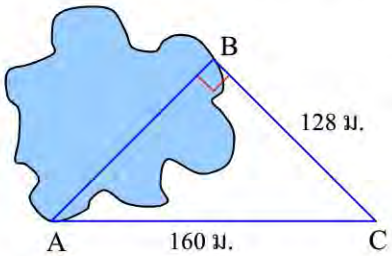
$= 16 \times 16$

ดังนั้น $BC = 16$

นั่นคือ หน้าจอโทรทัศน์ยาว 16 นิ้ว

ตอบ 16 นิ้ว

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้จุด A และ B เป็นตำแหน่งของต้นไม้ใหญ่ริมอ่างเก็บน้ำ นักสำรวจคนหนึ่งตั้งกล้องส่องอยู่ที่จุด C และเปลี่ยนตำแหน่งที่ตั้งกล้องจนทำให้ $A\hat{B}C$ เป็นมุมฉาก ดังรูป วัดระยะห่างระหว่างจุด A และจุด C ได้ 160 เมตร วัดระยะห่างระหว่างจุด B และจุด C ได้ 128 เมตร จงหาระยะห่างระหว่างจุด A และจุด B



วิธีทำ เนื่องจาก ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

จะได้ $AB^2 + BC^2 = AC^2$

$AB^2 = AC^2 - BC^2$

$= 160^2 - 128^2$

$= 25{,}600 - 16{,}384$

$= 9{,}216$

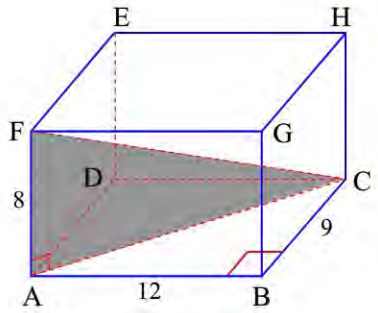
$= 96 \times 96$

ดังนั้น $AB = 96$

นั่นคือ ระยะห่างระหว่างจุด A และจุด B เป็น 96 เมตร

ตอบ 96 เมตร

ตัวอย่างที่ 4 ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก ABCDEFGH มีด้าน AF ยาว 8 เซนติเมตร ด้าน AB ยาว 12 เซนติเมตร และด้าน BC ยาว 9 เซนติเมตร จงหาความยาวของ $\overline{FC}$



วิธีทำ เนื่องจาก ΔAFC มี $F\hat{A}C$ เป็นมุมฉาก

ดังนั้น $FC^2 = AF^2 + AC^2$

หา AC^2 จาก ΔABC

เนื่องจาก ΔABC มี $A\hat{B}C$ เป็นมุมฉาก

ดังนั้น $AC^2 = AB^2 + BC^2$

จะได้ $FC^2 = AF^2 + (AB^2 + BC^2)$

$= 8^2 + (12^2 + 9^2)$

$= 64 + 144 + 81$

$= 289$

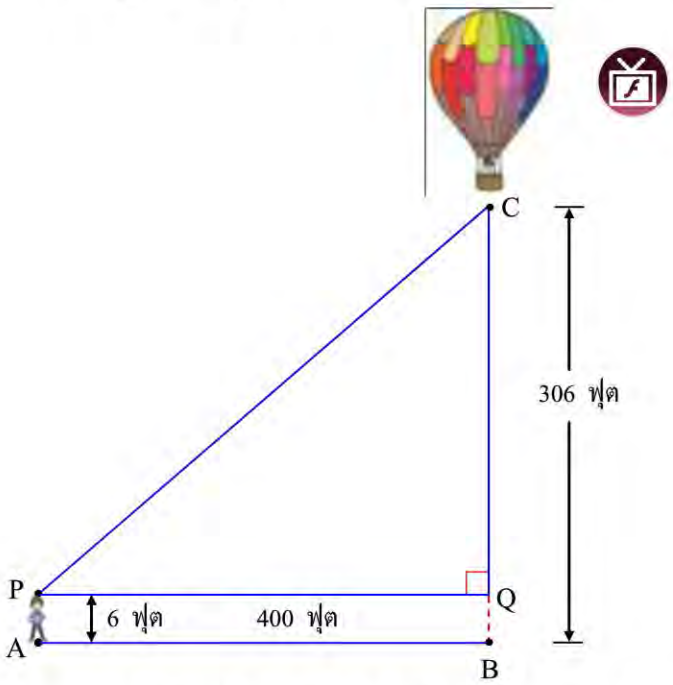
$= 17 \times 17$

ดังนั้น $FC = 17$

นั่นคือ $\overline{FC}$ ยาว 17 เซนติเมตร

ตอบ 17 เซนติเมตร

ตัวอย่างที่ 5 ชายคนหนึ่งสูง 6 ฟุต ยืนอยู่ห่างจากจุดปล่อยบอลลูน 400 ฟุต บอลลูนลอยขึ้นไปจากจุดปล่อยบอลลูน 306 ฟุต จงหาว่าศีรษะชายคนนั้นอยู่ห่างจากบอลลูนกี่ฟุต



วิธีทำ กำหนดแบบจำลอง โดยสร้างรูปให้จุด B เป็นจุดปล่อยบอลลูน จุด A เป็นจุดที่ชายคนนั้นยืนอยู่ จุด C เป็นตำแหน่งที่บอลลูนลอยอยู่ และ AP แทนความสูงของชายคนนั้น

ให้ PQ = AB และ $\overline{PQ}$ ตั้งฉากกับ $\overline{BC}$ ที่จุด Q ดังรูป

จะได้ $AB = PQ = 400$

$BC = 306$

และ $AP = BQ = 6$

ดังนั้น $CQ = 306 - 6$

$= 300$

เนื่องจาก ΔPQC มี $\hat{PQC}$ เป็นมุมฉาก

จะได้ $PC^2 = PQ^2 + CQ^2$

$= 400^2 + 300^2$

$= 160{,}000 + 90{,}000$

$= 250{,}000$

$= 500 \times 500$

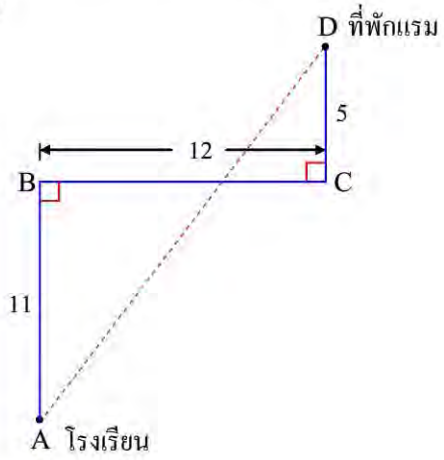
ดังนั้น $PC = 500$

นั่นคือ ศีรษะชายคนนั้นอยู่ห่างจากบอลลูน 500 ฟุต

ตอบ 500 ฟุต

ตัวอย่างที่ 6 ลูกเสือออกเดินทางจากโรงเรียนไปยังที่พักแรมแห่งหนึ่ง ตามแผนผังการเดินทางจะต้องเดินตรงไปทางทิศเหนือของโรงเรียน 11 กิโลเมตร เลี้ยวขวาตรงไปทางทิศตะวันออก 12 กิโลเมตร แล้วตรงขึ้นไปทางทิศเหนืออีก 5 กิโลเมตรจึงจะถึงที่พักแรม จงหาว่าที่พักแรมอยู่ห่างจากโรงเรียนกี่กิโลเมตร

วิธีทำ



ให้จุด A แทนที่ตั้งโรงเรียน

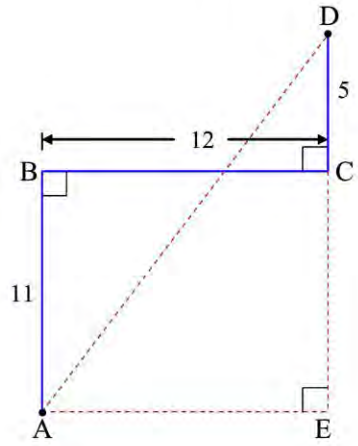
AB แทนระยะห่างจากโรงเรียนไปทางทิศเหนือ 11 กิโลเมตร

BC แทนระยะห่างจากจุด B ไปทางทิศตะวันออก 12 กิโลเมตร

CD แทนระยะห่างจากจุด C ไปทางทิศเหนือ 5 กิโลเมตร

AD แทนระยะห่างจากโรงเรียนถึงที่พักแรม

ต่อ $\overline{DC}$ ไปทางจุด C พบเส้นตรงที่ลากจากจุด A ขนานกับ $\overline{BC}$ ที่จุด E จะได้รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ABCE และรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ADE ที่มี $A\hat{E}D$ เป็นมุมฉาก



จะได้ $AD^2 = AE^2 + DE^2$

แต่ $AE = BC = 12$

และ $DE = DC + CE$

เนื่องจาก $AB = CE = 11$

และ $DC = 5$

จะได้ $DE = 5 + 11$

$= 16$

ดังนั้น $AD^2 = 12^2 + 16^2$

$= 144 + 256$

$= 400$

จะได้ $AD = 20$

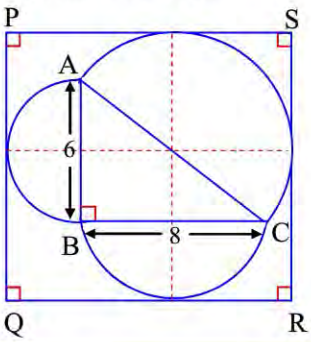
นั่นคือ ที่พักแรมอยู่ห่างจากโรงเรียน 20 กิโลเมตร

ตอบ 20 กิโลเมตร

คิด

ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มีมุม ABC เป็นมุมฉาก

AB = 6 หน่วย และ BC = 8 หน่วย ส่วนโค้งบนแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปครึ่งวงกลม จงหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม PQRS



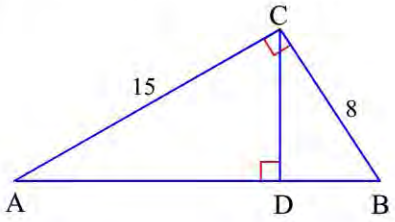
แบบฝึกหัด 1.2

1. กล่องบรรจุนมสดทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากกว้าง 3.5 เซนติเมตร ยาว 5 เซนติเมตร และสูง 12 เซนติเมตร ผู้ผลิตต้องการติดหลอดดูดชนิดตรงแนบกับกล่องโดยไม่ให้หลอดดูดยาวพ้นกล่อง เขาจะใช้หลอดดูดได้ยาวที่สุดกี่เซนติเมตร

2. จากแผนผังกำหนดตำแหน่งที่ตั้งบ้านของแสงดาว ตลาดและโรงเรียนเป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ตลาดอยู่ห่างจากบ้านของแสงดาว 1.8 กิโลเมตร และอยู่ห่างจากโรงเรียน 2.4 กิโลเมตร ทุก ๆ วันหลังเลิกเรียน แสงดาวจะต้องขี่จักรยานไปแวะซื้อกับข้าวที่ตลาดก่อนกลับบ้าน แต่ในตอนเช้าแสงดาวจะขี่จักรยานตรงไปโรงเรียนโดยไม่ผ่านตลาด จงหาว่าแต่ละวันแสงดาวขี่จักรยานเป็นระยะทางกี่กิโลเมตร

3. จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านหนึ่งยาว 7 เซนติเมตร และด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 25 เซนติเมตร

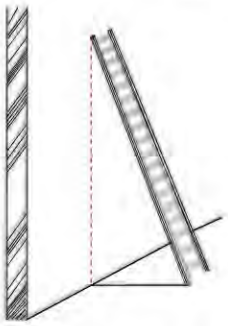
4. กำหนดให้ ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก $\overline{CD}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ ที่จุด D AC = 15 หน่วย และ BC = 8 หน่วย จงหา



1) ความยาวของ $\overline{AB}$
2) พื้นที่ของ ΔABC
3) ความยาวของ $\overline{CD}$

5. ต้นไม้ต้นหนึ่งมีลวดผูกที่จุดซึ่งห่างจากยอด 2 ฟุต และดึงมาผูกที่หลักซึ่งอยู่ห่างจากโคนต้นไม้ 15 ฟุต ถ้าลวดยาว 25 ฟุตต้นไม้ต้นนี้สูงกี่ฟุต

6. บันไดยาว 6.5 เมตร วางพิงผนังตึกให้เชิงบันไดห่างจากผนัง 2.5 เมตร

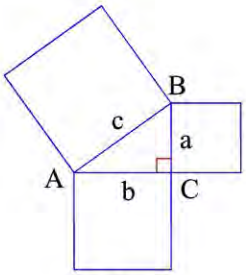


1) อยากทราบว่าปลายบนของบันไดอยู่สูงจากพื้นกี่เมตร
2) ถ้าต้องการพิงบันไดให้ปลายบนของบันไดอยู่สูงกว่าพื้นไม่ถึง 6 เมตร ควรจะวางเชิงบันไดห่างจากผนังตึกมากกว่า หรือน้อยกว่า 2.5 เมตร

7. เสาธงต้นหนึ่ง ตั้งตรงอยู่ด้วยเสาข้างสองต้นซึ่งมีนอตยึดติดอยู่ 2 ตัว โดยนอตตัวบนอยู่สูงจากพื้นดิน 9 ฟุต นายสำราญต้องการทาสีเสาธง เขาจึงถอดนอตตัวล่างแล้วหมุนเสาธงจนกระทั่งยอดเสาธงแตะพื้นดังรูป โดยยอดเสาธงห่างจากโคนเสา 12 ฟุต จงหาว่าเสาธงต้นนี้เมื่อตั้งตรง ยอดเสาธงจะห่างจากพื้นดินเท่าไร

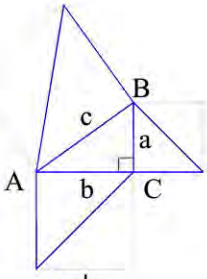
ยังมีอีกไหม

กำหนดให้ ΔABC มี $A\hat{C}B$ เป็นมุมฉาก ด้านตรงข้ามมุมฉากยาว c หน่วย ด้านประกอบมุมฉากยาว a หน่วย และ b หน่วย ตามลำดับ



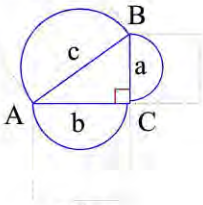
รูป ก

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ว่า พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉาก เท่ากับผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉาก หรือ $c^2 = a^2 + b^2$



รูป ข

จากรูป ก ถ้าลากเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านทั้งสามของ ΔABC ดังรูป ข นักเรียนคิดว่าพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากบนด้านตรงข้ามมุมฉากเท่ากับผลบวกของพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากบนด้านประกอบมุมฉาก ด้วยหรือไม่

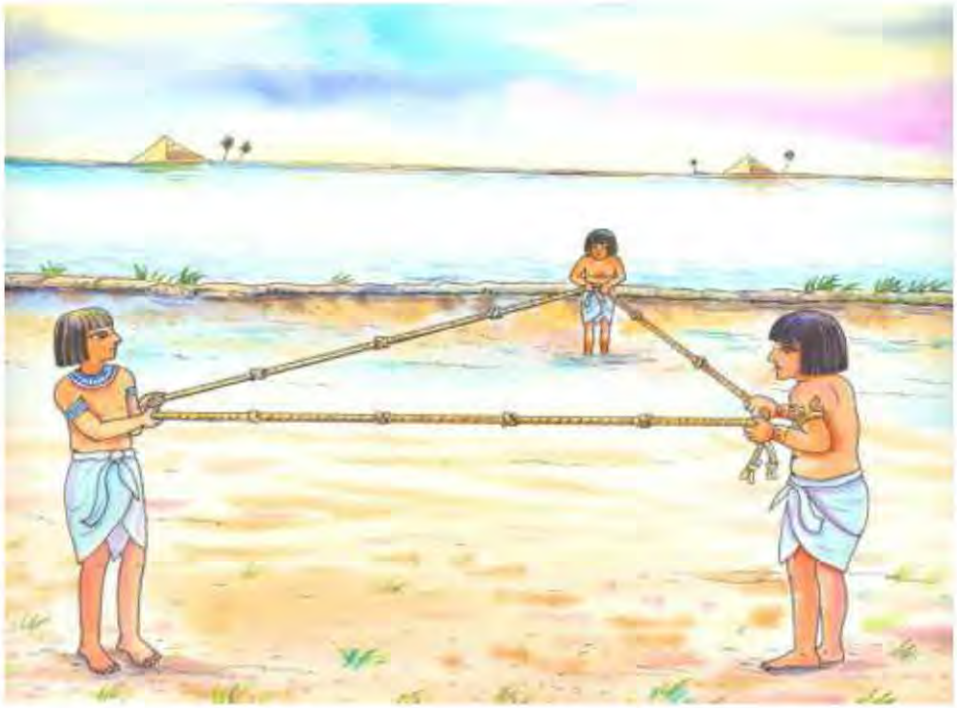


รูป ค

ถ้าสร้างครึ่งวงกลมบนด้านทั้งสามของ ΔABC ดังรูป ค จะได้พื้นที่ของครึ่งวงกลมบนด้านตรงข้ามมุมฉากเท่ากับผลบวกของพื้นที่ของครึ่งวงกลมบนด้านประกอบมุมฉาก หรือไม่

นักเรียนคิดว่ายังมีรูปเรขาคณิตอื่น ๆ ที่สร้างบนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC แล้วพื้นที่ของรูปเหล่านั้นมีความสัมพันธ์กันแบบทฤษฎีบทพีทาโกรัสอีกหรือไม่ ถ้ามีให้ยกตัวอย่าง

1.3 บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส



ในสมัยอียิปต์โบราณ เกษตรกรที่อาศัยอยู่ริมฝั่งแม่น้ำไนล์มักประสบปัญหาน้ำท่วมที่ดิน จนไม่สามารถชี้แนวเขตที่ดินของตนได้ จึงต้องรังวัดที่ดินใหม่เกือบทุกปี ในสมัยนั้นเมื่อต้องการรังวัดที่ดินให้เป็นมุมฉาก ชาวบ้านจะใช้เชือกที่มี 13 ปม ระยะห่างระหว่างปมเป็น 1 หน่วย เท่ากัน มาขึงเป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาวเป็น 3, 4 และ 5 หน่วย ก็จะได้รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ที่มีด้านตรงข้ามมุมฉากเป็น 5 หน่วย

แม้แต่ในปัจจุบันถ้าช่างรังวัดไม่มีเครื่องมือวัดมุมฉาก เขาจะใช้เชือก 13 ปม มาขึงสร้างมุมฉาก วิธีดังกล่าวนี้ชี้ให้เห็นว่าช่างรังวัดทราบว่ารูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวของด้านทั้งสามเป็น 3, 4 และ 5 หน่วย จะต้องเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

นักเรียนคิดว่ามีจำนวนสามจำนวนชุดอื่น ๆ ที่เป็นความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม แล้วทำให้ได้รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก อีกหรือไม่

นักเรียนอาจหาคำตอบได้โดยทำกิจกรรมต่อไปนี้

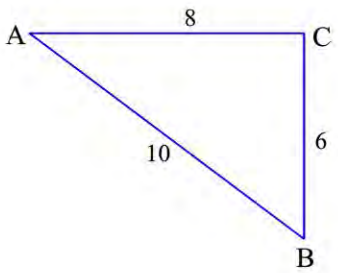
ลองทำดู

1. กำหนดให้ a, b และ c เป็นความยาวของด้านของ ΔABC ในแต่ละข้อซึ่งกำหนดความยาวไว้ดังรูป ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้และเขียนคำตอบเติมลงในตารางท้ายข้อให้สมบูรณ์

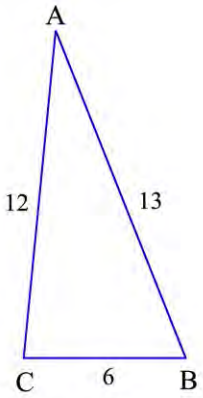
   1) หาค่า a^2, b^2 และ c^2 และพิจารณาว่าข้อใดมีความสัมพันธ์ที่เป็น $a^2 + b^2 = c^2$

   2) วัดขนาดของ $A\hat{C}B$ และพิจารณาว่ารูปสามเหลี่ยมในข้อใดเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

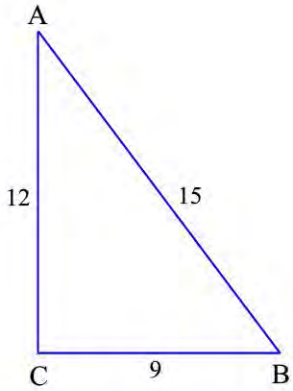
(1)



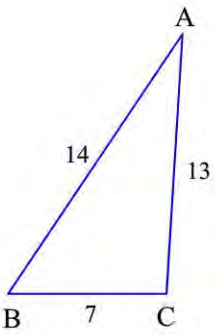
(2)



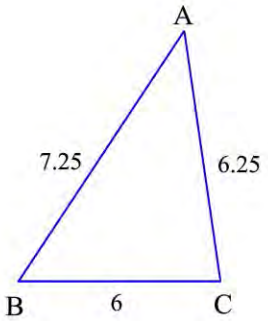
(3)



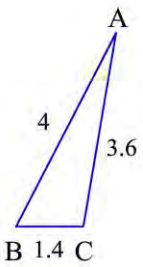
(4)



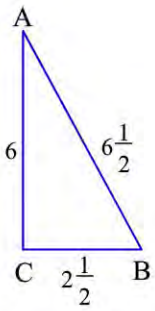
(5)



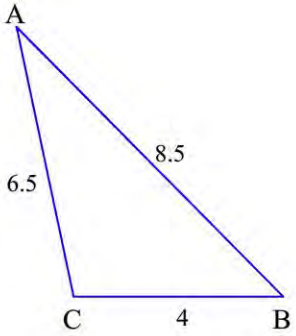
(6)



(7)



(8)



ข้อ	a	b	c	a^2+b^2	c^2	a^2+b^2 เท่ากับ c^2 หรือไม่		Δ ABC เป็น Δ มุมฉาก หรือไม่	
						เท่า	ไม่เท่า	เป็น	ไม่เป็น
(1)	6	8	10	36 + 64	100	√		√	
(2)	6	12	13						
(3)	9	12	15						
(4)	7	13	14						
(5)	6	6.25	7.25						
(6)	1.4	3.6	4						
(7)	$2\frac{1}{2}$	6	$6\frac{1}{2}$						
(8)	4	6.5	8.5						

2. นักเรียนคิดว่ารูปสามเหลี่ยมทุกรูปที่มีความสัมพันธ์ของความยาวของด้านเป็น $c^2 = a^2 + b^2$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใช่หรือไม่
3. รูปสามเหลี่ยมที่มีความสัมพันธ์ของความยาวของด้านเป็น $c^2 = a^2 + b^2$ มีด้านใดยาวที่สุด

ผลที่ได้จากกิจกรรมนี้สามารถสรุปได้ว่า

"ถ้ารูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านยาว a, b และ c หน่วย และ $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ว่า Δ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก และมีด้านที่ยาว c หน่วย เป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก"

ข้อสรุปนี้เป็นจริงตามบทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัสที่กล่าวว่า

สำหรับรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ถ้ากำลังสองของความยาวของด้านด้านหนึ่ง เท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวของด้านอีกสองด้าน แล้วรูปสามเหลี่ยมนั้นเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัสเป็นการนำผลของทฤษฎีบทพีทาโกรัสมาเป็นเหตุ และนำเหตุมาเป็นผลซึ่งอธิบายได้ดังนี้

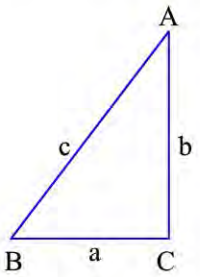
ทฤษฎีบทพีทาโกรัส มีเหตุและผล ดังนี้

เหตุ : มีรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ผล : กำลังสองของความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก เท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวของด้านประกอบมุมฉากของรูปสามเหลี่ยม

เมื่อนำผลข้างต้นมาเป็นเหตุ และเหตุมาเป็นผล ก็จะได้บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัสดังกล่าวมาข้างต้น

การพิสูจน์บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส ทำได้ดังนี้

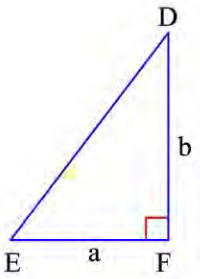


กำหนดให้ ΔABC มี AB = c หน่วย BC = a หน่วย AC = b หน่วย และ $c^2 = a^2 + b^2$

ต้องการพิสูจน์ว่า ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ที่มี $A\hat{C}B$ เป็นมุมฉาก

แนวคิดในการพิสูจน์ ต้องสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก DEF อีกรูปหนึ่งให้ด้านประกอบมุมฉาก EF และ DF ยาว a หน่วยและ b หน่วยตามลำดับ แล้วแสดงให้เห็นว่า $\Delta DEF \cong \Delta ABC$

พิสูจน์ สร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก DEF ให้ด้านประกอบมุมฉาก EF และ DF ยาว a หน่วย และ b หน่วยตามลำดับ และ $D\hat{F}E$ เป็นมุมฉาก ดังรูป



EF = BC = a และ DF = AC = b (จากการสร้าง)

จาก ΔDEF จะได้ $DE^2 = a^2 + b^2$ (ทฤษฎีบทพีทาโกรัส)

จาก ΔABC จะได้ $c^2 = a^2 + b^2$ (กำหนดให้)

ดังนั้น $DE^2 = c^2$ (สมบัติของการเท่ากัน)

นั่นคือ $DE = c$

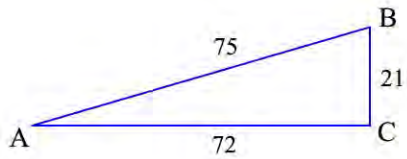
จะได้ $\Delta DEF \cong \Delta ABC$ (ด.ด.ด.)

ดังนั้น $D\hat{F}E = A\hat{C}B = 90^\circ$ (มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะมีขนาดเท่ากัน)

นั่นคือ ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มี $A\hat{C}B$ เป็นมุมฉาก

ตัวอย่างที่ 1 Δ ABC มีด้านยาว 21 เซนติเมตร 72 เซนติเมตร และ 75 เซนติเมตร ตามลำดับ Δ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหรือไม่

วิธีทำ



ให้ $a = 21$

$b = 72$

$c = 75$

จะได้ $a^2 = 441$

$b^2 = 5,184$

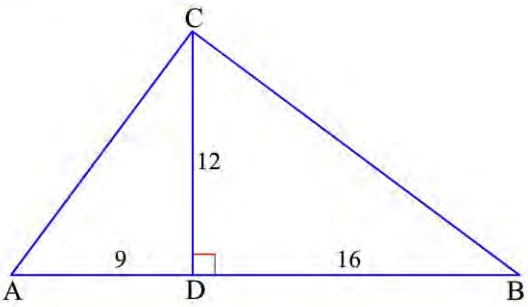
$c^2 = 5,625$

$a^2 + b^2 = 441 + 5,184 = 5,625$

ดังนั้น $c^2 = a^2 + b^2$

นั่นคือ Δ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC ดังรูป จงแสดงว่า Δ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก



วิธีทำ Δ CDB เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

จะได้ $BC^2 = CD^2 + DB^2$

$= 12^2 + 16^2$

$= 144 + 256$

ดังนั้น $BC^2 = 400$

Δ ADC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

จะได้ $AC^2 = CD^2 + AD^2$

$= 12^2 + 9^2$

$= 144 + 81$

ดังนั้น $AC^2 = 225$

จะได้ $AC^2 + BC^2 = 225 + 400$

$= 625$

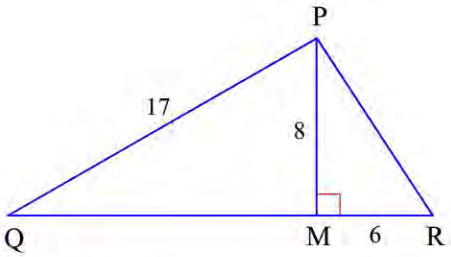
และ $AB^2 = (9 + 16)^2$

$= 625$

ดังนั้น $AB^2 = AC^2 + BC^2$

นั่นคือ ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มี $A\hat{C}B$ เป็นมุมฉาก

ตัวอย่างที่ 3 ΔPQR เป็นรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง $\overline{PM}$ ตั้งฉากกับ $\overline{QR}$, PM = 8 หน่วย , PQ = 17 หน่วย และ MR = 6 หน่วย ΔPQR เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหรือไม่



วิธีทำ เนื่องจาก ΔPMR เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

จะได้ $PR^2 = PM^2 + MR^2$

$= 8^2 + 6^2$

$= 64 + 36$

ดังนั้น $PR^2 = 100$

เนื่องจาก ΔPQM เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

จะได้ $PQ^2 = PM^2 + QM^2$

$17^2 = 8^2 + QM^2$

ดังนั้น $QM^2 = 17^2 - 8^2$

$= 289 - 64$

$= 225$

$= 15 \times 15$

นั่นคือ $QM = 15$

แต่ $QR = QM + MR$

$= 15 + 6$

$= 21$

ดังนั้น $QR^2 = 21^2$

$= 441$

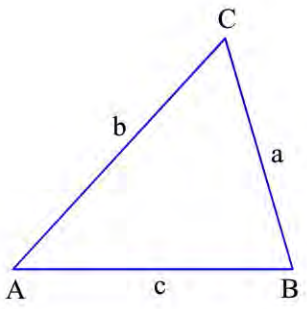
$PR^2 + PQ^2 = 100 + 289$

$= 389$

จะได้ $QR^2 \neq PR^2 + PQ^2$

นั่นคือ ΔPQR ไม่เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ลองคาดการณ์



กำหนดให้ ΔABC มีความยาวของด้านต่าง ๆ ดังรูป

1. ถ้า $c^2 < a^2 + b^2$ แล้ว $A\hat{C}B$ มีขนาดน้อยกว่า 90 องศา หรือมากกว่า 90 องศา
2. ถ้า $c^2 > a^2 + b^2$ แล้ว $A\hat{C}B$ มีขนาดน้อยกว่า 90 องศา หรือมากกว่า 90 องศา

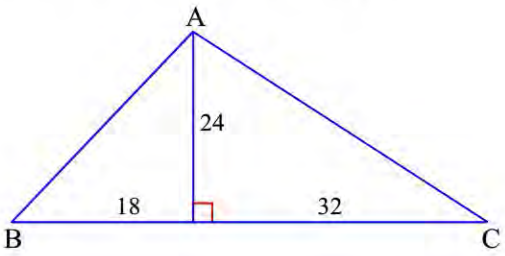
แบบฝึกหัด 1.3

1. กำหนดความยาวด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมต่าง ๆ ดังนี้ จงหาว่ารูปสามเหลี่ยมในข้อใดเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

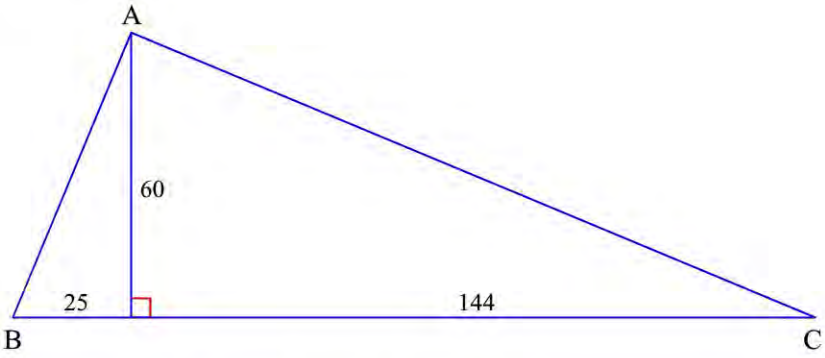
   1) 6, 8, 10
   2) 4, 6, 8
   3) 8, 10, 12
   4) 8, 17, 15
   5) 1, 4, 6
   6) 0.3, 0.4 , 0.5

2. จงแสดงว่า Δ ABC ในแต่ละข้อเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

   1)

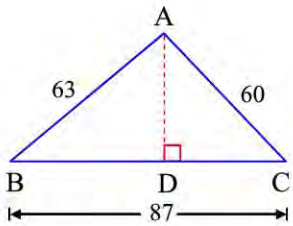


   2)

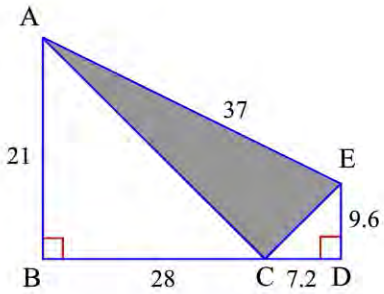


3. กำหนดให้ Δ ABC มี $\overline{CD}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ ที่จุด D จงพิจารณาว่าความยาวที่กำหนดให้ในข้อใด ทำให้ Δ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก เพราะเหตุใด

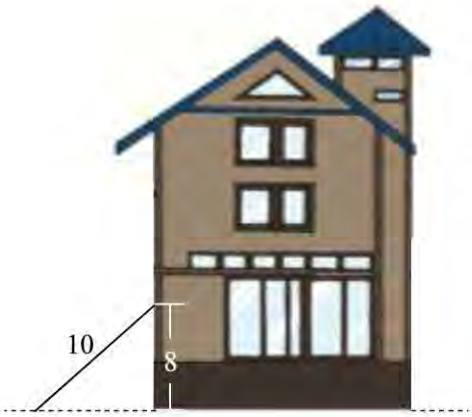
   1) AC = 13, BC = 15 และ CD = 12
   2) AC = 10, BC = 17 และ CD = 8
   3) AC = 3, BC = 4 และ CD = 2.4

4. 

Δ ABC มี AB = 63 เซนติเมตร, AC = 60 เซนติเมตร และ BC = 87 เซนติเมตร จงหาส่วนสูง AD (ตอบเป็นทศนิยมสองตำแหน่ง)

5. 

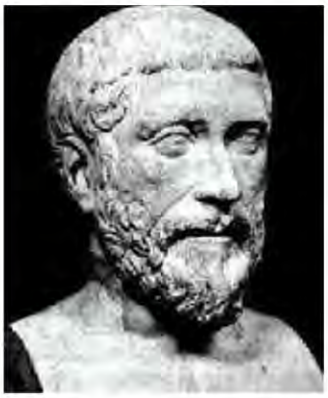
จากรูป กำหนดให้ AB = 21 หน่วย, BC = 28 หน่วย, CD = 7.2 หน่วย DE = 9.6 หน่วย และ AE = 37 หน่วย จงหาพื้นที่ของ Δ ACE

6. 

ชายคนหนึ่งต้องการตรวจสอบว่า ผนังของบ้านตั้งฉากกับพื้นดินหรือไม่ เขาจึงทำเครื่องหมายที่ผนังสูงจากพื้นขึ้นไป 8 ฟุต แล้วใช้ปลายข้างหนึ่งของเชือก 10 ฟุต ผูกที่จุดซึ่งทำเครื่องหมายไว้นั้น ปลายเชือกข้างหนึ่งผูกไว้ที่หลักซึ่งปักอยู่บนพื้นดิน ระยะระหว่างหลักและผนังบ้านควรเป็นเท่าไร จึงจะบอกได้ว่าผนังบ้านตั้งฉากกับพื้นดิน

7. รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานรูปหนึ่งมีด้านยาว 7 เซนติเมตร และ 12 เซนติเมตร มีเส้นทแยงมุมเส้นหนึ่งยาว 15 เซนติเมตร รูปสามเหลี่ยมที่เกิดขึ้นเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหรือไม่ ถ้าไม่เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก แล้วเส้นทแยงมุมอีกเส้นหนึ่งของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานรูปนี้จะยาวกว่าหรือสั้นกว่า 15 เซนติเมตร

พีทาโกรัสแห่งซามอส (Pythagoras of Samos)



พีทาโกรัสแห่งซามอส (ประมาณ 580 – 496 ปีก่อนคริสต์ศักราช) เป็นนักคณิตศาสตร์ชาวกรีก หลักฐานเกี่ยวกับประวัติของพีทาโกรัสยังเป็นที่คลุมเครือ แต่พอสันนิษฐานได้ว่าพีทาโกรัสเกิดที่เกาะซามอส (Samos) แห่งทะเลเอเจียน (Aegean) ในวัยรุ่น พีทาโกรัสได้ศึกษากับปราชญ์ที่มีชื่อเสียงหลายคนรวมทั้งทาเลสแห่งมิเลตุส (Thales of Miletus) ทาเลสเป็นผู้แนะนำให้พีทาโกรัสได้ไปศึกษาต่อทางคณิตศาสตร์และวิชาต่าง ๆ ที่อียิปต์ หลังจากใช้เวลาศึกษาที่อียิปต์อยู่นานพอสมควร พีทาโกรัสได้ไปศึกษาต่อที่บาบิโลเนีย

พีทาโกรัสกลับมาที่เกาะซามอสเมื่ออายุประมาณ 55 ปี และเมื่อพบว่าเกาะซามอสตกอยู่ภายใต้การยึดครองของเปอร์เซีย จึงอพยพไปยังเมืองโครโตนา (Crotona) เมืองท่าของกรีกโบราณที่ตั้งอยู่ตอนใต้ของอิตาลีปัจจุบัน พีทาโกรัสตั้งสำนักขึ้นที่นี่ชื่อว่าสำนักพีทาโกเรียน (Pythagorean School) มีตราประจำสำนักเป็นรูปดาวห้าแฉก ปรัชญาของสำนักคือ “จำนวนครอบครองจักรวาล (Numbers rule the universe)” ในสมัยนั้นจำนวน หมายถึง จำนวนตรรกยะบวก และศูนย์ สำนักนี้มีชื่อเสียงเกี่ยวกับการศึกษาปรัชญาคณิตศาสตร์ และธรรมชาติวิทยาหรือวิทยาศาสตร์สมัยใหม่ เป็นที่เชื่อกันว่าพีทาโกรัสเป็นผู้พิสูจน์ทฤษฎีบทพีทาโกรัสได้เป็นคนแรก ถึงแม้ว่าความจริงเกี่ยวกับทฤษฎีบทและบทกลับของทฤษฎีบทดังกล่าวจะเป็นที่รู้จักกันมาก่อนสมัยพีทาโกรัสนานแล้วก็ตาม

สำนักพีทาโกเรียนยังค้นพบหลักการใช้คณิตศาสตร์มาอธิบายเกี่ยวกับเสียงดนตรี ทฤษฎีบทอื่น ๆ ทางเรขาคณิตและจำนวน ทั้งสามารถพิสูจน์ว่าไม่สามารถแทน $\sqrt{2}$ ได้ด้วยจำนวนเต็มบวกหรือในรูป $\frac{a}{b}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งเป็นการค้นพบจำนวนอตรรกยะที่เป็นความรู้ใหม่ตรงข้ามกับความเชื่อดั้งเดิมของสำนัก

สานุศิษย์ทั้งชายและหญิงของพีทาโกรัส ถือปรัชญาและคำสอนของพีทาโกรัสเสมือนเป็นศาสนาและมีความเป็นอยู่เยี่ยงนักบวช สำนักพีทาโกเรียนปกปิดเป็นความลับสุดยอดที่ว่า ไม่สามารถแทน $\sqrt{2}$ ได้ด้วยจำนวนเต็มบวกหรือในรูป $\frac{a}{b}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก เล่ากันว่าเมื่อศิษย์คนหนึ่งที่ชื่อฮิปปาซุส (Hippasus) นำความลับนี้ไปเปิดเผยกับคนภายนอก ฮิปปาซุสถึงกับถูกจับถ่วงน้ำตาย

อนุสาวรีย์พีทาโกรัสที่เกาะซามอส

บทที่ 2
ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับจำนวนจริง

2.1 จำนวนตรรกยะ

นักเรียนเคยทราบมาแล้วว่าจำนวน เช่น 0, 1, 5, -7, $\frac{2}{3}$, $\frac{-3}{5}$, $\frac{11}{7}$ และ $-\frac{31}{12}$ เป็นจำนวนที่สามารถเขียนให้อยู่ในรูป $\frac{a}{b}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็มที่ $b \neq 0$ ในทางคณิตศาสตร์เรียกจำนวนเหล่านี้ว่า จำนวนตรรกยะ

จำนวนตรรกยะ คือ จำนวนที่เขียนแทนได้ด้วยเศษส่วน $\frac{a}{b}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็มที่ $b \neq 0$

นักเรียนยังทราบอีกว่า เศษส่วนใด ๆ $\frac{a}{b}$ เมื่อ a เป็นจำนวนเต็ม และ b เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เท่ากับศูนย์ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปทศนิยมได้ โดยการนำตัวส่วนไปหารตัวเศษ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

1. $\frac{9}{4}$ $\longrightarrow$

$$
\begin{array}{r}
2.25 \\
4\overline{)\,9.00} \\
\underline{8} \\
10 \\
\underline{8} \\
20 \\
\underline{20}
\end{array}
$$

ดังนั้น $\frac{9}{4}$ = 2.25 หรือ 2.25000...

