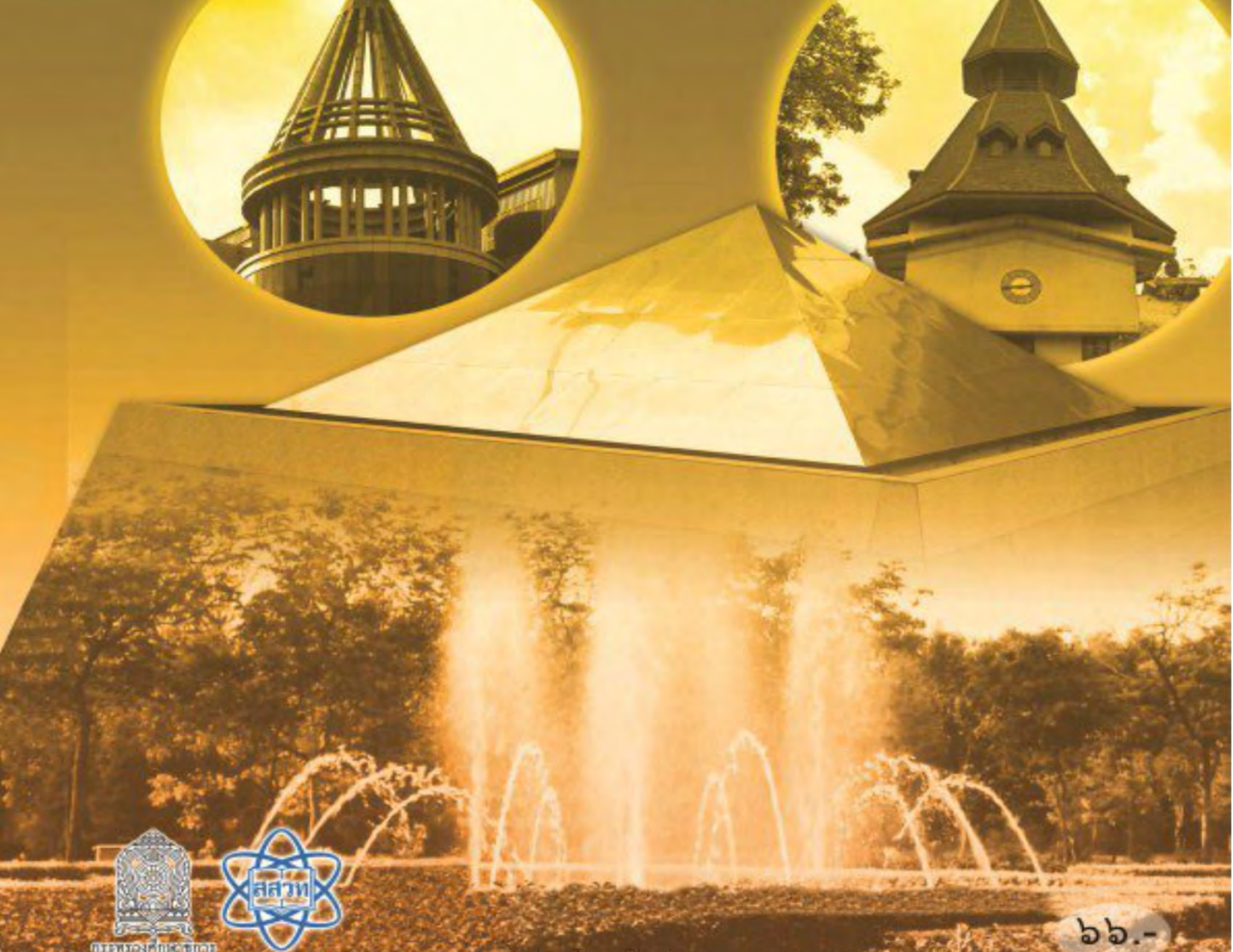
หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม

คณิตศาสตร์ เล่ม ๑

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๓

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑



๖๖.-

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม
คณิตศาสตร์ เล่ม ๑
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๓

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑

จัดทำโดย

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

กระทรวงศึกษาธิการ

ISBN 978-974-01-9805-5

พิมพ์ครั้งที่หนึ่ง ๓๐๐,๐๐๐ เล่ม

พ.ศ. ๒๕๕๔

องค์การค้าของ สกสค. จัดพิมพ์จำหน่าย

พิมพ์ที่โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว

๒๒๔๙ ถนนลาดพร้าว วังทองหลาง กรุงเทพมหานคร

ประกาศสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน
เรื่อง อนุญาตให้ใช้สื่อการเรียนรู้ในสถานศึกษา

ด้วยสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีได้จัดทำโครงสร้างหลักสูตรรายวิชาเพิ่มเติมและจัดทำหนังสือเรียน รายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม ๑ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๓ สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐานได้พิจารณาแล้วอนุญาตให้ใช้ในสถานศึกษาได้

ประกาศ ณ วันที่ ๑๕ ธันวาคม พ.ศ. ๒๕๕๔

(นายชินภัทร ภูมิรัตน)
เลขาธิการคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน

คำนำ

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม ๑ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๓ นี้ สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีจัดทำขึ้น ตามโครงสร้างหลักสูตรรายวิชาเพิ่มเติมที่ประกอบด้วยโครงสร้างรายวิชาเพิ่มเติมและคำอธิบายรายวิชาที่มีทั้งผลการเรียนรู้ และสาระการเรียนรู้ที่กำหนดขึ้นเพื่อให้สถานศึกษาพิจารณาเทียบเคียงกับหลักสูตรของสถานศึกษาและพิจารณาเลือกใช้หนังสือนี้ประกอบการจัดการเรียนรู้ให้สอดคล้องกับหลักสูตรสถานศึกษาของตนได้ตามความเหมาะสมในการจัดทำหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมเล่มนี้ ได้รับความร่วมมือจากคณาจารย์ ผู้ทรงคุณวุฒิ ผู้เชี่ยวชาญด้านคณิตศาสตร์จากสถาบันต่างๆ ทั้งภาครัฐและเอกชนเป็นอย่างดี

สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน หวังเป็นอย่างยิ่งว่าหนังสือเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการจัดการเรียนรู้ เพื่อประยุกต์ใช้พัฒนาการเรียนรู้ได้อย่างเหมาะสม ขอขอบคุณสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ตลอดจนบุคคลและหน่วยงานที่มีส่วนเกี่ยวข้องในการจัดทำหนังสือไว้ ณ โอกาสนี้

(นายชินภัทร ภูมิรัตน)
เลขาธิการคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน

คำชี้แจง

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้รับมอบหมายจากกระทรวงศึกษาธิการ ให้พัฒนาหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ กลุ่มสาระการเรียนรู้วิทยาศาสตร์ รวมทั้งสาระการออกแบบและเทคโนโลยี และสาระเทคโนโลยีสารสนเทศในกลุ่มสาระการเรียนรู้การงานอาชีพและเทคโนโลยี ตลอดจนจัดทำสื่อการเรียนรู้ตามหลักสูตรดังกล่าว

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ สำหรับระดับมัธยมศึกษาตอนต้น มีด้วยกันทั้งหมด 6 เล่ม จัดทำขึ้นเพื่อให้ผู้เรียนสามารถเรียนรู้และพัฒนาตนเอง นำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปพัฒนาชีวิต และเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตลอดจนศาสตร์อื่น ๆ ในระดับที่สูงขึ้น ทั้งนี้สถานศึกษาสามารถปรับใช้เนื้อหาจากหนังสือเรียนทั้ง 6 เล่มนี้ เพื่อจัดการเรียนการสอนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ได้ตามความเหมาะสม

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ประกอบด้วยเรื่อง กรณฑ์ที่สอง การแยกตัวประกอบของพหุนาม สมการกำลังสอง พาราโบลา และพื้นที่ผิวและปริมาตร ซึ่งเป็นเนื้อหาสาระตามมาตรฐานการเรียนรู้ตามที่กำหนดไว้ในหลักสูตร อย่างไรก็ตาม ผู้สอนสามารถปรับบทเรียนให้เหมาะสมกับศักยภาพของผู้เรียนแต่ละกลุ่ม

การจัดทำหนังสือเรียนคณิตศาสตร์เล่มนี้ สสวท. ได้รับความร่วมมืออย่างดียิ่งจากคณาจารย์ ผู้ทรงคุณวุฒิ นักวิชาการ และครูผู้สอน จากหลายหน่วยงาน ทั้งภาครัฐและเอกชน สสวท. จึงขอขอบคุณทุกท่านไว้ ณ ที่นี้ และหวังเป็นอย่างยิ่งว่าหนังสือเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการศึกษาคณิตศาสตร์ อันเป็นรากฐานสำคัญของการพัฒนาทรัพยากรมนุษย์ของชาติต่อไป หากมีข้อเสนอแนะใดที่จะทำให้หนังสือเรียนเล่มนี้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น โปรดแจ้งให้สาขาคณิตศาสตร์มัธยมศึกษา สสวท. ทราบด้วย จักขอบคุณยิ่ง

(นางพรพรรณ ไวทยางกูร)
ผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

คำอธิบายรายวิชาเพิ่มเติม

คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ๕ **กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์**

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๓ ภาคเรียนที่ ๑ **เวลา ๖๐ ชั่วโมง จำนวน ๑.๕ หน่วยกิต**

ศึกษา และฝึกทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์อันได้แก่ การแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์ และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ ในสาระต่อไปนี้

กรณฑ์ที่สอง การบวก การลบ การคูณ และการหารจำนวนจริงที่อยู่ในรูป $\sqrt{a}$ เมื่อ $a \geq 0$ โดยใช้สมบัติ $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ เมื่อ $a \geq 0$ และ $b \geq 0$ และ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ เมื่อ $a \geq 0$ และ $b > 0$

การแยกตัวประกอบของพหุนาม การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองโดยวิธีทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์ การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสูงกว่าสองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม โดยอาศัยวิธีทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์หรือใช้ทฤษฎีเศษเหลือ

สมการกำลังสอง การแก้สมการกำลังสองตัวแปรเดียวโดยใช้สูตร การแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการกำลังสองตัวแปรเดียว

พาราโบลา สมการพาราโบลา กราฟของพาราโบลาที่อยู่ในรูป $y = ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a \neq 0$

พื้นที่ผิวและปริมาตร การหาพื้นที่ของพีระมิด กรวย และทรงกลม การแก้ปัญหาหรือสถานการณ์โดยใช้ความรู้เกี่ยวกับปริมาตรและพื้นที่ผิว

โดยจัดประสบการณ์หรือสร้างสถานการณ์ในชีวิตประจำวันที่ใกล้ตัวให้ผู้เรียนได้ศึกษาค้นคว้าโดยการปฏิบัติจริง ทดลอง สรุป รายงาน เพื่อพัฒนาทักษะและกระบวนการในการคิดคำนวณ การแก้ปัญหาการให้เหตุผล การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และนำประสบการณ์ด้านความรู้ ความคิด ทักษะและกระบวนการที่ได้ไปใช้ในการเรียนรู้สิ่งต่างๆ และใช้ในชีวิตประจำวันอย่างสร้างสรรค์ รวมทั้งเห็นคุณค่าและมีเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์ สามารถทำงานอย่างเป็นระบบระเบียบ มีความรอบคอบ มีความรับผิดชอบ มีวิจารณญาณ และมีความเชื่อมั่นในตนเอง

การวัดและประเมินผล ใช้วิธีการที่หลากหลายตามสภาพความเป็นจริงให้สอดคล้องกับเนื้อหาและทักษะที่ต้องการวัด

ผลการเรียนรู้

๑. บวก ลบ คูณ และหารจำนวนจริงซึ่งเกี่ยวกับกรณฑ์ที่สองที่กำหนดให้และนำไปใช้แก้ปัญหาได้

๒. แยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองโดยวิธีทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์ได้

๓. แยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสูงกว่าสองที่มีสัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์เป็นจำนวนเต็มและได้ตัวประกอบที่มีสัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์เป็นจำนวนเต็ม โดยอาศัยวิธีทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์ หรือใช้ทฤษฎีเศษเหลือได้

๔. แก้สมการกำลังสองตัวแปรเดียวได้

๕. แก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการกำลังสองตัวแปรเดียวได้

๖. เขียนกราฟพาราโบลาที่กำหนดให้ได้

๗. บอกลักษณะของกราฟพาราโบลาที่กำหนดให้ได้

๘. หาพื้นที่ผิวของพีระมิด กรวยและทรงกลมได้

๙. แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ที่กำหนดให้โดยใช้ความรู้เกี่ยวกับพื้นที่ผิวและปริมาตรได้

๑๐. ตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้

รวมทั้งหมด ๑๐ ผลการเรียนรู้

สารบัญ

หน้า

บทที่ 1
กรณฑ์ที่สอง

จำนวนต่าง ๆ ที่นำมาใช้ในชีวิตประจำวัน จะเกี่ยวกับจำนวนตรรกยะและจำนวนอตรรกยะ ซึ่งเป็นจำนวนจริง ในบทนี้นักเรียนจะได้เรียนเนื้อหาที่เน้นเฉพาะรากที่สองที่เป็นบวกของจำนวนจริง (กรณฑ์ที่สอง) เพิ่มเติม และจะได้เรียนสมบัติบางประการ รวมถึงการดำเนินการของจำนวนจริงซึ่งเกี่ยวกับกรณฑ์ที่สอง เพื่อนักเรียนจะได้นำความรู้ทั้งหมดไปใช้แก้ปัญหาโจทย์หรือสถานการณ์ต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับจำนวนจริงซึ่งอยู่ในรูปกรณฑ์ที่สองได้มากยิ่งขึ้น

จุดมุ่งหมายของบทเรียนบทนี้ มีดังนี้

1. ใช้สมบัติของ $\sqrt{a}$ เมื่อ $a \geq 0$ สองข้อต่อไปนี้ในการแก้ปัญหาได้

    1) $\sqrt{a}\,\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ เมื่อ $a \geq 0$, $b \geq 0$

    2) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$ เมื่อ $a \geq 0$, $b > 0$

2. บวก ลบ คูณ และหารจำนวนจริงซึ่งเกี่ยวกับกรณฑ์ที่สองที่กำหนดให้และนำไปใช้ในการแก้ปัญหา พร้อมทั้งตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้

1.1 สมบัติของ $\sqrt{a}$ เมื่อ $a \geq 0$

นักเรียนเคยเรียนเรื่องรากที่สองและทราบความหมายของรากที่สองมาแล้ว ดังนี้

1. *เมื่อ a แทนจำนวนจริงบวกใด ๆ หรือศูนย์ (เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $a \geq 0$) รากที่สองของ a คือจำนวนจริงที่ยกกำลังสองแล้วได้ a*

ตัวอย่าง

9 เป็นรากที่สองของ 81 เพราะ $9^2 = 81$

-9 เป็นรากที่สองของ 81 เพราะ $(-9)^2 = 81$

$\frac{3}{4}$ เป็นรากที่สองของ $\frac{9}{16}$ เพราะ $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$

$-\frac{3}{4}$ เป็นรากที่สองของ $\frac{9}{16}$ เพราะ $\left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$

2.5 เป็นรากที่สองของ 6.25 เพราะ $(2.5)^2 = 6.25$

-2.5 เป็นรากที่สองของ 6.25 เพราะ $(-2.5)^2 = 6.25$

2. *เมื่อ a เป็นจำนวนจริงบวก รากที่สองของ a มีสองราก คือ รากที่สองที่เป็นบวก ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ $\sqrt{a}$ (เรียกอีกอย่างหนึ่งว่า กรณฑ์ที่สองของ a) และรากที่สองที่เป็นลบ ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ $-\sqrt{a}$*

เมื่อ $a = 0$ รากที่สองของ a คือ 0

ตัวอย่าง

รากที่สองของ 49 มีสองรากคือ $\sqrt{49}$ และ $-\sqrt{49}$

หรือ 7 และ -7

รากที่สองของ $\frac{9}{25}$ มีสองรากคือ $\sqrt{\frac{9}{25}}$ และ $-\sqrt{\frac{9}{25}}$

หรือ $\frac{3}{5}$ และ $-\frac{3}{5}$

รากที่สองของ 0.04 มีสองรากคือ $\sqrt{0.04}$ และ $-\sqrt{0.04}$

หรือ 0.2 และ - 0.2

รากที่สองของ 15 มีสองรากคือ $\sqrt{15}$ และ $-\sqrt{15}$ ซึ่งทั้งสองรากนี้เป็นจำนวนอตรรกยะ

ในกรณีที่รากที่สองของจำนวนเต็มบวกไม่เป็นจำนวนเต็ม รากที่สองของจำนวนเต็มบวกนั้นจะเป็นจำนวนอตรรกยะ

3. เมื่อ a เป็นจำนวนจริงบวก $(\sqrt{a})^2 = a$ และ $(-\sqrt{a})^2 = a$

ตัวอย่าง

$(\sqrt{3})^2 = 3$

$(-\sqrt{19})^2 = 19$

$\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2 = \frac{2}{5}$

$(-\sqrt{0.03})^2 = 0.03$

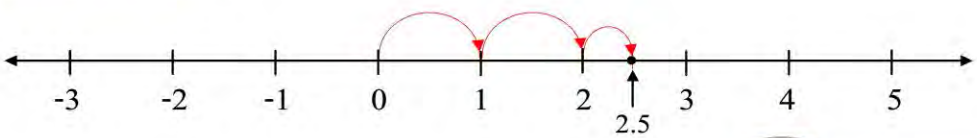
1. รากที่สองของแต่ละจำนวนต่อไปนี้เป็นจำนวนใดบ้าง

1) 36	2) 196
3) 50	4) 200
5) $\frac{16}{81}$	6) $\frac{24}{75}$
7) 0.16	8) 0.0049
9) 0.4	10) 0.025