2. $-\frac{7}{11}$ $\longrightarrow$

$$
\begin{array}{r}
0.6363\ldots \\
11\overline{)\,7.0000} \\
\underline{6\ 6} \\
40 \\
\underline{33} \\
70 \\
\underline{66} \\
40 \\
\underline{33} \\
7 \\
\vdots
\end{array}
$$

ดังนั้น $-\frac{7}{11} = -0.6363\ldots$

โดยวิธีดังกล่าว เราสามารถเขียนเศษส่วนให้อยู่ในรูปทศนิยมได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

1. $\frac{5}{8} = 0.625000\ldots$ หรือ $0.625\dot{0}$
2. $\frac{7}{15} = 0.4666\ldots$ หรือ $0.4\dot{6}$
3. $-\frac{50}{33} = -1.515151\ldots$ หรือ $-1.\dot{5}\dot{1}$
4. $\frac{11}{37} = 0.297297297\ldots$ หรือ $0.\dot{2}9\dot{7}$
5. $\frac{83}{275} = 0.30181818\ldots$ หรือ $0.30\dot{1}\dot{8}$

ทศนิยมที่ได้จากข้อ 1 ถึงข้อ 5 เรียกว่า *ทศนิยมซ้ำ* เราสามารถจัดทศนิยมซ้ำเป็นสองกลุ่ม ดังนี้

1. *ทศนิยมซ้ำศูนย์* เช่น $0.20\dot{0}$ และ $1.280\dot{0}$ ในกลุ่มนี้ไม่นิยมเขียนตัวซ้ำศูนย์ เช่น

   $0.30\dot{0}$ เขียนเป็น 0.3

   $2.650\dot{0}$ เขียนเป็น 2.65

   $-1.83520\dot{0}$ เขียนเป็น -1.8352
2. *ทศนิยมซ้ำที่ไม่ใช่ทศนิยมซ้ำศูนย์* เช่น $1.1\dot{8}$, $-2.06\dot{3}$, $-2.1\dot{3}2\dot{7}$ และ $12.6423\dot{8}5\dot{1}$

ในทางกลับกัน เราสามารถเขียนทศนิยมซ้ำให้อยู่ในรูปเศษส่วนได้ ซึ่งนักเรียนเคยเขียนทศนิยมซ้ำศูนย์ให้อยู่ในรูปเศษส่วนมาแล้ว เช่น

1. $0.11 = \frac{11}{100}$

2. $-0.137 = -\frac{137}{1{,}000}$

สำหรับทศนิยมซ้ำอื่น ๆ ที่ไม่ใช่ทศนิยมซ้ำศูนย์ อาจเขียนให้อยู่ในรูปเศษส่วนได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียน $0.\dot{6}$ ให้อยู่ในรูปเศษส่วน

วิธีทำ ให้ $N = 0.\dot{6}$

ดังนั้น $N = 0.666\ldots$ ------ (1)

(1) $\times 10$;

จะได้ $10N = 10 \times 0.666\ldots$

หรือ $10N = 6.666\ldots$ ------ (2)

(2) $-$ (1) ;

จะได้ $10N - N = (6.666\ldots) - (0.666\ldots)$

$9N = 6$

ดังนั้น $N = \frac{6}{9}$

นั่นคือ $0.\dot{6} = \frac{6}{9}$ หรือ $\frac{2}{3}$

ตอบ $\frac{2}{3}$

(1) $\times 10$ หมายถึงนำ 10 ไปคูณกับจำนวนที่อยู่ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับของสมการ (1)

เมื่อคูณทศนิยมด้วย 10 จุดทศนิยมจะเลื่อนไปทางขวาหนึ่งตำแหน่ง

(2) $-$ (1) หมายถึง นำจำนวนที่อยู่ข้างเดียวกันของเครื่องหมายเท่ากับของสมการ (2) ลบด้วยของสมการ (1)

$$\begin{array}{r} 6.666\ldots \\ -\ 0.666\ldots \\ \hline 6.000\ldots \end{array}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงเขียน $0.7\dot{2}\dot{5}$ ให้อยู่ในรูปเศษส่วน

วิธีทำ ให้ $N = 0.7\dot{2}\dot{5}$

ดังนั้น $N = 0.7252525\ldots$ --- (1)

(1) $\times$ 1,000 ;

จะได้ $1{,}000N = 1000 \times 0.7252525\ldots$

$1{,}000N = 725.252525\ldots$ --- (2)

เมื่อคูณทศนิยมด้วย 1,000 จุดทศนิยมจะเลื่อนไปทางขวาสามตำแหน่ง

(1) $\times$ 10 ;

จะได้ $10N = 10 \times 0.7252525\ldots$

หรือ $10N = 7.252525\ldots$ --- (3)

เมื่อคูณทศนิยมด้วย 10 จุดทศนิยมจะเลื่อนไปทางขวาหนึ่งตำแหน่ง

(2) – (3) ;

จะได้ $1000N - 10N = (725.2525\ldots) - (7.2525\ldots)$

$990N = 718$

$N = \frac{718}{990}$

$725.2525\ldots$

$7.2525\ldots$ –

$718.0000\ldots$

นั่นคือ $0.7\dot{2}\dot{5} = \frac{718}{990}$ หรือ $\frac{359}{495}$

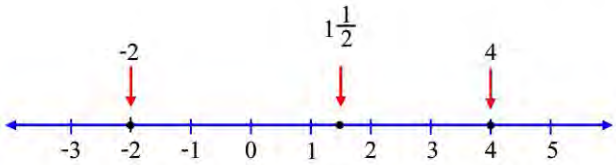
ตอบ $\frac{359}{495}$

จากที่กล่าวมาข้างต้น นักเรียนจะเห็นว่า เราสามารถเขียนเศษส่วนให้อยู่ในรูปทศนิยมซ้ำได้และเขียนทศนิยมซ้ำให้อยู่ในรูปเศษส่วนได้ ดังนั้น จึงกล่าวได้อีกอย่างว่า *จำนวนตรรกยะ คือ จำนวนที่เขียนแทนได้ด้วยทศนิยมซ้ำ*

นั่นคือ *จำนวนตรรกยะ คือ จำนวนที่เขียนแทนได้ด้วยทศนิยมซ้ำหรือเศษส่วน* $\frac{a}{b}$ *เมื่อ* a *และ* b *เป็นจำนวนเต็มที่* $b \neq 0$

มารู้จักจำนวนตรรกยะกันเถอะ

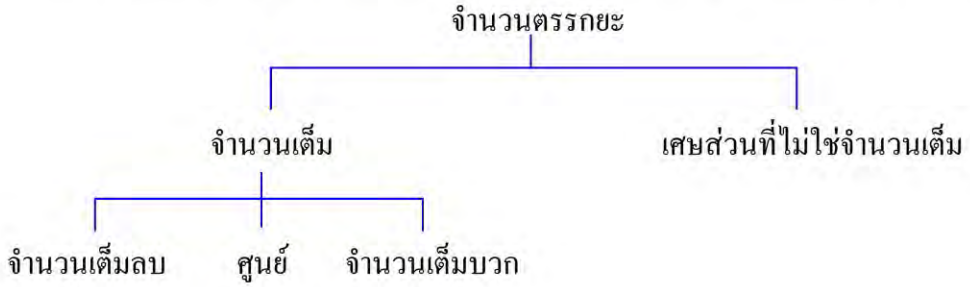
เก่งและแก้วคุยกันเรื่องจำนวนตรรกยะที่เรียนมาแล้ว ทั้งสองคนช่วยกันเขียนเส้นจำนวนเพื่อแสดงจำนวนบวกและจำนวนลบบางจำนวน เช่น -2, $1\frac{1}{2}$ และ 4 ลงบนเส้นจำนวน



เมื่อทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ เก่งและแก้วเกิดความสงสัยบางอย่าง นักเรียนช่วยทั้งสองคนคิดหน่อยว่า ปัญหาของเก่งและแก้วต่อไปนี้ มีคำตอบเป็นอย่างไร

1. เราสามารถเขียนแทนเศษส่วนด้วยจุดบนเส้นจำนวน ได้หรือไม่
2. เราสามารถเขียนแทนทศนิยมซ้ำด้วยจุดบนเส้นจำนวน ได้หรือไม่
3. เราสามารถเขียนแทนจำนวนตรรกยะด้วยจุดบนเส้นจำนวน ได้หรือไม่
4. จำนวนเต็มเป็นจำนวนตรรกยะหรือไม่ เพราะเหตุใด
5. เราสามารถบอกได้หรือไม่ว่าระหว่าง -1 และ 2 มีจำนวนตรรกยะอยู่กี่จำนวน
6. มีจำนวนตรรกยะบวกที่น้อยที่สุดหรือไม่
7. มีจำนวนตรรกยะบวกที่มากที่สุดหรือไม่
8. มีจำนวนตรรกยะลบที่มากที่สุดหรือไม่
9. มีจำนวนตรรกยะลบที่น้อยที่สุดหรือไม่

นักเรียนได้เห็นแล้วว่า จำนวนตรรกยะ หมายถึง จำนวนชนิดต่าง ๆ ดังแผนผังต่อไปนี้



เรามักจะพบสถานการณ์ต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับปริมาณที่เป็นจำนวนตรรกยะในรูปของจำนวนเต็มและเศษส่วนเป็นส่วนใหญ่ในชีวิตประจำวัน เช่น

คนไทยดื่มนมเฉลี่ย 4 ลิตร ต่อคนต่อปี

กรุงเทพมหานครมีพื้นที่ 15,652 ตารางกิโลเมตร

มีน้ำมันพืชเหลืออยู่ประมาณ 3 ใน 4 ของขวด

สำหรับปริมาณที่เป็นทศนิยมซ้ำที่ไม่ใช่ทศนิยมซ้ำศูนย์ เป็นปริมาณที่ไม่สะดวกในการนำไปใช้ เราจึงมักใช้ค่าประมาณหรือใช้เศษส่วนแทน ดังสถานการณ์ต่อไปนี้

สถานการณ์ 1

คุณแม่มีลูกเกดอยู่ 1 กล่อง เมื่อแบ่งให้ลูก 3 คน เท่า ๆ กัน จะแบ่งได้คนละ $1 \div 3$ ซึ่งเท่ากับ $0.\dot{3}$ ของกล่อง จึงกล่าวว่า *ลูกแต่ละคนได้ลูกเกด $\frac{1}{3}$ ของกล่อง*

สถานการณ์ 2

ป้อมซื้อกล้วยหอมมาหนึ่งหวี ราคา 28 บาท มีกล้วยอยู่ 9 ผล ป้อมคำนวณราคากล้วยหอมได้ผลละ $3.\dot{1}$ บาท *เขาจึงประมาณกล้วยหอมราคาผลละ 3 บาท*

สถานการณ์ 3

ครอบครัวแก้วซึ่งมีสมาชิก 6 คน ไปรับประทานอาหารเย็นที่สวนอาหารแห่งหนึ่ง คิดเป็นเงินค่าอาหาร 1,120 บาท เมื่อคำนวณค่าอาหารต่อคนแล้วได้ $186.\dot{6}$ บาท แก้วจึงประมาณเป็นจำนวนเต็มสิบ แล้วบอกพ่อว่า *ค่าอาหารต่อคนประมาณ 190 บาท*

สถานการณ์ 4

ร้านค้าแห่งหนึ่งติดป้ายขายปากกากล่องหนึ่งที่มี 6 ด้าม ในราคา 200 บาท ตุ้มบอกเจ้าของร้านว่าต้องการซื้อเพียงด้ามเดียว คำนวณราคาต่อด้ามได้ $33.\dot{3}$ บาท เจ้าของร้านจึงประมาณราคาเป็น 33.50 บาท แล้วบอกตุ้มว่า *ถ้าซื้อด้ามเดียวราคา 33 บาท 50 สตางค์*

น่าคิด

ถ้าจำนวนในรูป $\frac{a}{b}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็มที่ $a \neq 0$, $b \neq 0$ เป็นจำนวนตรรกยะแล้ว นักเรียนคิดว่า $\frac{b}{a}$ จะเป็นจำนวนตรรกยะด้วยหรือไม่ เพราะเหตุใด

แบบฝึกหัด 2.1

1. จงเขียนเศษส่วนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปทศนิยม

   1) $\frac{2}{3}$
   2) $-\frac{15}{8}$
   3) $\frac{35}{24}$
   4) $-\frac{6}{11}$
   5) $-\frac{5}{132}$
   6) $\frac{15}{37}$

2. จงเขียนทศนิยมซ้ำต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปเศษส่วน

   1) $0.\dot{7}$ 2) $0.5\dot{2}$

   3) $0.\dot{4}\dot{8}$ 4) $0.2\dot{3}\dot{6}$

3. จำนวนในแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นจำนวนตรรกยะหรือไม่ เพราะเหตุใด

   1) $2\frac{1}{5}$ 2) $\frac{3.2}{1.3}$

   3) $\frac{2}{3} + \frac{5}{7}$ 4) $-3.56 - 4.81$

   5) -4.6×0.7 6) $\frac{3}{7} \times 2\frac{1}{2}$

   7) $-5.6 \div 1.1$ 8) $-\frac{3}{5} \div 6$

4. แม่ซื้อมะนาว 3 ผล 1 บาท แต่ป้าซื้อได้ร้อยละ 33 บาท ใครซื้อมะนาวได้ถูกกว่ากัน เพราะเหตุใด

5. คุณแม่และอ้อมไปห้างสรรพสินค้าแห่งหนึ่งเพื่อซื้อแปรงสีฟัน 5 อัน สำหรับสมาชิกทุกคนในบ้าน ถ้าซื้อปลีกราคาอันละ 14.25 บาท แต่ถ้าซื้อครึ่งโหลจะได้ราคา 85 บาท คุณแม่และอ้อมควรตัดสินใจซื้อแบบใดดี เพราะเหตุใด

6. แก้ว ก้อย และก้อง ร่วมกันซื้อของขวัญวันเกิดให้เพื่อนเป็นเงิน 325 บาท จงตอบคำถามต่อไปนี้

   1) แต่ละคนต้องจ่ายเงินจำนวนเท่าไร
   2) ในทางปฏิบัติแต่ละคนจะจ่ายเงินสดได้จริงตามจำนวนในข้อ 1) หรือไม่ เพราะเหตุใด
   3) นักเรียนจะแก้ปัญหาอย่างไร ถ้าเหรียญที่มีมูลค่าน้อยที่สุดที่ใช้แลกเปลี่ยนกันคือเหรียญ 25 สตางค์

7. จงเขียนสถานการณ์ที่นักเรียนใช้จำนวนตรรกยะในชีวิตประจำวันมา 2 สถานการณ์

เป็นจำนวนตรรกยะหรือไม่

นักเรียนคาดการณ์ว่าผลลัพธ์ในแต่ละข้อต่อไปนี้ เป็นจำนวนตรรกยะหรือไม่

1. ผลบวกของจำนวนตรรกยะกับจำนวนตรรกยะ
2. ผลต่างของจำนวนตรรกยะกับจำนวนตรรกยะ
3. ผลคูณของจำนวนตรรกยะกับจำนวนตรรกยะ
4. จำนวนตรรกยะหารด้วยจำนวนตรรกยะที่ไม่เท่ากับศูนย์

หาได้อย่างไร

เดือนซื้อผ้าเช็ดตัวขนาดเล็ก 15 ผืน เพื่อเป็นของขวัญปีใหม่ให้เพื่อนสนิท คุณแม่ถามเดือนว่าซื้อมาผืนละเท่าไร เดือนจึงไปดูใบเสร็จรับเงิน ปรากฏว่าตัวเลขข้างหน้าสุดและหลังสุดเลือนหายไป เหลือเพียงตัวเลขหน้าจุดทศนิยมสองตัวและหลังจุดทศนิยมหนึ่งตัวคือ _ 86.2 _ เดือนจึงบอกคุณแม่ว่า เคยคำนวณแล้วราคาผืนละเกือบ 46 บาท นักเรียนคิดว่าราคาจริงผืนละเท่าใด และหาคำตอบได้อย่างไร

2.2 จำนวนอตรรกยะ

ถึงแม้ว่าจำนวนเต็ม เศษส่วน และทศนิยมซ้ำ จะมีประโยชน์และสามารถนำไปใช้ได้อย่างกว้างขวาง แต่ก็ยังมีปัญหาหรือสถานการณ์บางอย่างที่ไม่สามารถใช้จำนวนดังกล่าวแทนปริมาณที่ต้องการสื่อได้ ดังเช่นสถานการณ์ต่อไปนี้

โรงเรียนแห่งหนึ่งต้องการทำสวนหย่อมหน้าโรงเรียนเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดยให้มีพื้นที่ขนาด 2 ตารางวา สวนหย่อมนี้จะมีด้านแต่ละด้านยาวเท่าไร

นักเรียนทราบว่าพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเท่ากับผลคูณของความยาวของด้าน เมื่อให้ x แทนความยาวของด้าน จึงได้ว่า

$$x \cdot x = 2$$

$$x^2 = 2$$

ดังนั้น การหาความยาวของด้าน จึงเป็นการหาจำนวนที่ยกกำลังสองแล้วได้ 2 โดยเริ่มจากการลองแทนค่า x ด้วยจำนวนเต็มบวก ดังนี้

x	1	2
x^2	1	4

จากตาราง จะได้ว่า x มีค่าอยู่ระหว่าง 1 กับ 2

เพื่อหาค่า x เป็นทศนิยมหนึ่งตำแหน่ง จึงแบ่งช่วงระหว่าง 1 กับ 2 ออกเป็นสิบส่วนเท่า ๆ กัน แล้วพิจารณาว่า x ควรมีค่าเท่าใด โดยลองแทนค่า x ด้วยทศนิยมหนึ่งตำแหน่งที่อยู่ระหว่าง 1 และ 2 ดังนี้

x	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
x^2	1.21	1.44	1.69	1.96	2.25

จากตาราง จะได้ว่า x มีค่าอยู่ระหว่าง 1.4 กับ 1.5

เพื่อหาค่า x เป็นทศนิยมสองตำแหน่ง จึงแบ่งช่วงระหว่าง 1.4 และ 1.5 ออกเป็นสิบส่วนเท่า ๆ กัน แล้วพิจารณาว่า x ควรจะมีค่าเท่าใด โดยลองแทนค่า x ด้วยทศนิยมสองตำแหน่งที่อยู่ระหว่าง 1.4 และ 1.5 ดังนี้

x	1.41	1.42	1.43
x^2	1.9881	2.0164	2.0449

จากตาราง จะได้ว่า x มีค่าอยู่ระหว่าง 1.41 กับ 1.42

เพื่อหาค่า x เป็นทศนิยมตำแหน่งถัด ๆ ไป จึงทำในทำนองเดียวกัน ดังตารางต่อไปนี้

x	1.411	1.412	1.413	1.414	1.415
x^2	1.990921	1.993744	1.996569	1.999396	2.002225

จากตาราง จะได้ว่า x มีค่าอยู่ระหว่าง 1.414 กับ 1.415

x	1.4141	1.4142	1.4143
x^2	1.99967881	1.99996164	2.00024449

จากตาราง จะได้ว่า x มีค่าอยู่ระหว่าง 1.4142 กับ 1.4143

x	1.41421	1.41422
x^2	1.9999899241	2.0000182084

จากตาราง จะได้ว่า x มีค่าอยู่ระหว่าง 1.41421 กับ 1.41422

ถ้าหาค่า x ต่อไปเรื่อย ๆ จะพบว่า ค่าที่ได้นั้นเป็นทศนิยมที่ต่อไปได้โดยไม่สิ้นสุด ซึ่งอาจใช้เครื่องคำนวณคิดได้ x เป็นทศนิยมหลายตำแหน่ง ดังนี้

1.414213562373095048801688724209...

ทศนิยมในลักษณะนี้ไม่สามารถเขียนแทนได้ด้วยเศษส่วนหรือทศนิยมซ้ำ

เมื่อไม่สามารถแทน x ได้ด้วยเศษส่วนหรือทศนิยมซ้ำ จึงจำเป็นต้องแทน x ด้วยจำนวนชนิดใหม่โดยใช้เครื่องหมายกรณฑ์ ($\sqrt{\ }$) ดังนั้นจึงเขียนสัญลักษณ์ $\sqrt{2}$ แทนจำนวนบวกที่ยกกำลังสองแล้วได้ 2

นั่นคือ จากปัญหาการทำสวนหย่อมข้างต้น จะได้คำตอบว่าสวนหย่อมนี้มีด้านแต่ละด้านยาว $\sqrt{2}$ วา

$\sqrt{2}$ เป็นตัวอย่างของจำนวนที่ไม่สามารถเขียนแทนได้ด้วยทศนิยมซ้ำ จึงไม่สามารถเขียนแทนได้ด้วยเศษส่วน $\sqrt{2}$ จึงไม่ใช่จำนวนตรรกยะ แต่เป็นตัวอย่างของจำนวนอตรรกยะ

จำนวนที่ไม่สามารถเขียนแทนได้ด้วยทศนิยมซ้ำหรือเศษส่วน $\frac{a}{b}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็มที่ $b \neq 0$ เรียกว่า จำนวนอตรรกยะ

ตัวอย่างของจำนวนอตรรกยะ เช่น

1.234567891011121314...

3.4323223222...

16.79779777977779...

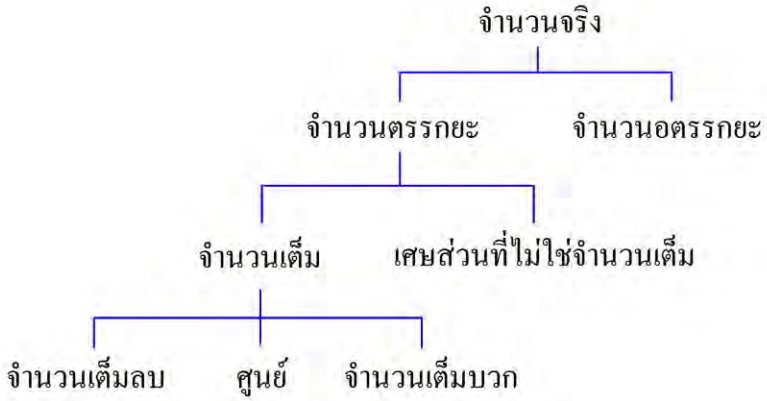
-4.399339933399...

จากตัวอย่างข้างต้น นักเรียนจะสังเกตเห็นว่า เราไม่สามารถจัดชุดตัวเลขหลังจุดทศนิยมของจำนวนอตรรกยะแต่ละจำนวน ให้เป็นชุดตัวเลขที่ซ้ำกันได้

อีกตัวอย่างหนึ่งของจำนวนอตรรกยะคือ π ซึ่งมีค่าเท่ากับ 3.14159265358979323846... π คือ อัตราส่วนของความยาวของเส้นรอบวงของวงกลมต่อความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม เมื่อนักเรียนคำนวณหาพื้นที่ของวงกลมโดยใช้สูตร πr^2 หรือคำนวณหาความยาวของเส้นรอบวงของวงกลมโดยใช้สูตร $2\pi r$ เมื่อ r แทนรัศมีของวงกลม มักใช้ค่าประมาณของ π เป็น $\frac{22}{7}$ หรือ 3.1416 หรือ 3.142 ซึ่งเป็นจำนวนตรรกยะทั้งหมด

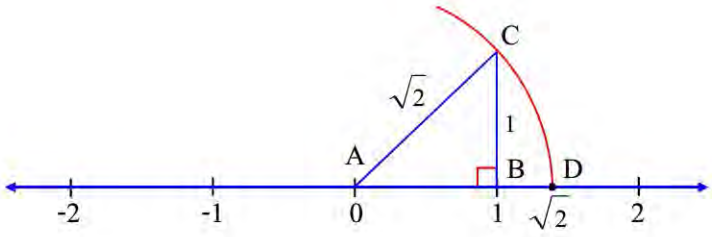
จำนวนที่เป็นจำนวนตรรกยะหรือจำนวนอตรรกยะ เรียกว่า จำนวนจริง

แผนผังแสดงความเกี่ยวข้องระหว่างจำนวนชนิดต่าง ๆ ที่นักเรียนเรียนมาแล้ว เป็นดังนี้



นักเรียนทราบแล้วว่า เราสามารถแทนจำนวนตรรกยะแต่ละจำนวนได้ด้วยจุดบนเส้นจำนวน สำหรับจำนวนอตรรกยะเราก็สามารถแทนได้ด้วยจุดบนเส้นจำนวนเช่นกัน

การหาจุดบนเส้นจำนวนที่แทน $\sqrt{2}$ นั้น อาจใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสมาช่วยในการหาได้ดังนี้



บนเส้นจำนวน กำหนดจุดที่แทน 0 และ 1 เป็น A และ B ตามลำดับ จะได้ $\overline{AB}$ ยาว 1 หน่วย

ลาก $\overline{BC}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ โดยให้ $\overline{BC}$ ยาว 1 หน่วยด้วย

ตามทฤษฎีบทพีทาโกรัสจะหา AC ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\ &= 1^2 + 1^2 \\ &= 2 \\ AC &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

เมื่อใช้ A เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี AC เขียนส่วนโค้งของวงกลมตัดเส้นจำนวนที่จุด D จะได้จุด D ที่แทน $\sqrt{2}$ บนเส้นจำนวน

นักเรียนคิดว่าจะหาจุดที่แทน $-\sqrt{2}$ บนเส้นจำนวนได้หรือไม่ ถ้าได้ ทำอย่างไร จงอธิบาย

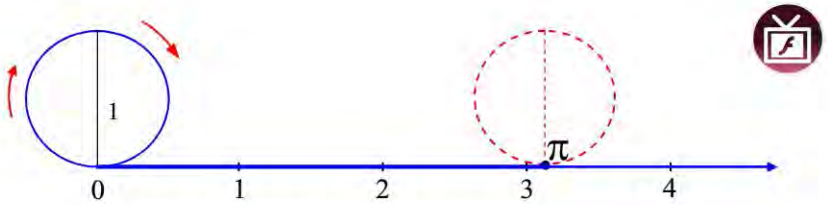
สำหรับการหาจุดที่แทน π บนเส้นจำนวน อาจทำได้ดังนี้

$$\text{เนื่องจาก } \pi = \frac{\text{ความยาวของเส้นรอบวงของวงกลม}}{\text{ความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม}}$$

ถ้าเราสร้างวงกลมที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 1 หน่วย ความยาวของเส้นรอบวงของวงกลมนั้นจะเท่ากับ π

หรือกล่าวได้ว่า π เท่ากับความยาวของเส้นรอบวงของวงกลมที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 1 หน่วย

เราสามารถหาจุดบนเส้นจำนวนที่แทน π ได้ โดยกลิ้งรูปวงกลมที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางยาวเท่ากับ 1 หน่วย จากจุดที่แทน 0 บนเส้นจำนวนไปทางขวาบนเส้นจำนวนให้ครบ 1 รอบ จุดที่รูปวงกลมกลิ้งไปได้ครบ 1 รอบนั้น คือจุดที่แทน π บนเส้นจำนวน



นักเรียนคิดว่าจะหาจุดที่แทน $-\pi$ บนเส้นจำนวนได้หรือไม่ ถ้าได้ ทำอย่างไร จงอธิบาย

ในทางคณิตศาสตร์ เราสามารถเขียนแทนจำนวนจริงใด ๆ ด้วยจุดบนเส้นจำนวนได้ และจุดใด ๆ บนเส้นจำนวนแต่ละจุดจะแทนจำนวนจริงจำนวนหนึ่ง ซึ่งอาจเป็นจำนวนตรรกยะหรือจำนวนอตรรกยะ ก็ได้ เส้นจำนวนที่เรากล่าวถึงจึงอาจเรียกว่า **เส้นจำนวนจริง**

ลองคิดดู

ปุ้มกับป้อมคุยกันเรื่องจำนวนตรรกยะและจำนวนอตรรกยะ ทั้งสองคนช่วยกันยกตัวอย่างจำนวนตรรกยะและจำนวนอตรรกยะตามที่ได้เคยเรียนมา เมื่อทำไปเรื่อย ๆ จึงพบปัญหาที่ไม่แน่ใจ 3 ข้อดังนี้

1. $-\sqrt{2}$ เป็นจำนวนอตรรกยะด้วยหรือไม่
2. $-\pi$ เป็นจำนวนอตรรกยะด้วยหรือไม่
3. มีจำนวนจริงใดหรือไม่ที่เป็นทั้งจำนวนตรรกยะและจำนวนอตรรกยะ

ให้นักเรียนช่วยปุ้มกับป้อมคิดหน่อยว่า จะหาข้อสรุปให้กับปัญหาทั้งสามข้อนี้ได้เป็นอย่างไร

แบบฝึกหัด 2.2

1. จำนวนต่อไปนี้จำนวนใดเป็นจำนวนตรรกยะและจำนวนใดเป็นจำนวนอตรรกยะ

   1) $\frac{9}{7}$
   2) $-2\frac{1}{3}$
   3) 0
   4) $-2+\frac{1}{5}$
   5) 0.842
   6) 1.366666…
   7) 2.4313113111…
   8) -5.9326483264832648…
   9) 2.137137137…
   10) -0.1666676869…

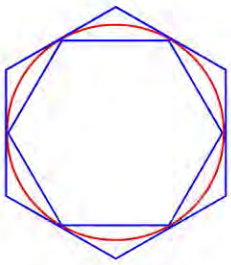
2.

   ตู้เย็นที่บ้านของหน่อยมีขนาด 19.8 คิวบิกฟุต ใช้พลังงานไฟฟ้า 726.35 หน่วยต่อปี คิดเป็นค่าไฟฟ้า 1,837.67 บาทต่อปี จงหาว่าค่าไฟฟ้าต่อเดือนของตู้เย็นใบนี้เป็นเท่าใด นักเรียนคิดว่าคำตอบที่ได้เป็นจำนวนตรรกยะหรือจำนวนอตรรกยะ เพราะเหตุใด

3. จงหาตำแหน่งของ $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ และ $\sqrt{6}$ บนเส้นจำนวนเส้นเดียวกัน

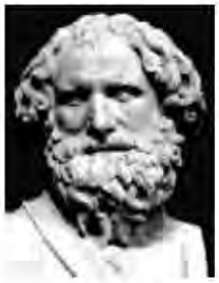
ค่าของ π

π เป็นอัตราส่วนของความยาวของเส้นรอบวงของวงกลมต่อความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม นิยมเขียน π ในรูปของอัตราส่วนที่มีจำนวนหลังของอัตราส่วนเป็น 1 และเรียกจำนวนแรกของอัตราส่วนนี้ว่า ค่าของ π



การคำนวณค่าของ π ในอดีต ใช้วิธีต่าง ๆ เช่น สร้างรูปเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแนบในวงกลมและล้อมรอบวงกลม แล้วหาความยาวรอบรูปเหลี่ยมทั้งสองรูป เพื่อเฉลี่ยเป็นค่าประมาณของความยาวของเส้นรอบวงของวงกลม จากนั้นหาอัตราส่วนของความยาวของเส้นรอบวงของวงกลมที่หามาได้ต่อความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลาง ค่าที่ได้จะเป็นค่าประมาณของ π

การคำนวณค่าของ π ด้วยวิธีนี้ ขึ้นอยู่กับจำนวนเหลี่ยมของรูปเหลี่ยม ยิ่งจำนวนเหลี่ยมของรูปเหลี่ยมมากขึ้น จะยิ่งได้ค่าที่ใกล้เคียงกับค่าของ π มากขึ้นตามไปด้วย


อาร์คิมีดีส

อาร์คิมีดีส (Archimedes : ประมาณ 287 – 212 ปี ก่อนคริสต์ศักราช) นักคณิตศาสตร์และนักวิทยาศาสตร์ชาวกรีก แสดงให้เห็นว่า π มีค่าระหว่าง $\frac{223}{71}$ และ $\frac{22}{7}$ ซู จุง จี (Tsu Ch'ung – chih : ประมาณ ค.ศ. 430 – 501) วิศวกรชาวจีน หาค่าโดยประมาณของ π ได้เป็น $\frac{355}{113}$ หรือประมาณ 3.1415929 และทอเลมี (Ptolemy : ประมาณ ค.ศ. 200) เป็นนักดาราศาสตร์ชาวกรีก ประมาณได้เป็น $\frac{377}{120}$ หรือ $3.141\dot{6}$

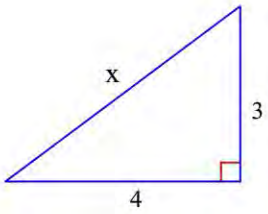
ในคริสต์ศตวรรษที่ 18 มีการใช้ตัวอักษรกรีกคือ π แทนอัตราส่วนดังกล่าว และมีการคำนวณหาค่าของ π ด้วยวิธีการที่หลากหลาย ทำให้ได้ค่าของ π ที่เป็นทศนิยมหลายตำแหน่งมากขึ้น เช่นใน ค.ศ. 1873 แชงค์ส (Shanks) นักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษ คำนวณค่าของ π ได้ทศนิยมถึง 707 ตำแหน่ง โดยใช้เวลาคำนวณมากกว่า 15 ปี ใน ค.ศ. 1949 เครื่องคอมพิวเตอร์สามารถคำนวณค่าของ π เป็นทศนิยมได้มากกว่า 2,000 ตำแหน่ง และเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ เช่น ค.ศ. 1961 ได้ 100,265 ตำแหน่ง ค.ศ. 1967 ได้ 500,000 ตำแหน่ง ใน ค.ศ. 1999 เครื่องซุปเปอร์คอมพิวเตอร์ที่มหาวิทยาลัยโตเกียวคำนวณได้ 206,158,430,000 ตำแหน่ง และในปัจจุบันได้ทศนิยมมากกว่าสองพันล้านตำแหน่ง ค่าของ π ที่แสดงด้วยทศนิยม 350 ตำแหน่งแรก เป็นดังนี้

3.1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510 5820974944
5923078164 0628620899 8628034825 3421170679 8214808651 3282306647
0938446095 5058223172 5359408128 4811174502 8410270193 8521105559
6446229489 5493038196 4428810975 6659334461 2847564823 3786783165
2712019091 4564856692 3460348610 4543266482 1339360726 0249141273
7245870066 0631558817 4881520920 9628292540 9171536436 ...