2. จำนวนต่อไปนี้เป็นรากที่สองของจำนวนใด

1) 4	2) -25
3) $-\frac{9}{16}$	4) 0.36
5) $\sqrt{12}$	6) $-\sqrt{\frac{3}{7}}$
7) $\sqrt{0.9}$	8) $-\sqrt{0.16}$

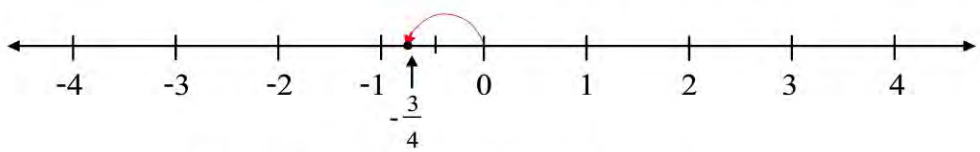
นักเรียนเคยทราบมาแล้วว่า *ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนใด ๆ หาได้จากระยะที่จำนวนนั้นอยู่ห่างจาก 0 บนเส้นจำนวน* เช่น



ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนใดๆ

2.5 อยู่ห่างจาก 0 เป็นระยะ 2.5 หน่วย

เรากล่าวว่า ค่าสัมบูรณ์ของ 2.5 เท่ากับ 2.5



$-\frac{3}{4}$ อยู่ห่างจาก 0 เป็นระยะ $\frac{3}{4}$ หน่วย

เรากล่าวว่า ค่าสัมบูรณ์ของ $-\frac{3}{4}$ เท่ากับ $\frac{3}{4}$

โดยทั่วไป *ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง a ใด ๆ ที่ไม่เป็นศูนย์ เป็นจำนวนจริงบวกเสมอ และค่าสัมบูรณ์ของศูนย์เท่ากับศูนย์ เขียนแทนค่าสัมบูรณ์ของ a ด้วยสัญลักษณ์ $|a|$*

เมื่อ $a > 0$ ค่าสัมบูรณ์ของ a เท่ากับ a เมื่อ $a < 0$ ค่าสัมบูรณ์ของ a เท่ากับ $-a$ และเมื่อ $a = 0$ ค่าสัมบูรณ์ของ $a = 0$

นั่นคือ $|a| = a$ เมื่อ $a > 0$

$|a| = -a$ เมื่อ $a < 0$

$|a| = 0$ เมื่อ $a = 0$

ตัวอย่าง $|5| = 5$

$|-5| = -(-5)$

$= 5$

กรณฑ์ที่สองของ a^2 เป็นเท่าไร

กรณฑ์ที่สองของ a^2 เป็นเท่าไร

ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

1. $\sqrt{7^2} = 7$ หรือไม่
2. $\sqrt{7^2}$ เท่ากับค่าสัมบูรณ์ของ 7 หรือไม่
3. $\sqrt{(-15)^2} = \sqrt{15^2}$ หรือไม่
4. $\sqrt{(-15)^2} = 15$ หรือไม่
5. $\sqrt{(-15)^2}$ เท่ากับค่าสัมบูรณ์ของ -15 หรือไม่
6. $\sqrt{\left(-\frac{3}{7}\right)^2}$ เท่ากับค่าสัมบูรณ์ของ $-\frac{3}{7}$ หรือไม่
7. $\sqrt{(0.5)^2}$ เท่ากับค่าสัมบูรณ์ของ 0.5 หรือไม่
8. นักเรียนคิดว่า $\sqrt{(-111)^2}$ เท่ากับเท่าใด
9. $\sqrt{(-111)^2}$ เท่ากับค่าสัมบูรณ์ของ -111 หรือไม่
10. นักเรียนคิดว่า เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ $\sqrt{a^2}$ เท่ากับค่าสัมบูรณ์ของ a หรือไม่

คำตอบที่ได้จากกิจกรรมข้างต้น เป็นไปตามสมบัติของรากที่สองของจำนวนจริงดังนี้

$\sqrt{a^2} = |a|$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ

เนื่องจาก $|a| = a$ เมื่อ $a \geq 0$ จึงได้ว่า $\sqrt{a^2} = a$ เมื่อ $a \geq 0$

ตัวอย่างที่ 1 จงหา $\sqrt{36}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sqrt{36} = \sqrt{6^2}$

$= 6$

ดังนั้น $\sqrt{36} = 6$

ตอบ 6

ตัวอย่างที่ 2 จงหา $-\sqrt{49}$

วิธีทำ เนื่องจาก $-\sqrt{49} = -\sqrt{7^2}$

$= -7$

ดังนั้น $-\sqrt{49} = -7$

ตอบ -7

ตัวอย่างที่ 3 จงหา $\sqrt{(-11)^2}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sqrt{(-11)^2} = |-11|$

$= 11$

ดังนั้น $\sqrt{(-11)^2} = 11$

ตอบ 11

ตัวอย่างที่ 4 จงหา $\sqrt{\frac{4}{9}}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sqrt{\frac{4}{9}} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2}$

$= \frac{2}{3}$

ดังนั้น $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$

ตอบ $\frac{2}{3}$

ตัวอย่างที่ 5 จงหา $\sqrt{0.36}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sqrt{0.36} = \sqrt{(0.6)^2}$

$= 0.6$

ดังนั้น $\sqrt{0.36} = 0.6$

ตอบ 0.6

ตัวอย่างที่ 6 จงหา $-\sqrt{(-0.04)^2}$

วิธีทำ เนื่องจาก $-\sqrt{(-0.04)^2} = -|-0.04|$

$= -0.04$

ดังนั้น $-\sqrt{(-0.04)^2} = -0.04$

ตอบ -0.04

ตัวอย่างที่ 7 จงทำ $\sqrt{4x^2}$ เมื่อ $x > 0$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

วิธีทำ เนื่องจาก $\sqrt{4x^2} = \sqrt{(2x)^2}$

$= |2x|$

$= 2x$

เนื่องจาก $x > 0$
ดังนั้น $2x > 0$

ดังนั้น $\sqrt{4x^2} = 2x$ เมื่อ $x > 0$

ตอบ 2x

ตัวอย่างที่ 8 จงทำ $\sqrt{25p^2q^8}$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

วิธีทำ เนื่องจาก $\sqrt{25p^2q^8} = \sqrt{(5pq^4)^2}$

$= |5pq^4|$

$5q^4 \geq 0$
แต่ไม่ทราบว่า $p \geq 0$ หรือไม่
จึงต้องแสดงเครื่องหมาย
ค่าสัมบูรณ์

ดังนั้น $\sqrt{25p^2q^8} = |5pq^4|$

ตอบ $|5pq^4|$

ตัวอย่างที่ 9 จงทำ $\sqrt{1.69m^4n^{12}}$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

วิธีทำ เนื่องจาก $\sqrt{1.69m^4n^{12}} = \sqrt{(1.3m^2n^6)^2}$

$= 1.3m^2n^6$

ดังนั้น $\sqrt{1.69m^4n^{12}} = 1.3m^2n^6$

ตอบ $1.3m^2n^6$

เนื่องจาก $m^2n^6 \geq 0$
จึงไม่ต้องแสดง
เครื่องหมายค่าสัมบูรณ์

จำนวนในรูป $\sqrt{a}$ เมื่อ $a \geq 0$ มีสมบัติที่สำคัญสองข้อ ดังนี้

1. $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ เมื่อ $a \geq 0,\ b \geq 0$
2. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$ เมื่อ $a \geq 0,\ b > 0$

สมบัติสองข้อนี้ช่วยให้การจัดรูปและการหาค่าประมาณของจำนวนจริงซึ่งเกี่ยวกับกรณฑ์ที่สองทำได้สะดวกขึ้น ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 10 จงทำ $\sqrt{8}$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

วิธีทำ เนื่องจาก $\sqrt{8} = \sqrt{2\times2\times2}$

$= \sqrt{2^2}\times\sqrt{2}$

$= 2\times\sqrt{2}$

$= 2\sqrt{2}$

ดังนั้น $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

ตอบ $2\sqrt{2}$

เรานิยมเขียน $2\sqrt{2}$ แทน
$2\times\sqrt{2}$ หรือ $2\cdot\sqrt{2}$

ตัวอย่างที่ 11 จงหาผลลัพธ์ $\sqrt{32} \times \sqrt{2}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sqrt{32} \times \sqrt{2} = \sqrt{32 \times 2}$

$= \sqrt{64}$

$= \sqrt{8^2}$

$= 8$

ดังนั้น $\sqrt{32} \times \sqrt{2} = 8$

ตอบ 8

ตัวอย่างที่ 12 จงหาผลลัพธ์ $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}}$

$= \sqrt{4}$

$= 2$

ดังนั้น $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = 2$

ตอบ 2

ตัวอย่างที่ 13 จงหาผลลัพธ์ $\sqrt{\frac{81}{625}}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sqrt{\frac{81}{625}} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{625}}$

$= \frac{\sqrt{9^2}}{\sqrt{25^2}}$

$= \frac{9}{25}$

ดังนั้น $\sqrt{\frac{81}{625}} = \frac{9}{25}$

ตอบ $\frac{9}{25}$

ตัวอย่างที่ 14 จงหาผลลัพธ์ $\sqrt{\frac{m^4}{25}}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sqrt{\frac{m^4}{25}} = \frac{\sqrt{m^4}}{\sqrt{25}}$

$= \frac{m^2}{5}$

ดังนั้น $\sqrt{\frac{m^4}{25}} = \frac{m^2}{5}$

ตอบ $\frac{m^2}{5}$

ตัวอย่างที่ 15 จงหาค่าประมาณของ $\sqrt{12}$ เมื่อกำหนดให้ $\sqrt{3} \approx 1.732$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sqrt{12} = \sqrt{2\times2\times3}$

$= \sqrt{2^2}\times\sqrt{3}$

$\approx 2 \times 1.732$

≈ 3.464

ดังนั้น $\sqrt{12} \approx 3.464$

ตอบ ประมาณ 3.464

ตัวอย่างที่ 16 จงหาค่าประมาณของ $3\sqrt{50}$ เมื่อกำหนดให้ $\sqrt{2} \approx 1.414$

วิธีทำ เนื่องจาก $3\sqrt{50} = 3\sqrt{5\times5\times2}$

$= 3 \times 5 \times\sqrt{2}$

$= 15\sqrt{2}$

$\approx 15 \times 1.414$

≈ 21.21

ดังนั้น $3\sqrt{50} \approx 21.21$

ตอบ ประมาณ 21.21

ตัวอย่างที่ 17 จงหาค่าประมาณของ $\sqrt{\frac{75}{4}}$ เมื่อกำหนดให้ $\sqrt{3} \approx 1.732$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\sqrt{\frac{75}{4}} = \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{5\times5\times3}}{\sqrt{2\times2}} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \approx \frac{5\times1.732}{2} \approx 4.33$$

ดังนั้น $\sqrt{\frac{75}{4}} \approx 4.33$

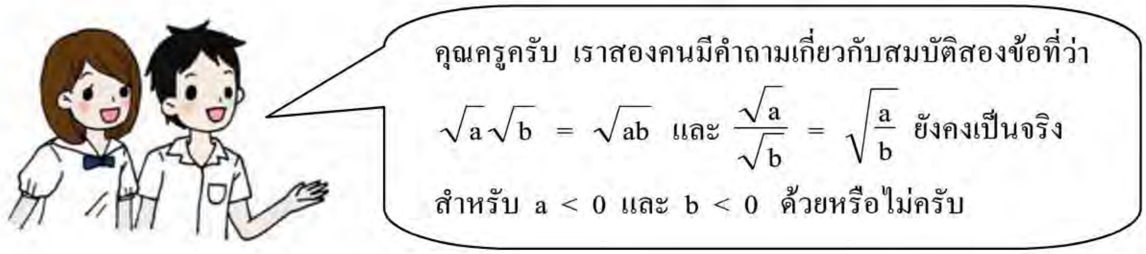
ตอบ ประมาณ 4.33

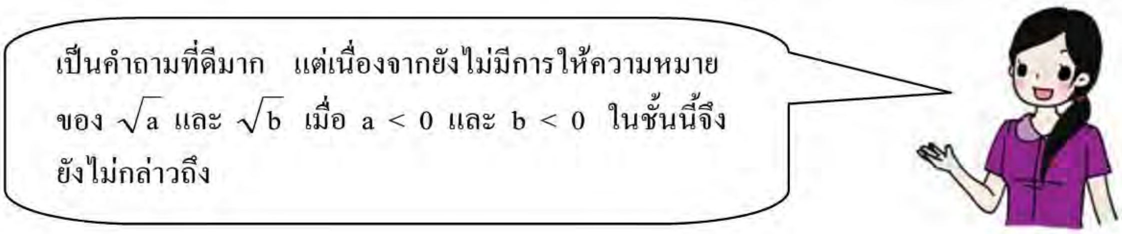
น่าสงสัย

ปุ๊ย เมื่อเช้าที่เรียนสมบัติ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ เมื่อ $a \geq 0$ และ $b > 0$ เราสงสัยจังเลยว่า ถ้า $b = 0$ แล้ว สมบัติข้อนี้ยังเป็นจริงหรือเปล่า

ข้อสงสัยของเต้ยตอบได้ไม่ยากหรอก ถ้า $b = 0$ เราจะได้ $\sqrt{b} = 0$ ซึ่งในทางคณิตศาสตร์การหารด้วยศูนย์ไม่มีความหมาย สมบัติข้อนี้จึงไม่เป็นจริงเมื่อ $b = 0$ แต่ที่น่าสงสัยมากกว่าคือ ถ้า $a < 0$ และ $b < 0$ แล้วสมบัติ $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ และ $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ ยังเป็นจริงอยู่หรือไม่

คำถามของปุ๊ยน่าสนใจมากเลย เราไปถามคุณครูกันดีกว่า





แบบฝึกหัด 1.1

1. จงทำจำนวนในแต่ละข้อต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1) $\sqrt{11^2}$	2) $\sqrt{(-17)^2}$
3) $-\sqrt{35^2}$	4) $-\sqrt{(-140)^2}$
5) $\sqrt{\left(\frac{25}{112}\right)^2}$	6) $\sqrt{\left(-\frac{71}{84}\right)^2}$
7) $-\sqrt{\left(\frac{19}{175}\right)^2}$	8) $-\sqrt{(0.08)^2}$
9) $\sqrt{0.25a^4}$	10) $\sqrt{\frac{9}{16}x^6y^8}$
11) $\sqrt{\frac{121}{625}m^{10}n^{20}}$	12) $-\sqrt{0.0625a^{16}b^{24}}$

2. จงทำจำนวนในแต่ละข้อต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1) $\sqrt{27}$	2) $-\sqrt{28}$
3) $\sqrt{200}$	4) $\sqrt{675}$
5) $-\sqrt{725}$	6) $\sqrt{1,350}$
7) $\sqrt{5,000}$	8) $-\sqrt{7,200}$

3. จงหาผลลัพธ์

1) $\sqrt{27} \times \sqrt{3}$ 2) $\sqrt{48} \times \sqrt{12}$

3) $\sqrt{200} \times \sqrt{50}$ 4) $\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}}$

5) $\frac{\sqrt{108}}{\sqrt{27}}$ 6) $\sqrt{\frac{121}{625}}$

7) $\sqrt{0.0064} \times \sqrt{a^{18}}$ 8) $\sqrt{\frac{484}{m^{28}}}$ เมื่อ $m \neq 0$

4. จงหาค่าประมาณของจำนวนในแต่ละข้อต่อไปนี้ เมื่อกำหนดให้ $\sqrt{2} \approx 1.414$, $\sqrt{3} \approx 1.732$ และ $\sqrt{5} \approx 2.236$

1) $\sqrt{18}$ 2) $-\sqrt{75}$

3) $\sqrt{162}$ 4) $\sqrt{243}$

5) $-\sqrt{\frac{450}{121}}$ 6) $7\sqrt{3,125}$

1.2 การดำเนินการของจำนวนจริงซึ่งเกี่ยวกับกรณฑ์ที่สอง

เนื่องจากการบวกและการคูณจำนวนจริงมีสมบัติการสลับที่ สมบัติการเปลี่ยนหมู่ และสมบัติการแจกแจง ดังนั้น การบวกและการคูณจำนวนในรูป $\sqrt{a}$ เมื่อ $a \geq 0$ ก็มีสมบัติการสลับที่ สมบัติการเปลี่ยนหมู่ และสมบัติการแจกแจงด้วย กล่าวคือ

สมบัติการสลับที่สำหรับการบวก

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{b} + \sqrt{a}$$

เช่น $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

สมบัติการเปลี่ยนหมู่สำหรับการบวก

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b}) + \sqrt{c} = \sqrt{a} + (\sqrt{b} + \sqrt{c})$$

เช่น $(\sqrt{3} + \sqrt{5}) + \sqrt{7} = \sqrt{3} + (\sqrt{5} + \sqrt{7})$

สมบัติการสลับที่สำหรับการคูณ

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{b} \times \sqrt{a}$$

เช่น $\sqrt{11} \times \sqrt{13} = \sqrt{13} \times \sqrt{11}$

สมบัติการเปลี่ยนหมู่สำหรับการคูณ

$$(\sqrt{a}\times\sqrt{b})\times\sqrt{c} \;=\; \sqrt{a}\times(\sqrt{b}\times\sqrt{c})$$

เช่น $(\sqrt{13}\times\sqrt{15})\times\sqrt{17} \;=\; \sqrt{13}\times(\sqrt{15}\times\sqrt{17})$

สมบัติการแจกแจง

$$\sqrt{a}\times(\sqrt{b}+\sqrt{c}) \;=\; (\sqrt{a}\times\sqrt{b})+(\sqrt{a}\times\sqrt{c})$$

และ $(\sqrt{b}+\sqrt{c})\times\sqrt{a} \;=\; (\sqrt{b}\times\sqrt{a})+(\sqrt{c}\times\sqrt{a})$

เช่น $\sqrt{5}\times(\sqrt{7}+\sqrt{11}) \;=\; (\sqrt{5}\times\sqrt{7})+(\sqrt{5}\times\sqrt{11})$

และ $(\sqrt{3}+\sqrt{7})\times\sqrt{12} \;=\; (\sqrt{3}\times\sqrt{12})+(\sqrt{7}\times\sqrt{12})$

ในการดำเนินการเกี่ยวกับกรณฑ์ที่สองของจำนวนจริง จะใช้สมบัติของ $\sqrt{a}$ เมื่อ $a \geq 0$ ในหัวข้อ 1.1 สมบัติการสลับที่ สมบัติการเปลี่ยนหมู่ และสมบัติการแจกแจง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

การบวกและการลบ

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลบวก $4\sqrt{2}+2\sqrt{2}$

วิธีทำ เนื่องจาก $4\sqrt{2}+2\sqrt{2} = (4+2)\sqrt{2}$

$= 6\sqrt{2}$

ดังนั้น $4\sqrt{2}+2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

ตอบ $6\sqrt{2}$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลบวก $\sqrt{12}+\sqrt{27}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sqrt{12}+\sqrt{27} = \sqrt{2\times2\times3}+\sqrt{3\times3\times3}$

$= 2\sqrt{3}+3\sqrt{3}$

$= (2+3)\sqrt{3}$

$= 5\sqrt{3}$

ดังนั้น $\sqrt{12}+\sqrt{27} = 5\sqrt{3}$

ตอบ $5\sqrt{3}$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลลบ $\sqrt{50} - \sqrt{8}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sqrt{50} - \sqrt{8} = \sqrt{5\times5\times2} - \sqrt{2\times2\times2}$

$= 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2}$

$= 3\sqrt{2}$

ดังนั้น $\sqrt{50} - \sqrt{8} = 3\sqrt{2}$

ตอบ $3\sqrt{2}$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาผลลบ $3\sqrt{20} - \sqrt{500}$

วิธีทำ เนื่องจาก $3\sqrt{20} - \sqrt{500} = 3\sqrt{2\times2\times5} - \sqrt{10\times10\times5}$

$= 3(2\sqrt{5}) - 10\sqrt{5}$

$= 6\sqrt{5} - 10\sqrt{5}$

$= -4\sqrt{5}$

ดังนั้น $3\sqrt{20} - \sqrt{500} = -4\sqrt{5}$

ตอบ $-4\sqrt{5}$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาผลลัพธ์ $\sqrt{450} + \sqrt{200} - \sqrt{72}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sqrt{450} + \sqrt{200} - \sqrt{72} = \sqrt{15\times15\times2} + \sqrt{10\times10\times2} - \sqrt{6\times6\times2}$

$= 15\sqrt{2} + 10\sqrt{2} - 6\sqrt{2}$

$= 19\sqrt{2}$

ดังนั้น $\sqrt{450} + \sqrt{200} - \sqrt{72} = 19\sqrt{2}$

ตอบ $19\sqrt{2}$

ตัวอย่างที่ 6 จงหาผลลัพธ์ $7\sqrt{12}+\sqrt{75}-15\sqrt{27}$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\begin{aligned} 7\sqrt{12}+\sqrt{75}-15\sqrt{27} &= 7\sqrt{4\times 3}+\sqrt{25\times 3}-15\sqrt{9\times 3} \\ &= 7(2\sqrt{3})+5\sqrt{3}-15(3\sqrt{3}) \\ &= 14\sqrt{3}+5\sqrt{3}-45\sqrt{3} \\ &= -26\sqrt{3} \end{aligned}$$

ดังนั้น $7\sqrt{12}+\sqrt{75}-15\sqrt{27} = -26\sqrt{3}$

ตอบ $-26\sqrt{3}$

ตัวอย่างที่ 7 จงหาผลลัพธ์ $(2\sqrt{5}+3\sqrt{7})-(2\sqrt{7}+3\sqrt{5})$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\begin{aligned} (2\sqrt{5}+3\sqrt{7})-(2\sqrt{7}+3\sqrt{5}) &= 2\sqrt{5}+3\sqrt{7}-2\sqrt{7}-3\sqrt{5} \\ &= (2\sqrt{5}-3\sqrt{5})+(3\sqrt{7}-2\sqrt{7}) \\ &= -\sqrt{5}+\sqrt{7} \\ &= \sqrt{7}-\sqrt{5} \end{aligned}$$

ดังนั้น $(2\sqrt{5}+3\sqrt{7})-(2\sqrt{7}+3\sqrt{5}) = \sqrt{7}-\sqrt{5}$

ตอบ $\sqrt{7}-\sqrt{5}$

ตัวอย่างที่ 8 จงหาผลลัพธ์ $(7+\sqrt{32})-(4+\sqrt{8})$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\begin{aligned} (7+\sqrt{32})-(4+\sqrt{8}) &= 7+\sqrt{32}-4-\sqrt{8} \\ &= 7+\sqrt{4\times 4\times 2}-4-\sqrt{2\times 2\times 2} \\ &= 7+4\sqrt{2}-4-2\sqrt{2} \\ &= (7-4)+(4\sqrt{2}-2\sqrt{2}) \\ &= 3+2\sqrt{2} \end{aligned}$$

ดังนั้น $(7+\sqrt{32})-(4+\sqrt{8}) = 3+2\sqrt{2}$

ตอบ $3+2\sqrt{2}$

บอกได้ไหม

บอกได้ไหม

จงพิจารณาโดยไม่ต้องคำนวณโดยตรงว่าประโยคในแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นจริงหรือไม่ เพราะเหตุใด

1. $3\sqrt{5} < 5\sqrt{3}$
2. $3\sqrt{5} + 2\sqrt{3} = 5\sqrt{8}$
3. $1 + \sqrt{5} < 3$
4. $2\sqrt{3} - 3 < 1$
5. $2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} < 10$
6. $\sqrt{2} + \sqrt{3} > \sqrt{5}$
7. $7\sqrt{5} - 6\sqrt{5} < 2$
8. $5\sqrt{3} - 4\sqrt{2} > 1$
9. $\sqrt{3} + 5 > \sqrt{5} + 3$
10. $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} > 5$

แบบฝึกหัด 1.2 ก

1. จงหาผลลัพธ์

1) $8\sqrt{2} + 7\sqrt{2}$
2) $15\sqrt{7} - 7\sqrt{7}$
3) $4\sqrt{3} - \sqrt{12}$
4) $-3\sqrt{7} + \sqrt{28}$
5) $\sqrt{50} + \sqrt{18} - \sqrt{8}$
6) $\sqrt{80} - \sqrt{45} + \sqrt{20}$
7) $\sqrt{675} - \sqrt{432} + \sqrt{243}$
8) $\sqrt{500} - 3\sqrt{125} - \sqrt{245}$

2. จงหาผลลัพธ์

1) $(2\sqrt{6}+4\sqrt{3})+(8\sqrt{3}-5\sqrt{6})$

2) $(23\sqrt{2}+7\sqrt{5})-(9\sqrt{5}+4\sqrt{2})$

3) $(\sqrt{180}-\sqrt{72})-(\sqrt{200}+\sqrt{20})$

4) $(\sqrt{675}+\sqrt{45})-(\sqrt{300}-\sqrt{125})$

5) $(12\sqrt{48}+25)-(48-2\sqrt{75})$

6) $(3\sqrt{1,350} + 2\sqrt{450}) + (2\sqrt{98} - 3\sqrt{288})$

การคูณและการหาร

ตัวอย่างที่ 9 จงหาผลคูณ $\sqrt{2} \times \sqrt{10}$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \times \sqrt{10} &= \sqrt{2\times 10} \\ &= \sqrt{20} \\ &= 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

ดังนั้น $\sqrt{2} \times \sqrt{10} = 2\sqrt{5}$

ตอบ $2\sqrt{5}$

ตัวอย่างที่ 10 จงหาผลคูณ $\sqrt{12} \times 2\sqrt{3}$

วิธีทำ

วิธีที่ 1 เนื่องจาก

$$\begin{aligned} \sqrt{12} \times 2\sqrt{3} &= \sqrt{2\times 2\times 3} \times 2\sqrt{3} \\ &= 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} \\ &= 2\times 2\times (\sqrt{3})^2 \\ &= 4\times 3 \\ &= 12 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\sqrt{12} \times 2\sqrt{3} = 12$

วิธีที่ 2 เนื่องจาก $\sqrt{12}\times 2\sqrt{3} = \sqrt{12} \times \sqrt{4\times 3}$

$= \sqrt{12} \times \sqrt{12}$

$= 12$

ดังนั้น $\sqrt{12}\times 2\sqrt{3} = 12$

ตอบ 12

ตัวอย่างที่ 11 จงหาผลลัพธ์ $\sqrt{3}\times(\sqrt{3}+\sqrt{3})$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sqrt{3}\times(\sqrt{3}+\sqrt{3}) = \sqrt{3} \times 2\sqrt{3}$

$= 2 \times (\sqrt{3})^2$

$= 2\times 3$

$= 6$

ดังนั้น $\sqrt{3}\times(\sqrt{3}+\sqrt{3}) = 6$

ตอบ 6

ตัวอย่างที่ 12 จงหาผลลัพธ์ $\sqrt{2}\times(\sqrt{2}+\sqrt{12})$

วิธีทำ

วิธีที่ 1 เนื่องจาก $\sqrt{2}\times(\sqrt{2}+\sqrt{12}) = (\sqrt{2}\times\sqrt{2})+(\sqrt{2}\times\sqrt{12})$

$= 2+\sqrt{24}$

$= 2 + 2\sqrt{6}$

วิธีที่ 2 เนื่องจาก $\sqrt{2}\times(\sqrt{2}+\sqrt{12}) = (\sqrt{2}\times\sqrt{2})+(\sqrt{2}\times\sqrt{12})$

$= 2+(\sqrt{2}\times 2\sqrt{3})$

$= 2 + 2\sqrt{6}$

ดังนั้น $\sqrt{2}\times(\sqrt{2}+\sqrt{12}) = 2 + 2\sqrt{6}$

ตอบ $2 + 2\sqrt{6}$

ตัวอย่างที่ 13 จงหาผลลัพธ์ $\sqrt{3}\times(\sqrt{15}-\sqrt{75})$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\begin{aligned}\sqrt{3}\times(\sqrt{15}-\sqrt{75}) &= (\sqrt{3}\times\sqrt{15})-(\sqrt{3}\times\sqrt{75})\\ &= \sqrt{45}-\sqrt{225}\\ &= 3\sqrt{5}-15\end{aligned}$$

ดังนั้น $\sqrt{3}\times(\sqrt{15}-\sqrt{75}) = 3\sqrt{5}-15$

ตอบ $3\sqrt{5}-15$

ตัวอย่างที่ 14 จงหาผลลัพธ์ $2\sqrt{6}\times(3\sqrt{6}-2\sqrt{24})$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\begin{aligned}2\sqrt{6}\times(3\sqrt{6}-2\sqrt{24}) &= (2\sqrt{6}\times 3\sqrt{6}) - (2\sqrt{6}\times 2\sqrt{24})\\ &= 6(\sqrt{6})^2 - (2\sqrt{6}\times 2\sqrt{4\times 6})\\ &= (6\times 6) - (2\sqrt{6}\times 4\sqrt{6})\\ &= 36-(8\times 6)\\ &= -12\end{aligned}$$

ดังนั้น $2\sqrt{6}\times(3\sqrt{6}-2\sqrt{24}) = -12$

ตอบ -12

ตัวอย่างที่ 15 จงหาผลลัพธ์ $\frac{2\sqrt{242}}{\sqrt{18}}$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\begin{aligned}\frac{2\sqrt{242}}{\sqrt{18}} &= 2\sqrt{\frac{242}{18}}\\ &= 2\sqrt{\frac{121}{9}}\\ &= 2\times\frac{11}{3}\end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{2\sqrt{242}}{\sqrt{18}} = \frac{22}{3}$ หรือ $7\frac{1}{3}$

ตอบ $\frac{22}{3}$ หรือ $7\frac{1}{3}$

ตัวอย่างที่ 16 จงหาผลลัพธ์ $\frac{6\sqrt{1,125}}{\sqrt{20}}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{6\sqrt{1,125}}{\sqrt{20}} = \frac{6\times 15\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$

$= 45$

ดังนั้น $\frac{6\sqrt{1,125}}{\sqrt{20}} = 45$

ตอบ 45

ตัวอย่างที่ 17 จงหาผลลัพธ์ $5\sqrt{3} \times \frac{-4}{\sqrt{27}}$

วิธีทำ เนื่องจาก $5\sqrt{3} \times \frac{-4}{\sqrt{27}} = 5\sqrt{3} \times \frac{-4}{\sqrt{3\times 3\times 3}}$

$= \frac{-20\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}$

$= -\frac{20}{3}$

ดังนั้น $5\sqrt{3} \times \frac{-4}{\sqrt{27}} = -\frac{20}{3}$ หรือ $-6\frac{2}{3}$

ตอบ $-\frac{20}{3}$ หรือ $-6\frac{2}{3}$

ในกรณีที่ผลลัพธ์ที่ได้จากการดำเนินการเป็นเศษส่วนที่ตัวส่วนอยู่ในรูปกรณฑ์ที่สอง นิยมทำตัวส่วนให้เป็นจำนวนเต็มด้วยการคูณทั้งตัวเศษและตัวส่วนนั้น ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 18 จงหาค่าประมาณของ $\sqrt{\frac{25}{2}}$ เมื่อกำหนดให้ $\sqrt{2} \approx 1.414$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\sqrt{\frac{25}{2}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \approx \frac{5 \times 1.414}{2} \approx 3.535$$

การคูณด้วย $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ เป็นการคูณด้วย 1 จึงไม่ทำให้ค่าของ $\frac{5}{\sqrt{2}}$ เปลี่ยนไป

ดังนั้น $\sqrt{\frac{25}{2}} \approx 3.535$

ตอบ ประมาณ 3.535

ตัวอย่างที่ 19 จงหาค่าประมาณของ $\sqrt{\frac{50}{3}}$ เมื่อกำหนดให้ $\sqrt{6} \approx 2.449$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\sqrt{\frac{50}{3}} = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5 \times 5 \times 2}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{6}}{3} \approx \frac{5 \times 2.449}{3} \approx 4.082$$

การคูณด้วย $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ เป็นการคูณด้วย 1 จึงไม่ทำให้ค่าของ $\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ เปลี่ยนไป

ดังนั้น $\sqrt{\frac{50}{3}} \approx 4.082$

ตอบ ประมาณ 4.082

ให้นักเรียนสังเกตว่า การทำให้ตัวส่วนที่อยู่ในรูปกรณฑ์เป็นจำนวนเต็ม ช่วยให้การคำนวณสะดวกขึ้น เนื่องจากการหารจำนวนใด ๆ ด้วยจำนวนเต็มทำได้สะดวกกว่าการหารด้วยทศนิยมที่เป็นค่าประมาณของจำนวนที่อยู่ในรูปกรณฑ์

ตัวอย่างที่ 20 จงทำ $2\sqrt{5} + \frac{3}{\sqrt{5}}$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\begin{aligned} 2\sqrt{5} + \frac{3}{\sqrt{5}} &= 2\sqrt{5} + \left(\frac{3}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right) \\ &= 2\sqrt{5} + \frac{3}{5}\sqrt{5} \\ &= \left(2 + \frac{3}{5}\right)\sqrt{5} \\ &= \frac{13}{5}\sqrt{5} \end{aligned}$$

ดังนั้น $2\sqrt{5} + \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{13}{5}\sqrt{5}$

ตอบ $\frac{13}{5}\sqrt{5}$

ช่วยคิดหน่อย

ตุ้มแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ข้อหนึ่งได้คำตอบเป็น $21\sqrt{2}$ ซึ่งไม่ตรงกับเฉลย จึงไปให้ต้อมช่วยคิดว่าตนทำผิดขั้นตอนใด ทั้งสองคนพบว่า ตุ้มทำผิดขั้นตอนสุดท้ายด้วยการนำ $\sqrt{6}$ ไปคูณ แทนที่จะนำไปหาร นักเรียนคิดว่าคำตอบที่ถูกต้องคืออะไร

ช่วยคิดหน่อย

แบบฝึกหัด 1.2 ข

1. จงหาผลลัพธ์

1) $\sqrt{50}\times\sqrt{5}$
2) $\sqrt{75}\times2\sqrt{5}$
3) $2\sqrt{125}\times3\sqrt{5}$
4) $\sqrt{7}\times(2\sqrt{7}+5\sqrt{5})$
5) $2\sqrt{3}\times(\sqrt{12}+3\sqrt{72})$
6) $-3\sqrt{15}\times(\sqrt{60}-\sqrt{135})$

2. จงหาผลลัพธ์

1) $\dfrac{3\sqrt{162}}{\sqrt{18}}$
2) $\dfrac{3\sqrt{18{,}000}}{\sqrt{20}}$
3) $-6\sqrt{175}\times\dfrac{5}{3\sqrt{98}}$
4) $12\sqrt{8}\times(-\sqrt{18})\times\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{72}}$
5) $\sqrt{\dfrac{4}{3}y}\times\sqrt{3y}$ เมื่อ $y>0$
6) $\dfrac{\sqrt{12x^3}}{\sqrt{2x}}$ เมื่อ $x>0$

3. จงหาค่าประมาณของจำนวนในแต่ละข้อต่อไปนี้ เมื่อกำหนดให้ $\sqrt{2}\approx1.414$ และ $\sqrt{3}\approx1.732$