หมายเหตุ ถึงแม้ว่า $\pi = \dfrac{\text{ความยาวของเส้นรอบวงของวงกลม}}{\text{ความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม}}$ แต่นักคณิตศาสตร์สามารถพิสูจน์ได้ว่า ความยาวของเส้นรอบวงและความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมใดก็ตามจะไม่มีโอกาสเป็นจำนวนเต็มได้พร้อมกัน ดังนั้น π จึงไม่ใช่จำนวนตรรกยะ

2.3 รากที่สอง

นักเรียนเคยใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสหาความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก เมื่อทราบความยาวของด้านประกอบมุมฉากของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากมาแล้ว ดังนี้

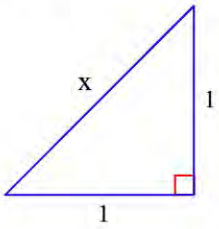


จากรูปจะได้ $x^2 = 3^2 + 4^2$

$= 25$

ดังนั้น $x = 5$

เมื่อความยาวแต่ละด้านของด้านประกอบมุมฉากของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเป็น 1 หน่วย อาจหาความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉากได้ดังนี้



จากรูปจะได้ $x^2 = 1^2 + 1^2$

$= 2$

เราใช้ $\sqrt{2}$ แทนจำนวนที่ยกกำลังสองแล้วได้ 2

ดังนั้น $x = \sqrt{2}$

เรียก $\sqrt{2}$ ว่ารากที่สองที่เป็นบวกของ 2

บทนิยาม ให้ a แทนจำนวนจริงบวกใด ๆ หรือศูนย์ รากที่สองของ a คือ จำนวนจริงที่ยกกำลังสองแล้วได้ a

สำหรับรากที่สองของจำนวนจริงลบจะยังไม่กล่าวถึง เนื่องจากไม่มีจำนวนจริงใดที่ยกกำลังสองแล้วได้จำนวนจริงลบ

ตัวอย่าง 7 เป็นรากที่สองของ 49 เนื่องจาก $7^2 = 49$

-7 เป็นรากที่สองของ 49 เนื่องจาก $(-7)^2 = 49$

13 เป็นรากที่สองของ 169 เนื่องจาก $13^2 = 169$

-13 เป็นรากที่สองของ 169 เนื่องจาก $(-13)^2 = 169$

ถ้า a เป็นจำนวนจริงบวก รากที่สองของ a มีสองราก คือ รากที่สองที่เป็นบวกซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ $\sqrt{a}$ และรากที่สองที่เป็นลบ ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ $-\sqrt{a}$

ถ้า a = 0 รากที่สองของ a คือ 0

จากบทนิยาม จะได้ $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ และ $\left(-\sqrt{a}\right)^2 = a$

$\sqrt{a}$ ซึ่งเป็นรากที่สองที่เป็นบวกของ a อาจเรียกอีกอย่างว่า กรณฑ์ที่สองของ a

ตัวอย่าง รากที่สองของ 36 มีสองราก เขียนแทนด้วย $\sqrt{36}$ และ $-\sqrt{36}$

$\sqrt{36} = 6$ และ $-\sqrt{36} = -6$

ดังนั้น รากที่สองของ 36 คือ 6 และ -6

ตัวอย่าง รากที่สองของ 0.01 มีสองราก เขียนแทนด้วย $\sqrt{0.01}$ และ $-\sqrt{0.01}$

$\sqrt{0.01} = 0.1$ และ $-\sqrt{0.01} = -0.1$

ดังนั้น รากที่สองของ 0.01 คือ 0.1 และ -0.1

ตัวอย่าง รากที่สองของ 15 มีสองราก เขียนแทนด้วย $\sqrt{15}$ และ $-\sqrt{15}$

เนื่องจาก ไม่มีจำนวนเต็มใดที่ยกกำลังสองแล้วเท่ากับ 15

ดังนั้น จึงเขียน $\sqrt{15}$ และ $-\sqrt{15}$ แทนรากที่สองของ 15

$\sqrt{15}$ และ $-\sqrt{15}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

ตัวอย่าง รากที่สองของ $\frac{2}{3}$ มีสองราก เขียนแทนด้วย $\sqrt{\frac{2}{3}}$ และ $-\sqrt{\frac{2}{3}}$

เนื่องจาก ไม่มีจำนวนตรรกยะใดที่ยกกำลังสองแล้วเท่ากับ $\frac{2}{3}$

ดังนั้น จึงเขียน $\sqrt{\frac{2}{3}}$ และ $-\sqrt{\frac{2}{3}}$ แทนรากที่สองของ $\frac{2}{3}$

$\sqrt{\frac{2}{3}}$ และ $-\sqrt{\frac{2}{3}}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

นักเรียนจะเห็นได้ว่า รากที่สองของจำนวนตรรกยะบวกตามตัวอย่างที่ยกมาทั้งหมด เป็นจำนวนตรรกยะหรือจำนวนอตรรกยะ

การพิจารณาว่ารากที่สองของจำนวนตรรกยะบวกเป็นจำนวนตรรกยะหรือจำนวนอตรรกยะ ทำได้ดังนี้

สำหรับจำนวนเต็มบวก พิจารณาดังนี้

1. ถ้าสามารถหาจำนวนเต็มจำนวนหนึ่งที่ยกกำลังสอง แล้วเท่ากับจำนวนเต็มบวกที่กำหนดให้ รากที่สองของจำนวนนั้นจะเป็นจำนวนตรรกยะที่เป็นจำนวนเต็ม

2. ถ้าไม่สามารถหาจำนวนเต็มที่ยกกำลังสอง แล้วเท่ากับจำนวนเต็มบวกที่กำหนดให้ รากที่สองของจำนวนนั้นจะเป็นจำนวนอตรรกยะ

ตัวอย่างการหารากที่สองของจำนวนเต็มบวก

1) หารากที่สองของ 16

เนื่องจากมี 4 และ -4 เป็นจำนวนเต็มที่ยกกำลังสองแล้วเท่ากับ 16

ดังนั้น รากที่สองของ 16 เป็นจำนวนเต็ม ได้แก่ 4 และ -4

2) หารากที่สองของ 24

เนื่องจากไม่มีจำนวนเต็มใดที่ยกกำลังสองแล้วเท่ากับ 24

ดังนั้น รากที่สองของ 24 เป็นจำนวนอตรรกยะ ได้แก่ $\sqrt{24}$ และ $-\sqrt{24}$

สำหรับจำนวนตรรกยะบวกอื่น ๆ ที่ไม่ใช่จำนวนเต็ม พิจารณาดังนี้

ถ้าสามารถหาจำนวนตรรกยะที่ยกกำลังสอง แล้วเท่ากับจำนวนตรรกยะบวกที่กำหนดให้ รากที่สองของจำนวนนั้นจะเป็นจำนวนตรรกยะ แต่ถ้าไม่สามารถหาจำนวนตรรกยะที่ยกกำลังสอง แล้วเท่ากับจำนวนตรรกยะบวกที่กำหนดให้ รากที่สองของจำนวนนั้นจะเป็นจำนวนอตรรกยะ

ตัวอย่างการหารากที่สองของจำนวนตรรกยะบวก

1) หารากที่สองของ $\frac{1}{4}$
เนื่องจากมี $\frac{1}{2}$ และ $-\frac{1}{2}$ เป็นจำนวนตรรกยะที่ยกกำลังสองแล้วเท่ากับ $\frac{1}{4}$
ดังนั้น รากที่สองของ $\frac{1}{4}$ เป็นจำนวนตรรกยะ ได้แก่ $\frac{1}{2}$ และ $-\frac{1}{2}$

2) หารากที่สองของ 0.07
เนื่องจากไม่มีทศนิยมซ้ำใดที่ยกกำลังสองแล้วเท่ากับ 0.07
ดังนั้น รากที่สองของ 0.07 เป็นจำนวนอตรรกยะ ได้แก่ $\sqrt{0.07}$ และ $-\sqrt{0.07}$

โดยทั่วไป ถ้ารากที่สองของจำนวนจริงบวกเป็นจำนวนตรรกยะ เราจะไม่นิยมเขียนรากที่สองนั้นโดยใช้เครื่องหมาย $\sqrt{}$ เช่น ไม่นิยมเขียน $\sqrt{64}$ และ $-\sqrt{64}$ แทนรากที่สองของ 64 แต่จะนิยมเขียนในรูปผลสำเร็จคือใช้จำนวนตรรกยะ 8 และ -8 แทนรากที่สองของ 64

ทำได้หรือไม่

ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

1. จำนวนต่อไปนี้ เป็นรากที่สองของจำนวนใด

   0, 1, -3, 4, $\frac{1}{3}$, 0.2, $\sqrt{6}$, $-\sqrt{\frac{2}{5}}$

2. จำนวนใดบ้าง เป็นรากที่สองของแต่ละจำนวนต่อไปนี้

   1, 9, 25, $\frac{4}{49}$, 0.0016, 1.21, 8

ตัวอย่างที่ 1 จงหารากที่สองของ 81

วิธีทำ รากที่สองของ 81 เขียนแทนด้วย $\sqrt{81}$ และ $-\sqrt{81}$

เนื่องจาก $\sqrt{81} = \sqrt{9^2}$

$= 9$

และ $-\sqrt{81} = -\sqrt{9^2}$

$= -9$

ดังนั้น รากที่สองของ 81 คือ 9 และ -9

ตอบ 9 และ -9

ตัวอย่างที่ 2 จงหารากที่สองของ $\frac{19}{27}$

วิธีทำ รากที่สองของ $\frac{19}{27}$ เขียนแทนด้วย $\sqrt{\frac{19}{27}}$ และ $-\sqrt{\frac{19}{27}}$

เนื่องจาก ไม่มีจำนวนตรรกยะใดที่ยกกำลังสองแล้วเท่ากับ $\frac{19}{27}$

ดังนั้น รากที่สองของ $\frac{19}{27}$ คือ $\sqrt{\frac{19}{27}}$ และ $-\sqrt{\frac{19}{27}}$

ตอบ $\sqrt{\frac{19}{27}}$ และ $-\sqrt{\frac{19}{27}}$

ตัวอย่างที่ 3 จงหารากที่สองของ 0.15

วิธีทำ รากที่สองของ 0.15 เขียนแทนด้วย $\sqrt{0.15}$ และ $-\sqrt{0.15}$

เนื่องจาก ไม่มีทศนิยมใดที่ยกกำลังสองแล้วเท่ากับ 0.15

ดังนั้น รากที่สองของ 0.15 คือ $\sqrt{0.15}$ และ $-\sqrt{0.15}$

ตอบ $\sqrt{0.15}$ และ $-\sqrt{0.15}$

ตัวอย่างที่ 4 จงหา $-\sqrt{49}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sqrt{49} = \sqrt{7^2}$

$= 7$

ดังนั้น $-\sqrt{49} = -7$

ตอบ -7

ตัวอย่างที่ 5 จงหา $\sqrt{(-11)^2}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sqrt{(-11)^2} = \sqrt{121}$

$= \sqrt{11^2}$

$= 11$

ดังนั้น $\sqrt{(-11)^2} = 11$

ตอบ 11

ตัวอย่างที่ 6 จงหา $-\sqrt{(-13)^2}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sqrt{(-13)^2} = \sqrt{13^2}$

$= 13$

ดังนั้น $-\sqrt{(-13)^2} = -13$

ตอบ -13

ตัวอย่างที่ 7 จงหา $\sqrt{0.0016}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sqrt{0.0016} = \sqrt{(0.04)^2}$

$= 0.04$

ดังนั้น $\sqrt{0.0016} = 0.04$

ตอบ 0.04

ตัวอย่างที่ 8 จงหา $-\sqrt{0.0225}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sqrt{0.0225} = \sqrt{(0.15)^2}$

$= 0.15$

ดังนั้น $-\sqrt{0.0225} = -0.15$

ตอบ -0.15

ตัวอย่างที่ 9 จงหา $\sqrt{\frac{4}{9}}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sqrt{\frac{4}{9}} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2}$

$= \frac{2}{3}$

ดังนั้น $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$

ตอบ $\frac{2}{3}$

ตัวอย่างที่ 10 จงหา $-\sqrt{\frac{25}{196}}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sqrt{\frac{25}{196}} = \sqrt{\left(\frac{5}{14}\right)^2}$

$= \frac{5}{14}$

ดังนั้น $-\sqrt{\frac{25}{196}} = -\frac{5}{14}$

ตอบ $-\frac{5}{14}$

แบบฝึกหัด 2.3 ก

1. จงหารากที่สองของจำนวนต่อไปนี้

1) 196	2) 729
3) 1,296	4) 110
5) 115	6) $\frac{9}{49}$
7) $\frac{25}{121}$	8) $\frac{15}{207}$
9) 0.0064	10) 0.000144
11) 0.0116	12) 0.40

2. จงหาค่าของจำนวนต่อไปนี้

1) $\sqrt{625}$ 2) $-\sqrt{2601}$

3) $\sqrt{12.96}$ 4) $-\sqrt{0.0036}$

5) $-\sqrt{\frac{81}{625}}$ 6) $\sqrt{(19)^2}$

7) $\sqrt{\left(-\frac{12}{17}\right)^2}$ 8) $-\sqrt{(-0.037)^2}$

3. จงหาคำตอบของสมการต่อไปนี้

1) $x^2 = 36$ 2) $x^2 = 0.0081$

3) $x^2 = 0$ 4) $\sqrt{x} = 9$

5) $\sqrt{x} = 0.25$ 6) $\sqrt{x} = \frac{2}{3}$

การหารากที่สอง

การหารากที่สองของจำนวนจริงทำได้หลายวิธี สำหรับวิธีการคำนวณ นักเรียนจะได้เรียนในระดับชั้นที่สูงกว่านี้ สำหรับในชั้นนี้ นักเรียนอาจใช้การแยกตัวประกอบ การประมาณ การเปิดตาราง และการใช้เครื่องคำนวณ ดังจะได้กล่าวต่อไปนี้

การหารากที่สองโดยการแยกตัวประกอบ

การหารากที่สองโดยการแยกตัวประกอบเป็นสิ่งที่ทำได้ง่าย โดยเฉพาะอย่างยิ่ง การหารากที่สองของจำนวนเต็มบวกที่สามารถแยกตัวประกอบได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 11 จงหารากที่สองของ 400

วิธีทำ เนื่องจาก $400 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5$

$= (2 \times 2 \times 5)^2$

$= 20^2$

และ $400 = (-20)^2$

ดังนั้น รากที่สองของ 400 คือ 20 และ -20

ตอบ 20 และ -20

ตัวอย่างที่ 12 จงหา $\sqrt{1,089}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sqrt{1,089} = \sqrt{3\times3\times11\times11}$

$= \sqrt{(3\times11)^2}$

$= 3\times11$

$= 33$

ดังนั้น $\sqrt{1,089} = 33$

ตอบ 33

ตัวอย่างที่ 13 จงหา $-\sqrt{1,764}$

วิธีทำ เนื่องจาก $-\sqrt{1,764} = -\sqrt{2\times2\times3\times3\times7\times7}$

$= -\sqrt{(2\times3\times7)^2}$

$= -(2\times3\times7)$

$= -42$

ดังนั้น $-\sqrt{1,764} = -42$

ตอบ -42

การหารากที่สองโดยการประมาณ การเปิดตารางและการใช้เครื่องคำนวณ

นักเรียนเคยทราบมาแล้วว่า ในการหารากที่สองของจำนวนเต็มบวก เมื่อรากที่สองของจำนวนเต็มบวกนั้น ไม่เป็นจำนวนเต็ม ค่าที่ได้จะเป็นจำนวนอตรรกยะ แต่เพื่อความสะดวกในการนำไปใช้ จึงต้องหาค่าประมาณของจำนวนอตรรกยะนั้น

ในกรณีที่จำนวนที่ต้องการหารากที่สองใกล้เคียงกับจำนวนที่สามารถหารากที่สองได้โดยง่าย ก็จะประมาณรากที่สองของจำนวนนั้นด้วยรากที่สองของจำนวนที่ใกล้เคียง เช่น

15 ใกล้เคียงกับ 16 และ $\sqrt{16} = 4$ ดังนั้น $\sqrt{15} \approx 4$

10 ใกล้เคียงกับ 9 และ $\sqrt{9} = 3$ ดังนั้น $\sqrt{10} \approx 3$

165 ใกล้เคียงกับ 169 และ $\sqrt{169} = 13$ ดังนั้น $\sqrt{165} \approx 13$

การประมาณข้างต้น เป็นการประมาณรากที่สองที่เป็นจำนวนอตรรกยะด้วยจำนวนเต็ม ถ้าต้องการประมาณเป็นทศนิยม นักเรียนจะได้แนวคิดจากการทำกิจกรรมต่อไปนี้

ค่าประมาณของรากที่สอง

พิจารณาการหารากที่สองของจำนวนเต็มจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง การหาค่าประมาณของ $\sqrt{13}$ ทำได้ดังนี้

1. $\sqrt{13}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ ซึ่งอยู่ระหว่างจำนวนเต็มบวกสองจำนวนคือ 3 และ 4 แสดงได้ดังนี้

$\sqrt{n}$	3	$\sqrt{13}$	4
n	9	13	16

2. จากตาราง 13 มีค่าใกล้เคียง 9 และ 16 พอ ๆ กัน แต่ใกล้ 16 มากกว่าเล็กน้อย จึงประมาณ $\sqrt{13}$ เป็นทศนิยมหนึ่งตำแหน่ง โดยเริ่มจาก 3.5 แสดงได้ดังนี้

$\sqrt{n}$	3.5	3.6	$\sqrt{13}$	3.7
n	12.25	12.96	13.00	13.69

3. จากตาราง 13 มีค่าใกล้เคียง 12.96 มากกว่า 13.69 จึงประมาณ $\sqrt{13}$ เป็นทศนิยมสองตำแหน่ง โดยเริ่มจาก 3.60 แสดงได้ดังนี้

$\sqrt{n}$	3.60	$\sqrt{13}$	3.61
n	12.9600	13.0000	13.0321

4. จากตาราง 13 มีค่าใกล้เคียง 12.9600 และ 13.0321 พอ ๆ กัน แต่ใกล้ 13.0321 มากกว่าเล็กน้อย จึงประมาณ $\sqrt{13}$ เป็นทศนิยมสามตำแหน่ง โดยเริ่มจาก 3.605 แสดงได้ดังนี้

$\sqrt{n}$	3.605	$\sqrt{13}$	3.606
n	12.996025	13.000000	13.003236

5. จากตาราง 13 มีค่าใกล้เคียง 13.003236 มากกว่า 12.996025 จึงได้ค่าประมาณของ $\sqrt{13}$ เป็น 3.606

ดังนั้น ค่าประมาณของ $\sqrt{13}$ เป็นทศนิยมสองตำแหน่ง คือ 3.61

ให้นักเรียนใช้วิธีการตามตัวอย่างข้างต้นหาค่าประมาณของจำนวนต่อไปนี้

1. จงหาค่าประมาณเป็นจำนวนเต็ม
   1) $\sqrt{10}$ 2) $\sqrt{24}$
   3) $\sqrt{120}$ 4) $-\sqrt{226}$
2. จงหาค่าประมาณเป็นทศนิยมสองตำแหน่ง
   1) $\sqrt{7}$ 2) $\sqrt{20}$
   3) $\sqrt{31}$ 4) $\sqrt{53}$

จากกิจกรรมข้างต้น นักเรียนจะเห็นว่าการประมาณรากที่สองของจำนวนเต็มบวกมีหลายขั้นตอน ซึ่งอาจต้องใช้เวลามาก วิธีหารากที่สองของจำนวนเต็มบวกที่สะดวกและรวดเร็วกว่าวิธีการประมาณคือการเปิดตาราง

ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้

ดูตารางรากที่สอง

ตัวอย่างตารางแสดงรากที่สองที่เป็นบวกของจำนวนเต็มบวกมีดังนี้ (ดูตารางท้ายเล่ม)

n	n^2	$\sqrt{n}$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
15	225	3.873
16	256	4.000
17	289	4.123
18	324	4.243
.	.	.
.	.	.
.	.	.

ตามตาราง เมื่อ $\sqrt{n}$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม ค่าที่แสดงไว้ในช่อง $\sqrt{n}$ จะเป็นค่าประมาณของจำนวนอตรรกยะ

1. จากตารางข้างต้นให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้
   1) หาค่าของ $\sqrt{16}$
   2) หาค่าประมาณของ $\sqrt{18}$
   3) หาค่า n เมื่อ $\sqrt{n} \approx 4.123$
   4) หาค่า n เมื่อ $n^2 = 324$

2. จากตารางท้ายเล่ม ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

1) หาค่าประมาณของ $\sqrt{20}$

2) หาค่า n เมื่อ $n^2 = 1,521$

3) หาค่า n เมื่อ $\sqrt{n} \approx 8.718$

4) หาค่า $\sqrt{n}$ เมื่อ $n = 5,041$

5) หาค่าประมาณของ $\sqrt{n}$ เมื่อ $n^2 = 676$

6) หาค่าของ $\sqrt{961}$

ถึงแม้ว่าการหารากที่สองโดยการเปิดตารางจะทำได้ง่าย ก็ยังมีข้อจำกัดที่ไม่สามารถใช้ในการหารากที่สองของจำนวนจริงบวกได้ทุกจำนวน และไม่สามารถหาเป็นทศนิยมหลายตำแหน่งได้ตามต้องการ วิธีหารากที่สองที่สามารถใช้ได้กับทุกจำนวนจริงบวกและสามารถหาเป็นทศนิยมได้หลายตำแหน่งและสะดวกกว่าการเปิดตาราง คือ การใช้เครื่องคำนวณหรือเครื่องคิดเลข

การหารากที่สองโดยใช้เครื่องคำนวณหรือเครื่องคิดเลข เป็นวิธีที่สะดวกและรวดเร็วมาก แต่เครื่องคำนวณที่ใช้กันอยู่ในปัจจุบันมีหลากหลายชนิด และแต่ละชนิดก็อาจมีวิธีใช้แตกต่างกัน การจะใช้เครื่องคำนวณชนิดใดจึงต้องศึกษาคู่มือการใช้งานของเครื่องนั้น ๆ

เราใช้ความรู้เกี่ยวกับรากที่สองในการหาความยาวของด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรัศมีของวงกลม เมื่อทราบพื้นที่หรือความยาวรอบรูป ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 14 ห้องนั่งเล่นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีพื้นที่ใช้สอยขนาด 37 ตารางเมตร ห้องนั่งเล่นกว้างประมาณกี่เมตร (ตอบเป็นทศนิยมหนึ่งตำแหน่ง)

วิธีทำ เนื่องจาก $6^2 = 36$ และ $7^2 = 49$

จะได้ว่าห้องนั่งเล่นต้องกว้างมากกว่า 6 เมตร เล็กน้อย

และเนื่องจาก $(6.1)^2 = 37.21$ และ $(6.2)^2 = 38.44$

จะได้ $(6.1)^2$ มีค่าใกล้เคียง 37 มากกว่า

ดังนั้น ห้องนั่งเล่นกว้างประมาณ 6.1 เมตร

ตอบ ประมาณ 6.1 เมตร

ตัวอย่างที่ 15 พ่อต้องการแบ่งลานดินบริเวณหลังบ้านทำบ่อปลา คอกหมู และเล้าไก่ เมื่อคำนวณแล้ว พ่อจะเหลือพื้นที่สำหรับเล้าไก่ 38.5 ตารางฟุต พ่อให้นุชช่วยคิดว่าถ้าต้องการล้อมบริเวณเล้าไก่ด้วยแผงไม้ไผ่เป็นวงกลม จะต้องใช้แผงไม้ไผ่ยาวอย่างน้อยกี่ฟุต (กำหนดให้ π เท่ากับ $\frac{22}{7}$)

วิธีทำ เนื่องจาก พื้นที่ของรูปวงกลมเท่ากับ πr^2 เมื่อ r แทนรัศมี

เล้าไก่มีพื้นที่ 38.5 ตารางฟุต

จะได้ $\pi r^2 = 38.5$

$\frac{22}{7} \times r^2 = 38.5$

$r^2 = 38.5 \times \frac{7}{22}$

$= 12.25$

$r = \sqrt{12.25}$

$= 3.5$

จะได้เล้าไก่เป็นรูปวงกลมที่มีรัศมี 3.5 ฟุต

และเนื่องจากความยาวของเส้นรอบวงของวงกลมเท่ากับ $2\pi r$ เมื่อ r แทนรัศมีของวงกลม

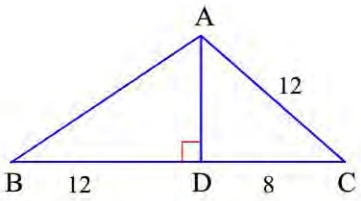
จะได้ $2\pi r = 2 \times \frac{22}{7} \times 3.5$

$= 22$

ดังนั้น จะต้องใช้แผงไม้ไผ่ยาวอย่างน้อย 22 ฟุต

ตอบ 22 ฟุต

ตัวอย่างที่ 16



จากรูป Δ ABC มี $\overline{AD}$ ตั้งฉากกับ $\overline{BC}$ ให้
AC = BD = 12 หน่วย และ CD = 8 หน่วย
จงหาความยาวของ $\overline{AB}$ (ตอบเป็นจำนวนเต็มหน่วย)

วิธีทำ เนื่องจาก Δ ACD เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
AC = 12 หน่วย และ CD = 8 หน่วย

จะได้ $AD^2 = AC^2 - CD^2$

$AD^2 = 12^2 - 8^2$

$= 144 - 64$

$= 80$

เนื่องจาก Δ ABD เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
มี BD = 12 หน่วย

จะได้ $AB^2 = AD^2 + BD^2$

$= 80 + 12^2$

$= 80 + 144$

$= 224$

ดังนั้น $AB = \sqrt{224}$

หรือ $AB \approx 15$ หน่วย

ตอบ ประมาณ 15 หน่วย

เป็นจริงหรือไม่

จงพิจารณาว่าประโยคในแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นจริงหรือไม่ เพราะเหตุใด

1. รากที่สองของ 25 คือ 5 เท่านั้น
2. $\sqrt{25}$ เท่ากับ 5 และ -5
3. $\sqrt{-16} = -4$
4. $\sqrt{\frac{1}{4}} < \frac{1}{4}$
5. $\sqrt{0.01} > 0.01$
6. $\sqrt{0.04} > \sqrt{0.0004}$
7. $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}$
8. $\sqrt{7^2} > \sqrt{(-7)^2}$
9. $\sqrt{-2^2} = 2$
10. ถ้า $x^2 = 4$ แล้ว x เท่ากับ 16
11. ถ้า $\sqrt{x} = 3$ แล้ว x เท่ากับ 9
12. รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีพื้นที่เป็นจำนวนคี่ จะมีความยาวของแต่ละด้านเป็นจำนวนคี่

คิดไม่ยาก

กำหนดสมการให้ดังนี้

$x^2 = 7,569$

$y^3 = -79,507$

จงหาค่าของ $\sqrt{(xy)^2}$

แบบฝึกหัด 2.3 ข

1. จงหารากที่สองของจำนวนต่อไปนี้โดยการแยกตัวประกอบ

   1) 2,601 2) 3,025

   3) 4,225 4) 4,900

   5) 6,084 6) 8,100

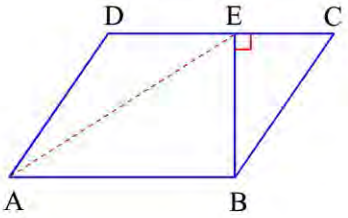
แบบฝึกหัดต่อไปนี้ ให้นักเรียนใช้วิธีการใดก็ได้ในการหาคำตอบ

2. จงหาค่าประมาณเป็นจำนวนเต็มของ $\sqrt{65}$ และ $\sqrt{82}$
3. จงหาค่าประมาณของ $\sqrt{250}$ เป็นทศนิยมหนึ่งตำแหน่ง
4. จงหาค่าประมาณของจำนวนต่อไปนี้เป็นทศนิยมสองตำแหน่ง

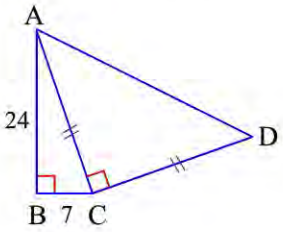
   1) $\sqrt{768}$ 2) $-\sqrt{9583}$

   3) $\sqrt{8.25}$ 4) $-\sqrt{3717.12}$

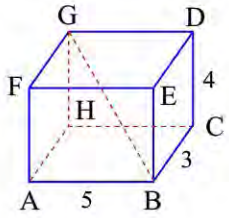
5. รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปหนึ่งยาว 8 เซนติเมตร มีเส้นทแยงมุมยาว 9 เซนติเมตร จงหาว่ารูปนี้กว้างกี่เซนติเมตร (ตอบเป็นทศนิยมสองตำแหน่ง)

6. 

   ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน มีฐานยาว 15 เซนติเมตร พื้นที่ 150 ตารางเซนติเมตร และ $\overline{BE}$ เป็นส่วนสูง จงหาว่า $\overline{AE}$ ยาวประมาณกี่เซนติเมตร (ตอบเป็นจำนวนเต็มหน่วย)

7. 

   จากรูป กำหนดให้ $A\hat{B}C = A\hat{C}D = 90^{\circ}$ มี AB = 24 หน่วย BC = 7 หน่วย และ AC = CD จงหาความยาวของ $\overline{AD}$ (ตอบเป็นทศนิยมสองตำแหน่ง)

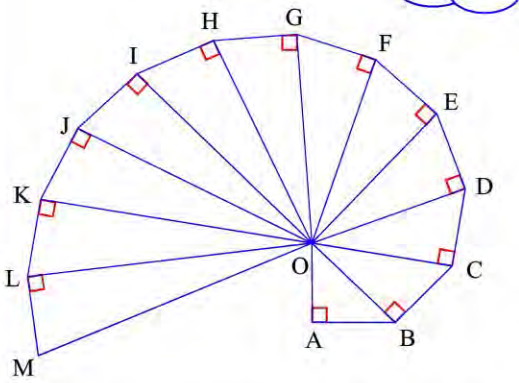
8. 

กำหนดให้ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก ABCDEFGH มี AB = 5 หน่วย BC = 3 หน่วย และ CD = 4 หน่วย จงหาความยาวของ $\overline{BG}$ (ตอบเป็นทศนิยมสองตำแหน่ง)

9. ห้องนอนของต้อยเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส มีพื้นที่ใช้สอย 18 ตารางเมตร ถ้าต้อยจะจัดโต๊ะทำงานให้ชิดผนังห้องด้านหนึ่งโดยให้โต๊ะอยู่กึ่งกลางผนังพอดี ต้อยจะหาจุดกึ่งกลางของความยาวของห้องได้อย่างไรและจุดกึ่งกลางนั้นอยู่ห่างจากมุมห้องประมาณกี่เมตร(ตอบเป็นทศนิยมสองตำแหน่ง)

10. รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปวงกลมมีพื้นที่ 154 ตารางเซนติเมตร เท่ากัน จะสามารถนำรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสแนบในวงกลม หรือนำรูปวงกลมแนบในสี่เหลี่ยมจัตุรัสได้หรือไม่ เพราะเหตุใด (กำหนดให้ π เท่ากับ $\frac{22}{7}$)

คิดได้ไหม



จากรูป รูปสามเหลี่ยมแต่ละรูปเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ที่มี OA = AB = BC = CD = DE = EF = FG = GH = HI = IJ = JK = KL = LM

1. ถ้า OA = 1 หน่วย แล้ว $\overline{OC}$ ยาวเท่าใด
2. ถ้า OA = 1 หน่วย แล้วส่วนของเส้นตรงใดยาว $\sqrt{10}$ หน่วย
3. ถ้า OA = 2 หน่วย แล้ว $\overline{OE}$ ยาวเท่าใด

2.4 รากที่สาม

นักเรียนได้ทราบมาแล้วว่า การหารากที่สองของศูนย์และจำนวนจริงบวกใด ๆ คือการหาจำนวนจริงที่ยกกำลังสองแล้วได้จำนวนจริงนั้น ในทำนองเดียวกัน การหารากที่สามของจำนวนจริงใด ๆ ก็คือการหาจำนวนจริงที่ยกกำลังสามแล้วได้จำนวนจริงนั้น เช่น การหารากที่สามของ 8 ทำได้โดยการหาจำนวนจริงที่ยกกำลังสามแล้วได้ 8 ซึ่งจำนวนนั้นคือ 2 จึงได้ว่า 2 เป็นรากที่สามของ 8

บทนิยาม ให้ a แทนจำนวนจริงใด ๆ รากที่สามของ a คือ จำนวนจริงที่ยกกำลังสามแล้วได้ a เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\sqrt[3]{a}$

สัญลักษณ์ $\sqrt[3]{a}$ อ่านว่ารากที่สามของ a

จากบทนิยามจะได้ $(\sqrt[3]{a})^3 = a$

เราหารากที่สามของจำนวนจริงใด ๆ โดยใช้บทนิยามได้ดังนี้

ตัวอย่าง เนื่องจาก $3^3 = 27$

ดังนั้น รากที่สามของ 27 คือ 3 หรือ $\sqrt[3]{27} = 3$

ตัวอย่าง เนื่องจาก $(-5)^3 = -125$

ดังนั้น รากที่สามของ -125 คือ -5 หรือ $\sqrt[3]{-125} = -5$

ตัวอย่าง เนื่องจาก $(0.1)^3 = 0.001$

ดังนั้น รากที่สามของ 0.001 คือ 0.1 หรือ $\sqrt[3]{0.001} = 0.1$

ตัวอย่าง เนื่องจาก ไม่มีจำนวนเต็มใดที่ยกกำลังสามแล้วเท่ากับ 10

ดังนั้น จึงเขียน $\sqrt[3]{10}$ แทนรากที่สามของ 10

$\sqrt[3]{10}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

นักเรียนจะเห็นได้ว่า รากที่สามของจำนวนตรรกยะตามตัวอย่างที่ยกมาทั้งหมด เป็นจำนวนตรรกยะหรือจำนวนอตรรกยะ

สำหรับจำนวนเต็ม พิจารณาดังนี้

1. *ถ้าสามารถหาจำนวนเต็มจำนวนหนึ่งที่ยกกำลังสาม แล้วเท่ากับจำนวนเต็มที่กำหนดให้ รากที่สามของจำนวนนั้นจะเป็นจำนวนตรรกยะที่เป็นจำนวนเต็ม*
2. *ถ้าไม่สามารถหาจำนวนเต็มที่ยกกำลังสาม แล้วเท่ากับจำนวนเต็มที่กำหนดให้ รากที่สามของจำนวนนั้นจะเป็นจำนวนอตรรกยะ*

สำหรับจำนวนตรรกยะอื่น ๆ ที่ไม่ใช่จำนวนเต็ม พิจารณาดังนี้

ถ้าสามารถหาจำนวนตรรกยะที่ยกกำลังสาม แล้วเท่ากับจำนวนตรรกยะที่กำหนดให้ รากที่สามของจำนวนนั้นจะเป็นจำนวนตรรกยะ แต่ถ้าไม่สามารถหาจำนวนตรรกยะที่ยกกำลังสาม แล้วเท่ากับจำนวนตรรกยะที่กำหนดให้ รากที่สามของจำนวนนั้นจะเป็นจำนวนอตรรกยะ

โดยทั่วไป ถ้ารากที่สามของจำนวนจริงเป็นจำนวนตรรกยะ เราจะไม่นิยมเขียนรากที่สามโดยใช้เครื่องหมาย $\sqrt[3]{\ }$ เช่น ไม่นิยมเขียน $\sqrt[3]{8}$ แทนรากที่สามของ 8 แต่จะนิยมเขียนในรูปผลสำเร็จคือใช้จำนวนตรรกยะ 2 แทนรากที่สามของ 8

ตัวอย่างที่ 1 จงหา $\sqrt[3]{-729}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sqrt[3]{-729} = \sqrt[3]{(-9)\times(-9)\times(-9)}$

$= \sqrt[3]{(-9)^3}$

$= -9$

ดังนั้น $\sqrt[3]{-729} = -9$

ตอบ -9

ตัวอย่างที่ 2 จงหา $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \sqrt[3]{\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}}$

$= \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^3}$

$= \frac{2}{3}$

ดังนั้น $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$

ตอบ $\frac{2}{3}$

ตัวอย่างที่ 3 จงหา $\sqrt[3]{0.008}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sqrt[3]{0.008} = \sqrt[3]{(0.2)^3}$

$= 0.2$

ดังนั้น $\sqrt[3]{0.008} = 0.2$

ตอบ 0.2

ตัวอย่างที่ 4 จงหา $\sqrt[3]{18}$

วิธีทำ เนื่องจาก ไม่มีจำนวนเต็มใดที่ยกกำลังสามแล้วเท่ากับ 18

ดังนั้น $\sqrt[3]{18}$ เป็นรากที่สามของ 18

ตัวอย่างที่ 5 จงหา $\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$

วิธีทำ เนื่องจาก ไม่มีจำนวนตรรกยะใดที่ยกกำลังสามแล้วเท่ากับ $\frac{4}{9}$

ดังนั้น $\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$ เป็นรากที่สามของ $\frac{4}{9}$

เราควรจำไว้

รากที่สามของจำนวนจริงใด ๆ มีเพียงรากเดียว เช่น รากที่สามของ 8 คือ 2 รากที่สามของ -8 คือ -2 ในขณะที่รากที่สองของจำนวนจริงบวกใด ๆ มีสองราก เช่น รากที่สองของ 9 คือ 3 และ -3

แบบฝึกหัด 2.4 ก

1. จงหารากที่สามของจำนวนต่อไปนี้

   1) 27
   2) 40
   3) 512
   4) 650
   5) $-\frac{27}{64}$
   6) $\frac{216}{729}$
   7) $\frac{18}{50}$
   8) 0.008
   9) 0.05
   10) 0.000729

2. จงหาค่าของจำนวนต่อไปนี้

   1) $\sqrt[3]{125}$
   2) $\sqrt[3]{343}$
   3) $-\sqrt[3]{-8}$
   4) $\sqrt[3]{\frac{64}{125}}$
   5) $-\sqrt[3]{\frac{27}{512}}$
   6) $\sqrt[3]{-0.008}$
   7) $-\sqrt[3]{0.216}$
   8) $\sqrt[3]{0.000027}$

3. จงหาคำตอบของสมการต่อไปนี้

   1) $x^3 = 216$
   2) $x^3 = 350$
   3) $x^3 = 0.027$
   4) $x^3 = -0.49$
   5) $x^3 = 0$
   6) $\sqrt[3]{x} = -7$
   7) $\sqrt[3]{x} = \frac{2}{5}$
   8) $\sqrt[3]{x} = 1.3$

การหารากที่สาม

การหารากที่สามของจำนวนจริงใด ๆ ทำได้หลายวิธีเช่นเดียวกับการหารากที่สอง อาจใช้การแยกตัวประกอบ การประมาณ การเปิดตาราง และการใช้เครื่องคำนวณ แต่เนื่องจากการประมาณเป็นวิธีที่ยุ่งยาก ในที่นี้จึงจะกล่าวเฉพาะการหารากที่สามโดยการแยกตัวประกอบ การเปิดตาราง และการใช้เครื่องคำนวณ

การหารากที่สามโดยการแยกตัวประกอบ

การหารากที่สามของจำนวนจริงใด ๆ อาจทำได้โดยการแยกตัวประกอบ เพื่อเขียนให้อยู่ในรูปกำลังสาม แล้วหารากที่สาม ดังนี้

ตัวอย่างที่ 4 จงหา $\sqrt[3]{343}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sqrt[3]{343} = \sqrt[3]{7\times7\times7}$

$= \sqrt[3]{7^3}$

$= 7$

ดังนั้น $\sqrt[3]{343} = 7$

ตอบ 7

ตัวอย่างที่ 5 จงหา $\sqrt[3]{-3,375}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sqrt[3]{-3,375} = \sqrt[3]{(-3)\times(-3)\times(-3)\times5\times5\times5}$

$= \sqrt[3]{(-3\times5)^3}$

$= \sqrt[3]{(-15)^3}$

$= -15$

ดังนั้น $\sqrt[3]{-3,375} = -15$

ตอบ -15

ตัวอย่างที่ 6 จงหา $\sqrt[3]{\frac{216}{42,875}}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sqrt[3]{\frac{216}{42,875}} = \sqrt[3]{\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{7}\times\frac{3}{7}\times\frac{3}{7}}$

$= \sqrt[3]{\left(\frac{2}{5}\times\frac{3}{7}\right)^3}$

$= \frac{2}{5}\times\frac{3}{7}$

$= \frac{6}{35}$

ดังนั้น $\sqrt[3]{\frac{216}{42,875}} = \frac{6}{35}$

ตอบ $\frac{6}{35}$

ตัวอย่างที่ 7 จงหา $\sqrt[3]{-0.000729}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sqrt[3]{-0.000729} = \sqrt[3]{(-0.09) \times (-0.09) \times (-0.09)}$

$= \sqrt[3]{(-0.09)^3}$

$= -0.09$

ดังนั้น $\sqrt[3]{-0.000729} = -0.09$

ตอบ -0.09

การหารากที่สามโดยการเปิดตารางและการใช้เครื่องคำนวณ

วิธีหนึ่งในการหารากที่สามของจำนวนเต็มที่สะดวกและรวดเร็วคือการเปิดตาราง

ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้

ดูตารางรากที่สาม

ตัวอย่างตารางแสดงรากที่สามของจำนวนเต็มบวกมีดังนี้ (ดูตารางท้ายเล่ม)

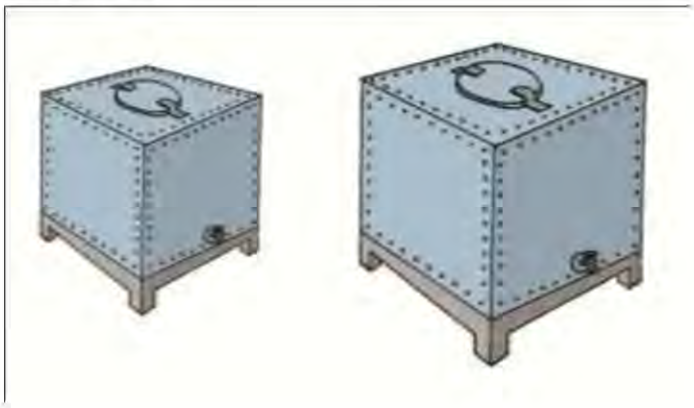
n	n^3	$\sqrt[3]{n}$
⋮	⋮	⋮
18	5832	2.621
19	6859	2.668
20	8000	2.714
21	9261	2.759
22	10648	2.802
⋮	⋮	⋮

ตามตาราง เมื่อ $\sqrt[3]{n}$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม ค่าที่แสดงไว้ในช่อง $\sqrt[3]{n}$ จะเป็นค่าประมาณของจำนวนอตรรกยะ

1. จากตารางข้างต้นให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้
   1) หาค่าประมาณของ $\sqrt[3]{21}$
   2) หาค่า n เมื่อ $n^3 = 10,648$
   3) หาค่า n เมื่อ $\sqrt[3]{n} \approx 2.668$
   4) หาค่า n^3 เมื่อ $\sqrt[3]{n} \approx 2.802$
2. จากตารางท้ายเล่ม ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้
   1) หาค่าประมาณของ $\sqrt[3]{25}$
   2) หาค่า n เมื่อ $n^3 = 1,728$
   3) หาค่า n เมื่อ $\sqrt[3]{n} \approx 3.684$
   4) หาค่า $\sqrt[3]{-n}$ เมื่อ $n = 80$
   5) หาค่าประมาณ $\sqrt[3]{n}$ เมื่อ $n^3 = 2,197$
   6) หาค่าของ $\sqrt[3]{4,096}$
   7) หาค่าของ $\sqrt[3]{-10,648}$

ถึงแม้ว่าการหารากที่สามโดยการเปิดตารางจะทำได้โดยสะดวก ก็ยังไม่สามารถใช้ได้กับจำนวนจริงทุกจำนวน วิธีหารากที่สามที่ทำได้ง่ายและรวดเร็วกว่าคือการใช้เครื่องคำนวณหรือเครื่องคิดเลขบางรุ่น

ตัวอย่างที่ 8 แท็งก์น้ำทรงลูกบาศก์ 2 ใบ ใบแรกจุน้ำได้ 512,000 ลูกบาศก์เซนติเมตร ใบที่สองจุได้ 729,000 ลูกบาศก์เซนติเมตร แท็งก์ใบที่สองมีด้านแต่ละด้านยาวกว่าแท็งก์ใบแรกกี่เซนติเมตร



วิธีทำ แท็งก์ใบแรกมีความจุ 512,000 ลูกบาศก์เซนติเมตร

ดังนั้น แท็งก์ใบแรกมีด้านยาวด้านละ $\sqrt[3]{512,000} = \sqrt[3]{80^3}$

$= 80$ เซนติเมตร

แท็งก์ใบที่สองมีความจุ 729,000 ลูกบาศก์เซนติเมตร

ดังนั้น แท็งก์ใบที่สองมีด้านยาวด้านละ $\sqrt[3]{729,000} = \sqrt[3]{90^3}$

$= 90$ เซนติเมตร

ดังนั้น แท็งก์ใบที่สองมีด้านแต่ละด้านยาวกว่าแท็งก์ใบแรก

$= 90 - 80$

$= 10$ เซนติเมตร

ตอบ 10 เซนติเมตร

ตัวอย่างที่ 9 ถาดน้ำแข็งยี่ห้อหนึ่งทำน้ำแข็งยูนิตทรงลูกบาศก์ที่มีความยาวด้านละ 2 เซนติเมตร จำนวน 18 ก้อน คุณแม่บอกว่าน้ำแข็งที่ได้ก้อนเล็กและละลายเร็วเกินไป จึงซื้อถาดที่มีปริมาตรเท่าเดิม แต่ทำน้ำแข็งได้เพียง 12 ก้อน น้ำแข็งจากถาดใหม่จะมีความยาวของแต่ละด้านยาวกว่าน้ำแข็งจากถาดเดิมกี่เซนติเมตร

(ตอบเป็นทศนิยมสองตำแหน่ง)

วิธีทำ น้ำแข็งจากถาดเดิมมีปริมาตร $= 18 \times 2^3$

$= 144$ ลูกบาศก์เซนติเมตร

น้ำแข็งจากถาดใหม่มีปริมาตรเท่ากับปริมาตรจากถาดเดิม

จะได้น้ำแข็งแต่ละก้อนมีปริมาตร $= \frac{144}{12}$

$= 12$ ลูกบาศก์เซนติเมตร

และมีความยาวของด้าน $= \sqrt[3]{12}$

≈ 2.29 เซนติเมตร

นั่นคือ น้ำแข็งจากถาดใหม่จะมีความยาวของแต่ละด้านยาวกว่าประมาณ $2.29 - 2 = 0.29$ เซนติเมตร

ตอบ ประมาณ 0.29 เซนติเมตร

จริง – ไม่จริง

จงพิจารณาว่าประโยคในแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นจริงหรือไม่ เพราะเหตุใด

1. รากที่สามของ 64 คือ 4 และ -4
2. $-\sqrt[3]{-27} = -3$
3. $\sqrt{8} > \sqrt[3]{8}$
4. $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} < \frac{1}{8}$
5. $\sqrt[3]{0.064} > 0.064$
6. $\sqrt[3]{2^3} = \sqrt[3]{(-2)^3}$
7. $\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{8}$
8. ถ้า $x^3 = 2$ แล้ว $x = 8$
9. ถ้า $\sqrt[3]{x} = 8$ แล้ว $x = 2$
10. ถ้า $x^3 = 125$ แล้ว $x = 5$
11. รากที่สามของจำนวนคู่ เป็นจำนวนคู่
12. รากที่สามของจำนวนจริงมีค่ามากกว่าหรือน้อยกว่าจำนวนจริงนั้น

แบบฝึกหัด 2.4 ข

1. จงหารากที่สามของจำนวนต่อไปนี้

1) -1
2) 20
3) 116
4) -1728
5) $\frac{2}{75}$
6) $-\frac{27}{343}$
7) $-\frac{2197}{3375}$
8) -0.064
9) 0.000343
10) 0.180

แบบฝึกหัดต่อไปนี้ ให้นักเรียนใช้วิธีการใดก็ได้ในการหาคำตอบ

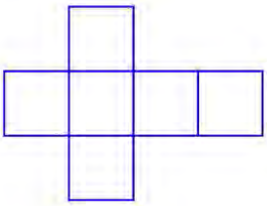
2. จงหาค่าของจำนวนต่อไปนี้

1) $3\times\sqrt[3]{-8}$ 2) $\sqrt{\frac{4}{25}}\times\sqrt[3]{4,096}$

3) $\sqrt{841}+\sqrt[3]{9,261}$ 4) $\sqrt[3]{-15,625}-\sqrt[3]{2,744}$

5) $\sqrt[3]{0.000512}\times\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$

3. โรงงานผลิตกล่องพลาสติกแห่งหนึ่ง สำรวจพบว่ากล่องขนาดที่ขายดีที่สุดเป็นกล่องทรงลูกบาศก์ที่สามารถจุของได้อย่างน้อย 1,500 ลูกบาศก์นิ้ว โรงงานต้องผลิตกล่องที่มีความยาวอย่างน้อยกี่นิ้ว (ตอบเป็นจำนวนเต็ม)

4. 