1) $\sqrt{\dfrac{49}{8}}$
2) $\dfrac{15}{\sqrt{12}}$
3) $2\sqrt{\dfrac{98}{3}}$
4) $\dfrac{2}{5}\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

4. จงทำจำนวนในแต่ละข้อต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1) $5\sqrt{11}-\dfrac{7}{\sqrt{11}}+\dfrac{3}{\sqrt{11}}$
2) $2\sqrt{50}+\dfrac{6}{\sqrt{72}}-4\sqrt{162}$

5. จงหาผลลัพธ์ $\dfrac{\sqrt{49a^2b^2}+\sqrt{(-5ab)^2}}{(\sqrt{2ab})^2}$ เมื่อ $a>0$ และ $b>0$

จงตอบคำถามต่อไปนี้

1) ถ้า $a^2 = 441$ แล้ว a เป็นเท่าใด

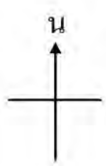
2) ถ้า $(x+1)^2 = 16$ แล้ว x เป็นเท่าใด

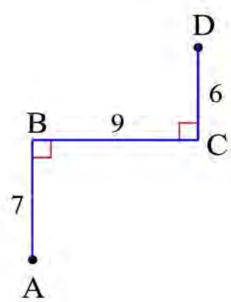
3) ถ้า $\sqrt{4p} = 8$ แล้ว p เป็นเท่าใด

4) ถ้า $\sqrt{4(m+1)} = 20$ แล้ว m เป็นเท่าใด

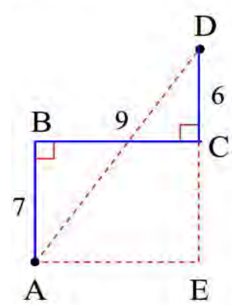
1.3 การนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 1 การเดินทางไกลของลูกเสือหมู่หนึ่งเป็นไปตามแผนผัง ดังรูป เริ่มออกเดินทางจากจุด A ไปทางทิศเหนือ 7 กิโลเมตรถึงจุด B แล้วเดินทางต่อไปทางทิศตะวันออก 9 กิโลเมตร ถึงจุด C จากนั้นได้เดินทางต่อขึ้นไปทางทิศเหนืออีก 6 กิโลเมตร จนถึงจุด D ซึ่งเป็นที่ตั้งค่ายพักแรม จงหาว่าที่ตั้งค่ายพักแรมอยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นกี่กิโลเมตร





วิธีทำ



จากรูป AD เป็นระยะห่างระหว่างที่ตั้งค่ายพักแรมกับจุดเริ่มต้น ถ้าต่อ $\overline{DC}$ ไปทางจุด C และลาก $\overline{AE}$ ขนานกับ $\overline{BC}$ ตัดส่วนต่อของ $\overline{DC}$ ที่จุด E

โดยสมบัติของเส้นขนาน จะได้ $A\hat{E}D$ เป็นมุมฉาก ทำให้ได้ $AE = BC$ และ $CE = BA$

ดังนั้น $AE = 9$ กิโลเมตร และ $DE = DC + CE = 6 + 7 = 13$ กิโลเมตร

เนื่องจาก ΔAED เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัส

จะได้ $AD^2 = AE^2 + ED^2$

ดังนั้น $AD^2 = 9^2 + 13^2$

$= 81 + 169$

$= 250$

จะได้ $AD = \sqrt{250}$

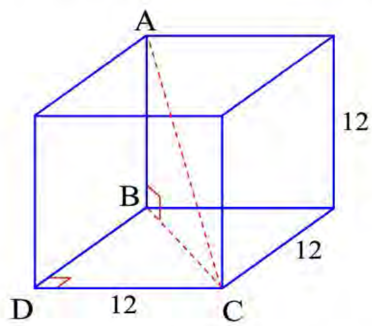
$= \sqrt{5^2 \times 10}$

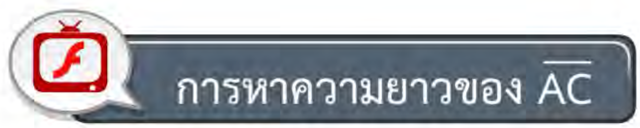
$= 5\sqrt{10}$

นั่นคือ ที่ตั้งค่ายพักแรมอยู่ห่างจากจุดเริ่มต้น $5\sqrt{10}$ กิโลเมตร

ตอบ $5\sqrt{10}$ กิโลเมตร

ตัวอย่างที่ 2 กล่องทรงลูกบาศก์ใบหนึ่งมีแต่ละด้านยาว 12 นิ้ว ดังรูป จงหาว่า $\overline{AC}$ ยาวเท่าใด





วิธีทำ จากรูป ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มี $A\hat{B}C$ เป็นมุมฉาก

ΔBDC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มี $B\hat{D}C$ เป็นมุมฉาก และ

มี $AB = BD = DC = 12$ นิ้ว

เนื่องจาก $BC^2 = BD^2 + DC^2$

ดังนั้น $BC^2 = 12^2 + 12^2$

$= 288$

เนื่องจาก $AC^2 = AB^2 + BC^2$

ดังนั้น $AC^2 = 12^2 + 288$

$= 144 + 288$

$= 432$

จะได้ $AC = \sqrt{432}$

$= \sqrt{12 \times 12 \times 3}$

$= 12\sqrt{3}$

ดังนั้น $\overline{AC}$ ยาว $12\sqrt{3}$ นิ้ว

ตอบ $12\sqrt{3}$ นิ้ว

ตัวอย่างที่ 3 ลานกีฬากลางแจ้งรูปวงกลมสองแห่ง สำหรับผู้ใหญ่และเด็ก มีพื้นที่ 200π ตารางเมตร และ 50π ตารางเมตรตามลำดับ จงหาว่ารัศมีของลานกีฬาสำหรับผู้ใหญ่ยาวกว่ารัศมีของลานกีฬาสำหรับเด็กกี่เมตร

วิธีทำ ให้รัศมีของลานกีฬาสำหรับผู้ใหญ่เป็น r_1 เมตร และรัศมีของลานกีฬาสำหรับเด็กเป็น r_2 เมตร

จากสูตรการหาพื้นที่ของวงกลมซึ่งเท่ากับ πr^2 และพื้นที่ของลานกีฬาสำหรับผู้ใหญ่เท่ากับ 200π ตารางเมตร

จะได้ $\pi r_1^2 = 200\pi$

$r_1^2 = 200$

$r_1 = \sqrt{200}$

$= 10\sqrt{2}$

ดังนั้น รัศมีของลานกีฬาสำหรับผู้ใหญ่เท่ากับ $10\sqrt{2}$ เมตร

เนื่องจาก พื้นที่ของลานกีฬาสำหรับเด็กเท่ากับ 50π ตารางเมตร

จะได้ $\pi r_2^2 = 50\pi$

$r_2^2 = 50$

$r_2 = \sqrt{50}$

$= 5\sqrt{2}$

ดังนั้น รัศมีของลานกีฬาสำหรับเด็กเท่ากับ $5\sqrt{2}$ เมตร

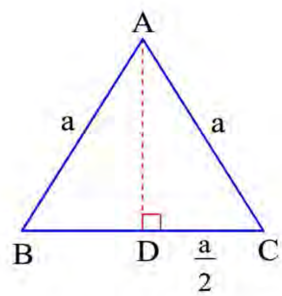
ดังนั้น $r_1 - r_2 = 10\sqrt{2} - 5\sqrt{2}$

$= 5\sqrt{2}$

นั่นคือ รัศมีของลานกีฬาสำหรับผู้ใหญ่ยาวกว่ารัศมีของลานกีฬาสำหรับเด็ก $5\sqrt{2}$ เมตร

ตอบ $5\sqrt{2}$ เมตร

ตัวอย่างที่ 4 รูปสามเหลี่ยมด้านเท่ามีความยาวด้านละ a หน่วย จะมีความสูงและพื้นที่เป็นเท่าไร



วิธีทำ ให้ ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า มี BC = CA = AB = a หน่วย และ $\overline{AD}$ เป็นความสูงของ ΔABC

โดยสมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วจะได้ $\overline{AD}$ ตั้งฉากและแบ่งครึ่งฐาน BC

$$CD = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2} \text{ หน่วย}$$

จากรูป ΔADC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

จะได้ $AC^2 = AD^2 + CD^2$

ดังนั้น $AD^2 = AC^2 - CD^2$

จะได้ $AD^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$$AD = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{3a^2}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

ดังนั้น ส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ายาว $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ หน่วย

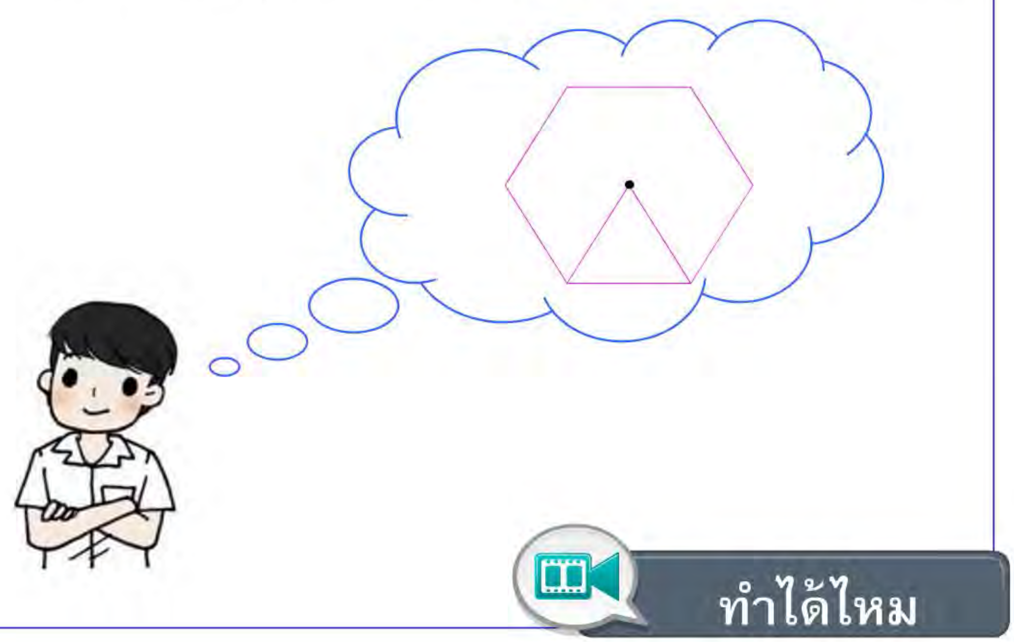
จะได้ พื้นที่ของ Δ ABC เท่ากับ $\frac{1}{2} \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \text{ ตารางหน่วย}$$

นั่นคือ พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า เท่ากับ $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ ตารางหน่วย

ตอบ
- ความสูงของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า คือ $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ หน่วย
- พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า คือ $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ ตารางหน่วย

จงหาพื้นที่ของรูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่มีด้านยาวด้านละ a หน่วย



บอกได้หรือไม่

บอกได้หรือไม่

จงพิจารณาโดยไม่ต้องคำนวณโดยตรงว่าประโยคในแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นจริงหรือไม่ เพราะเหตุใด

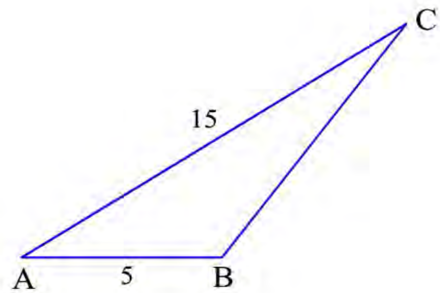
1. $15\sqrt{3} < 30$
2. $10\sqrt{3} < 3\sqrt{10}$
3. $\sqrt{3} \times \sqrt{5} < 5$
4. $5\sqrt{2} \times 4\sqrt{3} = 9\sqrt{6}$
5. $\sqrt{2} \times \sqrt{7} < \sqrt{3} \times \sqrt{5}$
6. $\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{2}} < 3$
7. $\dfrac{\sqrt{26}}{5} < 1$
8. $\dfrac{14}{\sqrt{2}} > 7$
9. $\dfrac{\sqrt{3}}{5} < \dfrac{5}{\sqrt{3}}$
10. $3 \times \sqrt{0.01} < \dfrac{3}{\sqrt{0.01}}$

แบบฝึกหัด 1.3

1. กำหนดให้ Δ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ที่มีด้านประกอบมุมฉากยาวเท่ากันและมีด้านตรงข้ามมุมฉากยาว $13\sqrt{2}$ หน่วย จงหาว่าด้านประกอบมุมฉากแต่ละด้านยาวเท่าใด

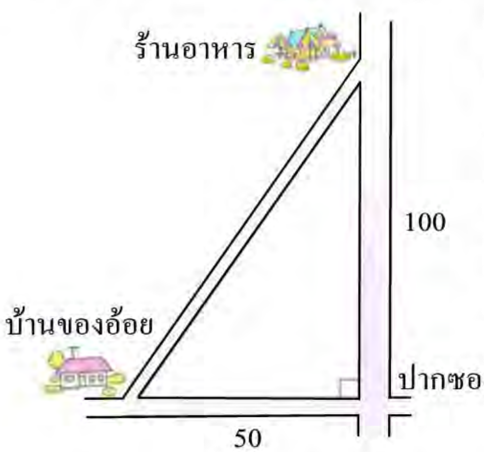
2. จงหาความยาวรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีเส้นทแยงมุมยาว $18\sqrt{2}$ หน่วย

3. กำหนด ΔABC ดังรูป ถ้าความสูงจากจุด C เป็น $5\sqrt{5}$ หน่วย จงหาความยาวของ $\overline{BC}$



4. ลานสนามหญ้ารูปวงกลมสองแห่ง แห่งที่หนึ่งมีพื้นที่ 176 ตารางเมตร และแห่งที่สอง มีพื้นที่ 44 ตารางเมตร เส้นผ่านศูนย์กลางของสนามหญ้าแห่งที่หนึ่งยาวเป็นกี่เท่าของเส้นผ่านศูนย์กลางของสนามหญ้าแห่งที่สอง

5. บ้านของอ้อยอยู่ในซอยซึ่งห่างจากถนนใหญ่ 50 เมตร บนถนนสายนี้มีร้านอาหารอร่อยอยู่ห่างจากปากซอยบ้านของอ้อยไป 100 เมตร ดังแผนภาพ ปกติอ้อยจะใช้สองเส้นทางในการไปรับประทานอาหารร้านนี้ คือ ไปถนนใหญ่แล้วเดินขึ้นไป กับเดินทางลัดจากบ้านไปร้านอาหารโดยตรง อ้อยต้องการทราบว่าเส้นทางลัดที่อ้อยใช้เป็นประจำนั้นสั้นกว่าอีกเส้นทางหนึ่งกี่เมตร (กำหนดให้ $\sqrt{5} \approx 2.236$)



6. ถังน้ำทรงกระบอกใบที่หนึ่งสูง 7 ฟุต สามารถจุน้ำได้ 6,600 ลูกบาศก์ฟุต ถังทรงเดียวกันใบที่สองสูง 14 ฟุต สามารถจุน้ำได้ 22,000 ลูกบาศก์ฟุต รัศมีของถังใบที่หนึ่งเป็นกี่เท่าของรัศมีของถังใบที่สอง (กำหนดให้ $\pi \approx \frac{22}{7}$ และ $\sqrt{15} \approx 3.873$)

กรณฑ์ที่สองของจำนวนจริง

จงหากรณฑ์ที่สองต่อไปนี้ แล้วหาความสัมพันธ์ของคำตอบที่ได้กับจำนวนที่อยู่ในเครื่องหมายกรณฑ์

$\sqrt{1}$ = ……………………..

$\sqrt{121}$ = ……………………..

$\sqrt{12321}$ = ……………………..

$\sqrt{1234321}$ = ……………………..

$\sqrt{123454321}$ = ……………………..

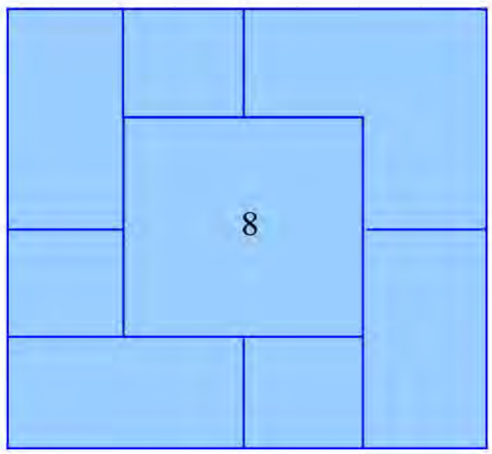
$\sqrt{12345654321}$ = ……………………..

$\sqrt{1234567654321}$ = ……………………..

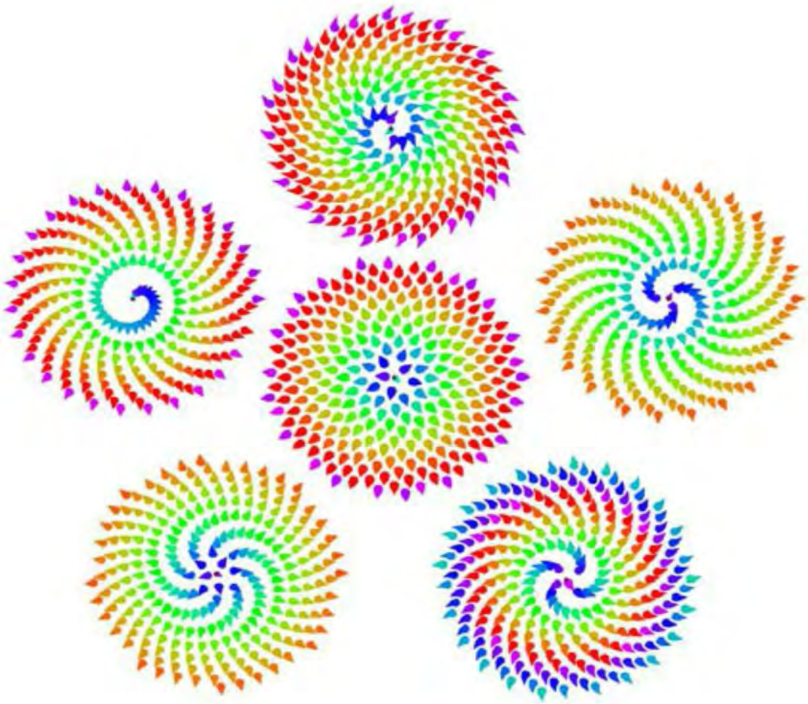
$\sqrt{123456787654321}$ = ……………………..

วางอย่างไร

รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีขนาดเท่ากัน 8 รูป วางซ้อนทับกันเป็นบางส่วนทีละรูปตามลำดับ โดยมีรูปที่ 8 วางอยู่บนสุด ทำให้เกิดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปใหญ่ดังภาพ



1. ให้นักเรียนวิเคราะห์หาลำดับการวางรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส แล้วเขียนหมายเลข 1 ถึง 7 ลงบนแผนภาพ เพื่อระบุลำดับการวาง
2. ถ้าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสแต่ละรูปยาว $5\sqrt{2}$ หน่วย จงหาความยาวรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปใหญ่



รูปนี้สร้างด้วยโปรแกรม The Geometer's Sketchpad
โดยใช้ความรู้เรื่องการแปลงทางเรขาคณิต

บทที่ 2
การแยกตัวประกอบของพหุนาม

นักเรียนเคยทราบมาแล้วเกี่ยวกับการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองในรูป $ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนเต็มที่ $a \neq 0$ และได้ตัวประกอบที่มีสัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์เป็นจำนวนเต็ม ซึ่งเป็นสาระที่จำเป็นที่นักเรียนจะต้องเรียนรู้เพื่อนำไปใช้แก้ปัญหา ในบทนี้จะขยายความรู้เพิ่มเติมเกี่ยวกับการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่เป็นผลต่างของกำลังสองและพหุนามที่ทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์ซึ่งมีสัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์ของตัวประกอบเป็นจำนวนจริง อีกทั้งยังมีสาระใหม่ที่กล่าวถึงการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสูงกว่าสองที่มีสัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์เป็นจำนวนเต็ม และได้ตัวประกอบที่มีสัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์เป็นจำนวนเต็มเท่านั้น โดยใช้สมบัติการเปลี่ยนหมู่ สมบัติการสลับที่ สมบัติการแจกแจง หรือใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือ ทักษะในการแยกตัวประกอบของพหุนามจะเป็นพื้นฐานการเรียนรู้ในระดับที่สูงขึ้น สามารถใช้แก้ปัญหาในสถานการณ์ต่าง ๆ ได้มากขึ้น

จุดมุ่งหมายของบทเรียนบทนี้ มีดังนี้

1. แยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่เป็นผลต่างของกำลังสองได้
2. แยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองโดยวิธีทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์ได้
3. แยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสูงกว่าสองที่มีสัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์เป็นจำนวนเต็มและได้ตัวประกอบที่มีสัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์เป็นจำนวนเต็มได้ โดยใช้สูตร หรือ อาศัยวิธีทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์ หรือใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือ

2.1 การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่เป็นผลต่างของกำลังสอง

นักเรียนรู้จักสูตรการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่เป็น*ผลต่างของกำลังสอง* มาแล้วดังนี้

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B) \quad \text{เมื่อ } A \text{ และ } B \text{ เป็นพหุนาม}$$

นักเรียนยังทราบมาแล้วว่า $(\sqrt{a})^2 = a$ *เมื่อ* a *เป็นจำนวนจริงบวกหรือศูนย์* เรานำความรู้ดังกล่าวมาใช้แยกตัวประกอบของพหุนามที่เป็นผลต่างของกำลังสองได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ผลต่างของกำลังสอง

ตัวอย่างที่ 1 จงแยกตัวประกอบของ $x^2 - 2$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} x^2 - 2 &= x^2 - (\sqrt{2})^2 \\ &= (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

ดังนั้น $x^2 - 2 = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$

ตัวอย่างที่ 2 จงแยกตัวประกอบของ $\frac{1}{4}x^2 - 5$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}x^2 - 5 &= \left(\frac{1}{2}x\right)^2 - (\sqrt{5})^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}x + \sqrt{5}\right)\left(\frac{1}{2}x - \sqrt{5}\right) \end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{1}{4}x^2 - 5 = \left(\frac{1}{2}x + \sqrt{5}\right)\left(\frac{1}{2}x - \sqrt{5}\right)$

ตัวอย่างที่ 3 จงแยกตัวประกอบของ $8 - (x - 3)^2$

$8 = (2\sqrt{2})^2$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} 8 - (x - 3)^2 &= (2\sqrt{2})^2 - (x - 3)^2 \\ &= [2\sqrt{2} + (x - 3)][2\sqrt{2} - (x - 3)] \\ &= (2\sqrt{2} + x - 3)(2\sqrt{2} - x + 3) \\ &= (2\sqrt{2} - 3 + x)(2\sqrt{2} + 3 - x) \end{aligned}$$

ดังนั้น $8 - (x - 3)^2 = (2\sqrt{2} - 3 + x)(2\sqrt{2} + 3 - x)$

ตัวอย่างที่ 4 จงแยกตัวประกอบของ $(2x+7)^2 - 12$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}(2x+7)^2 - 12 &= (2x+7)^2 - (2\sqrt{3})^2 \\ &= [(2x+7) + 2\sqrt{3}][(2x+7) - 2\sqrt{3}] \\ &= (2x+7+2\sqrt{3})(2x+7-2\sqrt{3})\end{aligned}$$

ดังนั้น $(2x+7)^2 - 12 = (2x+7+2\sqrt{3})(2x+7-2\sqrt{3})$

แบบฝึกหัด 2.1

จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้

1. $x^2 - 3$
2. $x^2 - 7$
3. $20 - x^2$
4. $18 - x^2$
5. $x^2 - \frac{3}{4}$
6. $x^2 - \frac{5}{36}$
7. $\frac{1}{9}x^2 - 15$
8. $\frac{25}{16}x^2 - 24$
9. $7x^2 - 24$
10. $(x-1)^2 - 6$
11. $(x+3)^2 - 10$
12. $(x-2)^2 - 27$
13. $50 - (x-4)^2$
14. $32 - (x+5)^2$
15. $(2x+3)^2 - 24$
16. $(3x-2)^2 - 52$
17. $(5x-1)^2 - 48$
18. $72 - (4x+3)^2$

2.2 การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองโดยวิธีทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์

นักเรียนรู้จักสูตรการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่เป็น*กำลังสองสมบูรณ์*มาแล้ว ดังนี้

$$A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$$
$$A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$$

จากสูตรนี้จะได้ว่า

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2 \quad \text{เมื่อ } a \text{ เป็นค่าคงตัว}$$
$$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2 \quad \text{เมื่อ } a \text{ เป็นค่าคงตัว}$$

นักเรียนสามารถแยกตัวประกอบของพหุนาม เช่น $x^2 + 6x + 5$ โดยใช้วิธีแยกตัวประกอบที่ทราบมาแล้วได้ดังนี้

$$x^2 + 6x + 5 = (x + 5)(x + 1)$$

พิจารณาการแยกตัวประกอบของ $x^2 + 6x + 5$ อีกวิธีหนึ่งซึ่งจะเขียนนิพจน์ $x^2 + 6x$ ให้มีบางส่วนเป็นกำลังสองสมบูรณ์ก่อน แล้วจึงแยกตัวประกอบ

เนื่องจาก $x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$ ดังนั้น เมื่อต้องการเขียน $x^2 + 6x$ ให้มีบางส่วนเป็นกำลังสองสมบูรณ์ จะต้องจัดเป็น $x^2 + 6x = x^2 + 2(3)x$ จากนั้นเพิ่มพจน์ 3^2 เข้าไปและเพื่อให้ได้นิพจน์ที่เท่าเดิม ก็จะหักออกด้วยพจน์ 3^2 ดังนี้

$$\begin{aligned} x^2 + 6x &= [x^2 + 2(3)x + 3^2] - 3^2 \\ &= (x + 3)^2 - 3^2 \end{aligned}$$

ดังนั้น แยกตัวประกอบของ $x^2 + 6x + 5$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 5 &= [x^2 + 2(3)x + 3^2] - 3^2 + 5 \\ &= (x + 3)^2 - 9 + 5 \\ &= (x + 3)^2 - 4 \\ &= (x + 3)^2 - 2^2 \\ &= [(x + 3) + 2][(x + 3) - 2] \\ &= (x + 5)(x + 1) \end{aligned}$$

การแยกตัวประกอบของ $x^2 + 6x + 5$ ด้วยวิธีข้างต้นนี้ เรียกว่า **วิธีทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์**

การแยกตัวประกอบโดยวิธีทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์ จะช่วยให้นักเรียนสามารถแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองบางพหุนามที่ไม่สามารถแยกได้ด้วยวิธีที่นักเรียนเคยทราบมาแล้ว เช่น $x^2 + 4x + 1$

ในการแยกตัวประกอบของ $x^2 + 4x + 1$ โดยใช้วิธีทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์ทำได้ดังนี้

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 1 &= [x^2 + 2(2)x + 2^2] - 2^2 + 1 \\ &= (x + 2)^2 - 4 + 1 \\ &= (x + 2)^2 - 3 \\ &= (x + 2)^2 - (\sqrt{3})^2 \\ &= [(x + 2) + \sqrt{3}][(x + 2) - \sqrt{3}] \\ &= (x + 2 + \sqrt{3})(x + 2 - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 1 จงแยกตัวประกอบของพหุนาม $x^2 + 10x + 6$ โดยใช้วิธีทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์

วิธีทำ

$$\begin{aligned} x^2 + 10x + 6 &= x^2 + 2(5)x + 6 \\ &= [x^2 + 2(5)x + 5^2] - 5^2 + 6 \\ &= (x + 5)^2 - 25 + 6 \\ &= (x + 5)^2 - 19 \\ &= (x + 5)^2 - (\sqrt{19})^2 \\ &= [(x + 5) + \sqrt{19}][(x + 5) - \sqrt{19}] \\ &= (x + 5 + \sqrt{19})(x + 5 - \sqrt{19}) \end{aligned}$$

ดังนั้น $x^2 + 10x + 6 = (x + 5 + \sqrt{19})(x + 5 - \sqrt{19})$

ตัวอย่างที่ 2 จงแยกตัวประกอบของพหุนาม $x^2 + 12x - 9$ โดยใช้วิธีทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
x^2 + 12x - 9 &= x^2 + 2(6)x - 9 \\
&= [x^2 + 2(6)x + 6^2] - 6^2 - 9 \\
&= (x+6)^2 - 36 - 9 \\
&= (x+6)^2 - 45 \\
&= (x+6)^2 - (\sqrt{45})^2 \\
&= (x+6)^2 - (3\sqrt{5})^2 \\
&= [(x+6) + 3\sqrt{5}][(x+6) - 3\sqrt{5}] \\
&= (x + 6 + 3\sqrt{5})(x + 6 - 3\sqrt{5})
\end{aligned}$$

ดังนั้น $x^2 + 12x - 9 = (x + 6 + 3\sqrt{5})(x + 6 - 3\sqrt{5})$

ตัวอย่างที่ 3 จงแยกตัวประกอบของพหุนาม $x^2 - 6x + 2$ โดยใช้วิธีทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
x^2 - 6x + 2 &= x^2 - 2(3)x + 2 \\
&= [x^2 - 2(3)x + 3^2] - 3^2 + 2 \\
&= (x-3)^2 - 9 + 2 \\
&= (x-3)^2 - 7 \\
&= (x-3)^2 - (\sqrt{7})^2 \\
&= [(x-3) + \sqrt{7}][(x-3) - \sqrt{7}] \\
&= (x - 3 + \sqrt{7})(x - 3 - \sqrt{7})
\end{aligned}$$

ดังนั้น $x^2 - 6x + 2 = (x - 3 + \sqrt{7})(x - 3 - \sqrt{7})$

ตัวอย่างที่ 4 จงแยกตัวประกอบของพหุนาม $x^2 - 7x - 6$ โดยใช้วิธีทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
x^2 - 7x - 6 &= x^2 - 2\left(\frac{7}{2}\right)x - 6 \\
&= \left[x^2 - 2\left(\frac{7}{2}\right)x + \left(\frac{7}{2}\right)^2\right] - \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 6 \\
&= \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} - 6 \\
&= \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{73}{4} \\
&= \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{73}}{2}\right)^2 \\
&= \left[\left(x - \frac{7}{2}\right) + \frac{\sqrt{73}}{2}\right]\left[\left(x - \frac{7}{2}\right) - \frac{\sqrt{73}}{2}\right] \\
&= \left(x - \frac{7}{2} + \frac{\sqrt{73}}{2}\right)\left(x - \frac{7}{2} - \frac{\sqrt{73}}{2}\right) \\
&= \left(x - \frac{7 - \sqrt{73}}{2}\right)\left(x - \frac{7 + \sqrt{73}}{2}\right)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $x^2 - 7x - 6 = \left(x - \frac{7 - \sqrt{73}}{2}\right)\left(x - \frac{7 + \sqrt{73}}{2}\right)$

แบบฝึกหัด 2.2 ก

จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้โดยใช้วิธีทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์

1. $x^2 + 24x + 140$
2. $x^2 + 16x - 561$
3. $x^2 - 28x + 195$
4. $x^2 - 26x - 155$
5. $x^2 + 8x + 10$
6. $x^2 + 2x - 5$
7. $x^2 - 6x + 6$
8. $x^2 - 2x - 10$
9. $x^2 + 10x + 1$
10. $x^2 - 7x + 11$

11. $x^2 + 9x + 19$ 12. $x^2 + 5x - 2$

13. $x^2 + 11x + 29$ 14. $x^2 + 7x + 9$

15. $x^2 - 9x + 12$ 16. $x^2 - 15x + 40$

การแยกตัวประกอบของพหุนาม $ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a = 1$ ที่กล่าวมาแล้วนั้น ทำได้โดยใช้วิธีทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์ สำหรับในกรณีที่ $a \neq 1$ เราก็สามารถใช้วิธีนี้แยกตัวประกอบของพหุนาม $ax^2 + bx + c$ ได้เช่นกัน โดยใช้สมบัติการแจกแจงทำสัมประสิทธิ์ของ x^2 ให้เป็น 1 ก่อน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ทำสัมประสิทธิ์ของ x^2 ให้เป็น 1 โดยใช้สมบัติการแจกแจง นำ 3 ออกมาเป็นตัวคูณร่วม

ตัวอย่างที่ 5 จงแยกตัวประกอบของ $3x^2 - 8x - 35$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
3x^2 - 8x - 35 &= 3\left[x^2 - \frac{8}{3}x - \frac{35}{3}\right] \\
&= 3\left[\left(x^2 - \frac{8}{3}x\right) - \frac{35}{3}\right] \\
&= 3\left[\left\{x^2 - 2\left(\frac{4}{3}\right)x + \left(\frac{4}{3}\right)^2\right\} - \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{35}{3}\right] \\
&= 3\left[\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{16}{9} - \frac{35}{3}\right] \\
&= 3\left[\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 - \left(\frac{16}{9} + \frac{35}{3}\right)\right] \\
&= 3\left[\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 - \left(\frac{16 + 105}{9}\right)\right] \\
&= 3\left[\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{121}{9}\right] \\
&= 3\left[\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 - \left(\frac{11}{3}\right)^2\right] \\
&= 3\left[\left(x - \frac{4}{3}\right) + \frac{11}{3}\right]\left[\left(x - \frac{4}{3}\right) - \frac{11}{3}\right] \\
&= 3\left(x - \frac{4}{3} + \frac{11}{3}\right)\left(x - \frac{4}{3} - \frac{11}{3}\right)
\end{aligned}
$$

$$= 3\left(x + \frac{7}{3}\right)(x - 5) \quad \text{หรือ} \quad (3x+7)(x-5)$$

ดังนั้น $3x^2 - 8x - 35 = 3\left(x + \frac{7}{3}\right)(x - 5)$ หรือ $(3x+7)(x-5)$

ตัวอย่างที่ 6 จงแยกตัวประกอบของ $2x^2 + 4x + 1$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
2x^2 + 4x + 1 &= 2\left[x^2 + 2x + \frac{1}{2}\right] \\
&= 2\left[(x^2 + 2x) + \frac{1}{2}\right] \\
&= 2\left[\left\{x^2 + 2(1)x + 1\right\} - 1 + \frac{1}{2}\right] \\
&= 2\left[(x+1)^2 - \frac{1}{2}\right] \\
&= 2\left[(x+1)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right] \\
&= 2\left[(x+1) + \frac{1}{\sqrt{2}}\right]\left[(x+1) - \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \\
&= 2\left(x + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $2x^2 + 4x + 1 = 2\left(x + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

ตัวอย่างที่ 7 จงแยกตัวประกอบของ $-4x^2 + 8x + 20$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
-4x^2 + 8x + 20 &= -4[x^2 - 2x - 5] \\
&= -4[(x^2 - 2x) - 5] \\
&= -4[\{x^2 - 2(1)x + 1\} - 1 - 5] \\
&= -4[(x-1)^2 - 6] \\
&= -4[(x-1)^2 - (\sqrt{6})^2]
\end{aligned}$$

$$= -4[(x-1)+\sqrt{6}\,][(x-1)-\sqrt{6}\,]$$
$$= -4\,(x-1+\sqrt{6}\,)(x-1-\sqrt{6}\,)$$