ในการทำกล่องทรงลูกบาศก์มักจะตัดกระดาษดังรูป ถ้ามีกระดาษรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาดกว้าง 10 นิ้ว ยาว 13 นิ้ว และต้องการทำให้กล่องมีปริมาตรมากที่สุด จะต้องทำกล่องให้มีความยาวของแต่ละด้านเป็นกี่นิ้ว และมีปริมาตรเป็นเท่าใด (ตอบเป็นทศนิยมหนึ่งตำแหน่ง)

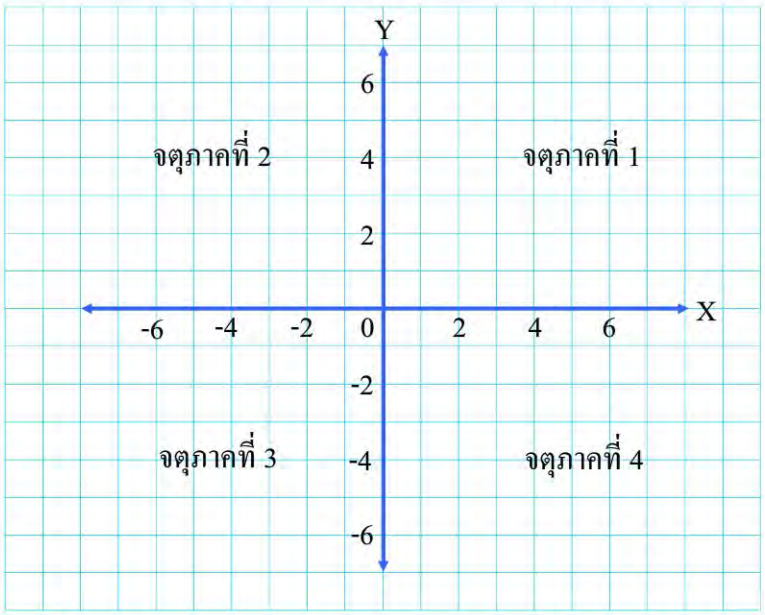
5. เมื่อสองปีที่แล้ว พ่อและต้นช่วยกันขุดบ่อปลาทรงลูกบาศก์ที่มีปริมาตร 1 ลูกบาศก์เมตร ปัจจุบันปลาออกลูกและมีจำนวนเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็ว พ่อจึงบอกต้นว่าจะสร้างบ่อใหม่ให้มีปริมาตรเป็นสองเท่าของบ่อเดิม โดยจะขุดบ่อให้มีความกว้าง ยาว และลึกเป็นสองเท่าของบ่อเดิม นักเรียนคิดว่าสิ่งที่พ่อคิดถูกต้องหรือไม่ จงอธิบาย ถ้าไม่ถูกต้อง จงหาขนาดของบ่อใหม่

6. หลุมฝังขยะในหมู่บ้านแห่งหนึ่งเป็นทรงลูกบาศก์มีปริมาตร 30 ลูกบาศก์เมตร อ้นประมาณความยาวแต่ละด้านของหลุมฝังขยะนี้เป็น 4 เมตร ส่วนอ้อมประมาณได้เป็น 3 เมตร คำตอบของใครสมเหตุสมผลกว่ากัน เพราะเหตุใด

ระนาบจริง

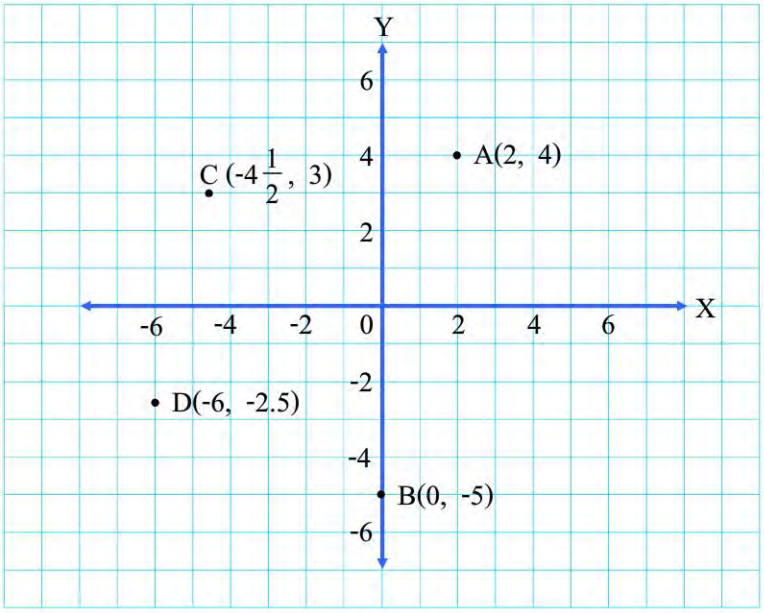
นักเรียนเคยทราบมาแล้วว่า ระนาบในระบบพิกัดฉากประกอบด้วยเส้นจำนวนสองเส้นตัดกันเป็นมุมฉากบนระนาบ เรียกเส้นจำนวนในแนวนอนว่าแกน X และเรียกเส้นจำนวนในแนวตั้งว่าแกน Y

แกน X และแกน Y แบ่งระนาบออกเป็น 4 จตุภาคดังนี้



ที่จริงแล้วแกน X และแกน Y ข้างต้น คือ *เส้นจำนวนจริง* และระนาบในระบบพิกัดฉากดังกล่าวก็คือ ระนาบจริง ดังนั้นจุดต่าง ๆ บนระนาบจึงแทนได้ด้วยคู่อันดับ (x, y) ที่ x และ y เป็นจำนวนจริง

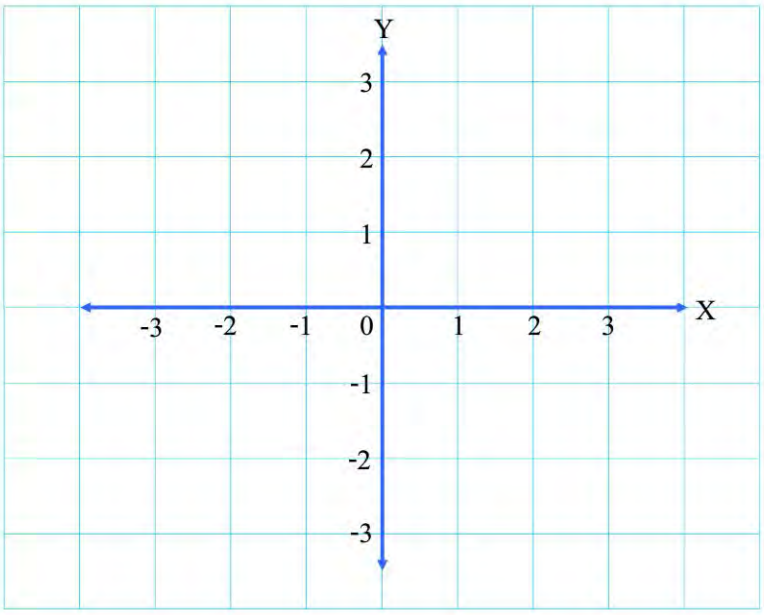
นักเรียนเคยหาตำแหน่งของจุดบนระนาบในระบบพิกัดฉากที่มีพิกัดที่หนึ่งและพิกัดที่สองเป็นจำนวนตรรกยะมาแล้ว เช่น จุด A(2, 4), B(0, -5), C($-4\frac{1}{2}$, 3) และ D(-6, -2.5) ดังรูป



ในบทนี้นักเรียนทราบว่า เราสามารถหาจุดที่แทนจำนวนอตรรกยะที่กำหนดให้บนเส้นจำนวนจริงได้ เราจึงสามารถหาตำแหน่งของจุดที่มีพิกัดเป็นจำนวนอตรรกยะบนระนาบจริงในระบบพิกัดฉากได้เช่นกัน

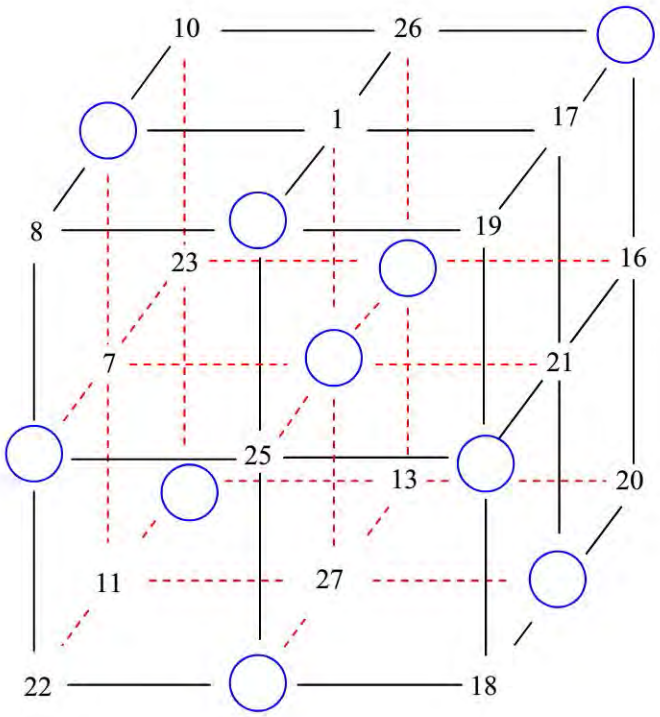
ให้นักเรียนแสดงการหาตำแหน่งของจุดที่มีพิกัดต่อไปนี้บนระนาบที่กำหนดให้ข้างล่างนี้

$P(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $Q(-\sqrt{3}, \sqrt{2})$, $R(\sqrt{2}, -\sqrt{3})$ และ $S(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$



ลูกบาศก์มหัศจรรย์

กล่องทรงลูกบาศก์ใบหนึ่งมีปริมาตร 74,088 ลูกบาศก์หน่วย เมื่อกำหนดให้ใช้จำนวนนับตั้งแต่ 1 ถึง 27 ในการจัดเรียงเพื่อให้ผลรวมของแต่ละแถวและแต่ละหลักเท่ากับความยาวของด้านของกล่อง ให้นักเรียนเติมจำนวนลงใน ◯ ให้ได้ผลรวมตามที่ต้องการ



บทที่ 3
การประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

3.1 ทบทวนการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

นักเรียนเคยทราบความหมายของสมการและสมบัติของการเท่ากันที่นำมาใช้ในการหาคำตอบของสมการมาแล้ว ดังนี้

ความหมายของสมการ

สมการ เป็นประโยคที่แสดงการเท่ากันของจำนวน โดยมีสัญลักษณ์ = บอกการเท่ากัน

สมการอาจมีตัวแปรหรือไม่มีตัวแปรก็ได้ เช่น $3x + 2 = 59$ เป็นสมการที่มี x เป็นตัวแปร และ $8 - 11 = -3$ เป็นสมการที่ไม่มีตัวแปร

สมการซึ่งมี x เป็นตัวแปรและมีรูปทั่วไปเป็น $ax + b = 0$ เมื่อ a, b เป็นค่าคงตัว และ $a \neq 0$ เรียกว่า สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

1. $2x = 0$
2. $\frac{1}{2}x + 3 = 0$
3. $-0.8y - 1.4 = 0$
4. $3x - 5 = 0$

คำตอบของสมการคือ จำนวนที่แทนตัวแปรในสมการแล้วทำให้สมการเป็นจริง

การแก้สมการคือ การหาคำตอบของสมการ

คำตอบของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวจะมีเพียงคำตอบเดียว ดังตัวอย่าง

สมการ $2x - 5 = 0$ มี $\frac{5}{2}$ เป็นคำตอบ

สมการ $-\frac{4}{5}y = 0$ มี 0 เป็นคำตอบ

สมการ $\frac{1}{2}x - 7 = 0$ มี 14 เป็นคำตอบ

การหาคำตอบของสมการนอกจากจะใช้วิธีลองหาจำนวนมาแทนค่าตัวแปรในสมการแล้ว เราจะใช้*สมบัติของการเท่ากัน* ได้แก่ *สมบัติสมมาตร สมบัติถ่ายทอด สมบัติการบวกและสมบัติการคูณ* เพื่อช่วยในการหาคำตอบของสมการได้อีกวิธีหนึ่ง

สมบัติของการเท่ากัน

1. สมบัติสมมาตร

   ถ้า $a = b$ แล้ว $b = a$ เมื่อ a และ b แทนจำนวนจริงใด ๆ

   เราอาศัยสมบัติสมมาตรเขียนแสดงการเท่ากันของจำนวนได้สองแบบ ดังตัวอย่าง

   1) $a + b = c$ หรือ $c = a + b$

   2) $x - 3 = 2x + 7$ หรือ $2x + 7 = x - 3$

2. สมบัติถ่ายทอด

   ถ้า $a = b$ และ $b = c$ แล้ว $a = c$ เมื่อ a, b และ c แทนจำนวนจริงใด ๆ

   เราใช้สมบัติถ่ายทอด ดังตัวอย่าง

   1) ถ้า $x = 5 + 7$ และ $5 + 7 = 12$ แล้วจะสรุปได้ว่า $x = 12$

   2) ถ้า $x = -3y$ และ $-3y = 0.5$ แล้วจะสรุปได้ว่า $x = 0.5$

3. สมบัติการบวก

   ถ้า $a = b$ แล้ว $a + c = b + c$ เมื่อ a, b และ c แทนจำนวนจริงใด ๆ

   เราใช้สมบัติการบวก ดังตัวอย่าง

   1) ถ้า $a = 5$ แล้ว $a + 3 = 5 + 3$

   นำ 3 มาบวกทั้งสองข้างของสมการ

   2) ถ้า $x + 7 = 2$ แล้ว $(x + 7) - 7 = 2 - 7$

   นำ -7 มาบวกทั้งสองข้างของสมการ
   หรือ นำ 7 มาลบทั้งสองข้างของสมการ

4. สมบัติการคูณ

   ถ้า $a = b$ แล้ว $ca = cb$ เมื่อ a, b และ c แทนจำนวนจริงใด ๆ

   เราใช้สมบัติการคูณ ดังตัวอย่าง

   1) ถ้า $m + 1 = 2n$ แล้ว $3(m + 1) = 3(2n)$

   นำ 3 มาคูณทั้งสองข้างของสมการ

   2) ถ้า $-3x = 15$ แล้ว $\frac{-3x}{-3} = \frac{15}{-3}$

   นำ $-\frac{1}{3}$ มาคูณทั้งสองข้างของสมการ
   หรือนำ -3 มาหารทั้งสองข้างของสมการ

เราจะนำสมบัติของการเท่ากันไปใช้ในการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงแก้สมการ $-\frac{1}{2}y + \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$

วิธีทำ

$$-\frac{1}{2}y + \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$

นำ $\frac{2}{3}$ มาลบทั้งสองข้างของสมการ

จะได้ $-\frac{1}{2}y + \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}$

$$-\frac{1}{2}y = -\frac{1}{6}$$

นำ -2 มาคูณทั้งสองข้างของสมการ

จะได้ $(-2) \times \left(-\frac{1}{2}y\right) = (-2) \times \left(-\frac{1}{6}\right)$

$$y = \frac{1}{3}$$

ตรวจสอบ แทน y ด้วย $\frac{1}{3}$ ในสมการ $-\frac{1}{2}y + \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$

จะได้ $\left[\left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{3}\right] + \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$

$$-\frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น $\frac{1}{3}$ เป็นคำตอบของสมการ $-\frac{1}{2}y + \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$

ตอบ $\frac{1}{3}$

ตัวอย่างที่ 2 จงแก้สมการ $1.4x + 7 = 3.4x - 3$

วิธีทำ

$$1.4x + 7 = 3.4x - 3$$

นำ -3.4x มาบวกทั้งสองข้างของสมการ

จะได้ $(-3.4x) + 1.4x + 7 = (-3.4x) + 3.4x - 3$

$$(-3.4 + 1.4)x + 7 = (-3.4 + 3.4)x - 3$$

$$-2x + 7 = -3$$

นำ 7 มาลบทั้งสองข้างของสมการ

จะได้ $-2x + 7 - 7 = -3 - 7$

$-2x = -10$

นำ -2 มาหารทั้งสองข้างของสมการ

จะได้ $\frac{-2x}{-2} = \frac{-10}{-2}$

$x = 5$

ตรวจสอบ แทน x ด้วย 5 ในสมการ $1.4x + 7 = 3.4x - 3$

จะได้ $(1.4 \times 5) + 7 = (3.4 \times 5) - 3$

$7.0 + 7 = 17.0 - 3$

$14 = 14$ เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น 5 เป็นคำตอบของสมการ $1.4x + 7 = 3.4x - 3$

ตอบ 5

ตัวอย่างที่ 3 จงแก้สมการ $\frac{8}{3}x = \frac{6}{5}x + 22$

วิธีทำ

วิธีที่ 1 $\frac{8}{3}x = \frac{6}{5}x + 22$

นำ $-\frac{6}{5}x$ มาบวกทั้งสองข้างของสมการ

จะได้ $\left(-\frac{6}{5}x\right) + \frac{8}{3}x = \left(-\frac{6}{5}x\right) + \frac{6}{5}x + 22$

$\left(-\frac{6}{5} + \frac{8}{3}\right)x = \left(-\frac{6}{5} + \frac{6}{5}\right)x + 22$

$\frac{22}{15}x = 22$

นำ 15 มาคูณทั้งสองข้างของสมการ

จะได้ $15 \times \frac{22}{15}x = 15 \times 22$

$22x = 15 \times 22$

นำ 22 มาหารทั้งสองข้างของสมการ

จะได้ $\frac{22x}{22} = \frac{15 \times 22}{22}$

$x = 15$

วิธีที่ 2 $\frac{8}{3}x = \frac{6}{5}x + 22$

นำ ค.ร.น. ของ 3 และ 5 คือ 15 มาคูณทั้งสองข้างของสมการ

จะได้ $15 \times \frac{8}{3}x = 15 \times \left(\frac{6}{5}x + 22\right)$

$40x = 18x + 330$

นำ 18x มาลบทั้งสองข้างของสมการ

จะได้ $22x = 330$

$x = 15$

ตรวจสอบ แทน x ด้วย 15 ในสมการ $\frac{8}{3}x = \frac{6}{5}x + 22$

จะได้ $\frac{8}{3} \times 15 = \left(\frac{6}{5} \times 15\right) + 22$

$8 \times 5 = 18 + 22$

$40 = 40$ เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น 15 เป็นคำตอบของสมการ $\frac{8}{3}x = \frac{6}{5}x + 22$

ตอบ 15

ตัวอย่างที่ 4 จงแก้สมการ $\frac{1}{3}(p - 5) = 2p - 1$

วิธีทำ $\frac{1}{3}(p - 5) = 2p - 1$

นำ 3 มาคูณทั้งสองข้างของสมการ

จะได้ $3 \times \frac{1}{3}(p - 5) = 3 \times (2p - 1)$

$p - 5 = 6p - 3$

นำ -6p มาบวกทั้งสองข้างของสมการ

จะได้ $(-6p) + p - 5 = (-6p) + 6p - 3$

$(-6 + 1)p - 5 = (-6 + 6)p - 3$

$-5p - 5 = -3$

นำ 5 มาบวกทั้งสองข้างของสมการ

จะได้ $-5p - 5 + 5 = -3 + 5$

$-5p = 2$

$p = -\frac{2}{5}$

ตรวจสอบ แทน $p = -\frac{2}{5}$ ในสมการ $\frac{1}{3}(p-5) = 2p-1$

จะได้ $\frac{1}{3}\times\left[\left(-\frac{2}{5}\right)-5\right] = \left[2\times\left(-\frac{2}{5}\right)\right]-1$

$\frac{1}{3}\times\left(-\frac{27}{5}\right) = -\frac{4}{5}-1$

$-\frac{9}{5} = -\frac{9}{5}$ เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น $-\frac{2}{5}$ เป็นคำตอบของสมการ $\frac{1}{3}(p-5) = 2p-1$

ตอบ $-\frac{2}{5}$

ตัวอย่างที่ 5 จงแก้สมการ $3(y-6)-2(5+3y) = 5$

วิธีทำ

$3(y-6)-2(5+3y) = 5$

จะได้ $3(y-6)+(-2)(5+3y) = 5$

$3y-18+(-10-6y) = 5$

$3y-18-10-6y = 5$

$-3y-28 = 5$

$-3y = 5+28$

$-3y = 33$

$y = \frac{33}{-3}$

$y = -11$

ตรวจสอบ แทน y ด้วย -11 ในสมการ $3(y-6)-2(5+3y) = 5$

จะได้ $3(-11-6)-2[5+3(-11)] = 5$

$[3\times(-17)]-2(5-33) = 5$

$-51+56 = 5$

$5 = 5$ เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น -11 เป็นคำตอบของสมการ $3(y-6)-2(5+3y) = 5$

ตอบ -11

ตัวอย่างที่ 6 จงแก้สมการ $\frac{x}{9} - \frac{2(x-1)}{3} = \frac{4-5x}{6}$

วิธีทำ $\frac{x}{9} - \frac{2(x-1)}{3} = \frac{4-5x}{6}$

นำ ค.ร.น. ของ 3, 6 และ 9 คือ 18 มาคูณทั้งสองข้างของสมการ

จะได้ $18\times\left[\frac{x}{9} - \frac{2(x-1)}{3}\right] = 18\times\left[\frac{4-5x}{6}\right]$

$$\begin{aligned} 2x - 12(x-1) &= 3(4-5x) \\ 2x - 12x + 12 &= 12 - 15x \\ -10x + 12 &= 12 - 15x \\ -10x + 15x &= 12 - 12 \\ 5x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

ตรวจสอบ แทน x ด้วย 0 ในสมการ $\frac{x}{9} - \frac{2(x-1)}{3} = \frac{4-5x}{6}$

จะได้ $\frac{0}{9} - \frac{2(0-1)}{3} = \frac{4-5(0)}{6}$

$$\begin{aligned} 0 - \frac{2(-1)}{3} &= \frac{4}{6} \\ -\left(-\frac{2}{3}\right) &= \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} &= \frac{2}{3} \quad \text{เป็นสมการที่เป็นจริง} \end{aligned}$$

ดังนั้น 0 เป็นคำตอบของสมการ $\frac{x}{9} - \frac{2(x-1)}{3} = \frac{4-5x}{6}$

ตอบ 0

แบบฝึกหัด 3.1

จงแก้สมการต่อไปนี้ พร้อมทั้งแสดงวิธีตรวจสอบคำตอบ

1. $3x - \frac{2}{5} = 7 + 2x$
2. $\frac{1}{2} + 6y = -4y$
3. $10x - 1 - 7x + 3 = 7x - 10$
4. $2.7x + 2.2 = 2.4x - 2.6$
5. $1.5x + 2 + 2.5x - 0.5 = 4x - 1.5 - 3x$
6. $2(x-3) = x + 15$
7. $3(y+2) = y - 1$
8. $0 = 3(3-2x) + 5(x-1)$
9. $5(2-3y) - 15 = -y - 7$
10. $-11y + 4(y-3) + 6y = 4y - 12$

11. $\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}x = 0$

12. $\frac{a}{2} + \frac{a}{3} = -5$

13. $\frac{3}{4}x - \frac{5}{2}x = -7$

14. $\frac{a}{3} + \frac{13}{6} = 3 - \frac{a}{2}$

15. $\frac{1}{2}y + \frac{3}{4}y = 7 + \frac{2}{3}y$

16. $\frac{x}{2} - \frac{x}{4} = x - 9$

17. $\frac{a-1}{3} + 3 = \frac{a+14}{9}$

18. $2(7 + 3x) - 6(x + 2) = x$

19. $2.4a - 4.2(a + 1) = 1.1a + 10.3$

20. $4.5(2 - 3x) + 0.8x = 2.3(x + 30)$

21. $0.12y - 1.6(y - 2) = 6.8 - 1.28y$

22. $\frac{2x-5}{2} + \frac{4-x}{4} = \frac{1}{4} + x$

23. $\frac{a+7}{3} - (2 - a) = \frac{a-5}{6}$

24. $\frac{2x}{15} + \frac{x+6}{12} = \frac{3}{10}(x + 15)$

25. $\frac{5m}{6} - \frac{3m-1}{4} = 2m - \frac{6-m}{3}$

26. $\frac{2x-5}{2} - \frac{5+3x}{4} = \frac{2x-1}{2} - \frac{5x-2}{8}$

ลองหาดู

จงหาจำนวนเต็มบวก a, b และ c ที่ทำให้สมการต่อไปนี้เป็นจริงมาอย่างน้อยสามชุด

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$$

3.2 การนำไปใช้

นักเรียนยังจำได้หรือไม่ว่า เราเคยพบโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับอายุของไดโอแฟนทัส (Diophantus) มาแล้ว ไดโอแฟนทัส เป็นชาวเมืองอะเล็กซานเดรีย เกิดเมื่อประมาณ ค.ศ. 200 เขาได้ชื่อว่า "บิดาของพีชคณิต" มีเรื่องเล่ากันว่าข้อความจารึกบนป้ายหินหลุมฝังศพของเขาเป็นดังนี้

...วัยเด็กของไดโอแฟนทัส เป็น $\frac{1}{6}$ ของอายุของเขา...

...เขามีชีวิตในช่วงวัยหนุ่ม อยู่เป็นเวลา $\frac{1}{12}$ ของชีวิต

ต่อจากนั้นอีก $\frac{1}{7}$ ของชีวิต ไดโอแฟนทัสก็แต่งงาน

ห้าปีต่อมา ได้ลูกชายคนแรก

ลูกชายของเขามีชีวิตอยู่เพียง $\frac{1}{2}$ ของชีวิตของพ่อ ไดโอแฟนทัสตายหลังลูกชายเพียงสี่ปี

ไดโอแฟนทัส มีชีวิตอยู่ในช่วงเวลาที่กล่าวนี้

นักเรียนบอกได้ไหมว่าไดโอแฟนทัสเสียชีวิตเมื่ออายุเท่าไร

จากปัญหาดังกล่าว เราหาอายุของไดโอแฟนทัสได้โดยใช้สมการ ดังนี้

ให้ไดโอแฟนทัสมีอายุ x ปี

ดังนั้น เขามีชีวิตในวัยเด็กเป็น $\frac{x}{6}$ ปี

มีชีวิตในช่วงวัยหนุ่ม $\frac{x}{12}$ ปี

มีชีวิตหลังวัยหนุ่มจนกระทั่งแต่งงาน $\frac{x}{7}$ ปี

อีก 5 ปีต่อมา เขามีลูกชายคนแรก

ลูกชายของเขามีชีวิตอยู่ $\frac{x}{2}$ ปี

อีก 4 ปีต่อมา ไดโอแฟนทัสเสียชีวิต

จะได้สมการเป็น $x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4$

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + \frac{x}{2} + 9$$

$$x = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{7} + \frac{1}{2}\right)x + 9$$

$$x = \left(\frac{14 + 7 + 12 + 42}{84}\right)x + 9$$

$$x = \frac{75}{84}x + 9$$

$$84x = 75x + 756$$

$$9x = 756$$

$$x = 84$$

ตรวจสอบ ถ้าไดโอแฟนทัสมีอายุ 84 ปี แล้วอายุในช่วงต่าง ๆ เป็น

$\frac{84}{6} = 14$, $\frac{84}{12} = 7$, $\frac{84}{7} = 12$, 5, $\frac{84}{2} = 42$ และ 4 ปี

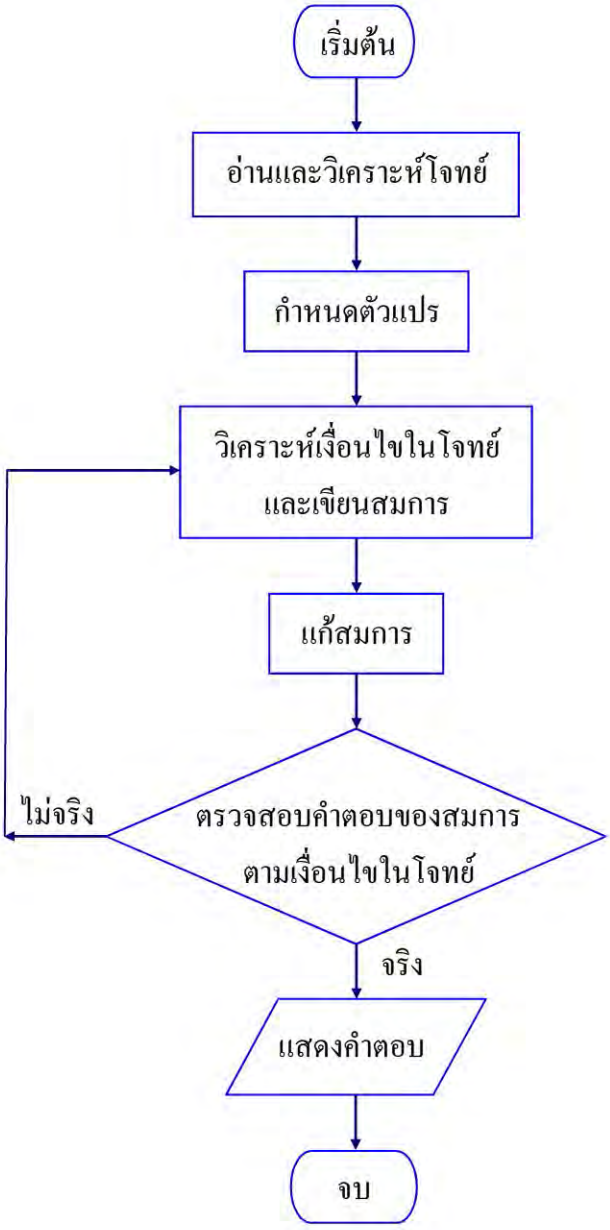
ผลบวกของอายุในช่วงต่าง ๆ เป็น $14 + 7 + 12 + 5 + 42 + 4 = 84$ ปี

ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

ดังนั้น ไดโอแฟนทัสมีอายุ 84 ปี

ตอบ 84 ปี

ในการหาอายุของไดโอแฟนทัสโดยใช้สมการดังกล่าว เป็นไปตามลำดับขั้นตอนดังแผนภูมิ ต่อไปนี้



ปัญหาเกี่ยวกับจำนวน

นักเรียนเคยรู้จักจำนวนเต็ม จำนวนคู่ จำนวนคี่ เศษส่วนและทศนิยมมาแล้ว ต่อไปนี้จะเป็นการแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับจำนวนดังกล่าวโดยใช้สมการ

ตัวอย่างที่ 1 ผลบวกของจำนวนเต็มสองจำนวนเป็น -51 ถ้าจำนวนหนึ่งน้อยกว่าอีกจำนวนหนึ่งอยู่ 13 จงหาจำนวนสองจำนวนนั้น

วิธีทำ ให้ x แทนจำนวนเต็มที่มากกว่า

จะได้จำนวนเต็มอีกจำนวนหนึ่งที่น้อยกว่า x อยู่ 13 เป็น $x - 13$

เนื่องจากผลบวกของจำนวนเต็มสองจำนวนนั้นเป็น -51

จะได้สมการเป็น $x + (x - 13) = -51$

$$x + x - 13 = -51$$

$$(x + x) - 13 = -51$$

$$2x - 13 = -51$$

$$2x = -38$$

$$x = -19$$

ตรวจสอบ ถ้าจำนวนเต็มจำนวนที่มากกว่า คือ -19

จำนวนเต็มอีกจำนวนหนึ่ง คือ $-19 - 13 = -32$

ผลบวกของจำนวนเต็มทั้งสองเป็น $(-19) + (-32) = -51$ ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

ดังนั้น จำนวนเต็มสองจำนวนนั้นคือ -19 และ -32

ตอบ -19 และ -32

ตัวอย่างที่ 2 จงหาจำนวนคู่สามจำนวนที่เรียงติดกัน ซึ่งมีผลบวกเป็น 288

วิธีทำ ให้ x แทนจำนวนคู่จำนวนแรก

จำนวนคู่สามจำนวนที่เรียงติดกันคือ x, $x+2$ และ $x+4$

เนื่องจากผลบวกของจำนวนคู่สามจำนวนที่เรียงติดกันนั้นเป็น 288

จะได้สมการเป็น $x+(x+2)+(x+4) = 288$

$$x+x+2+x+4 = 288$$
$$(x+x+x)+(2+4) = 288$$
$$3x+6 = 288$$
$$3x = 282$$
$$x = 94$$

ตรวจสอบ ถ้าจำนวนคู่จำนวนแรกคือ 94

จำนวนคู่สามจำนวนที่เรียงติดกัน คือ 94, $94+2 = 96$ และ $94+4 = 98$

ผลบวกของจำนวนคู่สามจำนวนที่เรียงติดกันเป็น $94+96+98 = 288$

ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

ดังนั้น จำนวนคู่สามจำนวนที่เรียงติดกัน คือ 94, 96 และ 98

ตอบ 94, 96 และ 98

ตัวอย่างที่ 3 จงหาจำนวนคี่สามจำนวนที่เรียงติดกัน ซึ่งผลต่างของสองเท่าของจำนวนคี่ที่มากที่สุดกับจำนวนคี่ที่น้อยที่สุดเป็น -45

วิธีทำ ให้ x แทนจำนวนคี่ที่น้อยที่สุด

จำนวนคี่สามจำนวนที่เรียงติดกันจากน้อยไปมาก คือ x, $x+2$ และ $x+4$

เนื่องจากผลต่างของสองเท่าของจำนวนคี่ที่มากที่สุดกับจำนวนคี่ที่น้อยที่สุดเป็น -45

จะได้สมการเป็น $2(x+4)-x = -45$

$$2x+8-x = -45$$
$$x+8 = -45$$
$$x = -53$$

ตรวจสอบ ถ้าจำนวนคี่ที่น้อยที่สุดคือ -53

จำนวนคี่สามจำนวนที่เรียงติดกันจากน้อยไปมาก คือ -53, -53 + 2 = -51

และ -53 + 4 = -49

ผลต่างของสองเท่าของจำนวนคี่ที่มากที่สุดกับจำนวนคี่ที่น้อยที่สุดเป็น

2(-49) – (-53) = -98 + 53 = -45 ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

ดังนั้น จำนวนคี่สามจำนวนที่เรียงติดกันคือ -53, -51 และ -49

ตอบ -53, -51 และ -49

ตัวอย่างที่ 4 พี่น้องสองคนช่วยกันเก็บส้มในสวน ได้ส้มรวมกัน 252 ผล คนพี่กองส้มของตนไว้กองละ 9 ผล คนน้องกองไว้กองละ 6 ผล นับส้มรวมกันได้ทั้งหมด 34 กอง จงหาจำนวนส้มที่แต่ละคนเก็บได้

วิธีทำ

วิธีที่ 1 ให้พี่เก็บส้มได้ x ผล

น้องเก็บส้มได้ $252 - x$ ผล

พี่กองส้มไว้กองละ 9 ผล คิดเป็นส้ม $\frac{x}{9}$ กอง

น้องกองส้มไว้กองละ 6 ผล คิดเป็นส้ม $\frac{252 - x}{6}$ กอง

นับกองส้มรวมกันได้ 34 กอง

จะได้สมการเป็น $\frac{x}{9} + \frac{252 - x}{6} = 34$

นำ ค.ร.น. ของ 9 และ 6 คือ 18 มาคูณทั้งสองข้างของสมการ

จะได้ $18 \times \left[\frac{x}{9} + \frac{252 - x}{6}\right] = 18 \times 34$

$$18\left(\frac{x}{9}\right) + 18\left(\frac{252 - x}{6}\right) = 612$$

$$2x + 3(252 - x) = 612$$

$$2x + 756 - 3x = 612$$

$$(2x - 3x) + 756 = 612$$

$$-x + 756 = 612$$

$$-x = 612 - 756$$

$$-x = -144$$

$$x = 144$$

ตรวจสอบ ถ้าพี่เก็บส้มได้ 144 ผล คิดเป็นส้ม $\frac{144}{9} = 16$ กอง

น้องจะเก็บส้มได้ $252 - 144 = 108$ ผล คิดเป็นส้ม $\frac{108}{6} = 18$ กอง

นับส้มรวมกันได้ทั้งหมด $16 + 18 = 34$ กอง ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

ดังนั้น พี่เก็บส้มได้ 144 ผล และน้องเก็บส้มได้ 108 ผล

ตอบ พี่เก็บส้มได้ 144 ผล
น้องเก็บส้มได้ 108 ผล

นักเรียนจะเห็นว่าวิธีทำวิธีที่ 1 เป็นการสมมติตัวแปรแทนจำนวนที่โจทย์ถาม ซึ่งจะทำให้ได้สมการที่มีเศษส่วนมาเกี่ยวข้อง และการแก้สมการยุ่งยาก แต่ถ้าสมมติตัวแปรแทนจำนวนกองส้มที่เก็บได้ จะทำให้ได้สมการที่ไม่ยุ่งยากและง่ายต่อการแก้สมการ ดังแสดงในวิธีต่อไปนี้

วิธีที่ 2 ให้พี่เก็บส้มได้ x กอง

น้องเก็บส้มได้ $34 - x$ กอง

พี่กองส้มไว้กองละ 9 ผล คิดเป็นส้ม $9x$ ผล

น้องกองส้มไว้กองละ 6 ผล คิดเป็นส้ม $6(34 - x)$ ผล

สองคนเก็บส้มได้รวมกัน 252 ผล

จะได้สมการเป็น $9x + 6(34 - x) = 252$

$$9x + 204 - 6x = 252$$

$$(9x - 6x) + 204 = 252$$

$$3x + 204 = 252$$

$$3x = 252 - 204$$

$$3x = 48$$

$$x = 16$$

ตรวจสอบ ถ้าพี่เก็บส้มได้ 16 กอง กองละ 9 ผล คิดเป็นส้ม $9 \times 16 = 144$ ผล

น้องจะเก็บส้มได้ $34 - 16 = 18$ กอง กองละ 6 ผล

คิดเป็นส้ม $6 \times 18 = 108$ ผล

สองคนเก็บส้มได้รวมกัน $144 + 108 = 252$ ผล

ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

ดังนั้น พี่เก็บส้มได้ 144 ผล และน้องเก็บส้มได้ 108 ผล

ตอบ พี่เก็บส้มได้ 144 ผล
น้องเก็บส้มได้ 108 ผล

ตัวอย่างที่ 5 สามเท่าของผลต่างของจำนวนจำนวนหนึ่งกับ 7 เป็น 51 จงหาจำนวนจำนวนนั้น

วิธีทำ ให้ x แทนจำนวนจำนวนหนึ่ง

ผลต่างของ x กับ 7 อาจเป็น $x-7$ หรือ $7-x$

สามเท่าของผลต่างของ x กับ 7 คือ $3(x-7)$ หรือ $3(7-x)$

จะได้สมการเป็น $3(x-7) = 51$ หรือ $3(7-x) = 51$

1) ในกรณีที่สมการเป็น $3(x-7) = 51$

จะได้ $x-7 = 17$

$x = 24$

2) ในกรณีที่สมการเป็น $3(7-x) = 51$

จะได้ $7-x = 17$

$-x = 10$

$x = -10$

ตรวจสอบ 1) ถ้าจำนวนจำนวนนั้นคือ 24 จะได้สามเท่าของผลต่างของ 24 กับ 7 เป็น $3(24-7) = 3(17) = 51$ ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

2) ถ้าจำนวนจำนวนนั้นคือ -10 จะได้สามเท่าของผลต่างของ -10 กับ 7 เป็น $3[7-(-10)] = 3(17) = 51$ ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

ดังนั้น จำนวนจำนวนนั้นคือ 24 หรือ -10

ตอบ 24 หรือ -10

ในชีวิตประจำวัน เรามักพบปัญหาเกี่ยวข้องกับเศษส่วนและทศนิยม การหาคำตอบของโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับเศษส่วนและทศนิยมในบางครั้ง หากใช้ความรู้เกี่ยวกับเศษส่วนและทศนิยมโดยตรง อาจทำให้เกิดความยุ่งยาก เข้าใจคลาดเคลื่อน แต่ถ้าแก้โจทย์ปัญหาโดยใช้สมการ อาจหาคำตอบที่ถูกต้องได้ง่ายกว่า ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 6 แม่ค้าซื้อไข่มาจำนวนหนึ่งราคาฟองละ 2.75 บาท แล้วขายไข่ไปฟองละ 3.25 บาท แบ่งให้เพื่อนบ้านไป 12 ฟอง ขายไข่ที่เหลือทั้งหมดยังได้กำไรอีก 111 บาท จงหาว่าแม่ค้าซื้อไข่มาทั้งหมดกี่ฟอง

วิธีทำ ให้แม่ค้าซื้อไข่มา x ฟอง

ซื้อไข่ราคาฟองละ 2.75 บาท คิดเป็นเงิน 2.75x บาท

แบ่งให้เพื่อนบ้าน 12 ฟอง จึงเหลือไข่สำหรับขาย $x-12$ ฟอง

ขายไข่ $x-12$ ฟอง ฟองละ 3.25 บาท คิดเป็นเงิน $3.25(x-12)$ บาท

ขายไข่ได้กำไร 111 บาท

จะได้สมการเป็น $3.25(x-12)-2.75x = 111$

$$3.25x-39-2.75x = 111$$

$$(3.25x-2.75x)-39 = 111$$

$$0.5x-39 = 111$$

$$0.5x = 150$$

$$x = 300$$

ตรวจสอบ ถ้าแม่ค้าซื้อไข่มาทั้งหมด 300 ฟอง ฟองละ 2.75 บาท

คิดเป็นเงิน $2.75 \times 300 = 825$ บาท

ขายไข่ $300-12 = 288$ ฟอง ฟองละ 3.25 บาท

คิดเป็นเงิน $3.25 \times 288 = 936$ บาท

ขายไข่ได้กำไร $936-825 = 111$ บาท ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

ดังนั้น แม่ค้าซื้อไข่มาทั้งหมด 300 ฟอง

ตอบ 300 ฟอง

ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดต่อไปนี้

1. จงหาจำนวนเต็มสามจำนวนที่เรียงติดกัน ซึ่งมีผลบวกเป็น -255
2. จงหาจำนวนคี่สามจำนวนที่เรียงติดกัน ซึ่งมีผลบวกเป็น -87
3. ผลบวกของจำนวนเต็มสองจำนวนเป็น -61 ถ้าจำนวนหนึ่งน้อยกว่าสามเท่าของอีกจำนวนหนึ่งอยู่ 17 จงหาจำนวนสองจำนวนนั้น
4. จำนวนคู่สองจำนวนที่เรียงติดกัน เมื่อนำ 6 มาลบออกจากจำนวนที่มากกว่าแล้วคูณด้วย 3 จะได้ผลลัพธ์เท่ากับเมื่อนำ 4 มาบวกกับจำนวนที่น้อยกว่าแล้วคูณด้วย 7 จงหาจำนวนคู่สองจำนวนนั้น
5. ถ้าผลบวกของจำนวนเต็มสองจำนวนเท่ากับ 20 และผลต่างของสองจำนวนนั้นเท่ากับ 2 จงหาจำนวนสองจำนวนนั้น
6. ถ้าผลบวกของจำนวนสองจำนวนเท่ากับ 7.1 และผลต่างของสองจำนวนนั้นเท่ากับ 3 จงหาจำนวนสองจำนวนนั้น
7. จำนวนเต็มสองจำนวน จำนวนแรกน้อยกว่าจำนวนที่สองอยู่ 15 ถ้าคูณจำนวนแรกด้วย 3 แล้วบวกด้วยสองเท่าของจำนวนที่สองจะได้ผลลัพธ์เป็น 80 จงหาจำนวนสองจำนวนนั้น
8. จำนวนเต็มสามจำนวนที่เรียงติดกันจากน้อยไปมาก ถ้าผลบวกของสองจำนวนแรกเป็นสามเท่าของจำนวนที่สามแล้ว จงหาจำนวนเต็มสามจำนวนนั้น
9. ก้องสอบแข่งขันคณิตศาสตร์สองครั้ง แต่ละครั้งคะแนนเต็ม 100 คะแนน ครั้งแรกก้องสอบได้ 75 คะแนน เขาต้องสอบครั้งที่สองให้ได้กี่คะแนนจึงจะได้คะแนนเฉลี่ยของคะแนนสอบทั้งสองครั้งเป็น 80 คะแนน
10. นักเรียนห้องหนึ่งมีจำนวนนักเรียนหญิงเป็นสองเท่าของจำนวนนักเรียนชาย ถ้ามีนักเรียนชายย้ายมาเพิ่ม 6 คน และนักเรียนหญิงย้ายออก 5 คน แล้วนักเรียนชายกับนักเรียนหญิงจะมีจำนวนเท่ากัน จงหาจำนวนนักเรียนในห้องนี้
11. พ่อนำเงินจำนวนหนึ่งมารวมกับเงิน 50 บาทของแม่ แล้วแบ่งให้ลูก 5 คน ทำให้ลูกได้รับเงินคนละ 13 บาท จงหาจำนวนเงินที่พ่อนำมาสมทบ
12. สนามหญ้ารูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแห่งหนึ่งมีความยาวมากกว่าสองเท่าของความกว้างอยู่ 6 เมตร ถ้าสนามหญ้ายาว 78 เมตร จงหาความกว้างของสนามแห่งนี้

13. ลวดหนามขดหนึ่งยาว 36 เมตร นำไปล้อมรั้วรอบพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีด้านกว้างสั้นกว่าด้านยาว 4 เมตร ได้พอดี จงหาขนาดของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้านี้
14. ถังใบหนึ่งมีน้ำอยู่ $\frac{3}{4}$ ถัง หลังจากใช้น้ำไป 35 ลูกบาศก์เมตร เหลือน้ำอยู่ $\frac{1}{2}$ ถัง ถังใบนี้จุน้ำกี่ลูกบาศก์เมตร
15.

ส่วนที่เป็นลำตัวของจรวดลำหนึ่งยาวกว่าหกเท่าของความยาวของหัวจรวดอยู่ 1.5 เมตร ถ้าลำตัวของจรวดยาว 27 เมตร หัวจรวดจะยาวเท่าใด

16. ปรีดามีเงินจำนวนหนึ่ง เขาใช้เงินสองในสามของที่มีอยู่ซื้อหนังสือ แล้วซื้อขนมอีก 8 บาท ปรากฏว่าเขาเหลือเงิน 35 บาท จงหาว่าเดิมเขามีเงินเท่าใด
17. แม่แบ่งที่นาให้ลูกสองคน คนแรกได้รับ $\frac{2}{5}$ ของที่มีอยู่ คนที่สองได้น้อยกว่าคนแรก 5 ไร่ ปรากฏว่าแม่ยังเหลือที่นาอยู่อีก 15 ไร่ จงหาว่าเดิมแม่มีที่นากี่ไร่
18. นิภามีอายุน้อยกว่าสองเท่าของอายุของนทีอยู่ 3 ปี แต่มากกว่าอายุของนัทอยู่ 1 ปี ถ้านับอายุของนิภา นที และนัท รวมกันได้ 38 ปีแล้ว จงหาอายุของนิภา นที และนัท
19. นายชมเลี้ยงไก่ไว้มากกว่านายชู 500 ตัว ปรากฏว่าสามในห้าของจำนวนไก่ของนายชูเท่ากับครึ่งหนึ่งของจำนวนไก่ของนายชม จงหาจำนวนไก่ของนายชูและนายชม
20. สามปีที่แล้วบุตรมีอายุเท่ากับหนึ่งในห้าของอายุปัจจุบันของบิดา ห้าปีข้างหน้าบิดาจะมีอายุมากกว่าอายุของบุตร 25 ปี จงหาอายุปัจจุบันของบิดาและบุตร

21. ให้ D แทนความหนาแน่นของสาร มีหน่วยเป็นกรัมต่อลูกบาศก์เซนติเมตร

V แทนปริมาตรของสาร มีหน่วยเป็นลูกบาศก์เซนติเมตร

และ M แทนมวลของสาร มีหน่วยเป็นกรัม

จะได้ $D = \frac{M}{V}$

ถ้าโซเดียมคลอไรด์ 30 ลูกบาศก์เซนติเมตร มีมวล 65.10 กรัม โซเดียมคลอไรด์มีความหนาแน่นเท่าไร

22. ท่อประปาท่อนหนึ่งวัดเส้นผ่านศูนย์กลางภายในได้ 6 เซนติเมตร ถ้าท่อประปาท่อนี้จุน้ำได้ 1,386 ลูกบาศก์เซนติเมตร จะมีความยาวเท่าไร (ให้ใช้สูตร $V = \pi r^2 \ell$ เมื่อ

V แทนปริมาตรของทรงกระบอก r แทนรัศมีของฐานของทรงกระบอก

ℓ แทนความยาวของทรงกระบอก และกำหนดให้ π เท่ากับ $\frac{22}{7}$)

คิด

จำนวนอะไรเอ่ย มีสามหลัก ผลบวกของเลขโดดแต่ละหลักเท่ากับ 18 เลขโดดในหลักหน่วยเป็นสามเท่าของเลขโดดในหลักสิบ และเลขโดดในหลักร้อยเป็นสองเท่าของเลขโดดในหลักสิบ

เกมทายจำนวน

เกมทางคณิตศาสตร์ เป็นเกมลับสมองที่ใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์มาสร้าง เช่น เกมทายจำนวน

เกมทายจำนวนที่ดี ต้องมีกฎเกณฑ์ที่ไม่ยุ่งยากหรือซับซ้อนมากนัก เพื่อทำให้เกมน่าเล่น แต่ก็ต้องยากพอที่ผู้เล่นจะไม่สามารถวิเคราะห์และหาคำตอบได้ทันที ในขณะเดียวกันก็ต้องง่ายพอที่ผู้ตั้งคำถามสามารถบอกคำตอบได้ทันที เมื่อการเล่นเสร็จสิ้นลง

ตัวอย่างเกมทายจำนวน

บวกผลลัพธ์ที่ได้ด้วย 20
62 + 20 = 82
แล้วหารด้วย 2
82 ÷ 2 = 41
บอกผลลัพธ์สุดท้ายสิจ๊ะ
41
ขอทายว่าจำนวนที่เธอนึกไว้คือ 31
ถูกต้อง ปรีชาเก่งจังเลย

จากเกมข้างต้น ปรีชาสร้างเกมตามลำดับขั้นตอน ดังนี้

1. ให้จำนวนที่สุดานึกไว้คือ x
2. เมื่อคูณด้วย 2 จะได้ $2x$
3. บวกผลลัพธ์ในข้อ 2 ด้วย 20 จะได้ $2x + 20$
4. หารผลลัพธ์ในข้อ 3 ด้วย 2 จะได้ $\frac{2x + 20}{2}$ ซึ่งเท่ากับ $x + 10$
   จะได้ $x + 10$ เป็นคำตอบสุดท้ายของสุดา
5. เมื่อสุดาบอกผลลัพธ์สุดท้ายเป็น 41
   จะได้สมการเป็น $x + 10 = 41$
   ปรีชาจึงนำ 10 ลบออกจาก 41 ได้ 31 เป็นจำนวนที่สุดานึกไว้

ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

1. ถ้าสุดาบอกผลลัพธ์สุดท้ายเป็น 351 ปรีชาจะทายจำนวนที่สุดานึกไว้เป็นจำนวนใด และบอกได้อย่างไร
2. ให้นักเรียนสร้างเกมทายจำนวน แล้วนำไปทายเพื่อน ๆ พร้อมทั้งให้เพื่อน ๆ ช่วยกันอธิบายขั้นตอนการหาคำตอบ

ปัญหาเกี่ยวกับอัตราส่วนและร้อยละ

นักเรียนเคยแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับอัตราส่วนและร้อยละโดยใช้ความรู้เรื่องอัตราส่วนและร้อยละมาแล้ว แต่ในกรณีที่โจทย์มีความซับซ้อน ยุ่งยาก ถ้าใช้สมการอาจทำได้รวดเร็วและง่ายกว่า ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 พ่อค้าคนหนึ่งซื้อข้าวกล้องและข้าวมันปูเพื่อนำมาผสมกันให้ได้ 100 กิโลกรัม เขาซื้อข้าวมันปูกิโลกรัมละ 20 บาท ซื้อข้าวกล้องกิโลกรัมละ 18 บาท เมื่อนำมาผสมกันแล้ว เขาขายไปได้กำไร 40% คิดเป็นกำไร 776 บาท อยากทราบว่าพ่อค้าซื้อข้าวแต่ละชนิดอย่างละกี่กิโลกรัม

วิธีทำ ให้พ่อค้าซื้อข้าวกล้อง x กิโลกรัม

และซื้อข้าวมันปู $100 - x$ กิโลกรัม

ซื้อข้าวกล้องกิโลกรัมละ 18 บาท คิดเป็นเงิน $18x$ บาท

ซื้อข้าวมันปูกิโลกรัมละ 20 บาท คิดเป็นเงิน $20(100 - x)$ บาท

ดังนั้น ต้นทุนของข้าวผสม เท่ากับ $18x + 20(100 - x)$ บาท

ขายข้าวผสมได้กำไร 40% คิดเป็นเงิน 776 บาท

จะได้สมการเป็น $\frac{40}{100}[18x + 20(100 - x)] = 776$

$$\frac{2}{5}(18x + 2{,}000 - 20x) = 776$$

$$\frac{2}{5}(2{,}000 - 2x) = 776$$

$$2{,}000 - 2x = 776 \times \frac{5}{2}$$

$$2{,}000 - 2x = 1{,}940$$

$$-2x = 1{,}940 - 2{,}000$$

$$-2x = -60$$

$$x = 30$$

ตรวจสอบ ถ้าพ่อค้าซื้อข้าวกล้อง 30 กิโลกรัม จะซื้อข้าวมันปู $100 - 30 = 70$ กิโลกรัม

ซื้อข้าวกล้อง 30 กิโลกรัม คิดเป็นเงิน $18 \times 30 = 540$ บาท

ซื้อข้าวมันปู 70 กิโลกรัม คิดเป็นเงิน $20 \times 70 = 1{,}400$ บาท

จะได้กำไร $\frac{40}{100}(540 + 1{,}400) = \frac{2}{5} \times 1940 = 776$ บาท

ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

ดังนั้น ซื้อข้าวกล้อง 30 กิโลกรัม และซื้อข้าวมันปู 70 กิโลกรัม

ตอบ ซื้อข้าวกล้อง 30 กิโลกรัม และซื้อข้าวมันปู 70 กิโลกรัม

ตัวอย่างที่ 2 ปัจจุบันเต้ยอายุมากกว่าเต๋า 6 ปี อีก 14 ปีข้างหน้าอัตราส่วนของอายุของเต้ยต่ออายุของเต๋าเป็น 5 : 4 ปัจจุบันเต้ยและเต๋าอายุเท่าไร

วิธีทำ ให้ปัจจุบันเต้ยมีอายุ x ปี

เต๋ามีอายุ $x - 6$ ปี

อีก 14 ปีข้างหน้าเต้ยจะมีอายุ $x + 14$ ปี

อีก 14 ปีข้างหน้าเต๋าจะมีอายุ $x - 6 + 14 = x + 8$ ปี

เนื่องจากอีก 14 ปีข้างหน้าอายุของเต้ยต่ออายุของเต๋า เป็น 5 : 4

ดังนั้นจึงเขียนเป็นสัดส่วนได้เป็น $\frac{x+14}{x+8} = \frac{5}{4}$

เมื่อใช้การคูณไขว้ จะได้สมการเป็น

$$(x + 14) \times 4 = (x + 8) \times 5$$

$$4x + 56 = 5x + 40$$

$$4x - 5x = 40 - 56$$

$$-x = -16$$

$$x = 16$$

ตรวจสอบ ถ้าปัจจุบันเต้ยมีอายุ 16 ปี เต๋าจะมีอายุ $16 - 6 = 10$ ปี

อีก 14 ปีข้างหน้าเต้ยจะมีอายุ $16 + 14 = 30$ ปี

และเต๋าจะมีอายุ $10 + 14 = 24$ ปี

อัตราส่วนของอายุของเต้ยต่ออายุของเต๋าเป็น 30 : 24 หรือ เท่ากับ 5 : 4

ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

ดังนั้น ปัจจุบันเต้ยมีอายุ 16 ปี และเต๋ามีอายุ 10 ปี

ตอบ เต้ยมีอายุ 16 ปี และเต๋ามีอายุ 10 ปี

ตัวอย่างที่ 3 ป้าอุ๊ทำซาลาเปาจำนวนหนึ่งไว้ขาย ตั้งราคาขายลูกละ 12 บาท จากต้นทุนลูกละ 7 บาท แต่เนื่องจากลูกค้านิยมรับประทานซาลาเปาในตอนเช้ามากกว่าตอนเย็น ป้าอุ๊จึงจูงใจให้ลูกค้าซื้อซาลาเปาโดยลดราคา 50% หลังเวลา 18.00 น. ปรากฏว่าก่อนถึงเวลาลดราคาป้าอุ๊ขายซาลาเปาได้ 95 ลูก และหลังเวลา 18.00 น. ป้าอุ๊ขายซาลาเปาที่เหลือได้ทั้งหมดคิดแล้วได้กำไร 40% จงหาว่าป้าอุ๊ทำซาลาเปาขายกี่ลูก

วิธีทำ ให้ป้าอุ๊ทำซาลาเปาขาย x ลูก

ป้าอุ๊ขายซาลาเปาลูกละ 12 บาท จำนวน 95 ลูก คิดเป็นเงิน $12 \times 95 = 1,140$ บาท

ป้าอุ๊ขายซาลาเปาลดราคา 50% ราคาขายลดเหลือลูกละ $\frac{50}{100} \times 12 = 6$ บาท

ป้าอุ๊ขายซาลาเปาลดเหลือลูกละ 6 บาท จำนวน $x - 95$ ลูก

คิดเป็นเงิน $6(x - 95)$ บาท

ป้าอุ๊ขายซาลาเปาได้เงินทั้งหมด $1,140 + 6(x - 95)$ บาท

ทุนซาลาเปา x ลูก ราคาลูกละ 7 บาท คิดเป็นเงิน 7x บาท

ขายซาลาเปาได้กำไร 40% หมายความว่า ทุน 100 บาท ขายได้เงิน 140 บาท

ทุน 7x บาท ขายได้เงิน $\frac{140}{100} \times 7x = \frac{49x}{5}$ บาท

ดังนั้นป้าอุ๊ขายซาลาเปาได้เงินทั้งหมด $\frac{49x}{5}$ บาท

จะได้สมการเป็น

$$\begin{aligned} 1,140 + 6(x - 95) &= \frac{49x}{5} \\ 1,140 + 6x - 570 &= \frac{49x}{5} \\ 5,700 + 6x &= \frac{49x}{5} \\ 2,850 + 30x &= 49x \\ 19x &= 2,850 \\ x &= 150 \end{aligned}$$

ตรวจสอบ ถ้าป้าอุ๊ทำซาลาเปาขาย 150 ลูก ขายก่อนลดราคา 95 ลูก ราคาลูกละ 12 บาท

จะเหลือขายหลังเวลา 18.00 น. อีก $150 - 95 = 55$ ลูก ราคาลูกละ 6 บาท

ต้นทุนซาลาเปาลูกละ 7 บาท ป้าอุ๊ลงทุน $7 \times 150 = 1,050$ บาท

ขายซาลาเปาทั้งตอนเช้าและตอนเย็นได้เงินทั้งหมด

$(12 \times 95) + (6 \times 55) = 1,140 + 330 = 1,470$ บาท

ได้กำไร $1,470 - 1,050 = 420$ บาท คิดเป็นกำไร $\frac{420 \times 100}{1,050} = 40\%$

ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

ดังนั้น ป้าอุ๊ทำซาลาเปาขาย 150 ลูก

ตอบ 150 ลูก

ในชีวิตประจำวัน นักเรียนจะพบการใช้ร้อยละเพื่อระบุถึงส่วนผสมต่าง ๆ ดังตัวอย่าง

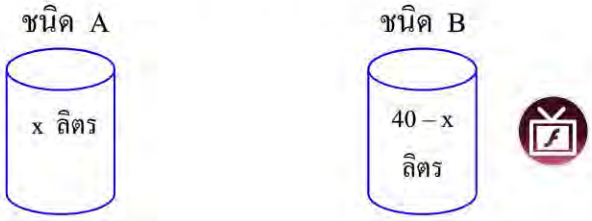
1. น้ำส้มแท้ 100% หมายถึง น้ำส้มบริสุทธิ์ที่คั้นจากส้มไม่มีการเติมน้ำหรือสิ่งเจือปนอื่น ๆ

2. น้ำผลไม้แท้ 40% หมายถึง น้ำผลไม้ 100 ลูกบาศก์เซนติเมตร จะมีน้ำผลไม้แท้อยู่ 40 ลูกบาศก์เซนติเมตร อีก 60 ลูกบาศก์เซนติเมตร เป็นน้ำหรือส่วนผสมอื่น ๆ

3. พิมเสนน้ำ 30% โดยน้ำหนัก หมายถึง ของผสม 100 กรัม จะมีพิมเสนอยู่ 30 กรัม อีก 70 กรัม เป็นส่วนประกอบอื่น ๆ

ตัวอย่างที่ 4 มีน้ำเกลืออยู่สองชนิด ชนิด A มีเกลือ 15% ชนิด B มีเกลือ 25% ถ้าต้องการนำน้ำเกลือทั้งสองชนิดมาผสมกันให้ได้น้ำเกลือผสม 40 ลิตร และมีเกลือ 18% จงหาว่าจะต้องใช้น้ำเกลือชนิด A และชนิด B อย่างละเท่าไร

วิธีทำ



ให้ใช้น้ำเกลือชนิด A ที่มีเกลือ 15% จำนวน x ลิตร

คิดเป็นเกลือ $\frac{15}{100}x = 0.15x$ ลิตร

ดังนั้น ใช้น้ำเกลือชนิด B ที่มีเกลือ 25% จำนวน $40-x$ ลิตร

คิดเป็นเกลือ $\frac{25}{100}(40-x) = 0.25(40-x)$ ลิตร

จะได้น้ำเกลือผสมจำนวน 40 ลิตร ที่มีเกลือ $0.15x + 0.25(40-x)$ ลิตร

น้ำเกลือผสมมีเกลือ 18% จำนวน 40 ลิตร คิดเป็นเกลือ $\frac{18}{100} \times 40 = 7.20$ ลิตร

จะได้สมการเป็น $0.15x + 0.25(40 - x) = 7.20$

$0.15x + 10 - 0.25x = 7.20$

$0.15x - 0.25x = -2.80$

$-0.10x = -2.80$

$10x = 280$

$x = 28$

ตรวจสอบ ถ้าใช้น้ำเกลือชนิด A 28 ลิตร จะใช้น้ำเกลือชนิด B $40 - 28 = 12$ ลิตร

น้ำเกลือชนิด A 28 ลิตร มีเกลือ $0.15 \times 28 = 4.2$ ลิตร

น้ำเกลือชนิด B 12 ลิตร มีเกลือ $0.25(40 - 28) = 3.0$ ลิตร

จะได้น้ำเกลือผสม $28 + 12 = 40$ ลิตร มีเกลือ $4.2 + 3.0 = 7.2$ ลิตร

คิดเป็น เกลือ $\frac{7.2 \times 100}{40} = 18\%$ ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

ดังนั้น ใช้น้ำเกลือชนิด A 28 ลิตร และน้ำเกลือชนิด B 12 ลิตร

ตอบ น้ำเกลือชนิด A 28 ลิตร และน้ำเกลือชนิด B 12 ลิตร

ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดต่อไปนี้

1. โรงเรียนก้าวหน้าวิทยามีจำนวนนักเรียนในระดับชั้นต่าง ๆ ดังนี้ ระดับชั้นประถมศึกษา คิดเป็น 50% ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ระดับชั้นมัธยมศึกษา คิดเป็น 80% ของจำนวนนักเรียนชั้นประถมศึกษา ที่เหลืออีก 118 คน เป็นนักเรียนชั้นอนุบาล จงหาจำนวนนักเรียนทั้งหมดของโรงเรียนนี้
2. แม่ค้าซื้อมะม่วงน้ำดอกไม้และมะม่วงเขียวเสวยมาขายรวม 60 กิโลกรัม มะม่วงน้ำดอกไม้กิโลกรัมละ 60 บาท มะม่วงเขียวเสวยกิโลกรัมละ 50 บาท ปรากฏว่าอัตราส่วนของจำนวนเงินที่ซื้อมะม่วงน้ำดอกไม้ต่อจำนวนเงินที่ซื้อมะม่วงเขียวเสวยเป็น 6 : 7 จงหาว่าแม่ค้าซื้อมะม่วงแต่ละชนิดมาอย่างละกี่กิโลกรัม
3. สนามหญ้ารูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแห่งหนึ่ง มีอัตราส่วนของความยาวต่อความกว้างเป็น 5 : 3 ถ้าเพิ่มความยาวแต่ละด้านอีก 20% ของความยาวเดิม จะทำให้ความยาวรอบสนามเท่ากับ 268.8 เมตร จงหาว่าเดิมแต่ละด้านของสนามยาวกี่เมตร

4. สายชลเปิดร้านขายกระเป๋าและรองเท้า เธอติดราคาขายกระเป๋าใบหนึ่งไว้โดยคิดกำไร 25% แต่เมื่อมีเพื่อนมาซื้อ สายชลจึงลดราคาให้ 10% และขายไปในราคา 900 บาท อยากทราบว่าต้นทุนของกระเป๋าใบนี้เป็นเท่าใด

5. มนัสเตรียมตัวเข้าแข่งขันวิ่งมาราธอน เขาจึงเริ่มฝึกซ้อมโดยวิ่งไปบนเส้นทางที่ได้กำหนดไว้ การซ้อมวิ่งครั้งแรกของเขา เป็นดังนี้ วันแรกเขาออกวิ่งไปได้ 20% ของระยะทางทั้งหมด วันที่สองวิ่งต่อไปได้ระยะทางอีก 64 กิโลเมตร ต้องหยุดพักเพราะฝนตก วันที่สามวิ่งต่อได้อีก 50% ของระยะทางที่เหลือ ปรากฏว่า มนัสวิ่งสามวันได้ระยะทางรวมกัน 200 กิโลเมตร ระยะทางช่วงสุดท้ายจะวิ่งในวันที่สี่ จงหาว่าระยะทางที่มนัสต้องวิ่งทั้งหมดยาวกี่กิโลเมตร

6. ถ้าต้องการผสมน้ำเชื่อมให้มีน้ำตาล 40% โดยการผสมน้ำเชื่อมสองขวด ขวดแรกเป็นน้ำเชื่อมที่มีน้ำตาล 90% และมีน้ำเชื่อมอยู่ในขวด 250 ลูกบาศก์เซนติเมตร น้ำเชื่อมขวดที่สองเป็นน้ำเชื่อมที่มีน้ำตาล 20% จะต้องใช้น้ำเชื่อมจากขวดที่สองปริมาณเท่าใด

ขายเท่าไรดี

น้ำพริกปลาทูเป็นอาหารที่คนไทยนิยมรับประทานเป็นประจำ ศูนย์อาหารแห่งหนึ่งมีน้ำพริกปลาทูขายเป็นชุด ในแต่ละชุดประกอบด้วยปลาทูสองตัว ผักสดปลอดสารพิษและน้ำพริกกะปิ ศูนย์อาหารจะผลิตน้ำพริกปลาทูออกจำหน่ายวันละ 60 ชุด สำหรับ 8 ชุดแรกจะขายประเดิมโดยลดราคา 50% และขายได้หมดทุกวัน

ถ้าต้นทุนการผลิตน้ำพริกปลาทูชุดละ 20 บาท และต้องการขายให้ได้กำไรทั้งหมด 40% นักเรียนบอกได้หรือไม่ว่าผู้ขายควรตั้งราคาขายไว้ชุดละกี่บาท

ปัญหาเกี่ยวกับอัตราเร็ว

โจทย์ปัญหาที่เกี่ยวกับระยะทาง อัตราเร็ว และเวลา เป็นอีกเรื่องหนึ่งที่เราสามารถหาคำตอบได้โดยใช้ความรู้เรื่องสมการ

ความเกี่ยวข้องระหว่างระยะทาง อัตราเร็ว และเวลา จะเป็นดังนี้

$$\text{ระยะทาง} = \text{อัตราเร็ว} \times \text{เวลา}$$

อัตราเร็วที่กล่าวถึงข้างต้นจะหมายถึง *อัตราเร็วเฉลี่ย*

ตัวอย่างที่ 1 โชติขี่รถจักรยานยนต์ออกจากศาลาหน้าหมู่บ้านไปตามถนนสายหนึ่งด้วยอัตราเร็ว 40 กิโลเมตรต่อชั่วโมง อีกหนึ่งชั่วโมงต่อมา ธีระขี่รถจักรยานยนต์ออกจากศาลาหน้าหมู่บ้านเช่นเดียวกัน และไปตามถนนสายเดียวกับที่โชติไป ด้วยอัตราเร็ว 50 กิโลเมตรต่อชั่วโมง จงหาว่า เป็นเวลานานเท่าไร ธีระจึงจะขี่รถนำหน้าโชติไป 10 กิโลเมตร

วิธีทำ ให้ธีระขี่รถออกจากศาลาหน้าหมู่บ้านเป็นเวลานาน x ชั่วโมง จึงจะขี่รถนำหน้าโชติไป 10 กิโลเมตร

โชติขี่รถออกจากจุดตั้งต้นก่อนธีระหนึ่งชั่วโมง

ดังนั้น โชติขี่รถออกจากจุดตั้งต้นเป็นเวลานาน	$x + 1$	ชั่วโมง
ในเวลา x ชั่วโมง ธีระขี่รถเป็นระยะทาง	$50x$	กิโลเมตร
ในเวลา $x + 1$ ชั่วโมง โชติจะขี่รถเป็นระยะทาง	$40(x + 1)$	กิโลเมตร
เนื่องจากธีระขี่รถนำหน้าโชติไป	10	กิโลเมตร

จะได้สมการเป็น $50x - 40(x + 1) = 10$

$$50x - 40x - 40 = 10$$

$$10x = 50$$

$$x = 5$$

ตรวจสอบ ถ้าธีระขี่รถออกจากศาลาหน้าหมู่บ้านเป็นเวลานาน 5 ชั่วโมง
ได้ระยะทาง $50 \times 5 = 250$ กิโลเมตร ดังนั้นโชติขี่รถนาน $5 + 1 = 6$ ชั่วโมง
ได้ระยะทาง $40 \times 6 = 240$ กิโลเมตร
จะได้ว่า ธีระขี่รถนำหน้าโชติ $250 - 240 = 10$ กิโลเมตร
ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์
ดังนั้น ธีระขี่รถออกจากศาลาหน้าหมู่บ้านเป็นเวลานาน 5 ชั่วโมง
ตอบ 5 ชั่วโมง

ตัวอย่างที่ 2 ชายคนหนึ่งทำไร่ชาบนภูเขาใกล้หมู่บ้านที่เขาอาศัยอยู่ ทุก ๆ วันเขาใช้เวลาเดินทางไปกลับ 3 ชั่วโมง เพื่อไปดูแลไร่ของเขา โดยในช่วงแรกเขาเดินออกจากบ้านพักไปตามถนนพื้นราบในหมู่บ้าน แล้วจึงเดินขึ้นเขาจนถึงไร่ เมื่อตกเย็นเขาก็เดินกลับในเส้นทางเดิมจนถึงบ้านพักในหมู่บ้าน ถ้าระยะทางบนถนนพื้นราบเป็นสองเท่าของระยะทางบนเขา และอัตราเร็วในการเดินบนถนนพื้นราบเป็น 4 กิโลเมตรต่อชั่วโมง อัตราเร็วในการเดินขึ้นเขาเป็น 3 กิโลเมตรต่อชั่วโมง อัตราเร็วในการเดินลงเขาเป็น 6 กิโลเมตรต่อชั่วโมง จงหาระยะทางทั้งหมดที่ชายคนนี้เดินทางทั้งไปและกลับ

วิธีทำ ให้ระยะทางบนเขาเป็น x กิโลเมตร
ระยะทางบนพื้นราบเป็นสองเท่าของระยะทางบนเขา คิดเป็น 2x กิโลเมตร
เดินทางบนพื้นราบด้วยอัตราเร็ว 4 กิโลเมตรต่อชั่วโมง คิดเป็นเวลา $\frac{2x}{4}$ ชั่วโมง

เดินทางขึ้นเขาด้วยอัตราเร็ว 3 กิโลเมตรต่อชั่วโมง คิดเป็นเวลา $\frac{x}{3}$ ชั่วโมง

เดินทางลงเขาด้วยอัตราเร็ว 6 กิโลเมตรต่อชั่วโมง คิดเป็นเวลา $\frac{x}{6}$ ชั่วโมง

รวมเวลาเดินทางขาไป $\frac{2x}{4}+\frac{x}{3}$ ชั่วโมง

รวมเวลาเดินทางขากลับ $\frac{x}{6}+\frac{2x}{4}$ ชั่วโมง

รวมเวลาเดินทางทั้งขาไปและขากลับ $\left(\frac{2x}{4}+\frac{x}{3}\right)+\left(\frac{x}{6}+\frac{2x}{4}\right)$ ชั่วโมง

เขาใช้เวลาเดินทางทั้งขาไปและขากลับ 3 ชั่วโมง

จะได้สมการเป็น $\frac{2x}{4}+\frac{x}{3}+\frac{x}{6}+\frac{2x}{4} = 3$

$$6x + 4x + 2x + 6x = 36$$

$$18x = 36$$

$$x = 2$$

ตรวจสอบ ถ้าระยะทางบนเขาเป็น 2 กิโลเมตร จะได้ระยะทางบนพื้นราบเป็น

$2 \times 2 = 4$ กิโลเมตร

เขาเดินทางบนพื้นราบด้วยอัตราเร็ว 4 กิโลเมตรต่อชั่วโมง จึงใช้เวลาเดินทางบนพื้นราบทั้งไปและกลับ $\frac{4}{4}+\frac{4}{4} = 2$ ชั่วโมง

เขาเดินทางขึ้นเขาด้วยอัตราเร็ว 3 กิโลเมตรต่อชั่วโมงและเดินทางลงเขาด้วยอัตราเร็ว 6 กิโลเมตรต่อชั่วโมง จึงใช้เวลาเดินทางบนเขาทั้งไปและกลับ