ดังนั้น $-4x^2+8x+20 = -4\,(x-1+\sqrt{6}\,)(x-1-\sqrt{6}\,)$

ตัวอย่างที่ 8 จงแยกตัวประกอบของ $-x^2+5x+7$

วิธีทำ

$$-x^2+5x+7 = -[x^2-5x-7]$$
$$= -[(x^2-5x)-7]$$
$$= -\left[\left\{x^2-2\left(\frac{5}{2}\right)x+\left(\frac{5}{2}\right)^2\right\}-\left(\frac{5}{2}\right)^2-7\right]$$
$$= -\left[\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}-7\right]$$
$$= -\left[\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{25}{4}+7\right)\right]$$
$$= -\left[\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{25+28}{4}\right)\right]$$
$$= -\left[\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{53}{4}\right]$$
$$= -\left[\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{53}}{2}\right)^2\right]$$
$$= -\left[\left(x-\frac{5}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{53}}{2}\right)\right]\left[\left(x-\frac{5}{2}\right)-\frac{\sqrt{53}}{2}\right]$$
$$= -\left(x-\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{53}}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{53}}{2}\right)$$
$$= -\left(x-\frac{5-\sqrt{53}}{2}\right)\left(x-\frac{5+\sqrt{53}}{2}\right)$$

ดังนั้น $-x^2+5x+7 = -\left(x-\frac{5-\sqrt{53}}{2}\right)\left(x-\frac{5+\sqrt{53}}{2}\right)$

แบบฝึกหัด 2.2 ข

จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้โดยใช้วิธีทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์

1. $3x^2 + 19x - 14$
2. $11x^2 - 142x - 13$
3. $15x^2 - 77x + 10$
4. $-2x^2 - 12x + 4$
5. $-3x^2 + 24x + 15$
6. $3x^2 + 5x - 1$
7. $6x^2 + 36x - 8$
8. $4x^2 + 18x + 10$
9. $-2x^2 + x + 7$
10. $-x^2 + 5x - 3$
11. $10x^2 + 17x + 4$
12. $-4x^2 - 26x - 4$

ทำได้เหมือนกัน

ทำได้เหมือนกัน

จากสูตรการแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้

$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว

$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว

สูตรทั้งสองนี้สามารถนำมาใช้แยกตัวประกอบของพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์ของบางพจน์ไม่เป็นจำนวนเต็มได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

1. $$x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 = x^2 + 2\sqrt{2}x + (\sqrt{2})^2 = (x + \sqrt{2})^2$$

2. $$x^2 - x + \frac{1}{4} = x^2 - (2)\left(\frac{1}{2}\right)x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

ให้นักเรียนแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้

1) $x^2 - 2\sqrt{5}\,x + 5$
2) $x^2 + x + \frac{1}{4}$
3) $x^2 + 4\sqrt{3}\,x + 12$
4) $x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$

2.3 การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสูงกว่าสองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสูงกว่าสองที่มีสัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์เป็นจำนวนเต็ม และตัวประกอบที่ได้มามีสัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์เป็นจำนวนเต็มด้วย

พิจารณาการหาผลคูณของพหุนามในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $(x + 5)(x^2 - 5x + 25) = x^3 - 5x^2 + 25x + 5x^2 - 25x + 125$
$= x^3 + 125$
$= x^3 + 5^3$
2. $(2x + 3)(4x^2 - 6x + 9) = 8x^3 - 12x^2 + 18x + 12x^2 - 18x + 27$
$= 8x^3 + 27$
$= (2x)^3 + 3^3$
3. $(x - 5)(x^2 + 5x + 25) = x^3 + 5x^2 + 25x - 5x^2 - 25x - 125$
$= x^3 - 125$
$= x^3 - 5^3$
4. $(2x - 3)(4x^2 + 6x + 9) = 8x^3 + 12x^2 + 18x - 12x^2 - 18x - 27$
$= 8x^3 - 27$
$= (2x)^3 - 3^3$

เรียกพหุนามเช่น $x^3 + 5^3$ และ $(2x)^3 + 3^3$ ว่า **ผลบวกของกำลังสาม**

และเรียกพหุนาม เช่น $x^3 - 5^3$ และ $(2x)^3 - 3^3$ ว่า **ผลต่างของกำลังสาม**

จากผลคูณของพหุนามในข้อ 1 ถึงข้อ 4 ข้างต้น จะเห็นว่าเมื่อมีผลคูณเป็นพหุนามที่อยู่ในรูปผลบวกของกำลังสามหรือผลต่างของกำลังสาม สามารถใช้สมบัติของการเท่ากันเขียนพหุนามที่เป็นผลคูณนั้นในรูปการคูณของพหุนามได้ นั่นคือจะได้การแยกตัวประกอบของ $x^3 + 5^3$, $(2x)^3 + 3^3$, $x^3 - 5^3$ และ $(2x)^3 - 3^3$ เป็นดังนี้

1. $x^3 + 5^3 = (x + 5)(x^2 - 5x + 25)$
2. $(2x)^3 + 3^3 = (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)$

3. $x^3 - 5^3 = (x - 5)(x^2 + 5x + 25)$

4. $(2x)^3 - 3^3 = (2x - 3)(4x^2 + 6x + 9)$

พิจารณา $x^3 + 5^3 = (x + 5)(x^2 - 5x + 25)$

หรือ $x^3 + 5^3 = (x + 5)[x^2 - (x)(5) + 5^2]$

และพิจารณา $(2x)^3 + 3^3 = (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)$

หรือ $(2x)^3 + 3^3 = (2x + 3)[(2x)^2 - (2x)(3) + 3^2]$

จะเห็นว่า การแยกตัวประกอบของพหุนามข้างต้นมีลักษณะพิเศษที่สังเกตได้ดังนี้

(พจน์หน้า)^3 + (พจน์หลัง)^3 = (พจน์หน้า + พจน์หลัง) [(พจน์หน้า)^2 – (พจน์หน้า)(พจน์หลัง) + (พจน์หลัง)^2]

พิจารณา $x^3 - 5^3 = (x - 5)(x^2 + 5x + 25)$

หรือ $x^3 - 5^3 = (x - 5)[x^2 + (x)(5) + 5^2]$

และพิจารณา $(2x)^3 - 3^3 = (2x - 3)(4x^2 + 6x + 9)$

หรือ $(2x)^3 - 3^3 = (2x - 3)[(2x)^2 + (2x)(3) + 3^2]$

จะเห็นว่า การแยกตัวประกอบของพหุนามข้างต้นมีลักษณะพิเศษที่สังเกตได้ดังนี้

(พจน์หน้า)^3 – (พจน์หลัง)^3 = (พจน์หน้า – พจน์หลัง) [(พจน์หน้า)^2 + (พจน์หน้า)(พจน์หลัง) + (พจน์หลัง)^2]

ในกรณีทั่วไป เมื่อ A และ B เป็นพหุนาม เรียกพหุนามที่อยู่ในรูป $A^3 + B^3$ ว่าผลบวกของกำลังสาม และเรียกพหุนามที่อยู่ในรูป $A^3 - B^3$ ว่าผลต่างของกำลังสาม

การแยกตัวประกอบของพหุนามทั้งสองทำได้ตามสูตรดังนี้

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$$

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

ผลต่างของกำลังสาม

ตัวอย่างที่ 1 จงแยกตัวประกอบของ $x^3 + 1$

วิธีทำ

$$x^3 + 1 = x^3 + 1^3$$
$$= (x + 1)[x^2 - (x)(1) + 1^2]$$
$$= (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

ดังนั้น $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$

ตัวอย่างที่ 2 จงแยกตัวประกอบของ $x^3 + 125$

วิธีทำ

$$x^3 + 125 = x^3 + 5^3$$
$$= (x + 5)[x^2 - (x)(5) + 5^2]$$
$$= (x + 5)(x^2 - 5x + 25)$$

ดังนั้น $x^3 + 125 = (x + 5)(x^2 - 5x + 25)$

ตัวอย่างที่ 3 จงแยกตัวประกอบของ $27x^3 + 64$

วิธีทำ

$$27x^3 + 64 = (3x)^3 + 4^3$$
$$= (3x + 4)[(3x)^2 - (3x)(4) + 4^2]$$
$$= (3x + 4)(9x^2 - 12x + 16)$$

ดังนั้น $27x^3 + 64 = (3x + 4)(9x^2 - 12x + 16)$

ตัวอย่างที่ 4 จงแยกตัวประกอบของ $(2x + 1)^3 + (x - 3)^3$

วิธีทำ

$$(2x + 1)^3 + (x - 3)^3 = [(2x+1)+(x-3)][(2x+1)^2-(2x+1)(x-3)+(x-3)^2]$$
$$= (2x+1+x-3)[(4x^2+4x+1) - (2x^2-6x+x-3)+(x^2-6x+9)]$$
$$= (3x - 2)(4x^2+4x+1-2x^2+ 5x +3+x^2-6x+ 9)$$
$$= (3x - 2)(3x^2 + 3x + 13)$$

ดังนั้น $(2x + 1)^3 + (x - 3)^3 = (3x - 2)(3x^2 + 3x + 13)$

ตัวอย่างที่ 5 จงแยกตัวประกอบของ $x^3 - 216$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} x^3 - 216 &= x^3 - 6^3 \\ &= (x - 6)[x^2 + (x)(6) + 6^2] \\ &= (x - 6)(x^2 + 6x + 36) \end{aligned}$$

ดังนั้น $x^3 - 216 = (x - 6)(x^2 + 6x + 36)$

ตัวอย่างที่ 6 จงแยกตัวประกอบของ $1000 - x^3$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} 1000 - x^3 &= 10^3 - x^3 \\ &= (10 - x)[10^2 + (10)(x) + x^2] \\ &= (10 - x)(100 + 10x + x^2) \end{aligned}$$

ดังนั้น $1000 - x^3 = (10 - x)(100 + 10x + x^2)$

ตัวอย่างที่ 7 จงแยกตัวประกอบของ $8x^3 - 27y^3$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} 8x^3 - 27y^3 &= (2x)^3 - (3y)^3 \\ &= (2x - 3y)[(2x)^2 + (2x)(3y) + (3y)^2] \\ &= (2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2) \end{aligned}$$

ดังนั้น $8x^3 - 27y^3 = (2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2)$

ตัวอย่างที่ 8 จงแยกตัวประกอบของ $(x - 3)^3 - (3x + 2)^3$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} (x - 3)^3 - (3x + 2)^3 &= [(x-3)-(3x+2)][(x-3)^2+(x-3)(3x+2)+(3x+2)^2] \\ &= (x-3-3x-2)(x^2-6x+9+3x^2+2x-9x-6+9x^2+12x+4) \\ &= (-2x - 5)(13x^2 - x + 7) \end{aligned}$$

ดังนั้น $(x - 3)^3 - (3x + 2)^3 = (-2x - 5)(13x^2 - x + 7)$

จำไว้ใช้

จากสูตร $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$

$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$

เพื่อให้ง่ายต่อการจดจำในการนำไปใช้ ให้จำย่อ ๆ ดังนี้

$(\text{หน้า})^3 + (\text{หลัง})^3 = (\text{หน้า} + \text{หลัง})[(\text{หน้า})^2 - (\text{หน้า})(\text{หลัง}) + (\text{หลัง})^2]$

$(\text{หน้า})^3 - (\text{หลัง})^3 = (\text{หน้า} - \text{หลัง})[(\text{หน้า})^2 + (\text{หน้า})(\text{หลัง}) + (\text{หลัง})^2]$

แบบฝึกหัด 2.3 ก

จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้

1. $x^3 + 27$
2. $y^3 + 64$
3. $8x^3 + 1$
4. $64z^3 + 125$
5. $27x^3 + 512y^3$
6. $729 + (x - 2)^3$
7. $(3x - 1)^3 + (x - 4)^3$
8. $(2x + 5)^3 + (5x - 9)^3$
9. $x^3 - 1$
10. $z^3 - 216$
11. $125y^3 - 64$
12. $1,000 - 216x^3$
13. $1,331y^3 - 343z^3$
14. $(4x + 3)^3 - 125$
15. $(7x - 2)^3 - (6x + 9)^3$
16. $(8x - 15)^3 - (3x - 7)^3$

การแยกตัวประกอบของพหุนามที่มีดีกรีสูงกว่าสอง บางครั้งอาจทำได้โดยจัดพหุนามนั้นให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ ผลต่างของกำลังสอง ผลบวกของกำลังสามหรือผลต่างของกำลังสาม จากนั้นนักเรียนสามารถนำความรู้ที่เคยเรียนมาแล้วมาใช้ในการแยกตัวประกอบต่อได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 9 จงแยกตัวประกอบของ $16x^4 - 81$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} 16x^4 - 81 &= (4x^2)^2 - 9^2 \\ &= (4x^2 + 9)(4x^2 - 9) \\ &= (4x^2 + 9)[(2x)^2 - 3^2] \\ &= (4x^2 + 9)(2x + 3)(2x - 3) \end{aligned}$$

ดังนั้น $16x^4 - 81 = (4x^2 + 9)(2x + 3)(2x - 3)$

ตัวอย่างที่ 10 จงแยกตัวประกอบของ $x^4 + x^2 + 1$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 + 1 &= (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 \\ &= (x^2 + 1)^2 - x^2 \\ &= [(x^2 + 1) + x][(x^2 + 1) - x] \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) \end{aligned}$$

เพื่อให้ได้ $(x^2 + 1)^2$ จะต้องมีพจน์ $2x^2$ แต่เนื่องจากพจน์กลางของพหุนาม $x^4 + x^2 + 1$ ไม่มีพจน์ $2x^2$ แต่มีพจน์ x^2 จึงต้องเพิ่มอีก x^2 แล้วลบออกด้วย x^2

ดังนั้น $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

ตัวอย่างที่ 11 จงแยกตัวประกอบของ $x^4 + 4$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} x^4 + 4 &= (x^2)^2 + 2^2 \\ &= [(x^2)^2 + 2(2)(x^2) + 2^2] - 2(2)x^2 \\ &= (x^2 + 2)^2 - 4x^2 \\ &= (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 \\ &= [(x^2 + 2) + 2x][(x^2 + 2) - 2x] \\ &= (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2) \end{aligned}$$

เพื่อให้ได้ $(x^2 + 2)^2$ จะต้องมีพจน์ $2(2)x^2$ แต่เนื่องจากไม่มีพจน์ $2(2)x^2$ อยู่ในนิพจน์ x^4+4 จึงต้องเพิ่มพจน์ $2(2)x^2$ เข้าไป แล้วลบออกด้วย $2(2)x^2$

ดังนั้น $x^4 + 4 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$

ตัวอย่างที่ 12 จงแยกตัวประกอบของ $x^6 - 64$

วิธีทำ

วิธีที่ 1 แยกตัวประกอบโดยจัดพหุนาม $x^6 - 64$ ให้อยู่ในรูปผลต่างของกำลังสองก่อน

$$
\begin{aligned}
x^6 - 64 &= (x^3)^2 - 8^2 \\
&= (x^3 + 8)(x^3 - 8) \\
&= (x^3 + 2^3)(x^3 - 2^3) \\
&= (x + 2)(x^2 - 2x + 4)(x - 2)(x^2 + 2x + 4) \\
&= (x + 2)(x - 2)(x^2 - 2x + 4)(x^2 + 2x + 4)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $x^6 - 64 = (x + 2)(x - 2)(x^2 - 2x + 4)(x^2 + 2x + 4)$

วิธีที่ 2 แยกตัวประกอบโดยจัดพหุนาม $x^6 - 64$ ให้อยู่ในรูปผลต่างของกำลังสามก่อน

$$
\begin{aligned}
x^6 - 64 &= (x^2)^3 - 4^3 \\
&= (x^2 - 4)(x^4 + 4x^2 + 16) \\
&= (x + 2)(x - 2)[(x^4 + 8x^2 + 16) - 4x^2] \\
&= (x + 2)(x - 2)[(x^2 + 4)^2 - (2x)^2] \\
&= (x + 2)(x - 2)[(x^2 + 4) + 2x][(x^2 + 4) - 2x] \\
&= (x + 2)(x - 2)(x^2 + 2x + 4)(x^2 - 2x + 4)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $x^6 - 64 = (x + 2)(x - 2)(x^2 + 2x + 4)(x^2 - 2x + 4)$

แบบฝึกหัด 2.3 ข

จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้

1. $x^4 - 625$
2. $81y^4 - 625$
3. $81x^4 - 256y^4$
4. $x^4 + 3x^2 + 4$
5. $y^4 + 6y^2 + 25$
6. $x^4 + 64$
7. $y^4 + 324$
8. $y^6 - 1$

9. $64x^6 - 729$

10. $x^6 - y^6$

11. $x^6 + 216$

12. $343x^6 + 1,000z^6$

13. $512 - y^6$

14. $216x^6 - 27y^6$

ในบางครั้งการแยกตัวประกอบของพหุนาม อาจต้องจัดพจน์ของพหุนามใหม่โดยใช้สมบัติการเปลี่ยนหมู่ สมบัติการสลับที่และสมบัติการแจกแจง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 13 จงแยกตัวประกอบของ $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} x^3 - 6x^2 + 12x - 8 &= (x^3 - 8) - (6x^2 - 12x) \\ &= (x^3 - 2^3) - 6x\,(x - 2) \\ &= (x - 2)(x^2 + 2x + 4) - 6x\,(x - 2) \\ &= (x - 2)[(x^2 + 2x + 4) - 6x] \\ &= (x - 2)(x^2 - 4x + 4) \\ &= (x - 2)(x - 2)(x - 2) \end{aligned}$$

ดังนั้น $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x - 2)(x - 2)(x - 2)$