$\frac{2}{3}+\frac{2}{6} = \frac{6}{6} = 1$ ชั่วโมง

ดังนั้น เขาใช้เวลาเดินทางทั้งหมด $2 + 1 = 3$ ชั่วโมง

ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

ดังนั้น ระยะทางที่เขาเดินทางทั้งไปและกลับเป็น $2(2 + 4) = 12$ กิโลเมตร

ตอบ 12 กิโลเมตร

ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดต่อไปนี้

1. ต่อและติ๊กนัดพบกันที่หน้าตลาดสด ซึ่งอยู่กึ่งกลางของระยะทางระหว่างบ้านของต่อและติ๊กพอดี ต่อขี่รถจักรยานยนต์ส่วนติ๊กขับรถอีแต๋น ซึ่งอัตราเร็วของรถจักรยานยนต์ของต่อมากกว่าอัตราเร็วของรถอีแต๋นของติ๊ก 24 กิโลเมตรต่อชั่วโมง ถ้าต่อใช้เวลาเดินทาง 12 นาที และติ๊กใช้เวลาเดินทาง 20 นาที จงหา

1) อัตราเร็วของรถทั้งสองคัน
2) ระยะทางระหว่างบ้านของคนทั้งสอง

2. ปีติวิ่งด้วยอัตราเร็ว 13 กิโลเมตรต่อชั่วโมง ปรีชาวิ่งด้วยอัตราเร็ว 11 กิโลเมตรต่อชั่วโมง และวิ่งนานกว่าปีติ 20 นาที ได้ระยะทางไกลกว่าปีติ 2 กิโลเมตร จงหาว่าปรีชาวิ่งได้ระยะทางเท่าใด
3. ชายคนหนึ่งออกเดินด้วยอัตราเร็ว 5 กิโลเมตรต่อชั่วโมง เมื่อเวลา 9.00 น. อีก 2 ชั่วโมงต่อมาชายอีกคนหนึ่งออกเดินตามมาด้วยอัตราเร็ว 10 กิโลเมตรต่อชั่วโมง เมื่อเวลาเท่าไรชายทั้งสองจึงจะเดินทางทันกันพอดี
4. รถบดถนนสองคัน อยู่ห่างกัน 66 เมตร บนถนนสายหนึ่งและเคลื่อนสวนทางกัน คันหนึ่งเคลื่อนด้วยอัตราเร็ว 10 เมตรต่อนาที อีกคันหนึ่งเคลื่อนด้วยอัตราเร็ว 12 เมตรต่อนาที ถ้าให้รถบดทั้งสองคันเริ่มเคลื่อนเวลา 7.00 น. พร้อมกัน รถทั้งสองคันจะเคลื่อนมาพบกันเมื่อเวลาผ่านไปนานกี่นาที และเป็นเวลาใด
5. พรชัยและศรัญมีบ้านอยู่บนถนนสายเดียวกันและอยู่ห่างกัน 20 กิโลเมตร วันนี้ทั้งสองคนนัดออกจากบ้านพร้อมกันเวลา 7.00 น. เพื่อไปประชุมที่อำเภอซึ่งบ้านของศรัญอยู่ใกล้อำเภอมากกว่าบ้านของพรชัยและอยู่บนถนนสายเดียวกัน ถ้าพรชัยขับรถด้วยอัตราเร็ว 80 กิโลเมตรต่อชั่วโมงและศรัญขับรถด้วยอัตราเร็ว 60 กิโลเมตรต่อชั่วโมง พรชัยจะถึงอำเภอก่อนศรัญ 10 นาที จงหาว่าอำเภออยู่ห่างจากบ้านของศรัญกี่กิโลเมตร

6.
นักกีฬาขี่จักรยานทางไกลในระยะทาง 57 กิโลเมตร โดยใช้อัตราเร็วช่วงแรก 12 กิโลเมตรต่อชั่วโมงและช่วงต่อไป 16 กิโลเมตรต่อชั่วโมง ถ้าเขาใช้เวลาในการขี่จักรยานตลอดทางรวม 4 ชั่วโมง จงหาระยะทางและเวลาที่ขี่จักรยานของแต่ละช่วง

7. ชายคนหนึ่งขับรถได้ทาง 235 กิโลเมตร เขาใช้เวลาขับรถในช่วงกลางวัน 2 ชั่วโมง และในช่วงกลางคืน $1\frac{1}{2}$ ชั่วโมงโดยลดอัตราเร็วลงน้อยกว่าในช่วงกลางวันชั่วโมงละ 16 กิโลเมตร จงหา
   1) อัตราเร็วเฉลี่ยของรถในช่วงกลางวัน
   2) ระยะทางที่เขาขับรถในช่วงกลางคืน

8. รถไฟขบวน ก และขบวน ข ออกจากสถานีบ้านม้า โดยแล่นตามกันไปยังสถานีปลายทางที่เดียวกัน ถ้ารถไฟขบวน ก ออกจากสถานีเมื่อเวลา 6.00 น. ด้วยอัตราเร็ว 40 กิโลเมตรต่อชั่วโมง รถไฟขบวน ข ออกจากสถานีเมื่อเวลา 8.30 น. ด้วยอัตราเร็ว 60 กิโลเมตรต่อชั่วโมง จงหาว่ารถไฟขบวน ข แล่นไปทันขบวน ก เมื่อเวลาใด และจุดที่รถไฟทั้งสองแล่นทันกันนั้นอยู่ห่างจากสถานีบ้านม้ากี่กิโลเมตร

9. รถไฟขบวน ก และขบวน ข แล่นสวนทางกันและมาพบกันที่สถานีโพธิ์งาม รถไฟขบวน ก ออกจากสถานีนี้เมื่อเวลา 7.00 น. ด้วยอัตราเร็ว 45 กิโลเมตรต่อชั่วโมง รถไฟขบวน ข ออกจากสถานีนี้หลังจากขบวน ก ออกไปแล้ว 3 นาที และไปถึงสถานีปลายทางบัวขาวเมื่อเวลา 8.15 น. ซึ่งถึงที่ก่อนรถไฟขบวน ก จะไปถึงสถานีปลายทางทุ่งเขียว 5 นาที ถ้าสถานีปลายทางทั้งสองอยู่ห่างกัน 150 กิโลเมตร จงหาว่ารถไฟขบวน ข แล่นด้วยอัตราเร็วเท่าไร

อีสปนักเล่านิทานเอกของโลก

อีสปเป็นชาวกรีกที่เฉลียวฉลาดและหลักแหลม ได้รับการยกย่องว่าเป็นนักเล่านิทานเอกของโลก เขาไม่เคยเขียนบันทึกนิทานของตนเองเลย แต่มีนักเขียนชาวกรีกคนหนึ่งได้รวบรวมนิทานของเขามาเขียนเป็นหนังสือ ซึ่งมีผู้พบหนังสือนี้เมื่อ ค.ศ. 1844 ในวิหารโบราณแห่งหนึ่ง จึงนำมาพิมพ์เผยแพร่ ซึ่งเป็นที่นิยมอ่านกันทั่วโลก นิทานของอีสปมีบทธรรมะสอนใจทุกเรื่อง ถือเป็นงาน “อมตะ” มาตราบเท่าทุกวันนี้

นักเรียนคงเคยอ่านนิทานในหนังสือนิทานอีสปมาบ้างแล้ว เช่น นิทานเรื่องกระต่ายกับเต่า ซึ่งสอนให้รู้ว่า ผู้ที่ตั้งใจทำงานด้วยความขยัน หมั่นเพียร และอดทน จะประสบผลสำเร็จ สำหรับผู้ที่มีความสามารถ แต่มีความประมาทและชะล่าใจอาจประสบความล้มเหลวได้

ต่อไปนี้เป็นโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับกระต่ายกับเต่า

กระต่ายกับเต่า

กระต่ายตัวหนึ่งชอบคุยอวดว่าตนเป็นจ้าวแห่งความเร็วไม่มีใครสู้ได้ เห็นเต่าตัวหนึ่งคลานงุ่มง่ามมาช้าเหลือเกิน จึงทักออกไปว่า “คุณเต่าที่น่าเวทนา คุณเดินช้างุ่มง่ามอย่างนี้ ไม่ทันใจเอาเสียเลย” กระต่ายพูดพลางหัวเราะเยาะพลาง “ดูเราสิ ฝีเท้าเร็ววิ่งได้ไกลเป็น 100 เส้น ในขณะที่เจ้าคลานได้ไม่ถึงเส้น” เต่าได้ฟังก็ร้องออกไปว่า “เราช้าก็จริง แต่เจ้าจะลองวิ่งแข่งกับเราไหมล่ะ” กระต่ายตอบตกลงทันทีพร้อมกับหัวเราะอย่างขบขัน “ได้เลยเพื่อน และเพื่อให้การแข่งขันมีความยุติธรรม เราจะขอให้สุนัขจิ้งจอกเป็นกรรมการ”

การแข่งขันเริ่มขึ้นเมื่อสุนัขจิ้งจอกให้สัญญาณ “ไปได้” กระต่ายออกวิ่งด้วยความเร็วสูง ไม่ช้าก็ทิ้งเต่าอยู่เบื้องหลังไกลลิบลับ ยังเหลือทางอีก 20 เส้นก็จะถึงเส้นชัย กระต่ายเห็นต้นไม้ใหญ่ร่มใบหนา หญ้านุ่ม จึงคิดว่า “น่าจะนอนหลับสักงีบ แล้วค่อยวิ่งต่อ อย่างไรเจ้าเต่าก็ตามไม่ทันอยู่ดี” ว่าแล้วกระต่ายก็ล้มตัวลงนอนบนพื้นหญ้านุ่มใต้ต้นไม้ใหญ่หลับอย่างสบายอารมณ์ เต่าผู้มีความพยายามเป็นเลิศ คลานไปอย่างช้า ๆ สม่ำเสมอผ่านเจ้ากระต่ายขี้เซาจนเข้าเส้นชัยก่อนกระต่าย

นักเรียนบอกได้ไหมว่า ถ้าให้กระต่ายวิ่งด้วยอัตราเร็ว 150 เส้นต่อชั่วโมง และเต่าเดินด้วยอัตราเร็ว 20 เส้นต่อชั่วโมง ให้ทั้งคู่เริ่มแข่งขันกันเมื่อเวลา 6.00 น. ถ้าเต่าเดินผ่านจุดที่กระต่ายนอนหลับเมื่อเวลา 9.00 น. ของวันเดียวกันและถึงเส้นชัยในเวลาต่อมา

จงหาว่า

1) ระยะทางที่แข่งขันนี้ยาวกี่เส้น
2) เต่าถึงเส้นชัยเมื่อเวลากี่นาฬิกา
3) ถ้ากระต่ายตื่นขึ้นมาเมื่อเวลา 9.50 น. แล้วออกวิ่งต่อ กระต่ายจะชนะเต่าหรือไม่ ถ้าชนะ กระต่ายจะถึงก่อนเต่ากี่นาที
4) จากข้อมูลในข้อ 3) กระต่ายนอนหลับไปนานกี่ชั่วโมง

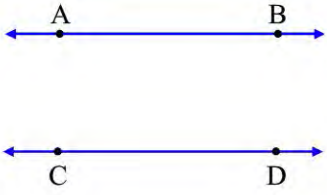
บทที่ 4
เส้นขนาน

4.1 เส้นขนานและมุมภายใน

ในสิ่งแวดล้อมรอบตัวเรา มีตัวอย่างของสิ่งที่มีลักษณะของเส้นขนาน เช่น รางรถไฟ ราวบันได รั้ว แนวกระเบื้องปูพื้น และเส้นบรรทัดในสมุด

การขนานกันของเส้นตรงมีบทนิยามดังนี้

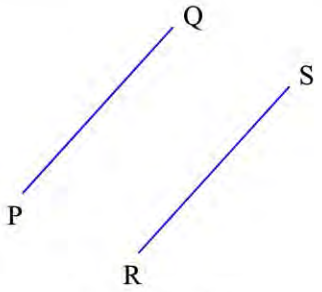
บทนิยาม เส้นตรงสองเส้นที่อยู่บนระนาบเดียวกัน ขนานกัน ก็ต่อเมื่อ เส้นตรงทั้งสองเส้นนั้นไม่ตัดกัน



เมื่อ $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ขนานกัน อาจกล่าวว่า $\overleftrightarrow{AB}$ ขนานกับ $\overleftrightarrow{CD}$ หรือ $\overleftrightarrow{CD}$ ขนานกับ $\overleftrightarrow{AB}$ อาจเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ หรือ $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{AB}$

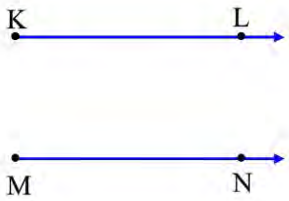
เราสามารถกล่าวว่าส่วนของเส้นตรงหรือรังสีขนานกันเมื่อส่วนของเส้นตรงหรือรังสีนั้นเป็นส่วนหนึ่งของเส้นตรงที่ขนานกัน เช่น

1.



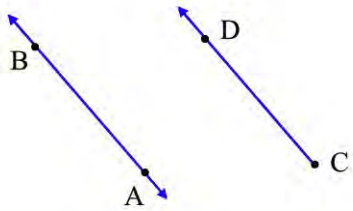
$\overline{PQ} // \overline{RS}$

2.



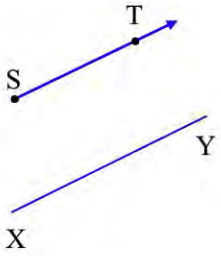
$\overleftrightarrow{KL} // \overleftrightarrow{MN}$

3.



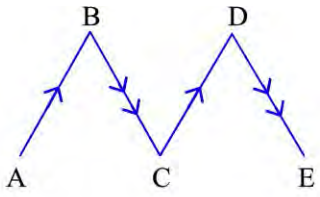
$\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$

4.



$\overrightarrow{ST} // \overline{XY}$

ในการเขียนรูปเส้นตรง ส่วนของเส้นตรง หรือรังสีที่ขนานกัน อาจใช้ลูกศรแสดงเส้นที่ขนานกัน ดังตัวอย่างในรูป

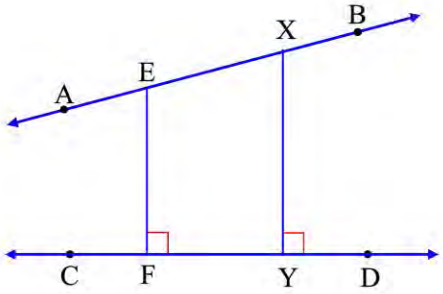


แสดงว่า $\overline{AB} // \overline{CD}$

และ $\overline{BC} // \overline{DE}$

ระยะห่างระหว่างเส้นขนาน

พิจารณารูปต่อไปนี้



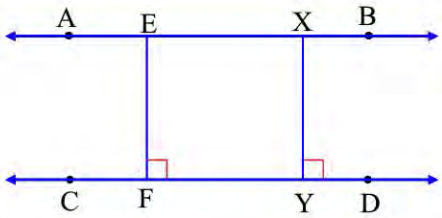
กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ อยู่บนระนาบเดียวกัน E และ X เป็นจุดที่แตกต่างกัน บน $\overleftrightarrow{AB}$ ลาก $\overline{EF}$ ตั้งฉากกับ $\overleftrightarrow{CD}$ ที่จุด F และลาก $\overline{XY}$ ตั้งฉากกับ $\overline{CD}$ ที่จุด Y

เรียก EF ว่า *ระยะห่างระหว่าง* $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ที่วัดจากจุด E

และ เรียก XY ว่า *ระยะห่างระหว่าง* $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ที่วัดจากจุด X

ในกรณีที่ $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ไม่ขนานกัน จะได้ว่า $EF \neq XY$ นั่นคือระยะห่างระหว่าง $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ที่วัดจากจุดที่แตกต่างกันบน $\overleftrightarrow{AB}$ จะไม่เท่ากัน

ในกรณีที่ $\overleftrightarrow{AB}$ ขนานกับ $\overleftrightarrow{CD}$ จะได้ว่า $EF = XY$ นั่นคือระยะห่างระหว่าง $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ที่วัดจากจุดที่แตกต่างกันบน $\overleftrightarrow{AB}$ จะเท่ากันเสมอ



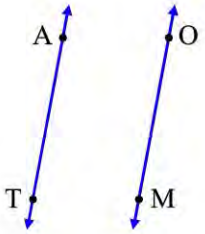
ในกรณีทั่วไป *ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกัน แล้วระยะห่างระหว่างเส้นตรงคู่นั้นจะเท่ากันเสมอ* และในทางกลับกัน *ถ้าเส้นตรงสองเส้นมีระยะห่างระหว่างเส้นตรงเท่ากันเสมอ แล้วเส้นตรงคู่นั้นจะขนานกัน*

ในทางปฏิบัติ เมื่อต้องการตรวจสอบว่า เส้นตรงสองเส้นที่กำหนดให้ขนานกันหรือไม่ อาจตรวจสอบระยะห่างระหว่างเส้นตรงทั้งสองที่วัดจากจุดที่แตกต่างกันอย่างน้อยสองจุดบนเส้นตรงเส้นหนึ่งก็เพียงพอ

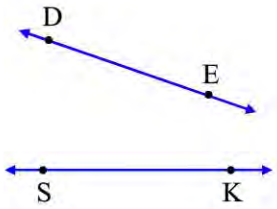
เส้นตรงคู่ใดขนานกัน

เส้นตรงสองเส้นในแต่ละข้อต่อไปนี้ อยู่บนระนาบเดียวกัน จงพิจารณาว่า เส้นตรงคู่ใดขนานกัน เพราะเหตุใด

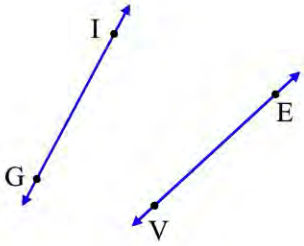
1.



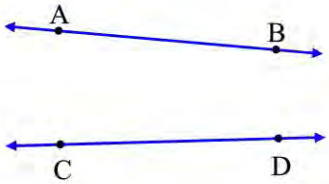
2.



3.

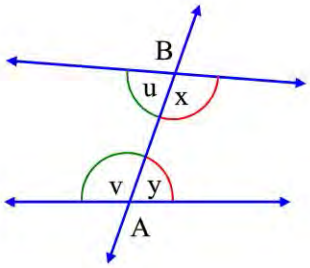


4.



ในการตรวจสอบว่าเส้นตรงคู่ใดขนานกันหรือไม่ นอกจากการใช้บทนิยามของเส้นขนานโดยตรงและการพิจารณาจากระยะห่างระหว่างเส้นตรงสองเส้นแล้ว ยังมีวิธีการอื่นที่จะตรวจสอบโดยพิจารณาจากขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด ดังต่อไปนี้

มุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด



จากรูป $\overleftrightarrow{AB}$ เรียกว่า เส้นตัด AB

เรียก $\hat{x}$ และ $\hat{y}$ ว่า มุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด AB และ

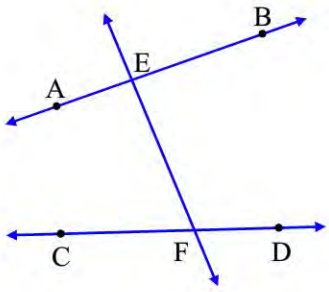
เรียก $\hat{u}$ และ $\hat{v}$ ว่า มุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด AB ด้วย

ในการเขียนรูปเส้นตัด AB อาจใช้ $\overline{AB}$ หรือ $\overrightarrow{AB}$ แทน $\overleftrightarrow{AB}$ ก็ได้

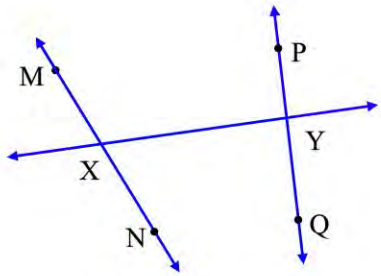
มุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด

ในแต่ละข้อต่อไปนี้ จงสำรวจว่ามุมคู่ใดเป็นมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด

1.



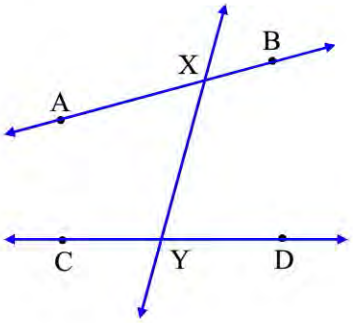
2.



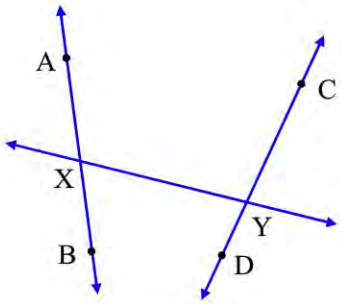
ผลบวกของขนาดของมุมภายใน ที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด

1. ในแต่ละข้อกำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ไม่ขนานกัน มี $\overleftrightarrow{XY}$ เป็นเส้นตัด จงสำรวจว่าขนาดของมุมภายในแต่ละคู่ที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด รวมกันเท่ากับ 180 องศา หรือไม่

1)

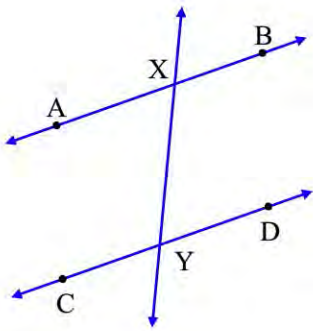


2)

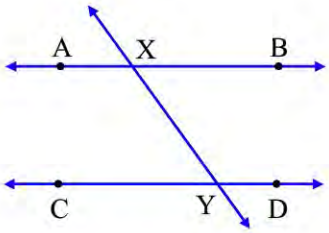


2. ในแต่ละข้อกำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ขนานกัน มี $\overleftrightarrow{XY}$ เป็นเส้นตัด จงสำรวจว่าขนาดของมุมภายในแต่ละคู่ที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด รวมกันเท่ากับ 180 องศา หรือไม่

1)



2)



3. จากคำตอบที่ได้จากข้อ 1 และข้อ 2 เมื่อกำหนดเส้นตรงคู่หนึ่งมาให้ นักเรียนได้ผลสรุปอย่างไรเกี่ยวกับผลบวกของขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด กับการขนานกันของเส้นตรงคู่นั้น

ผลสรุปที่ได้ในข้อ 3 เป็นไปตามสมบัติของเส้นขนาน ดังนี้

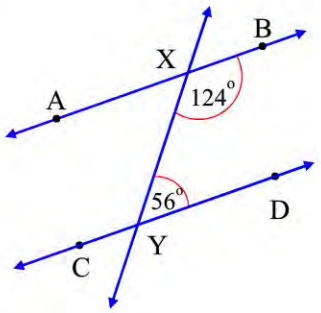
1) ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับ 180 องศา
2) ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับ 180 องศา แล้วเส้นตรงคู่นั้นจะขนานกัน

สมบัติข้อ 1) และข้อ 2) เมื่อนำมาเขียนใหม่โดยใช้ “ก็ต่อเมื่อ” จะได้ดังนี้

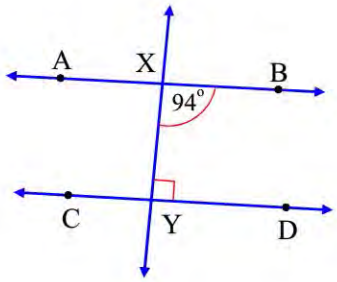
เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่นั้นขนานกัน ก็ต่อเมื่อขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับ 180 องศา

ตัวอย่างที่ 1 $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ในแต่ละข้อขนานกันหรือไม่ เพราะเหตุใด

1)



2)



วิธีทำ 1) $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

เพราะว่า ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับ

$124 + 56 = 180$ องศา

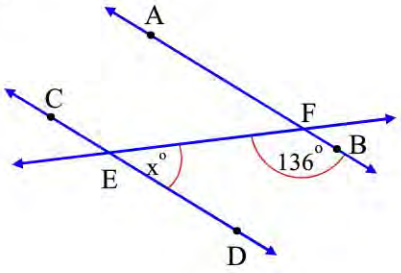
2) $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ไม่ขนานกัน

เพราะว่า ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับ

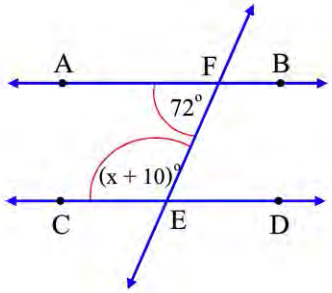
$94 + 90 = 184$ องศา ซึ่งไม่เท่ากับ 180 องศา

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ จงหาค่าของ x ในแต่ละข้อ

1)



2)



วิธีทำ 1) เนื่องจาก $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ จะได้ $x + 136 = 180$ (ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดเส้นขนานรวมกันเท่ากับ 180^o)

$x = 180 - 136$

ดังนั้น $x = 44$

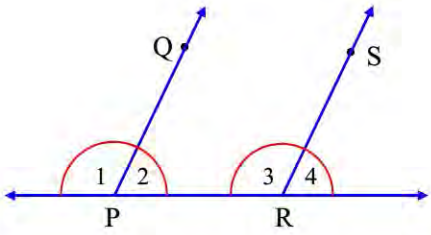
2) เนื่องจาก $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ จะได้ $x + 10 + 72 = 180$ (ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดเส้นขนานรวมกันเท่ากับ 180^o)

$x + 82 = 180$

$x = 180 - 82$

ดังนั้น $x = 98$

ตัวอย่างที่ 3 จากรูป กำหนดให้ $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{RS}$ จงพิสูจน์ว่า $\hat{1} = \hat{3}$



กำหนดให้ $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{RS}$ มี $\overleftrightarrow{PR}$ เป็นเส้นตัด

ต้องการพิสูจน์ว่า $\hat{1} = \hat{3}$

พิสูจน์ $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{RS}$ มี $\overleftrightarrow{PR}$ เป็นเส้นตัด (กำหนดให้)

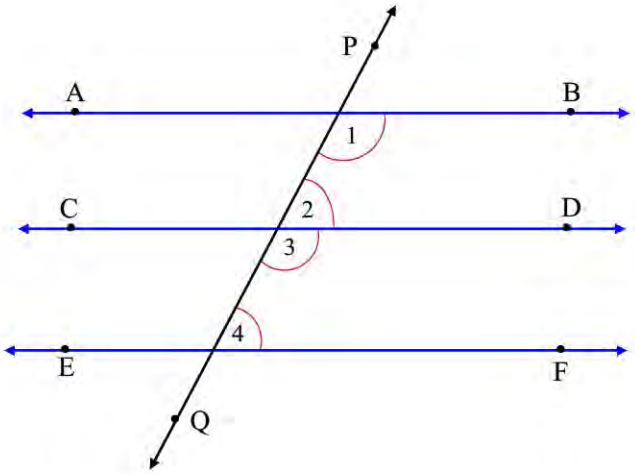
$\hat{2} + \hat{3} = 180^{\circ}$ (ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดเส้นขนานรวมกันเท่ากับ 180°)

$\hat{2} + \hat{1} = 180^{\circ}$ (ขนาดของมุมตรง)

จะได้ $\hat{2} + \hat{1} = \hat{2} + \hat{3}$ (สมบัติของการเท่ากัน)

ดังนั้น $\hat{1} = \hat{3}$ (นำ $\hat{2}$ มาลบทั้งสองข้างของสมการ)

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ และ $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{EF}$ ดังรูป จงพิสูจน์ว่า $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{EF}$



กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ และ $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{EF}$

ต้องการพิสูจน์ว่า $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{EF}$

พิสูจน์ ลาก $\overleftrightarrow{PQ}$ ให้ตัด $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ และ $\overleftrightarrow{EF}$ ดังรูป

$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ และมี $\overleftrightarrow{PQ}$ เป็นเส้นตัด (กำหนดให้และสร้าง)

$\hat{1} + \hat{2} = 180^\circ$ (ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดเส้นขนานรวมกันเท่ากับ 180°)

$\overleftrightarrow{CD} // \overleftrightarrow{EF}$ และมี $\overleftrightarrow{PQ}$ เป็นเส้นตัด (กำหนดให้และสร้าง)

$\hat{3} + \hat{4} = 180^\circ$ (ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดเส้นขนานรวมกันเท่ากับ 180°)

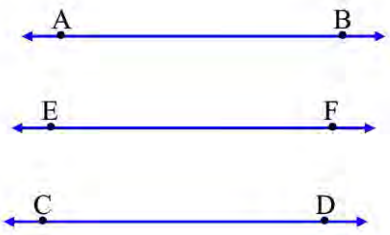
$\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} = 180^\circ + 180^\circ$ (สมบัติของการเท่ากัน)

แต่ $\hat{2} + \hat{3} = 180^\circ$ (ขนาดของมุมตรง)

จะได้ $\hat{1} + \hat{4} = 180^\circ$ (สมบัติของการเท่ากัน)

ดังนั้น $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{EF}$ (ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่งทำให้ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับ 180° แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน)

ในทำนองเดียวกัน ถ้ากำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ และ $\overleftrightarrow{CD} // \overleftrightarrow{EF}$ ดังรูป จะสามารถพิสูจน์ได้ว่า $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{EF}$

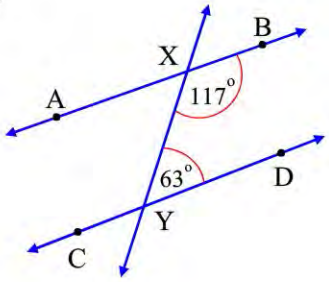


จากตัวอย่างที่ 4 ถ้า $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ และ $\overleftrightarrow{CD} // \overleftrightarrow{EF}$ แล้ว $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{EF}$ กล่าวได้ว่า *การขนานกันของเส้นตรงมีสมบัติถ่ายทอด*

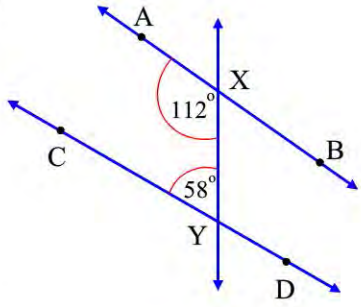
แบบฝึกหัด 4.1

1. เส้นตรงแต่ละคู่ต่อไปนี้ ขนานกันหรือไม่ เพราะเหตุใด

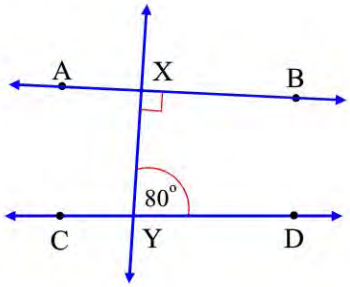
1)



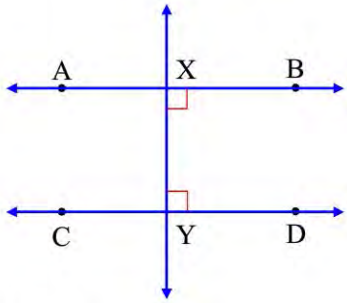
2)



3)

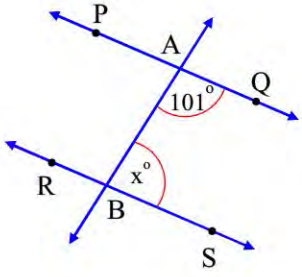


4)

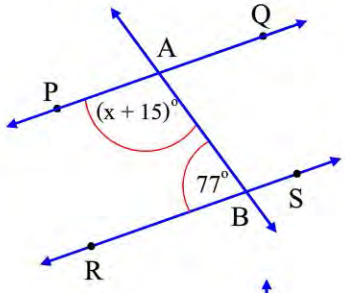


2. จงหาค่าของ x ในแต่ละข้อต่อไปนี้ เมื่อกำหนดให้ $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{RS}$

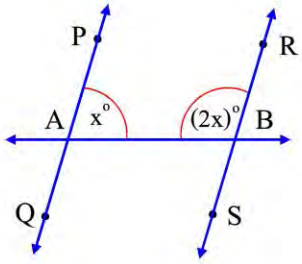
1)



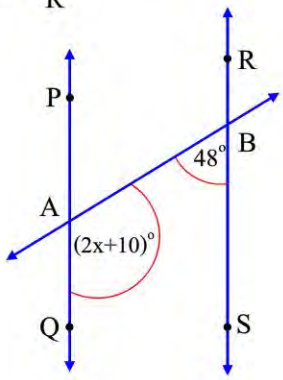
2)



3)

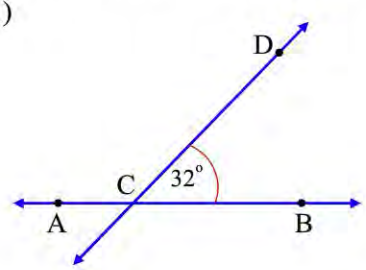


4)

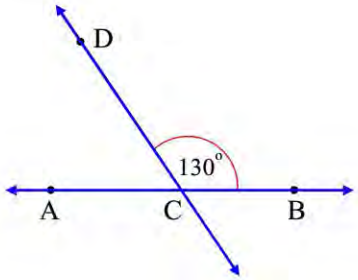


3. จากรูปต่อไปนี้ จงลาก $\overleftrightarrow{EF}$ ให้ผ่านจุด D และขนานกับ $\overleftrightarrow{AB}$ พร้อมทั้งบอกขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันกับ $D\hat{C}B$ ของเส้นตัด CD

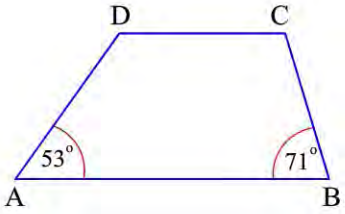
1)



2)

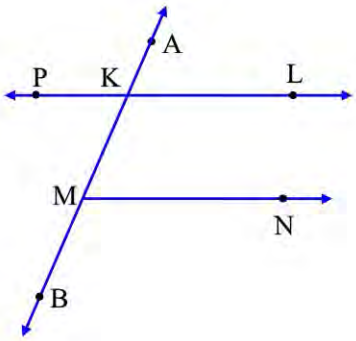


4.



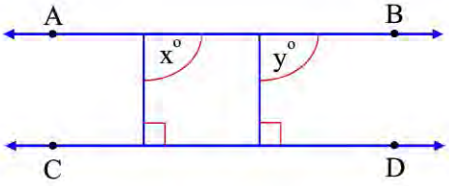
จากรูป กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู มีด้าน AB ขนานกับด้าน CD ดังรูป จงหาขนาดของ $A\hat{D}C$ และขนาดของ $B\hat{C}D$

5.



จากรูป กำหนดให้ $\overleftrightarrow{PL} \parallel \overrightarrow{MN}$ จงพิสูจน์ว่า $B\hat{M}N = M\hat{K}L$

6.

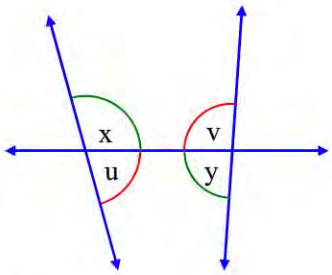


จากรูป กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ จงหาค่าของ x และ y

7. ในรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากใด ๆ ด้านที่อยู่ตรงข้ามกันขนานกันหรือไม่ เพราะเหตุใด

4.2 เส้นขนานและมุมแย้ง

พิจารณารูปต่อไปนี้



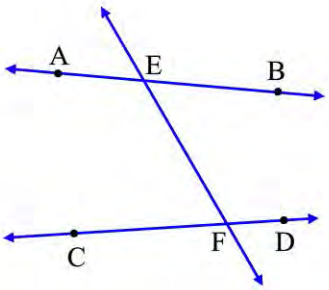
จากรูป เรียก $\hat{x}$ และ $\hat{y}$ ว่าเป็น**มุมแย้ง** และ

เรียก $\hat{u}$ และ $\hat{v}$ ว่าเป็น**มุมแย้ง**

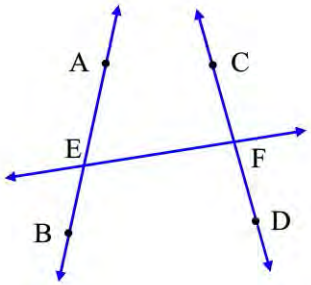
สำรวจมุมแย้ง

1. ในแต่ละรูป กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ มี $\overleftrightarrow{EF}$ เป็นเส้นตัด จงสำรวจว่ามุมคู่ใดเป็นมุมแย้ง

1)

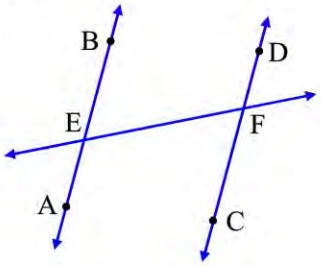


2)

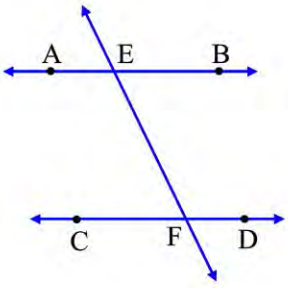


2. ในแต่ละรูป กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ มี $\overleftrightarrow{EF}$ เป็นเส้นตัด จงสำรวจว่ามุมแย้งคู่ใดมีขนาดเท่ากัน

1)

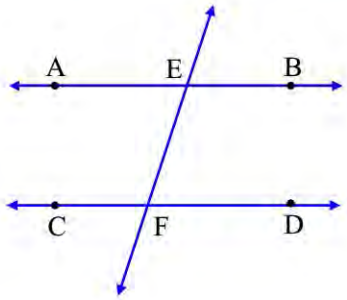


2)



สิ่งที่สำรวจได้คือ “ถ้า $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ และมี $\overleftrightarrow{EF}$ เป็นเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน” เป็นข้อสรุปที่เป็นไปตามทฤษฎีบท ซึ่งสามารถแสดงการพิสูจน์ได้ ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน



กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ มี $\overleftrightarrow{EF}$ เป็นเส้นตัด ตัด $\overleftrightarrow{AB}$ ที่จุด E และตัด $\overleftrightarrow{CD}$ ที่จุด F

ต้องการพิสูจน์ว่า 1. $A\hat{E}F = D\hat{F}E$

2. $B\hat{E}F = C\hat{F}E$

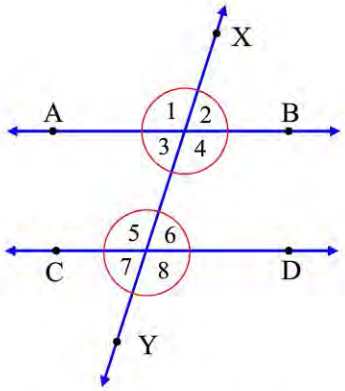
พิสูจน์

$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$	(กำหนดให้)
$B\hat{E}F + D\hat{F}E = 180^\circ$	(ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดเส้นขนานรวมกันเท่ากับ 180°)
$B\hat{E}F + A\hat{E}F = 180^\circ$	(ขนาดของมุมตรง)
ดังนั้น $B\hat{E}F + A\hat{E}F = B\hat{E}F + D\hat{F}E$	(สมบัติของการเท่ากัน)
จะได้ $A\hat{E}F = D\hat{F}E$	(นำ $B\hat{E}F$ มาลบทั้งสองข้างของสมการ)

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า $B\hat{E}F = C\hat{F}E$

ผลจากทฤษฎีบทนี้ นักเรียนสามารถนำไปใช้อ้างอิงในการพิสูจน์และแก้ปัญหาได้

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ และมี $\overleftrightarrow{XY}$ เป็นเส้นตัด ดังรูป จงอธิบายว่ามุมคู่ใดมีขนาดเท่ากันบ้าง



วิธีทำ เนื่องจาก $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ มี $\overleftrightarrow{XY}$ เป็นเส้นตัด จะได้มุมแย้งมีขนาดเท่ากันคือ

$\hat{3} = \hat{6}$ และ $\hat{4} = \hat{5}$

เนื่องจาก $\overleftrightarrow{XY}$ ตัดกับ $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ จะได้มุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากันคือ

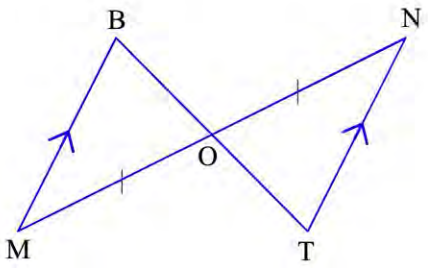
$\hat{1} = \hat{4}$, $\hat{2} = \hat{3}$, $\hat{5} = \hat{8}$ และ $\hat{6} = \hat{7}$

โดยสมบัติของการเท่ากัน สรุปได้ว่ามีมุมที่มีขนาดเท่ากันอยู่ 2 ชุด ดังนี้

1) $\hat{1} = \hat{4} = \hat{5} = \hat{8}$

2) $\hat{2} = \hat{3} = \hat{6} = \hat{7}$

ตัวอย่างที่ 2 จากรูป กำหนดให้ $\overline{MB} // \overline{TN}$ และ MO = NO จงพิสูจน์ว่า MB = NT



กำหนดให้ $\overline{MB} // \overline{TN}$ และ MO = NO

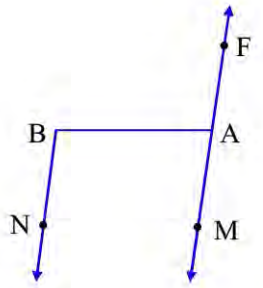
ต้องการพิสูจน์ว่า MB = NT

พิสูจน์ $\overline{MB} \parallel \overline{TN}$ และมี $\overline{MN}$ เป็นเส้นตัด

$B\hat{M}O = T\hat{N}O$	(ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน)
$MO = NO$	(กำหนดให้)
$M\hat{O}B = N\hat{O}T$	(ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกัน แล้วมุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน)
ดังนั้น $\Delta MOB \cong \Delta NOT$	(ม.ด.ม.)
จะได้ $MB = NT$	(ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะยาวเท่ากัน)

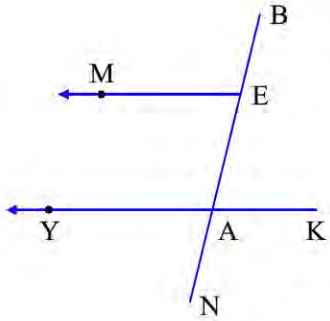
แบบฝึกหัด 4.2 ก

1.



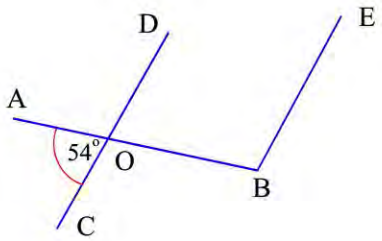
จากรูป กำหนดให้ $\overrightarrow{BN} \parallel \overleftrightarrow{FM}$ จงหาว่า $F\hat{A}B$ มีขนาดเท่ากับขนาดของมุมใด เพราะเหตุใด

2.



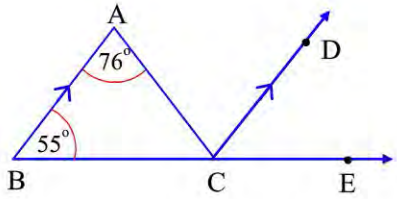
จากรูป กำหนดให้ $\overrightarrow{EM} \parallel \overrightarrow{KY}$ จงหาว่า $M\hat{E}A$ มีขนาดเท่ากับขนาดของมุมใด เพราะเหตุใด

3.



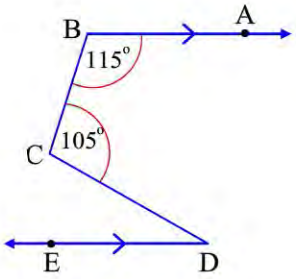
จากรูป กำหนดให้ $\overline{CD} \parallel \overline{BE}$ และ $A\hat{O}C = 54^\circ$ จงหาขนาดของ $O\hat{B}E$

4.



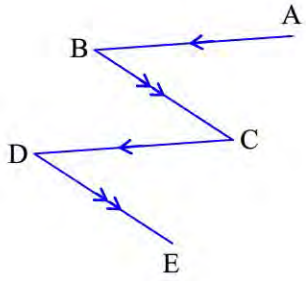
จากรูป กำหนดให้ $\overline{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ ถ้า $A\hat{B}C = 55^\circ$ และ $B\hat{A}C = 76^\circ$ จงหาขนาดของ $A\hat{C}E$

5.



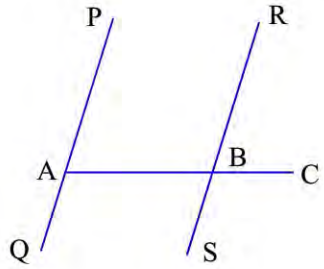
จากรูป กำหนดให้ $\overrightarrow{BA} \parallel \overrightarrow{DE}$ ถ้า $A\hat{B}C = 115^\circ$ และ $B\hat{C}D = 105^\circ$ จงหาขนาดของ $C\hat{D}E$

6.



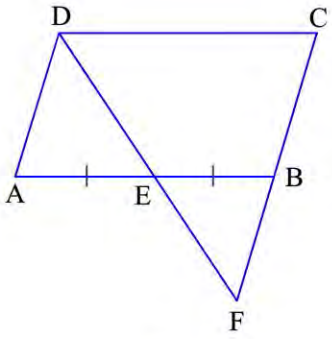
กำหนดให้ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ และ $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$ จงพิสูจน์ว่า $A\hat{B}C = C\hat{D}E$

7.



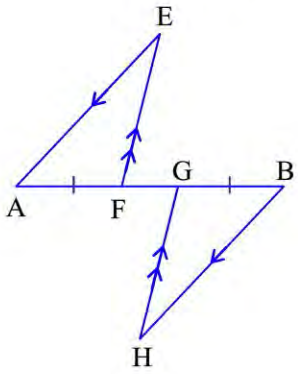
จากรูป กำหนดให้ $\overline{PQ} \parallel \overline{RS}$ จงพิสูจน์ว่า $P\hat{A}C = R\hat{B}C$

8.



จากรูป กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน E เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}$ จงพิสูจน์ว่า DE = FE

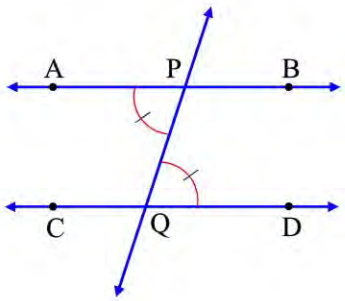
9.



จากรูป กำหนดให้ $\overline{AE} \parallel \overline{HB}$, $\overline{FE} \parallel \overline{HG}$ และ AF = BG จงพิสูจน์ว่า FE = GH

ในการตรวจสอบว่า เส้นตรงสองเส้นขนานกันหรือไม่ นอกจากจะพิจารณาจากขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดเส้นตรงทั้งสองแล้ว ยังสามารถพิจารณาจากขนาดของมุมแย้งได้ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน



กำหนดให้ $\overleftrightarrow{PQ}$ ตัด $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ทำให้ $A\hat{P}Q$ และ $D\hat{Q}P$ เป็นมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน

ต้องการพิสูจน์ว่า $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$

พิสูจน์

$A\hat{P}Q + B\hat{P}Q = 180^\circ$	(ขนาดของมุมตรง)
$A\hat{P}Q = D\hat{Q}P$	(กำหนดให้)
$D\hat{Q}P + B\hat{P}Q = 180^\circ$	(แทน $A\hat{P}Q$ ด้วย $D\hat{Q}P$)

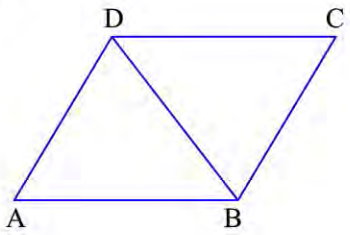
เนื่องจาก $D\hat{Q}P$ และ $B\hat{P}Q$ เป็นมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด PQ

ดังนั้น $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ (ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่งทำให้ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับ 180° แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน)

ทฤษฎีบทข้างต้นนี้เป็นบทกลับของทฤษฎีบทที่ว่า “ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน” เมื่อนำทฤษฎีบททั้งสองนี้มาเขียนใหม่โดยใช้ “ก็ต่อเมื่อ” จะได้ทฤษฎีบทดังนี้

ทฤษฎีบท เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่นั้นขนานกัน ก็ต่อเมื่อ มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน

ตัวอย่างที่ 3



จากรูป กำหนดให้ ABCD มี AB = CD และ AD = CB จงพิสูจน์ว่า $\overline{AB} // \overline{CD}$

กำหนดให้ ABCD มี AB = CD และ AD = CB

ต้องการพิสูจน์ว่า $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

พิสูจน์ ลาก $\overline{BD}$

พิจารณา ΔABD และ ΔCDB

AB = CD	(กำหนดให้)
AD = CB	(กำหนดให้)
BD = DB	($\overline{BD}$ เป็นด้านร่วม)
ดังนั้น $\Delta ABD \cong \Delta CDB$	(ด.ด.ด)
จะได้ $A\hat{B}D = C\hat{D}B$	(มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่เท่ากันทุกประการ จะมีขนาดเท่ากัน)

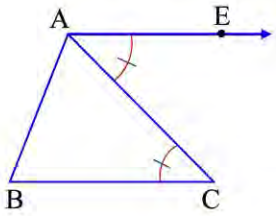
เนื่องจาก $A\hat{B}D$ และ $C\hat{D}B$ เป็นมุมแย้ง

ดังนั้น $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ (ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่งทำให้มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน)

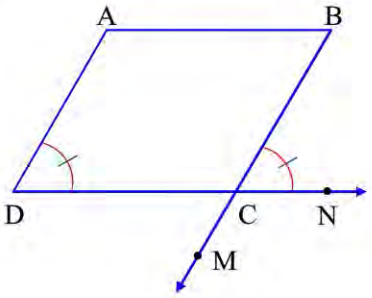
แบบฝึกหัด 4.2 ข

1. จากรูปที่กำหนดให้ จงหาว่าเส้นตรง รังสี หรือส่วนของเส้นตรงคู่ใดขนานกัน พร้อมทั้งให้เหตุผล

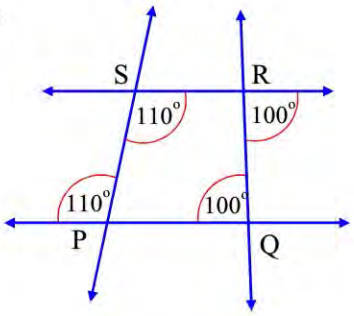
1)



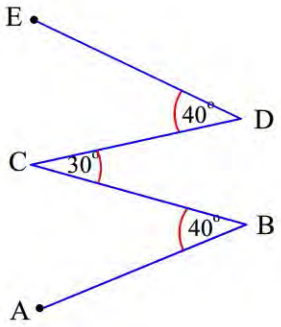
2)



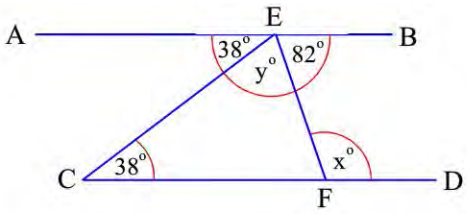
3)



4)

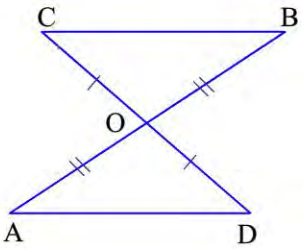


2.



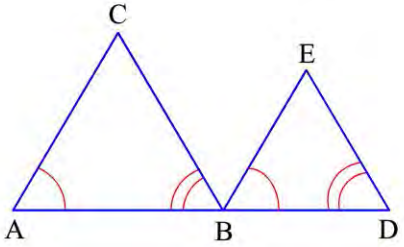
จากรูป จงหาค่าของ x และ y

3.



จากรูป กำหนดให้ $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ แบ่งครึ่งซึ่งกันและกันที่จุด O จงพิสูจน์ว่า AD = BC และ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

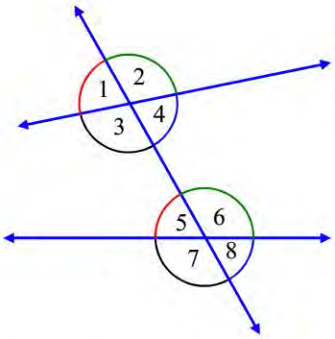
4.



จากรูป กำหนดให้ $C\hat{A}B = E\hat{B}D$ และ $A\hat{B}C = B\hat{D}E$ จงพิสูจน์ว่า $\overline{AC} \parallel \overline{BE}$ และ $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$

4.3 เส้นขนานและมุมภายนอกกับมุมภายใน

พิจารณารูปต่อไปนี้



จากรูป เรียก $\hat{1}$, $\hat{2}$, $\hat{7}$ และ $\hat{8}$ ว่า*มุมภายนอก*

เรียก $\hat{3}$, $\hat{4}$, $\hat{5}$ และ $\hat{6}$ ว่า*มุมภายใน*

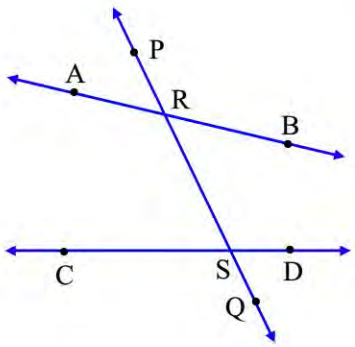
เรียก $\hat{1}$ และ $\hat{5}$ ว่าเป็น*มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด*

ในทำนองเดียวกัน จะเรียก $\hat{2}$ และ $\hat{6}$, $\hat{7}$ และ $\hat{3}$, $\hat{8}$ และ $\hat{4}$ แต่ละคู่ว่าเป็น*มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด*ด้วย

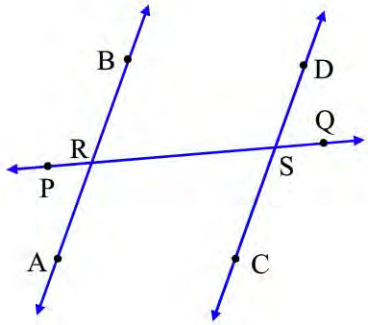
สำรวจมุมภายนอกและมุมภายใน

1. ในแต่ละรูป กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ มี $\overleftrightarrow{PQ}$ เป็นเส้นตัด จงสำรวจว่ามุมคู่ใดบ้างเป็นมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด

1)

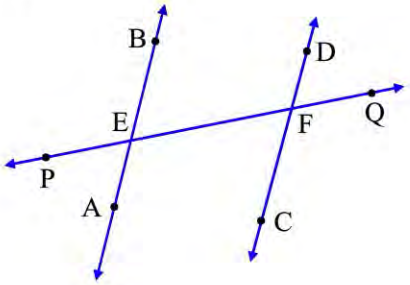


2)

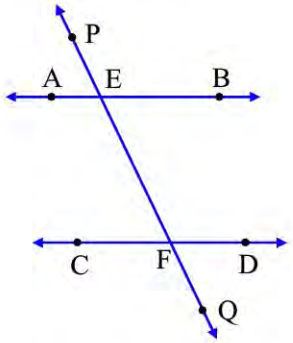


2. ในแต่ละรูป กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ มี $\overleftrightarrow{PQ}$ เป็นเส้นตัด จงสำรวจว่ามุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดคู่ใดบ้างที่มีขนาดเท่ากัน

1)

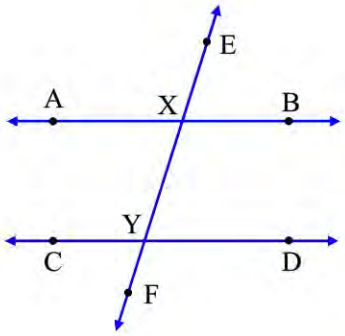


2)



เราสามารถใช้สมบัติของเส้นขนานจากหัวข้อ 4.1 และทฤษฎีบทจากหัวข้อ 4.2 มาอ้างอิงในการพิสูจน์เกี่ยวกับขนาดของมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดเส้นขนานดังนี้

ทฤษฎีบท ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน



กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ มี $\overleftrightarrow{EF}$ เป็นเส้นตัด $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ที่จุด X และ Y ตามลำดับ

ต้องการพิสูจน์ว่า $A\hat{X}E = C\hat{Y}X$, $B\hat{X}E = D\hat{Y}X$, $C\hat{Y}F = A\hat{X}Y$ และ $D\hat{Y}F = B\hat{X}Y$

พิสูจน์ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ (กำหนดให้)

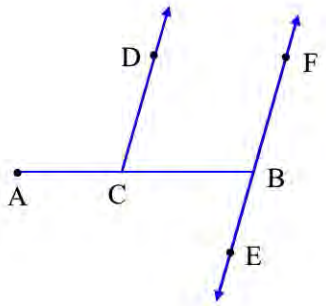
$B\hat{X}Y = C\hat{Y}X$ (ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน)

$A\hat{X}E = B\hat{X}Y$ (ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกัน แล้วมุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน)

ดังนั้น $A\hat{X}E = C\hat{Y}X$ (สมบัติของการเท่ากัน)

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า $B\hat{X}E = D\hat{Y}X$, $C\hat{Y}F = A\hat{X}Y$ และ $D\hat{Y}F = B\hat{X}Y$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $\overrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{EF}$ และมี $\overline{AB}$ เป็นเส้นตัด จงอธิบายว่า $A\hat{C}D$ มีขนาดเท่ากับขนาดของมุมใด

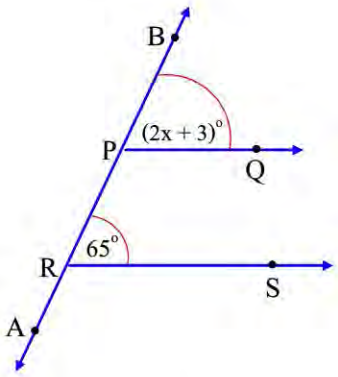


วิธีทำ เนื่องจาก $\overrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{EF}$ มี $\overline{AB}$ เป็นเส้นตัด

จะได้ $A\hat{C}D$ เป็นมุมภายนอกที่อยู่ตรงข้ามกับ $C\hat{B}F$ ซึ่งเป็นมุมภายในบนข้างเดียวกันของเส้นตัดเส้นขนาน

ดังนั้น $A\hat{C}D = C\hat{B}F$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $\overrightarrow{PQ}$ // $\overrightarrow{RS}$ และมี $\overleftrightarrow{AB}$ เป็นเส้นตัด ดังรูป จงหาค่าของ x



วิธีทำ เนื่องจาก $\overrightarrow{PQ}$ // $\overrightarrow{RS}$ มี $\overleftrightarrow{AB}$ เป็นเส้นตัด

จะได้ $\hat{BPQ} = \hat{PRS}$ (ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัดแล้วมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน)

ดังนั้น $2x + 3 = 65$ (แทน $\hat{BPQ}$ ด้วย $2x + 3$ และแทน $\hat{PRS}$ ด้วย 65)

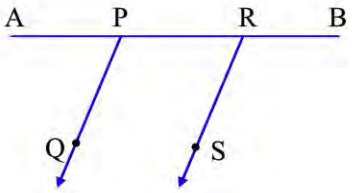
$$2x = 65 - 3$$

$$2x = 62$$

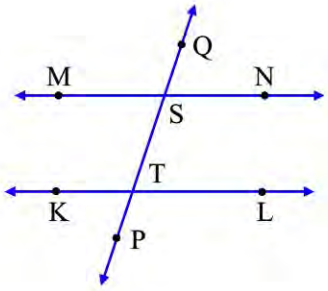
$$x = \frac{62}{2}$$

นั่นคือ $x = 31$

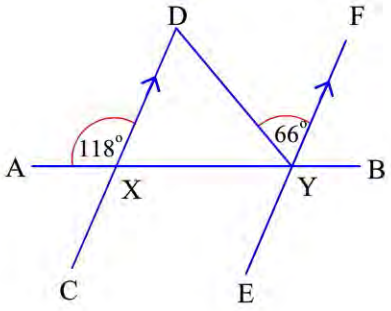
แบบฝึกหัด 4.3 ก

1. 

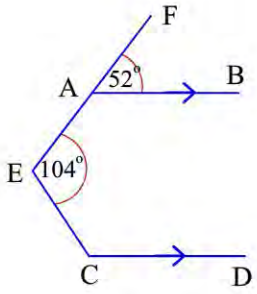
กำหนดให้ $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{RS}$ และมี $\overline{AB}$ เป็นเส้นตัด จงหามุมทุกคู่ที่มีขนาดเท่ากัน พร้อมทั้งบอกเหตุผล

2. 

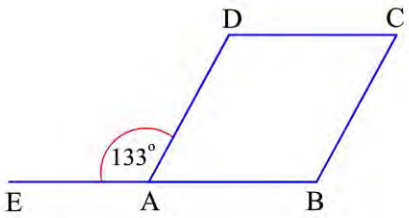
จากรูป กำหนดให้ $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{KL}$ และมี $\overleftrightarrow{PQ}$ เป็นเส้นตัด $N\hat{S}T$ มีขนาดเท่ากับขนาดของมุมใดบ้าง เพราะเหตุใด

3. 

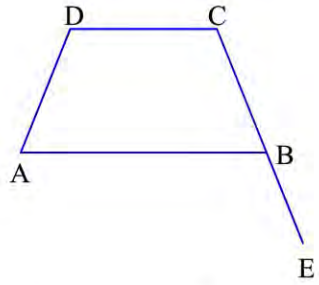
จากรูป กำหนดให้ $\overline{CD} \parallel \overline{EF}$
ถ้า $A\hat{X}D = 118^\circ$ และ $D\hat{Y}F = 66^\circ$
จงหาขนาดของ $X\hat{Y}D$

4. 

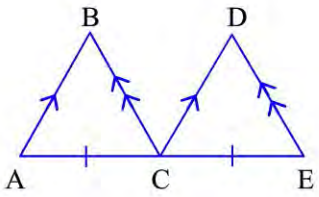
จากรูป กำหนดให้ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
ถ้า $B\hat{A}F = 52^\circ$ และ $A\hat{E}C = 104^\circ$
จงหาขนาดของ $E\hat{C}D$

5. 

จากรูป กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ถ้า $E\hat{A}D = 133^\circ$ จงหาขนาดของมุมภายในแต่ละมุมของ ABCD

6. 

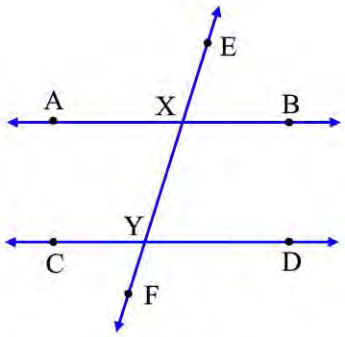
จากรูป กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู มี $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ถ้า $A\hat{B}E = (2x - 17)^\circ$ และ $B\hat{C}D = (x + 48)^\circ$ จงหาค่าของ x

7. 

จากรูป กำหนดให้ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\overline{CB} \parallel \overline{ED}$ และ AC = CE จงพิสูจน์ว่า $\Delta ABC \cong \Delta CDE$

ในการตรวจสอบว่าเส้นตรงคู่หนึ่งขนานกันหรือไม่ สามารถพิจารณาจากขนาดของมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน



กำหนดให้ $\overleftrightarrow{EF}$ ตัด $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ที่จุด X และ Y ตามลำดับ ทำให้ $A\hat{X}E = C\hat{Y}X$

ต้องการพิสูจน์ว่า $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$

พิสูจน์

เนื่องจาก $A\hat{X}E + A\hat{X}Y = 180^\circ$ (ขนาดของมุมตรง)

และ $A\hat{X}E = C\hat{Y}X$ (กำหนดให้)

จะได้ $C\hat{Y}X + A\hat{X}Y = 180^\circ$ (แทน $A\hat{X}E$ ด้วย $C\hat{Y}X$)

เนื่องจาก $C\hat{Y}X$ และ $A\hat{X}Y$ เป็นมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด EF

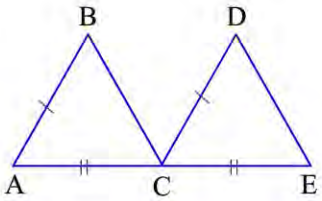
ดังนั้น $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ (ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับ 180° แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน)

ในการพิสูจน์ว่า $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ อาจนำทฤษฎีบทเกี่ยวกับมุมแย้งมาใช้ก็ได้ โดยพิสูจน์ว่า $A\hat{X}Y = D\hat{Y}X$ หรือ $B\hat{X}Y = C\hat{Y}X$

ทฤษฎีบทข้างต้น เป็นบทกลับของทฤษฎีบทที่ว่า “ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน” เมื่อนำทฤษฎีบททั้งสองนี้มาเขียนใหม่โดยใช้ “ก็ต่อเมื่อ” จะได้ทฤษฎีบทดังนี้

ทฤษฎีบท เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่นั้นขนานกันก็ต่อเมื่อ มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน

ตัวอย่างที่ 3 จากรูป กำหนดให้ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $AB = CD$ และ $AC = CE$ จงพิสูจน์ว่า $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$



กำหนดให้ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $AB = CD$ และ $AC = CE$

ต้องการพิสูจน์ว่า $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$

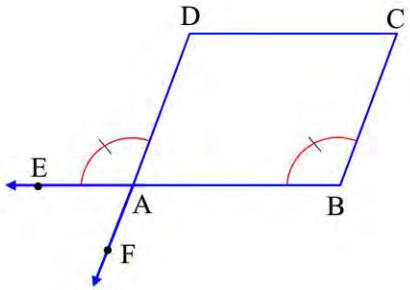
พิสูจน์ พิจารณา ΔABC และ ΔCDE

$AB = CD$	(กำหนดให้)
$B\hat{A}C = D\hat{C}E$	(ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด มีขนาดเท่ากัน)
$AC = CE$	(กำหนดให้)
ดังนั้น $\Delta ABC \cong \Delta CDE$	(ด.ม.ด.)
จะได้ $A\hat{C}B = C\hat{E}D$	(มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่เท่ากันทุกประการ จะมีขนาดเท่ากัน)
นั่นคือ $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$	(ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่งทำให้มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน)

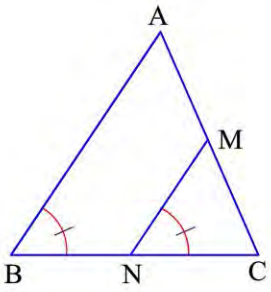
แบบฝึกหัด 4.3 ข

1. จากรูปต่อไปนี้ จงหาว่าส่วนของเส้นตรง รังสี หรือเส้นตรงคู่ใดขนานกัน เพราะเหตุใด

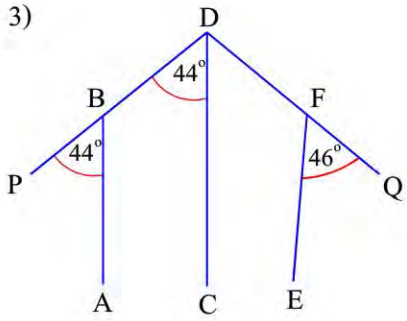
1)



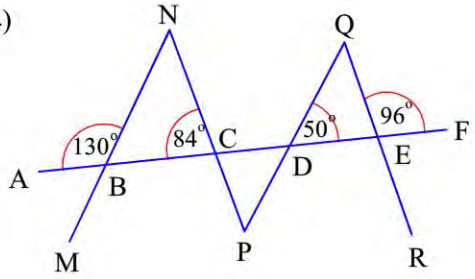
2)



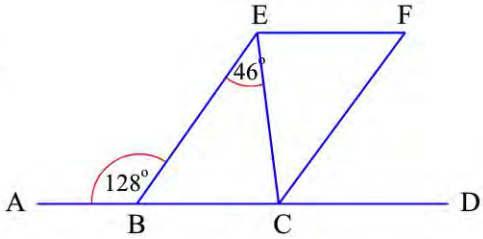
3)



4)



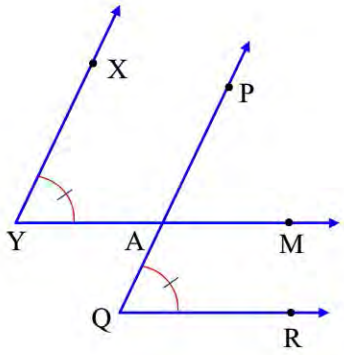
2.



จากรูป กำหนดให้ $B\hat{C}F = 128^\circ$

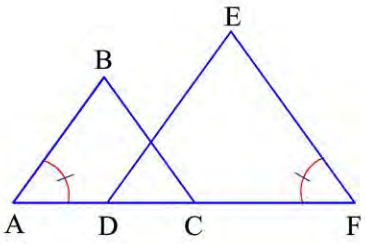
จงหาขนาดของ $D\hat{C}E$

3.



จากรูป กำหนดให้ $\overrightarrow{YM} // \overrightarrow{QR}$ และ $X\hat{Y}M = P\hat{Q}R$ จงพิสูจน์ว่า $\overrightarrow{YX} // \overrightarrow{QP}$

4.

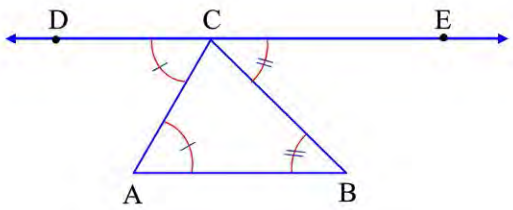


กำหนดให้ ΔABC และ ΔDEF เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มี $A\hat{B}C$ และ $D\hat{E}F$ เป็นมุมยอด ถ้า $B\hat{A}C = E\hat{F}D$ จงพิสูจน์ว่า $\overline{AB} // \overline{DE}$ และ $\overline{BC} // \overline{EF}$

4.4 เส้นขนานและรูปสามเหลี่ยม

นักเรียนเคยทราบมาแล้วว่า "*ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับ 180 องศา*" ข้อความนี้เป็นทฤษฎีบทที่สำคัญทฤษฎีบทหนึ่งทางเรขาคณิต ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ ดังนี้

ทฤษฎีบท ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับ 180 องศา



กำหนดให้ ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ

ต้องการพิสูจน์ว่า $C\hat{A}B + A\hat{B}C + B\hat{C}A = 180^{\circ}$

พิสูจน์ สร้าง $\overleftrightarrow{DE}$ ผ่านจุด C ให้ $\overleftrightarrow{DE} // \overline{AB}$

เนื่องจาก $\overline{AC}$ เป็นเส้นตัด $\overleftrightarrow{DE}$ และ $\overleftrightarrow{AB}$

$\hat{DCA} = \hat{CAB}$ (ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน)

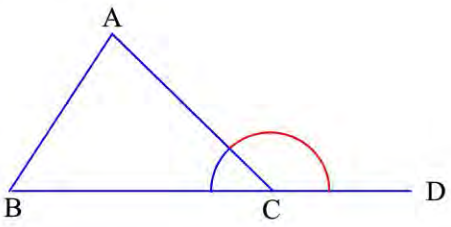
$\hat{ECB} = \hat{ABC}$ (ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน)

$\hat{DCA} + \hat{BCA} + \hat{ECB} = 180^\circ$ (ขนาดของมุมตรง)

$\hat{CAB} + \hat{BCA} + \hat{ABC} = 180^\circ$ (แทน $\hat{DCA}$ ด้วย $\hat{CAB}$ และแทน $\hat{ECB}$ ด้วย $\hat{ABC}$)

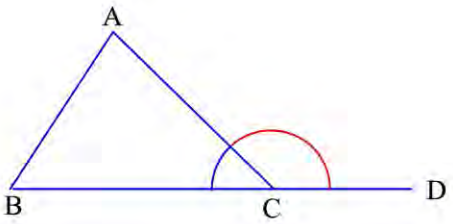
ดังนั้น $\hat{CAB} + \hat{ABC} + \hat{BCA} = 180^\circ$ (สมบัติของการเท่ากัน)

ทฤษฎีบทข้างต้น สามารถนำมาใช้พิสูจน์ทฤษฎีบทเกี่ยวกับขนาดของมุมภายนอกและขนาดของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมได้ ดังต่อไปนี้



จากรูป กำหนด ΔABC และต่อ $\overline{BC}$ ออกไปทางจุด C ถึงจุด D เรียก $\hat{ACD}$ ว่า*มุมภายนอก*ของ ΔABC เรียก $\hat{ACB}$ และ $\hat{ACD}$ ว่าเป็น*มุมประชิด* หรืออาจกล่าวว่า $\hat{ACB}$ เป็นมุมประชิดของ $\hat{ACD}$

ทฤษฎีบท ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากับผลบวกของขนาดของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิดของมุมภายนอกนั้น



กำหนดให้ ΔABC มี $A\hat{C}D$ เป็นมุมภายนอกที่ได้จากการต่อ $\overline{BC}$ ออกไปทางจุด C

ต้องการพิสูจน์ว่า $A\hat{C}D = A\hat{B}C + C\hat{A}B$

พิสูจน์

เนื่องจาก $A\hat{C}D + B\hat{C}A = 180^{\circ}$ (ขนาดของมุมตรง)

และ $A\hat{B}C + B\hat{C}A + C\hat{A}B = 180^{\circ}$ (ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับ 180°)

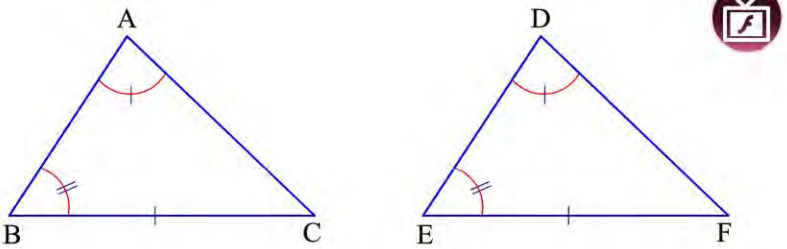
จะได้ $A\hat{C}D + B\hat{C}A = A\hat{B}C + B\hat{C}A + C\hat{A}B$ (สมบัติของการเท่ากัน)

ดังนั้น $A\hat{C}D = A\hat{B}C + C\hat{A}B$ (นำ $B\hat{C}A$ มาลบทั้งสองข้างของสมการ)

นอกจากทฤษฎีบทดังกล่าวแล้ว ยังมีการนำทฤษฎีบทเกี่ยวกับผลบวกของขนาดของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยม ไปพิสูจน์สมบัติที่เกี่ยวกับความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม ดังต่อไปนี้

นักเรียนเคยศึกษามาแล้วว่า รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ มุม – ด้าน – มุม จะเท่ากันทุกประการ เมื่อด้านคู่ที่ยาวเท่ากันอยู่ระหว่างมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากัน ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะทำให้นักเรียนเห็นว่าด้านคู่ที่ยาวเท่ากันนั้น จะเป็นด้านคู่ใดก็ได้ ไม่จำเป็นต้องเป็นด้านคู่ที่อยู่ระหว่างมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากัน แต่ต้องเป็นด้านคู่ที่อยู่ตรงข้ามกับมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากัน

ทฤษฎีบท ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองคู่ และด้านคู่ที่อยู่ตรงข้ามกับมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากัน ยาวเท่ากันหนึ่งคู่ แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ



กำหนดให้ ΔABC และ ΔDEF มี $C\hat{A}B = F\hat{D}E$, $A\hat{B}C = D\hat{E}F$ และ $BC = EF$

ต้องการพิสูจน์ว่า $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

พิสูจน์

$C\hat{A}B + A\hat{B}C + B\hat{C}A = 180^\circ$ (ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับ 180°)

$F\hat{D}E + D\hat{E}F + E\hat{F}D = 180^\circ$ (ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับ 180°)

จะได้ $C\hat{A}B + A\hat{B}C + B\hat{C}A = F\hat{D}E + D\hat{E}F + E\hat{F}D$ (สมบัติของการเท่ากัน)

เนื่องจาก $C\hat{A}B = F\hat{D}E$ และ $A\hat{B}C = D\hat{E}F$ (กำหนดให้)

ดังนั้น $B\hat{C}A = E\hat{F}D$ (สมบัติของการเท่ากัน)

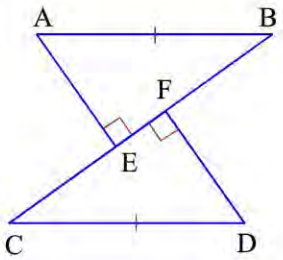
และเนื่องจาก $BC = EF$ (กำหนดให้)

ดังนั้น $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (ม.ด.ม.)

รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบทฤษฎีบทนี้ เรียกว่า มีความสัมพันธ์กันแบบ มุม – มุม – ด้าน และบางครั้งเขียนย่อว่า ม.ม.ด.

จากการพิสูจน์ข้างต้น นักเรียนจะเห็นว่า รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ มุม – ด้าน – มุม ย่อมมีความสัมพันธ์กันแบบ มุม – มุม – ด้าน ด้วย ดังนั้นในการอ้างอิงเพื่อการพิสูจน์ต่อจากนี้ จึงสามารถใช้ความสัมพันธ์แบบ มุม – มุม – ด้าน แทนความสัมพันธ์แบบ มุม – ด้าน – มุม ได้

ตัวอย่างที่ 1



จากรูป กำหนดให้ ΔABE และ ΔDCF เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มี $A\hat{E}B$ และ $D\hat{F}C$ เป็นมุมฉาก $\overline{AB} // \overline{CD}$ และ $AB = CD$ จงพิสูจน์ว่า $AE = DF$

กำหนดให้ ΔABE และ ΔDCF เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

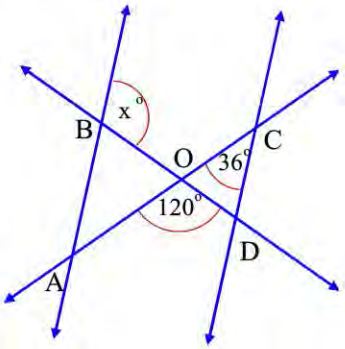
$A\hat{E}B = D\hat{F}C = 90^{\circ}$, $\overline{AB} // \overline{DC}$ และ $AB = DC$

ต้องการพิสูจน์ว่า $AE = DF$

พิสูจน์

เนื่องจาก $\overline{AB} // \overline{DC}$	(กำหนดให้)
จะได้ $A\hat{B}E = D\hat{C}F$	(ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน)
$A\hat{E}B = D\hat{F}C = 90^{\circ}$	(กำหนดให้)
$AB = DC$	(กำหนดให้)
ดังนั้น $\Delta ABE \cong \Delta DCF$	(ม.ม.ด.)
นั่นคือ $AE = DF$	(ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่เท่ากันทุกประการ จะมีขนาดเท่ากัน)

ตัวอย่างที่ 2



จากรูป กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ มี $\overleftrightarrow{AC}$ ตัด $\overleftrightarrow{BD}$ ที่จุด O, $A\hat{O}D = 120^{\circ}$ และ $O\hat{C}D = 36^{\circ}$ จงหาค่าของ x

วิธีทำ เนื่องจาก $A\hat{O}D$ เป็นมุมภายนอกของ ΔCOD

ดังนั้น $A\hat{O}D = D\hat{C}O + C\hat{D}O$ (ขนาดของมุมภายนอกของรูปสามเหลี่ยมเท่ากับผลบวกของขนาดของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิดของมุมภายนอกนั้น)

จะได้ $120 = 36 + C\hat{D}O$ (แทน $A\hat{O}D$ ด้วย 120° และแทน $D\hat{C}O$ ด้วย 36°)

$C\hat{D}O = 120 - 36$ (สมบัติของการเท่ากัน)

$= 84$

เนื่องจาก $x + C\hat{D}O = 180$ (ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดเส้นขนานรวมกันเท่ากับ 180°)

จะได้ $x + 84 = 180$ (แทน $C\hat{D}O$ ด้วย 84°)

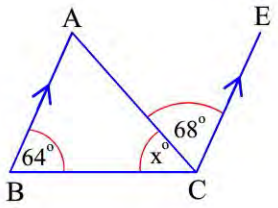
$x = 180 - 84$ (สมบัติของการเท่ากัน)

ดังนั้น $x = 96$

x และ y มีค่าเท่าไร

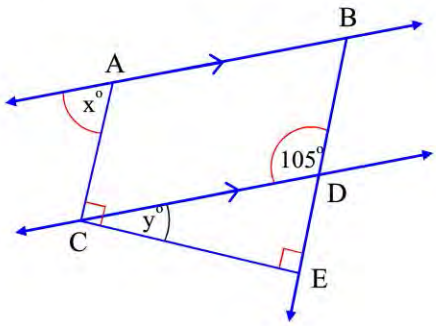
จงตอบคำถามต่อไปนี้

1.