หรือ $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x - 2)^3$

ตัวอย่างที่ 14 จงแยกตัวประกอบของ $16x^4 - y^2 + 2y - 1$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} 16x^4 - y^2 + 2y - 1 &= 16x^4 - (y^2 - 2y + 1) \\ &= 16x^4 - (y - 1)^2 \\ &= (4x^2)^2 - (y - 1)^2 \\ &= [4x^2 + (y - 1)][4x^2 - (y - 1)] \\ &= (4x^2 + y - 1)(4x^2 - y + 1) \end{aligned}$$

ดังนั้น $16x^4 - y^2 + 2y - 1 = (4x^2 + y - 1)(4x^2 - y + 1)$

แบบฝึกหัด 2.3 ค

จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้

1. $x^3 - x^2 - x + 1$
2. $y^4 + 2y^3 - y - 2$
3. $z^3 + z^2 - 4z - 64$
4. $y^3 + 9y^2 - 54y - 216$
5. $x^3 - 5x^2 - 15x + 27$
6. $6x^3 + 12x^2y + 4xy^2 + 8y^3$
7. $x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 12x$
8. $9x^4 - y^2 - 6y - 9$
9. $4x^4 - 4x^2y + y^2 - 121$
10. $9x^4 - 6x^2y + y^2 - 9$
11. $1 - x^2 - 2xy^2 - y^4$
12. $x^4 - 4y^4 - 20y^2 - 25$
13. $x^4 - 2ax^2 + a^2 - z^2$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว
14. $4x^4 - 4ax^2 + 2by + a^2 - b^2 - y^2$ เมื่อ a และ b เป็นค่าคงตัว

2.4 การแยกตัวประกอบของพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มโดยใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือ

พิจารณาการหารพหุนาม $x^2 + 3x - 4$ ด้วยพหุนาม $x - 2$ ดังนี้

$$\begin{array}{r|l} & x \;+\; 5 \\ \hline x - 2 & x^2 + 3x - 4 \\ & \underline{x^2 - 2x} \\ & \quad\;\; 5x - 4 \\ & \quad\;\; \underline{5x - 10} \\ & \qquad\quad\;\; \underline{6} \end{array}$$

จากการหารข้างต้น จะเห็นว่าเมื่อหารพหุนาม $x^2 + 3x - 4$ ด้วยพหุนาม $x - 2$ จะได้เศษเป็น 6

ให้ $P(x)$ แทนพหุนาม $x^2 + 3x - 4$

นั่นคือ $P(x) = x^2 + 3x - 4$

เมื่อแทน x ด้วย 2 ใน $P(x) = x^2 + 3x - 4$ จะได้

$P(2) = 2^2 + 3(2) - 4$

$= 4 + 6 - 4$

$= 6$

$P(2)$ เป็นค่าที่ได้จากการแทน x ด้วย 2 ในพหุนาม $P(x)$

จากที่แสดงข้างต้น จะเห็นว่า $P(2)$ เท่ากับเศษที่ได้จากการหารพหุนาม $P(x)$ ด้วยพหุนาม $x - 2$

ในกรณีทั่วไป เมื่อหารพหุนาม $P(x)$ ใด ๆ ด้วยพหุนาม $x - a$ ที่ a เป็นค่าคงตัว จะได้เศษซึ่งต่อไปนี้จะเรียกว่าเศษเหลือ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท (ทฤษฎีบทเศษเหลือ)

ถ้า หารพหุนาม $P(x)$ ด้วยพหุนาม $x - a$ ที่ a เป็นค่าคงตัว แล้วจะได้เศษเหลือเป็น $P(a)$

ตัวอย่างที่ 1 จงใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือหาเศษเหลือที่ได้จากการหาร $2x^2 - 5x + 6$ ด้วย $x - 3$

วิธีทำ ให้ $P(x) = 2x^2 - 5x + 6$

จากทฤษฎีบทเศษเหลือ จะได้ $P(3)$ เป็นเศษเหลือที่ได้จากการหาร $P(x)$ ด้วย $x - 3$

$P(3) = 2(3)^2 - 5(3) + 6$

$= 18 - 15 + 6$

$= 9$

ดังนั้น เศษเหลือเท่ากับ 9

ตอบ 9

ตัวอย่างที่ 2 จงใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือหาเศษเหลือที่ได้จากการหาร $8x^2 - 4x + 11$ ด้วย $x + 5$

วิธีทำ ให้ $P(x) = 8x^2 - 4x + 11$

เขียน $x + 5 = x - (-5)$ เพื่อเทียบกับ $x - a$ ทำให้ได้ $a = -5$

เนื่องจาก $x + 5 = x - (-5)$

จากทฤษฎีบทเศษเหลือ จะได้ $P(-5)$ เป็นเศษเหลือที่ได้จากการหาร $P(x)$ ด้วย $x - (-5)$

$$
\begin{aligned}
P(-5) &= 8(-5)^2 - 4(-5) + 11 \\
&= 200 + 20 + 11 \\
&= 231
\end{aligned}
$$

ดังนั้น เศษเหลือเท่ากับ 231

ตอบ 231

ตัวอย่างที่ 3 จงใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือหาเศษเหลือที่ได้จากการหาร $-5x^3 + x - 7$ ด้วย $x - 4$

วิธีทำ ให้ $P(x) = -5x^3 + x - 7$

จากทฤษฎีบทเศษเหลือ จะได้ $P(4)$ เป็นเศษเหลือที่ได้จากการหาร $P(x)$ ด้วย $x - 4$

$$
\begin{aligned}
P(4) &= -5(4)^3 + 4 - 7 \\
&= -320 + 4 - 7 \\
&= -323
\end{aligned}
$$

ดังนั้น เศษเหลือเท่ากับ -323

ตอบ -323

ตัวอย่างที่ 4 จงใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือหาเศษเหลือที่ได้จากการหาร $3x^5 - x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 9x + 7$ ด้วย $x + 2$

วิธีทำ ให้ $P(x) = 3x^5 - x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 9x + 7$

เนื่องจาก $x + 2 = x - (-2)$

เขียน $x + 2 = x - (-2)$ เพื่อเทียบกับ $x - a$ ทำให้ได้ $a = -2$

จากทฤษฎีบทเศษเหลือ จะได้ $P(-2)$ เป็นเศษเหลือที่ได้จากการหาร $P(x)$ ด้วย $x - (-2)$

$$\begin{aligned} P(-2) &= 3(-2)^5 - (-2)^4 - 5(-2)^3 + 2(-2)^2 - 9(-2) + 7 \\ &= -96 - 16 + 40 + 8 + 18 + 7 \\ &= -39 \end{aligned}$$

ดังนั้น เศษเหลือเท่ากับ -39

ตอบ -39

ตัวอย่างที่ 5 จงใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือหาเศษเหลือที่ได้จากการหาร $x^3 + 4x^2 - 11x - 30$ ด้วย $x - 3$

วิธีทำ ให้ $P(x) = x^3 + 4x^2 - 11x - 30$

จากทฤษฎีบทเศษเหลือ จะได้ $P(3)$ เป็นเศษเหลือที่ได้จากการหาร $P(x)$ ด้วย $x - 3$

$$\begin{aligned} P(3) &= 3^3 + 4(3)^2 - 11(3) - 30 \\ &= 27 + 36 - 33 - 30 \\ &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น เศษเหลือเท่ากับ 0

ตอบ 0

จากตัวอย่างที่ 5 จะเห็นว่าเมื่อหาร $x^3 + 4x^2 - 11x - 30$ ด้วย $x - 3$ จะได้เศษเหลือเป็น 0 แสดงว่า $x - 3$ หาร $x^3 + 4x^2 - 11x - 30$ ได้ลงตัว ดังนั้น จะได้ว่า $x - 3$ เป็นตัวประกอบของ $x^3 + 4x^2 - 11x - 30$

นำ $x - 3$ ไปหาร $x^3 + 4x^2 - 11x - 30$ โดยการตั้งหาร จะได้ดังนี้

$$
\begin{array}{r}
x^2 + 7x + 10 \\
x - 3 \overline{\big) x^3 + 4x^2 - 11x - 30} \\
\underline{x^3 - 3x^2} \\
7x^2 - 11x \\
\underline{7x^2 - 21x} \\
10x - 30 \\
\underline{10x - 30} \\
\underline{\underline{0}}
\end{array}
$$

จะเห็นว่า เมื่อนำ $x - 3$ ไปหาร $x^3 + 4x^2 - 11x - 30$ จะได้ผลหารเป็น $x^2 + 7x + 10$ และเศษเหลือเป็น 0

จากความสัมพันธ์ของตัวตั้ง ตัวหาร ผลหาร และเศษเหลือ ซึ่งเป็นดังนี้

$$\text{ตัวตั้ง} = (\text{ตัวหาร} \times \text{ผลหาร}) + \text{เศษเหลือ}$$

จะได้ว่า $x^3 + 4x^2 - 11x - 30 = (x - 3)(x^2 + 7x + 10) + 0$

หรือ $x^3 + 4x^2 - 11x - 30 = (x - 3)(x^2 + 7x + 10)$

แต่สามารถแยกตัวประกอบของ $x^2 + 7x + 10$ ได้เป็น

$$x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(x + 5)$$

ดังนั้น $x^3 + 4x^2 - 11x - 30 = (x - 3)(x + 2)(x + 5)$

นั่นคือ แยกตัวประกอบของ $x^3 + 4x^2 - 11x - 30$ ได้ดังนี้

$$x^3 + 4x^2 - 11x - 30 = (x - 3)(x + 2)(x + 5)$$

จะเห็นว่า การแยกตัวประกอบของ $P(x) = x^3 + 4x^2 - 11x - 30$ ข้างต้นนี้ใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือในการแยกตัวประกอบก่อน โดยพิจารณาจาก $P(3) = 0$ ทำให้ได้ว่า $x - 3$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $P(x)$ จากนั้นจึงหาตัวประกอบอื่นต่อไป

กล่าวได้ว่า ในการแยกตัวประกอบของพหุนาม $P(x)$ โดยใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือต้องหาจำนวน a ที่ทำให้ $P(a) = 0$ ก่อน

ให้สังเกตว่าพหุนาม $x^3 + 4x^2 - 11x - 30$ นี้มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มและสัมประสิทธิ์ของตัวแปรที่มีกำลังสูงสุดเป็น 1 และเมื่อพิจารณาตัวประกอบของ $x^3 + 4x^2 - 11x - 30$ คือ $x - 3$, $x + 2$ และ $x + 5$ จะเห็นว่าจำนวนเต็ม 3, -2 และ -5

หารจำนวนเต็ม -30 ได้ลงตัว ซึ่ง -30 คือพจน์ที่เป็นค่าคงตัวของพหุนาม $x^3 + 4x^2 - 11x - 30$ นอกจากนี้เมื่อหา P(-2) และ P(-5) จะได้ P(-2) = 0 และ P(-5) = 0 ด้วยเช่นกัน

ในกรณีทั่วไป เมื่อ P(x) เป็นพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มและสัมประสิทธิ์ของตัวแปรที่มีกำลังสูงสุดเป็น 1 และ a เป็นจำนวนเต็มที่ทำให้ P(a) = 0 จะได้ว่า a หารพจน์ที่เป็นค่าคงตัวของพหุนาม P(x) ได้ลงตัว ดังนั้น*การหาจำนวนเต็ม a ที่ทำให้ P(a) = 0 จะพิจารณาจากจำนวนเต็มที่หารพจน์ที่เป็นค่าคงตัวของพหุนาม P(x) ได้ลงตัว*

จากที่กล่าวมานี้ จะเห็นว่าอาจแยกตัวประกอบของ P(x) ซึ่งเป็นพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มและสัมประสิทธิ์ของตัวแปรที่มีกำลังสูงสุดเป็น 1 ได้โดยใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือ ซึ่งสรุปเป็นขั้นตอนได้ดังนี้

1. หาจำนวนเต็มทั้งหมดที่หารพจน์ที่เป็นค่าคงตัวของพหุนาม P(x) ได้ลงตัว
2. จากจำนวนเต็มที่หาได้ในข้อ 1 เลือกจำนวนเต็ม a ที่ทำให้ P(a) = 0 จะได้ว่า $x - a$ เป็นตัวประกอบของ P(x)
3. นำ $x - a$ ที่ได้ในข้อ 2 ไปหารพหุนาม P(x) ได้ผลหารเป็นพหุนามใหม่ที่ไม่ซ้ำกับพหุนาม P(x) จะให้ผลหารนี้เป็นพหุนาม Q(x) ซึ่งดีกรีของพหุนาม Q(x) จะน้อยกว่าดีกรีของพหุนาม P(x) อยู่ 1 และ $P(x) = (x - a)Q(x)$
4. ถ้าพหุนาม Q(x) ที่ได้ในข้อ 3 เป็นพหุนามที่มีดีกรีสูงกว่าสองและสามารถแยกตัวประกอบต่อไปได้อีกก็แยกตัวประกอบของพหุนาม Q(x) โดยใช้วิธีตามขั้นตอนในข้อ 1 ข้อ 2 และข้อ 3 แต่ถ้าพหุนาม Q(x) ที่ได้ในข้อ 3 เป็นพหุนามดีกรีสองและสามารถแยกตัวประกอบต่อไปได้อีก ก็ให้แยกตัวประกอบของพหุนาม Q(x) โดยใช้วิธีแยกตัวประกอบที่เคยเรียนมาแล้วหรือจะใช้วิธีตามขั้นตอนในข้อ 1 ข้อ 2 และข้อ 3 ก็ได้

ตัวอย่างที่ 6 จงแยกตัวประกอบของ $x^3 - x^2 - 8x + 12$

วิธีทำ ให้ $P(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$

พจน์ที่เป็นค่าคงตัวของ P(x) คือ 12

จำนวนเต็มที่หาร 12 ได้ลงตัว คือ 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 12 และ -12

พิจารณา P(1)

$$P(1) = 1^3 - 1^2 - 8(1) + 12$$
$$= 4$$

จะเห็นว่า $P(1) \neq 0$

พิจารณา $P(-1)$

$$P(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - 8(-1) + 12$$
$$= -1 - 1 + 8 + 12$$
$$= 18$$

จะเห็นว่า $P(-1) \neq 0$

พิจารณา $P(2)$

$$P(2) = 2^3 - 2^2 - 8(2) + 12$$
$$= 8 - 4 - 16 + 12$$
$$= 0$$

ดังนั้น $x - 2$ เป็นตัวประกอบของ $x^3 - x^2 - 8x + 12$

นำ $x - 2$ ไปหาร $x^3 - x^2 - 8x + 12$ ได้ผลหารเป็น $x^2 + x - 6$

จะได้ $P(x) = (x - 2)(x^2 + x - 6)$

$$= (x - 2)(x + 3)(x - 2)$$

ดังนั้น $x^3 - x^2 - 8x + 12 = (x - 2)(x + 3)(x - 2)$

หรือ $x^3 - x^2 - 8x + 12 = (x - 2)^2(x + 3)$

ตัวอย่างที่ 7 จงแยกตัวประกอบของ $x^3 + 3x^2 - 2$

วิธีทำ ให้ $P(x) = x^3 + 3x^2 - 2$

พจน์ที่เป็นค่าคงตัวของ $P(x)$ คือ -2

จำนวนเต็มที่หาร -2 ได้ลงตัว คือ $1, -1, 2$ และ -2

พิจารณา $P(1)$ จะได้ $P(1) \neq 0$

พิจารณา $P(-1)$

$$P(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 - 2$$
$$= -1 + 3 - 2$$
$$= 0$$

ดังนั้น $x - (-1)$ หรือ $x + 1$ เป็นตัวประกอบของ $x^3 + 3x^2 - 2$

นำ $x + 1$ ไปหาร $x^3 + 3x^2 - 2$ ได้ผลหารเป็น $x^2 + 2x - 2$

จะได้ $P(x) = (x + 1)(x^2 + 2x - 2)$

ดังนั้น $x^3 + 3x^2 - 2 = (x + 1)(x^2 + 2x - 2)$

ตัวอย่างที่ 8 จงแยกตัวประกอบของ $x^4 - 15x^2 - 10x + 24$

วิธีทำ ให้ $P(x) = x^4 - 15x^2 - 10x + 24$

พจน์ที่เป็นค่าคงตัวของ P(x) คือ 24

จำนวนเต็มที่หาร 24 ได้ลงตัว คือ 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 8, -8, 12, -12, 24 และ -24

พิจารณา P(1)

$$P(1) = 1^4 - 15(1)^2 - 10(1) + 24$$
$$= 1 - 15 - 10 + 24$$
$$= 0$$

ดังนั้น $x - 1$ เป็นตัวประกอบของ $x^4 - 15x^2 - 10x + 24$

นำ $x - 1$ ไปหาร $x^4 - 15x^2 - 10x + 24$ ได้ผลหารเป็น $x^3 + x^2 - 14x - 24$

จะได้ $P(x) = (x - 1)(x^3 + x^2 - 14x - 24)$

ให้ $Q(x) = x^3 + x^2 - 14x - 24$

พจน์ที่เป็นค่าคงตัวของ Q(x) คือ -24

จำนวนเต็มที่หาร -24 ได้ลงตัว คือ 1, -1 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 8, -8, 12, -12, 24 และ -24

พิจารณา $Q(1)$, $Q(-1)$ และ $Q(2)$ จะได้ $Q(1) \neq 0$, $Q(-1) \neq 0$ และ $Q(2) \neq 0$

พิจารณา $Q(-2)$

$$\begin{aligned} Q(-2) &= (-2)^3 + (-2)^2 - 14(-2) - 24 \\ &= -8 + 4 + 28 - 24 \\ &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x + 2$ เป็นตัวประกอบของ $x^3 + x^2 - 14x - 24$