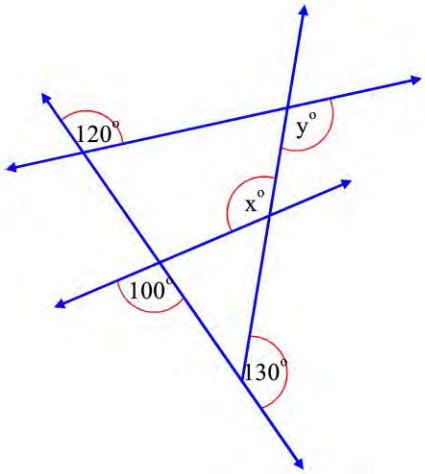
จากรูป กำหนดให้ $\overline{BA} // \overline{CE}$ จงหาค่าของ x

2.



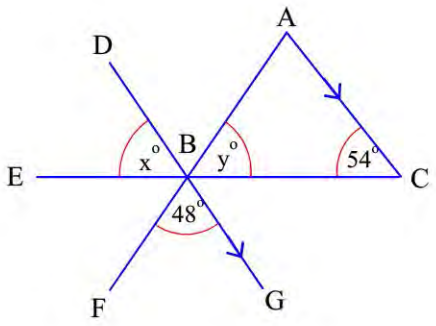
จากรูป กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ มี $A\hat{C}E$ และ $C\hat{E}D$ เป็นมุมฉาก จงหาค่าของ x และ y

3.



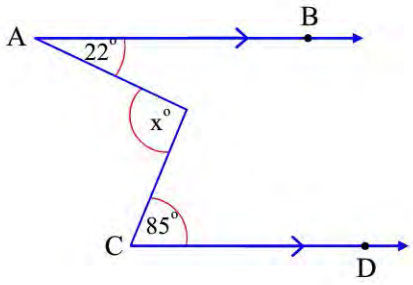
จากรูป จงหาค่าของ x และ y

4.



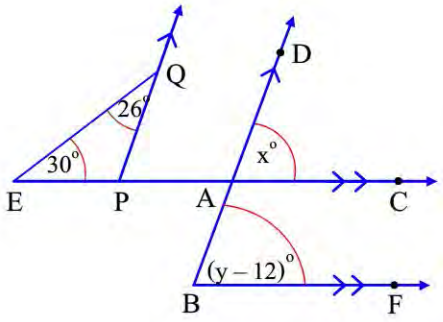
จากรูป กำหนดให้ $\overline{DG} // \overline{AC}$
จงหาค่าของ x และ y

5.



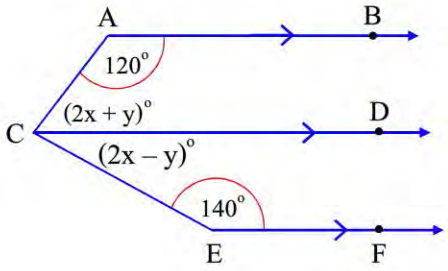
จากรูป กำหนดให้ $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{CD}$ จงหาค่าของ x

6.



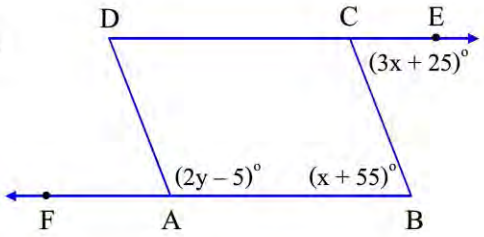
จากรูป กำหนดให้ $\overrightarrow{PQ} // \overrightarrow{BD}$ และ $\overrightarrow{EC} // \overrightarrow{BF}$
จงหาค่าของ x และ y

7.



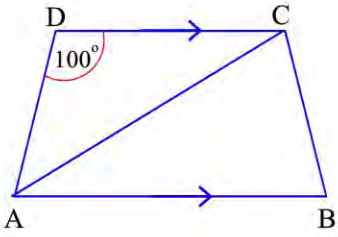
จากรูป กำหนดให้ $\hat{ACD} = (2x + y)^\circ$ และ
$\hat{DCE} = (2x - y)^\circ$ จงหาค่าของ x และ y

8.



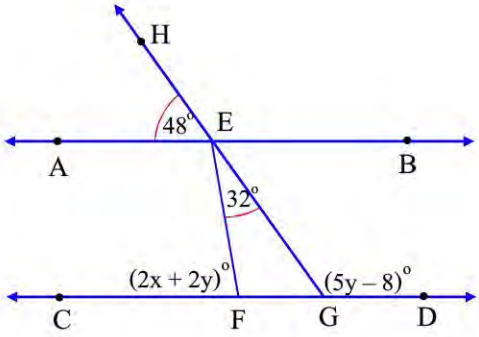
จากรูป กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $A\hat{B}C = (x+55)^{\circ}$, $B\hat{C}E = (3x+25)^{\circ}$ และ $B\hat{A}D = (2y-5)^{\circ}$ จงหาค่าของ x และ y

9.



จากรูป กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มี $\overline{AB} // \overline{CD}$, $A\hat{C}D = (2x+y)^{\circ}$, $C\hat{A}D = (5x+y)^{\circ}$ และ $B\hat{A}C = (5x-y)^{\circ}$ จงหาค่าของ x และ y

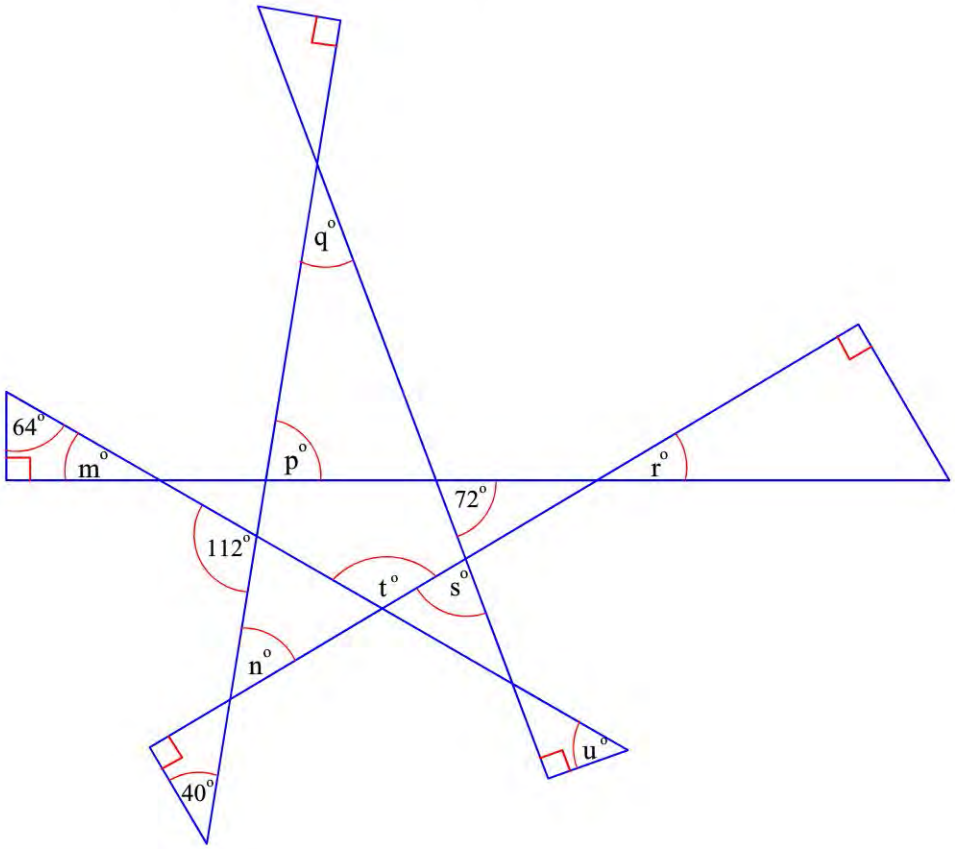
10.



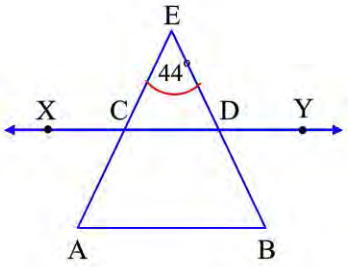
จากรูป กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ มี $C\hat{F}E = (2x+2y)^{\circ}$ และ $D\hat{G}E = (5y-8)^{\circ}$ จงหาค่าของ x และ y

หาได้หรือไม่

จงหาค่าของ m, n, p, q, r, s, t และ u จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้



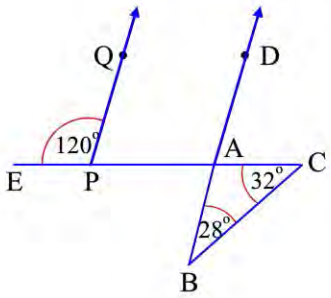
แบบฝึกหัด 4.4

1. 

จากรูป Δ EAB เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มี $AE = BE$, $A\hat{E}B = 44^\circ$ และ $\overleftrightarrow{XY} \parallel \overline{AB}$

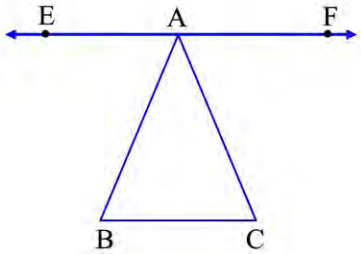
1) จงบอกชื่อมุมทุกมุมที่มีขนาดเท่ากับขนาดของ $E\hat{A}B$

2) $E\hat{A}B$ มีขนาดเท่าไร

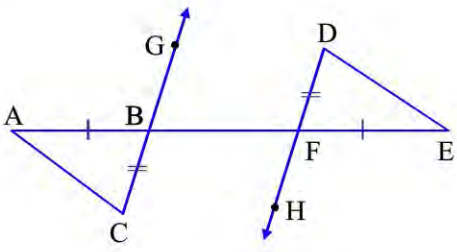
2. 

จากรูป จงหาว่า $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{BD}$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

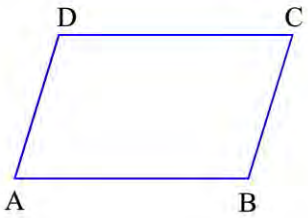
3. จงพิสูจน์ว่า “ขนาดของมุมภายในทั้งสี่มุมของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ รวมกันเท่ากับ 360 องศา”

4. 

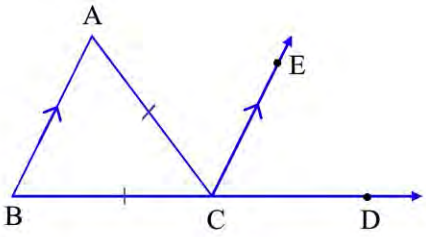
จากรูป Δ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มีด้าน $\overline{BC}$ เป็นฐาน ให้ $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overline{BC}$ จงพิสูจน์ว่า $B\hat{A}E = C\hat{A}F$

5. 

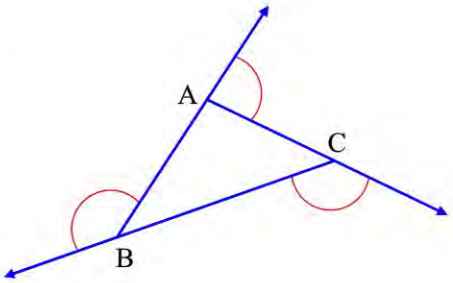
จากรูป กำหนดให้ $\overrightarrow{CG} \parallel \overrightarrow{DH}$, $AB = EF$ และ $BC = FD$ จงพิสูจน์ว่า $\overline{AC} \parallel \overline{ED}$

6. 

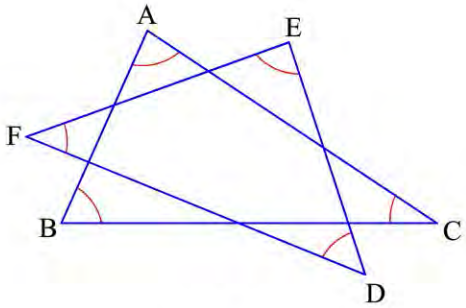
กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน จงพิสูจน์ว่า $\hat{A} = \hat{C}$ และ $\hat{B} = \hat{D}$

7. 

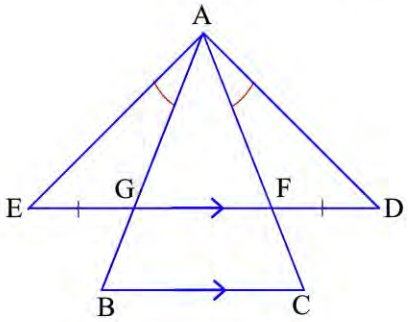
จากรูป กำหนดให้ ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มี $AC = BC$ และ $\overrightarrow{CE} // \overline{AB}$ จงพิสูจน์ว่า $\overrightarrow{CE}$ แบ่งครึ่ง $A\hat{C}D$

8. 

จากรูป กำหนดให้ ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ จงพิสูจน์ว่าขนาดของมุมภายนอกของ ΔABC รวมกันเท่ากับ 360°

9. 

รูปดาวหกแฉกใด ๆ ดังรูป มีมุมภายในที่จุดยอด 6 มุม คือ $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, $\hat{D}$, $\hat{E}$ และ $\hat{F}$ จงพิสูจน์ว่าขนาดของมุมภายในที่จุดยอดทั้งหกมุมของรูปดาวหกแฉกใด ๆ รวมกันเท่ากับ 360°

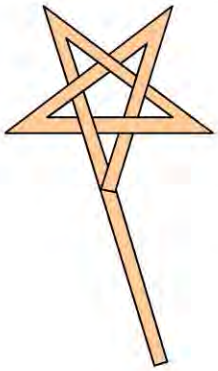
10. 

กำหนดให้ ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มี $\overline{BC}$ เป็นฐาน $\overline{BC} // \overline{ED}$, $EG = DF$ และ $B\hat{A}E = C\hat{A}D$ จงพิสูจน์ว่า $AE = AD$

เฉลว

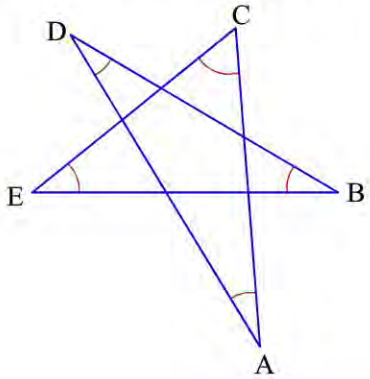
เฉลว (อ่านว่า ฉะ - เหลว) เป็นเครื่องจักสานทำด้วยตอกไม้ไผ่ สานสอดขัดกันและหักเป็นมุมทำให้เกิดเป็นตา เหมือนตาชะลอม มีรูปแบบหลายอย่าง เช่น เป็นรูปดาวห้าแฉก รูปดาวเจ็ดแฉก บางแห่งมีลักษณะเป็นรูปดาวหกแฉกคล้ายลวดลายของเข่งปลาทู จึงเรียกว่า “เฉลวเข่งปลาทู”

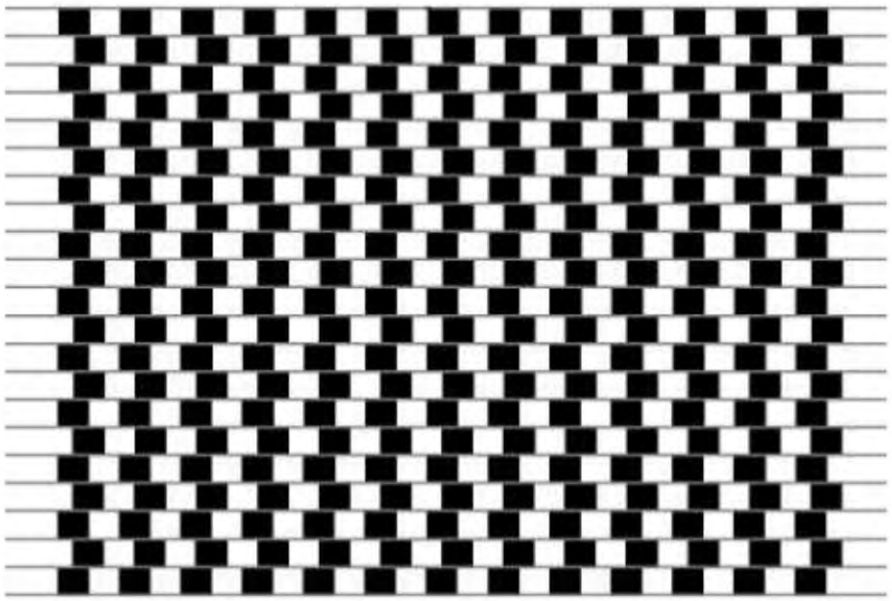
ในภาคเหนือเรียก เฉลว ว่า “ตาเหลว” หรือ “ตาแหลว” หมายถึงเหยี่ยวที่มีสายตาดีมาก สามารถมองเห็นสิ่งต่าง ๆ ได้ในระยะไกล ชาวบ้านใช้เฉลวเป็นเครื่องแสดงสิ่งหวงห้าม หรือเพื่อป้องกันภูตผี สิ่งชั่วร้าย เช่น ปักที่หม้อยาป้องกันคนข้าม หรือป้องกันภูตผีข้ามหม้อยาจะทำให้ยาเสื่อมคุณภาพ ใช้ปักไว้ที่ประตูบ้านหรือบันไดป้องกันสิ่งชั่วร้ายเข้าบ้าน ใช้ปักในที่นาเพื่อเป็นสิริมงคลในโอกาสทำขวัญแม่โพสพ หรือในวันแรกของการดำนาเพื่อให้ข้าวกล้าในนาอุดมสมบูรณ์ หรือปักที่ยุ้งข้าวหลังจากขนข้าวขึ้นยุ้ง

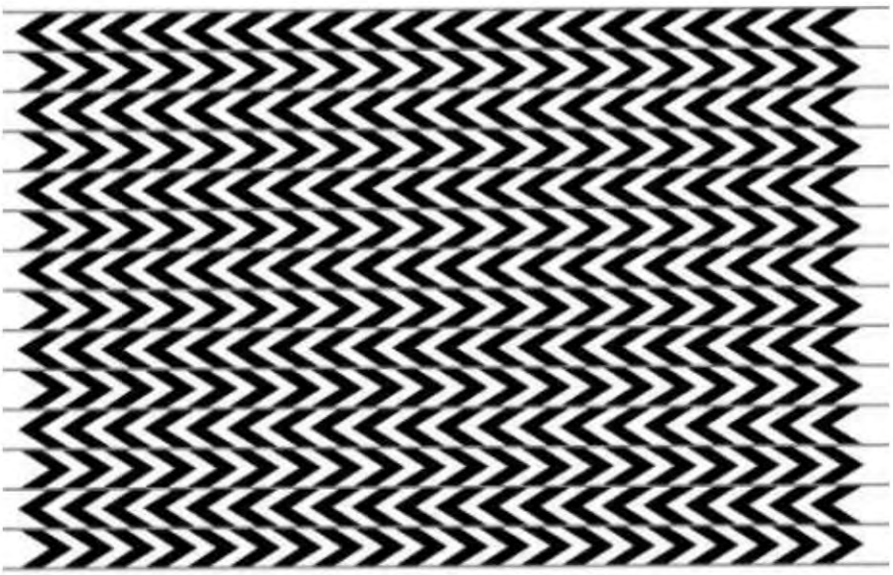


เฉลวที่เป็นรูปดาวห้าแฉกสามารถสร้างขึ้นด้วยการสานสอดและหักตอกโดยการใช้ตอกเพียงเส้นเดียว คล้ายกับการเขียนรูปดาวห้าแฉกที่สามารถเขียนได้อย่างต่อเนื่องโดยไม่ยกปากกา

สำหรับรูปดาวห้าแฉกใด ๆ นักเรียนสามารถหาได้หรือไม่ว่า “ขนาดของมุมภายในทั้งห้ามุมที่จุดยอดของรูปดาวห้าแฉกรวมกันเท่ากับกี่องศา” นั่นคือ สำหรับรูปดาวห้าแฉก ดังรูป นักเรียนจะหาได้หรือไม่ว่า $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}+\hat{E}$ เท่ากับกี่องศา







มองเห็นเส้นในแนวนอนนั้นขนานกันหรือไม่

ภาคผนวก 1

คณิตศาสตร์ที่ใช้เครื่องคิดเลข

ปัจจุบันเป็นยุคของเทคโนโลยี และเทคโนโลยีใหม่ๆ ได้เข้ามามีบทบาทต่อชีวิตมากขึ้นทั้งในส่วนที่เป็นการทำงานและในชีวิตประจำวัน เช่น การติดต่อธนาคารเพื่อฝากเงินหรือถอนเงิน การซื้อตั๋วรถไฟ การใช้เครื่องคิดเลขจะช่วยในการแก้ปัญหาบางอย่าง เช่น ช่วยลดเวลาที่เสียไปในการคำนวณขั้นพื้นฐาน (บวก ลบ คูณ หาร ฯลฯ) ช่วยทำให้นักเรียนมีเวลาในการคิดแก้ปัญหามากขึ้นและรู้สึกไม่เบื่อหน่ายต่อการคำนวณ นอกจากนี้พนักงานขายของหรือแม่ค้าก็ใช้เครื่องคิดเลขช่วยในการคำนวณราคาและการทอนเงิน แต่อย่างไรก็ดีผู้ใช้เครื่องคิดเลขจะต้องมีความสามารถทางคณิตศาสตร์ในเรื่องความรู้สึกเชิงจำนวน สามารถใช้การประมาณค่าได้ว่าคำตอบที่ได้จากเครื่องคิดเลขมีความเป็นไปได้หรือไม่ เพราะเราอาจจะกดแป้นใส่ข้อมูลผิดก็ได้

ทั้งนี้การคำนวณเกี่ยวกับจำนวนที่เป็นเลขโดดหรือจำนวนที่มีไม่เกิน 2 หลัก นักเรียนควรสามารถคิดได้โดยไม่ต้องอาศัยเครื่องคิดเลข

นักเรียนได้ฝึกใช้เครื่องคิดเลขมาบ้างแล้วในหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 นอกจากนี้ยังมีกิจกรรมทางคณิตศาสตร์อีกหลากหลายที่ใช้เครื่องคิดเลขเป็นเครื่องมือ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

กิจกรรม "จำนวนเฉพาะ"

เมื่อกล่าวถึงจำนวนนับใด ๆ จำนวนเฉพาะ หมายถึง จำนวนนับที่มากกว่า 1 และมีตัวประกอบเพียง 2 ตัว คือ 1 และตัวเอง ตัวอย่างของจำนวนเฉพาะได้แก่ 2, 3, 5, 7 และ 11 เป็นต้น

ในกรณีที่เราอยากทราบว่า จำนวนนับใด ๆ เป็นจำนวนเฉพาะหรือไม่ อาจทำได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง จงตรวจสอบว่า 221 เป็นจำนวนเฉพาะหรือไม่

วิธีทำ 1) หาจำนวนนับที่มากที่สุดที่กำลังสองของจำนวนนั้นมีค่าน้อยกว่า 221 โดยใช้เครื่องคิดเลขหาค่าของ $\sqrt{221}$ จะได้ค่าประมาณคือ 14.87 ทำให้ได้ว่าจำนวนนับที่มากที่สุดที่ต้องการคือ 14

2) ใช้เครื่องคิดเลขตรวจสอบว่า จำนวนเฉพาะที่มีค่าอยู่ระหว่าง 2 ถึง 14 ซึ่งได้แก่ 2, 3, 5, 7, 11 และ 13 เป็นตัวประกอบของ 221 หรือไม่ จากการตรวจสอบ พบว่า 13 หาร 221 ลงตัว แสดงว่า 13 เป็นตัวประกอบของ 221

ดังนั้น 221 จึงไม่เป็นจำนวนเฉพาะเนื่องจากมีตัวประกอบอื่นนอกจาก 1 และ 221 เช่น 13

จะเห็นว่าการตรวจสอบจำนวนเฉพาะดังตัวอย่างข้างต้น สามารถทำได้สะดวกขึ้นโดยใช้เครื่องคิดเลข

แบบฝึกหัด

1. จำนวนเฉพาะบางจำนวน สามารถหาได้ จากสูตร $2^n - 1$

   เช่น เมื่อ $n = 2$ จะได้ $2^2 - 1 = 3$ เป็นจำนวนเฉพาะ

   จงหาจำนวนเฉพาะจาก $2^n - 1$ พร้อมทั้งตรวจสอบว่า จำนวนดังกล่าวเป็นจำนวนเฉพาะหรือไม่ เมื่อกำหนดค่า n ให้ดังนี้

   1) 5 2) 7 3) 13 4) 17 5) 19

2. กำหนดจำนวน $n^2 - n + 41$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

   1) พิจารณาว่า $n^2 - n + 41$ เป็นจำนวนเฉพาะหรือไม่ เมื่อ n เป็นจำนวน นับตั้งแต่ 2 ถึง 10

   2) จงหาว่า มีค่า n ใดหรือไม่ ที่ทำให้ $n^2 - n + 41$ ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ

กิจกรรม "การคูณด้วยค่าคงตัว"

นอกจากเครื่องคิดเลขจะมีการทำงานของค่าคงตัว ที่ใช้สำหรับการหาค่าของเลขยกกำลังแล้ว เครื่องคิดเลข ยังมีการทำงานที่ช่วยให้เราหาผลคูณของจำนวนหลาย ๆ จำนวน ที่คูณกับค่าคงตัวค่าใดค่าหนึ่ง โดยไม่ต้องใส่ค่าคงตัวนั้นซ้ำ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง เมื่อซื้อสินค้าต่างชนิดกัน โดยซื้อชนิดละ 12 ชิ้น สินค้าแต่ละชนิดราคา 15.50, 27, 50, 362 และ 44 บาท ตามลำดับ อยากทราบว่า ซื้อสินค้าแต่ละชนิดเป็นเงินเท่าไร เขียนแสดงสิ่งที่ต้องการคำนวณ และใช้เครื่องคิดเลขหาผลลัพธ์ได้ดังนี้

ต้องการหา	การกดแป้นเครื่องคิดเลข	ผลลัพธ์
12 × 15.50	* 12 [×] 15.5 [=]	186
12 × 27	(กดต่อ) 27 [=]	324
12 × 50	(กดต่อ) 50 [=]	600
12 × 362	(กดต่อ) 362 [=]	4344
12 × 44	(กดต่อ) 44 [=]	528

นั่นคือ ซื้อสินค้าชนิดที่ 1, 2, 3, 4 และ 5 เป็นเงิน 186 บาท, 324 บาท, 600 บาท, 4344 บาท และ 528 บาท ตามลำดับ

หมายเหตุ * เครื่องคิดเลขจะถือว่า 12 เป็นค่าคงตัวของการคูณกับอีกจำนวนหนึ่ง สามารถนำจำนวนอื่นที่จะคูณกับ 12 มาดำเนินการต่อได้เลย

สำหรับเครื่องคิดเลขบางเครื่องจะต้องกดแป้น [×] 2 ครั้ง จึงจะทำให้ 12 เป็นค่าคงตัว

นั่นคือ 12 [×] [×] 15.5 [=] ผลลัพธ์ 186

27 [=] ผลลัพธ์ 324

50 [=] ผลลัพธ์ 600

362 [=] ผลลัพธ์ 4,344

44 [=] ผลลัพธ์ 528

กิจกรรม "เป็นไปได้อย่างไร"

กิจกรรมที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้ สามารถใช้เครื่องคิดเลขหาคำตอบได้โดยใช้แป้นความจำในการคำนวณ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

จงหาค่าของ $\frac{99999}{9+9+9+9+9}$

ใช้เครื่องคิดเลขช่วยในการคำนวณได้ดังนี้

1) [9] [+] [9] [+] [9] [+] [9] [+] [9] [=] [M+] (หรือ 9 [×] 5 [=] [M+])

2) [9] [9] [9] [9] [9] [÷] [MR] [=]

ให้ใช้วิธีการข้างต้นหาผลหารของจำนวนต่อไปนี้

1. 11111 ÷ (1 + 1 + 1 + 1 + 1)
2. 22222 ÷ (2 + 2 + 2 + 2 + 2)
3. 33333 ÷ (3 + 3 + 3 + 3 + 3)
4. 44444 ÷ (4 + 4 + 4 + 4 + 4)
5. 55555 ÷ (5 + 5 + 5 + 5 + 5)
6. 66666 ÷ (6 + 6 + 6 + 6 + 6)
7. 77777 ÷ (7 + 7 + 7 + 7 + 7)
8. 88888 ÷ (8 + 8 + 8 + 8 + 8)

สังเกตคำตอบที่ได้ว่าสัมพันธ์กันอย่างไร

ภาคผนวก 2

ตารางแสดง กำลังสอง กำลังสาม
รากที่สองเป็นบวก และรากที่สามของจำนวนตั้งแต่ 1 ถึง 100

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
1	1	1	1.000	1.000
2	4	8	1.414	1.260
3	9	27	1.732	1.442
4	16	64	2.000	1.587
5	25	125	2.236	1.710
6	36	216	2.449	1.817
7	49	343	2.646	1.913
8	64	512	2.828	2.000
9	81	729	3.000	2.080
10	100	1,000	3.162	2.154
11	121	1,331	3.317	2.224
12	144	1,728	3.464	2.289
13	169	2,197	3.606	2.351
14	196	2,744	3.742	2.410
15	225	3,375	3.873	2.466
16	256	4,096	4.000	2.520
17	289	4,913	4.123	2.571
18	324	5,832	4.243	2.621
19	361	6,859	4.359	2.668
20	400	8,000	4.472	2.714
21	441	9,261	4.583	2.759
22	484	10,648	4.690	2.802
23	529	12,167	4.796	2.844
24	576	13,824	4.899	2.884
25	625	15,625	5.000	2.924
26	676	17,576	5.099	2.962
27	729	19,683	5.196	3.000
28	784	21,952	5.292	3.037
29	841	24,389	5.385	3.072
30	900	27,000	5.477	3.107

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
31	961	29,791	5.568	3.141
32	1,024	32,768	5.657	3.175
33	1,089	35,937	5.745	3.208
34	1,156	39,304	5.831	3.240
35	1,225	42,875	5.916	3.271
36	1,296	46,656	6.000	3.302
37	1,369	50,653	6.083	3.332
38	1,444	54,872	6.164	3.362
39	1,521	59,319	6.245	3.391
40	1,600	64,000	6.325	3.420
41	1,681	68,921	6.403	3.448
42	1,764	74,088	6.481	3.476
43	1,849	79,507	6.557	3.503
44	1,936	85,184	6.633	3.530
45	2,025	91,125	6.708	3.557
46	2,116	97,336	6.782	3.583
47	2,209	103,823	6.856	3.609
48	2,304	110,592	6.928	3.634
49	2,401	117,649	7.000	3.659
50	2,500	125,000	7.071	3.684
51	2,601	132,651	7.141	3.708
52	2,704	140,608	7.211	3.733
53	2,809	148,877	7.280	3.756
54	2,916	157,464	7.348	3.780
55	3,025	166,375	7.416	3.803
56	3,136	175,616	7.483	3.826
57	3,249	185,193	7.550	3.849
58	3,364	195,112	7.616	3.871
59	3,481	205,379	7.681	3.893
60	3,600	216,000	7.746	3.915

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
61	3,721	226,981	7.810	3.936
62	3,844	238,328	7.874	3.958
63	3,969	250,047	7.937	3.979
64	4,096	262,144	8.000	4.000
65	4,225	274,625	8.062	4.021
66	4,356	287,496	8.124	4.041
67	4,489	300,763	8.185	4.062
68	4,624	314,432	8.246	4.082
69	4,761	328,509	8.307	4.102
70	4,900	343,000	8.367	4.121
71	5,041	357,911	8.426	4.141
72	5,184	373,248	8.485	4.160
73	5,329	389,017	8.544	4.179
74	5,476	405,224	8.602	4.198
75	5,625	421,875	8.660	4.217
76	5,776	438,976	8.718	4.236
77	5,929	456,533	8.775	4.254
78	6,084	474,552	8.832	4.273
79	6,241	493,039	8.888	4.291
80	6,400	512,000	8.944	4.309
81	6,561	531,441	9.000	4.327
82	6,724	551,368	9.055	4.344
83	6,889	571,787	9.110	4.362
84	7,056	592,704	9.165	4.380
85	7,225	614,125	9.220	4.397
86	7,396	636,056	9.274	4.414
87	7,569	658,503	9.327	4.431
88	7,744	681,472	9.381	4.448
89	7,921	704,969	9.434	4.465
90	8,100	729,000	9.487	4.481
91	8,281	753,571	9.539	4.498
92	8,464	778,688	9.592	4.514
93	8,649	804,357	9.644	4.531
94	8,836	830,584	9.695	4.547
95	9,025	857,375	9.747	4.563
96	9,216	884,736	9.798	4.579
97	9,409	912,673	9.849	4.595
98	9,604	941,192	9.899	4.610
99	9,801	970,299	9.950	4.626
100	10,000	1,000,000	10.000	4.642

บัญชีศัพท์

บทที่ 1

ทฤษฎีบทพีทาโกรัส	Pythagoras' theorem
บทกลับ	converse

บทที่ 2

จำนวนจริง	real number
จำนวนตรรกยะ	rational number
จำนวนอตรรกยะ	irrational number
เส้นจำนวนจริง	real line
รากที่สอง	square root
กรณฑ์	radical
รากที่สาม	cube root
ระนาบจริง	real plane

บทที่ 3

สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว	linear equation with one variable

บทที่ 4

เส้นขนาน	parallel lines
มุมภายใน	interior angle
เส้นตัด	transversal
มุมแย้ง	alternate angles
มุมภายนอก	exterior angle
มุมประชิด	adjacent angles

บัญชีสัญลักษณ์

$\sqrt{a}$	รากที่สองที่เป็นบวกของ a หรือ กรณฑ์ที่สองของ a
$\sqrt[3]{a}$	รากที่สามของ a
//	ขนานกับ

บรรณานุกรม

ศึกษาธิการ, กระทรวง. (2525). **หนังสือประกอบการสอน วิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่หนึ่ง.** กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

ศึกษาธิการ, กระทรวง. (2525). **หนังสือประกอบการสอน วิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่สอง.** กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2544). **คณิตศาสตร์ที่ใช้เครื่องคิดเลข.** พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพมหานคร : บริษัทคอมม่า ดีไซน์แอนด์พริ้นท์ จำกัด.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2541). **คู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์ รายวิชา ค 101 คณิตศาสตร์ 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่หนึ่ง หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533).** พิมพ์ครั้งที่ 4. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2541). **คู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์ รายวิชา ค 102 คณิตศาสตร์ 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่หนึ่ง หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533).** พิมพ์ครั้งที่ 4. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2537). **คู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์ รายวิชา ค 203 คณิตศาสตร์ 3 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่สอง หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533).** พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2540). **คู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์ รายวิชา ค 204 คณิตศาสตร์ 4 ชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533).** พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2540). **คู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์ รายวิชา ค 011 ชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช**

2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533). พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2540). **คู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์ รายวิชา ค 021 ชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533).** พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2546). **หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้พื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม 1 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 .** พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2546). **หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้พื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม 2 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 .** พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2546). **หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้พื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม 1 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 .** พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2546). **หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 1 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 .** พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

Balch, Kay., and others. (1993). **Mathematics Applications and Connections , Course 1.** U.S.A. : Me Graw – Hill Publishing Company.

Boourke A., and others. (2000). **Cornerstone Mathematics Second Edition Book 1.** Australia : Addison Wesley Longman.

Charles, Randall I., and others. (1995). **Addison – Wesley Mathematics Teacher's Edition Grade 7.** New York, U.S.A. : Addison – Wesley Publishing Company, Inc.

Fey, James T., and others. (1998). **Bits and Pieces I : Understanding Rational Number.** U.S.A. : Dale Seymour Publications.

Fey, James T., and others. (1998). **Bits and Pieces II : Using Rational Number.** U.S.A. : Dale Seymour Publications.

Hong ,Tay Choon, and others. (2001). **New Mathematics Counts For Secondary Normal (Academic) 2 – 4,** Singapore : Federal Publications.

Jurgensen, Ray C., and others. (1994). **Geometry.** Boston, MA**.** U.S.A. : Houghton Mifflin Company.

Rising, Gerald R., and others. (1989). **Houghton Mifflin Unified Mathematics, Book 2.** Boston, MA. U.S.A. : Houghton Mifflin Company.

Serra, Michael. (1993). **Discovering Geometry An Inductive Approach.** : Berkeley, U.S.A. : Key Curriculum Press.

คณะกรรมการจัดทำสื่อการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

นางปิยรัตน์ จาตุรันตบุตร	สถาบันราชภัฏสวนดุสิต
นางสาวลัดดาวัลย์ เพ็ญสุภา	มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์
นายปรีชา เนาว์เย็นผล	มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช
นางสาวอัมพร ม้าคนอง	จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
นายสมนึก บุญพาไสว	มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานคร
นางจรรยา ภูอุดม	โรงเรียนดอนเมืองจาตุรจินดา
นางสาวกัลยาณี แคนยุกต์	โรงเรียนบดินทรเดชา (สิงห์ สิงหเสนี)
นางสุวรรณา คล้ายกระแส	ข้าราชการบำนาญ
นางยุพิน พิพิธกุล	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางจารุนี สูตะบุตร	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นายสมพล เล็กสกุล	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางอารียา สุวรรณคำ	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางเจริญศรี จันไพบูลย์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวจันทร์เพ็ญ ชุมคช	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวจารุวรรณ แสงทอง	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวปานทอง กุลนาถศิริ	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางชุลีพร สุภธีระ	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางชมัยพร ตั้งตน	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวรจนา รัตนานิคม	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาววันดี ตีระสหกุล	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวดนิตา ชื่นอารมณ์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวพิลาลักษณ์ ทองทิพย์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

คณะบรรณาธิการ

นางยุพิน พิพิธกุล
นางปิยรัตน์ จาตุรันตบุตร
นางจารุนี สูตะบุตร
นางสาวจารุวรรณ แสงทอง
นายสมพล เล็กสกุล
นางชุลีพร สุภธีระ

คณะบรรณาธิการดำเนินงานปรับปรุงหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์

นายดนัย ยังคง
นางชมัยพร ตั้งตน
นางสุวรรณา คล้ายกระแส
นางสาวลัดดาวัลย์ เพ็ญสุภา
นางสาวอัมพร ม้าคนอง
นายปรีชา เนาว์เย็นผล
นายสมนึก บุญพาไสว

ภาพ

นางวรพรรณ ทิณพงษ์
นางสาวดนพร จรัสแสงสกุล
นางสาววีราพัชร์ จิรเทียนธรรม

ผู้จัดพิมพ์ต้นฉบับ

นางสาวเสาวนีย์ ประมูลทรัพย์

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

พฐ ศนิตยก.2ม.2
9 789740 195023
ราคา 45.00 บาท

ศึกษาภัณฑ์พาณิชย์
พิมพ์ที่โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว
นายสันติภาพ อินทรพัฒน์ ผู้พิมพ์และผู้โฆษณา
๕๙๐๐๐๑๐

องค์การค้าของ สกสค.
www.suksapan.or.th