นำ $x + 2$ ไปหาร $x^3 + x^2 - 14x - 24$ ได้ผลหารเป็น $x^2 - x - 12$

จะได้ $Q(x) = (x + 2)(x^2 - x - 12)$

ดังนั้น $P(x) = (x - 1)(x + 2)(x^2 - x - 12)$

$= (x - 1)(x + 2)(x - 4)(x + 3)$

นั่นคือ $x^4 - 15x^2 - 10x + 24 = (x - 1)(x + 2)(x - 4)(x + 3)$

ตัวอย่างที่ 9 จงแยกตัวประกอบของ $x^4 + 3x^3 - 27x - 81$

วิธีทำ

วิธีที่ 1 ใช้การเข้าวงเล็บดังนี้

$$\begin{aligned} x^4 + 3x^3 - 27x - 81 &= (x^4 + 3x^3) - (27x + 81) \\ &= x^3(x + 3) - 27(x + 3) \\ &= (x + 3)(x^3 - 27) \\ &= (x + 3)(x^3 - 3^3) \\ &= (x + 3)(x - 3)(x^2 + 3x + 9) \end{aligned}$$

ดังนั้น $x^4 + 3x^3 - 27x - 81 = (x + 3)(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

วิธีที่ 2 ใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือดังนี้

ให้ $P(x) = x^4 + 3x^3 - 27x - 81$

พจน์ที่เป็นค่าคงตัวของ $P(x)$ คือ -81

จำนวนเต็มที่หาร -81 ได้ลงตัว คือ 1, -1, 3, -3, 9, -9, 27, -27, 81 และ -81

พิจารณา $P(1)$ และ $P(-1)$ จะได้ $P(1) \neq 0$ และ $P(-1) \neq 0$

พิจารณา $P(3)$

$$\begin{aligned} P(3) &= 3^4 + 3(3)^3 - 27(3) - 81 \\ &= 81 + 81 - 81 - 81 \\ &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x - 3$ เป็นตัวประกอบของ $x^4 + 3x^3 - 27x - 81$

นำ $x - 3$ ไปหาร $x^4 + 3x^3 - 27x - 81$ ได้ผลหารเป็น $x^3 + 6x^2 + 18x + 27$

จะได้ $P(x) = (x-3)(x^3 + 6x^2 + 18x + 27)$

ให้ $Q(x) = x^3 + 6x^2 + 18x + 27$

พจน์ที่เป็นค่าคงตัวของ $Q(x)$ คือ 27

จำนวนเต็มที่หาร 27 ได้ลงตัว คือ 1, -1, 3, -3, 9, -9, 27 และ -27

พิจารณา $Q(1)$, $Q(-1)$ และ $Q(3)$ จะได้ $Q(1) \neq 0$, $Q(-1) \neq 0$ และ $Q(3) \neq 0$

พิจารณา $Q(-3)$

$$\begin{aligned} Q(-3) &= (-3)^3 + 6(-3)^2 + 18(-3) + 27 \\ &= -27 + 54 - 54 + 27 \\ &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x + 3$ เป็นตัวประกอบของ $x^3 + 6x^2 + 18x + 27$

นำ $x + 3$ ไปหาร $x^3 + 6x^2 + 18x + 27$ ได้ผลหารเป็น $x^2 + 3x + 9$

จะได้ $Q(x) = (x+3)(x^2 + 3x + 9)$

ดังนั้น $P(x) = (x-3)(x+3)(x^2 + 3x + 9)$

นั่นคือ $x^4 + 3x^3 - 27x - 81 = (x-3)(x+3)(x^2 + 3x + 9)$

แบบฝึกหัด 2.4

1. กำหนด P(x) และ a ดังในแต่ละข้อต่อไปนี้ จงหา P(a)

1) $P(x) = x^3 - x^2 + 10x - 8$ และ $a = 3$

2) $P(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 5$ และ $a = -4$

3) $P(x) = 2x^3 - 4x^2 - 7x + 1$ และ $a = 0$

4) $P(x) = 3x^4 + 5x^3 + 9x^2 - 6$ และ $a = -2$

5) $P(x) = -x^4 - 8x^3 + 4x + 12$ และ $a = 2$

6) $P(x) = -2x^5 - 9x^4 + 19x^3 + 51x^2 - 89x + 30$ และ $a = -3$

2. จงใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือหาเศษเหลือที่ได้จากการหารพหุนามในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $x^3 + 4x^2 - x - 3$ หารด้วย $x - 4$

2) $5x^3 - 3x^2 + 7x + 6$ หารด้วย $x + 2$

3) $2x^4 - 5x^2 + 6x - 14$ หารด้วย $x + 3$

4) $2x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 3x + 4$ หารด้วย $x + 1$

5) $-2x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 8x + 7$ หารด้วย $x - 1$

6) $4x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 9x^2 - 29x + 2$ หารด้วย $x + 2$

3. จงใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือแสดงว่า $x + 2$ หาร $x^3 - 2x^2 - 2x + 12$ ลงตัว

4. จงใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือแสดงว่า $x - 4$ เป็นตัวประกอบของ $x^4 - 23x^2 + 18x + 40$

5. จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้โดยใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือ

1) $x^3 - 8x^2 + 19x - 12$
2) $x^3 - 2x^2 - 2x + 12$
3) $x^3 - 19x - 30$
4) $x^3 + 4x^2 - 11x + 6$
5) $x^3 + 2x^2 - 16x - 32$
6) $x^3 - x^2 - 11x - 4$
7) $x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 12x + 36$
8) $x^4 - 5x^3 - 17x^2 + 129x - 180$
9) $x^4 - 34x^2 + 225$
10) $x^5 - 23x^3 - 6x^2 + 112x + 96$

ค่า k เป็นเท่าใด

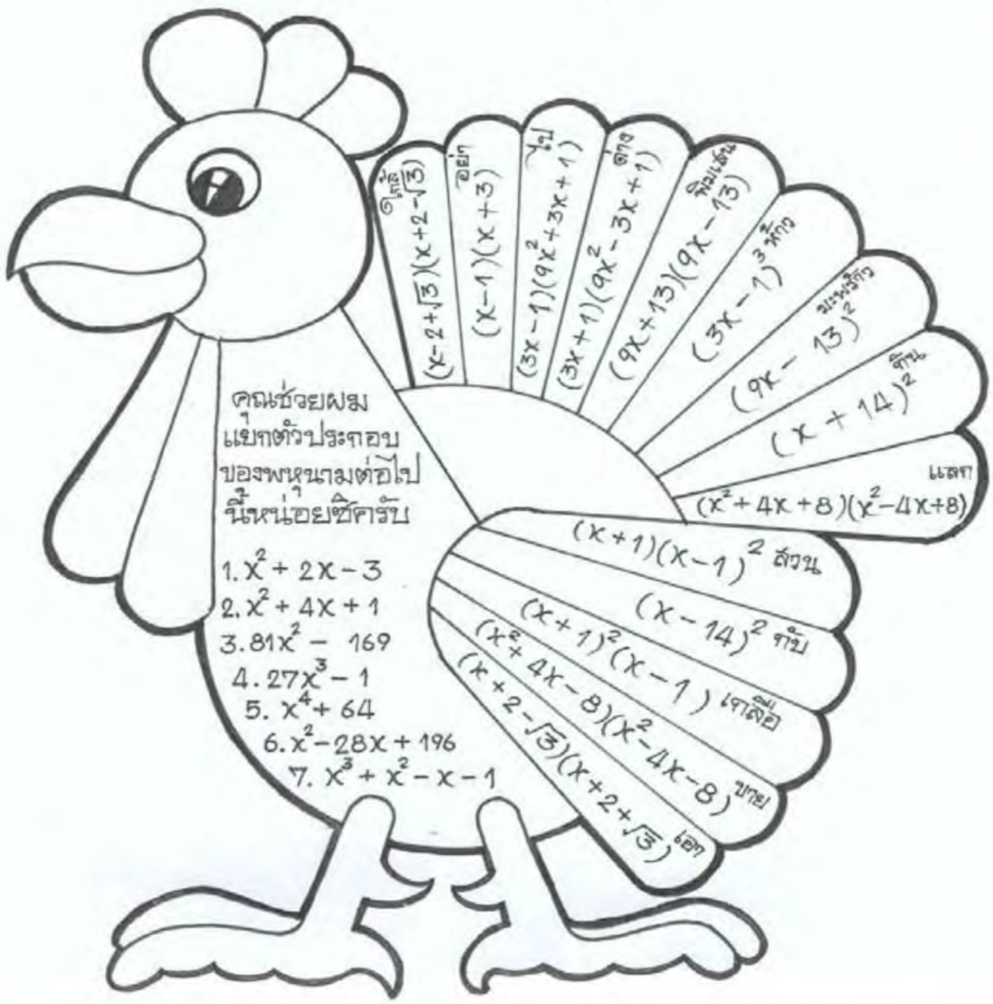
ค่า k เป็นเท่าใด

จงหาค่า k ที่เป็นไปตามเงื่อนไขในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $x - 5$ หาร $x^3 - 3x^2 + kx - 20$ ลงตัว
2. $x + 7$ เป็นตัวประกอบของ $x^4 + 9x^3 + 5x^2 - kx + 28$
3. $x - 6$ หาร $x^3 - 8x^2 + 19x + k$ แล้วได้เศษเหลือเป็น 15
4. $x + 3$ หาร $x^3 + x^2 - 4x - k$ แล้วได้เศษเหลือเป็น 0

ตัวปัญหา

ตัวปัญหา



คุณครับ แยกตัวประกอบได้แล้วก็ทำงานต่ออีกหน่อย ช่วยหาว่าคำตอบของแต่ละข้อที่ได้มาแล้วอยู่ที่ขนอันสวยงามของผมอันไหน แล้วคุณก็นำคำที่อยู่คู่กับคำตอบนั้นไปเขียนเรียงกันไปตามลำดับข้อ คุณก็จะพบสำนวนไทยที่คุณคุ้นเคยกันดี ลองดูซิครับ

บทที่ 3

สมการกำลังสอง

การแก้สมการกำลังสองตัวแปรเดียวที่อยู่ในรูป $ax^2 + bx + c = 0$ เมื่อ a, b, c เป็นค่าคงตัว ที่ $a \neq 0$ และที่สามารถแยกตัวประกอบของพหุนาม $ax^2 + bx + c$ ให้อยู่ในรูปการคูณกันของพหุนามดีกรีหนึ่งสองพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มที่นักเรียนทราบมาแล้วนั้น เป็นพื้นฐานความรู้ที่จำเป็นต่อการเรียนในบทนี้ซึ่งจะกล่าวถึงการแก้สมการกำลังสองตัวแปรเดียวโดยวิธีทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์และผลต่างของกำลังสอง สำหรับคำตอบของสมการกำลังสองนี้จะขยายไปถึงจำนวนที่เขียนอยู่ในรูปของกรณฑ์ที่สอง

นอกจากนี้ยังได้กล่าวถึงการหาคำตอบของสมการ $ax^2 + bx + c = 0$ เมื่อ a, b, c เป็นค่าคงตัว ที่ $a \neq 0$ โดยใช้สูตร $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ เพื่อให้นักเรียนมีวิธีหาคำตอบของสมการได้หลากหลายวิธี รวมถึงการนำความรู้เกี่ยวกับสมการกำลังสองไปใช้แก้ปัญหาในสถานการณ์ต่าง ๆ ได้มากยิ่งขึ้น

จุดมุ่งหมายของบทเรียนบทนี้ มีดังนี้

1. แก้สมการกำลังสองตัวแปรเดียวได้
2. แก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการกำลังสองตัวแปรเดียว พร้อมทั้งตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้

3.1 ทบทวนสมการกำลังสอง

นักเรียนเคยทราบมาแล้วว่า *สมการกำลังสองตัวแปรเดียวที่มี* x *เป็นตัวแปร มีรูปทั่วไป เป็น* $ax^2 + bx + c = 0$ *เมื่อ* a, b, c *เป็นค่าคงตัวและ* $a \neq 0$ และหาคำตอบของสมการดังกล่าวโดยแยกตัวประกอบของ $ax^2 + bx + c$ ให้อยู่ในรูปของการคูณกันของพหุนามดีกรีหนึ่งสองพหุนาม แล้วใช้สมบัติของจำนวนจริงที่กล่าวว่า *ถ้า* m, n *เป็นจำนวนจริง และ* $mn = 0$ *แล้ว* $m = 0$ *หรือ* $n = 0$ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงแก้สมการ $x^2 - 5x = 0$

วิธีทำ

$$x^2 - 5x = 0$$
$$x(x - 5) = 0$$

ดังนั้น $x = 0$ หรือ $x - 5 = 0$

จะได้ $x = 0$ หรือ $x = 5$

ตรวจสอบ 1) แทน x ด้วย 0 ในสมการ $x^2 - 5x = 0$

จะได้ $0^2 - 5(0) = 0$

$0 = 0$ เป็นสมการที่เป็นจริง

2) แทน x ด้วย 5 ในสมการ $x^2 - 5x = 0$

จะได้ $5^2 - 5(5) = 0$

$25 - 25 = 0$

$0 = 0$ เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น 0 และ 5 เป็นคำตอบของสมการ $x^2 - 5x = 0$

ตอบ 0 และ 5

ตัวอย่างที่ 2 จงแก้สมการ $3x^2 - 7x + 2 = 0$

วิธีทำ

$$3x^2 - 7x + 2 = 0$$

$$(3x - 1)(x - 2) = 0$$

ดังนั้น $3x - 1 = 0$ หรือ $x - 2 = 0$

$3x = 1$ หรือ $x = 2$

จะได้ $x = \frac{1}{3}$ หรือ $x = 2$

ตรวจสอบ 1) แทน x ด้วย $\frac{1}{3}$ ในสมการ $3x^2 - 7x + 2 = 0$

จะได้ $3\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 7\left(\frac{1}{3}\right) + 2 = 0$

$$\frac{1}{3} - \frac{7}{3} + 2 = 0$$

$0 = 0$ เป็นสมการที่เป็นจริง

2) แทน x ด้วย 2 ในสมการ $3x^2 - 7x + 2 = 0$

จะได้ $3(2)^2 - 7(2) + 2 = 0$

$$12 - 14 + 2 = 0$$

$0 = 0$ เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น $\frac{1}{3}$ และ 2 เป็นคำตอบของสมการ $3x^2 - 7x + 2 = 0$

ตอบ $\frac{1}{3}$ และ 2

ตัวอย่างที่ 3 จงแก้สมการ $9x^2 - 6x + 1 = 0$

วิธีทำ

$$9x^2 - 6x + 1 = 0$$

$$(3x)^2 - 2(3x)(1) + (1)^2 = 0$$

$$(3x - 1)^2 = 0$$

ดังนั้น $3x - 1 = 0$

$$3x = 1$$

จะได้ $x = \frac{1}{3}$

ตรวจสอบ แทน x ด้วย $\frac{1}{3}$ ในสมการ $9x^2 - 6x + 1 = 0$

จะได้ $9\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 6\left(\frac{1}{3}\right) + 1 = 0$

$$1 - 2 + 1 = 0$$

$0 = 0$ เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น $\frac{1}{3}$ เป็นคำตอบของสมการ $9x^2 - 6x + 1 = 0$

ตอบ $\frac{1}{3}$

ตัวอย่างที่ 4 จงแก้สมการ $2a^2 + 5 = 0$

วิธีทำ

$$2a^2 + 5 = 0$$

จะได้ $a^2 + \frac{5}{2} = 0$

$$a^2 = -\frac{5}{2}$$

เนื่องจากจำนวนจริงใด ๆ ยกกำลังสองแล้วจะต้องเป็นจำนวนจริงบวกหรือ 0

ดังนั้น ไม่มีจำนวนจริงใดยกกำลังสอง แล้วได้ผลลัพธ์เป็น $-\frac{5}{2}$

นั่นคือ สมการ $2a^2 + 5 = 0$ ไม่มีคำตอบ

ตอบ ไม่มีคำตอบ

จากตัวอย่างข้างต้นจะเห็นว่าสมการกำลังสองตัวแปรเดียว อาจมีคำตอบที่เป็นจำนวนจริงได้สองคำตอบ หนึ่งคำตอบหรือไม่มีคำตอบ

ตัวอย่างที่ 5 จงแก้สมการ $x^2 = 18$

วิธีทำ

$$x^2 = 18$$

$$x^2 - 18 = 0$$

$$x^2 - (3\sqrt{2})^2 = 0$$

$$(x - 3\sqrt{2})(x + 3\sqrt{2}) = 0$$

ดังนั้น $x - 3\sqrt{2} = 0$ หรือ $x + 3\sqrt{2} = 0$

จะได้ $x = 3\sqrt{2}$ หรือ $x = -3\sqrt{2}$

ซึ่งอาจเขียนได้ว่า $x = \pm 3\sqrt{2}$

ตรวจสอบ 1) แทน x ด้วย $3\sqrt{2}$ ในสมการ $x^2 = 18$

จะได้ $(3\sqrt{2})^2 = 18$

$18 = 18$ เป็นสมการที่เป็นจริง

2) แทน x ด้วย $-3\sqrt{2}$ ในสมการ $x^2 = 18$

จะได้ $(-3\sqrt{2})^2 = 18$

$18 = 18$ เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น $3\sqrt{2}$ และ $-3\sqrt{2}$ เป็นคำตอบของสมการ $x^2 = 18$

ตอบ $3\sqrt{2}$ และ $-3\sqrt{2}$

การหาคำตอบของสมการในตัวอย่างที่ 5 อาจทำได้อีกวิธีหนึ่งโดยไม่ต้องแยกตัวประกอบ แต่ใช้สมบัติของรากที่สองของจำนวนจริงดังนี้

จากสมการ $x^2 = 18$

จะได้ $x = \sqrt{18}$ หรือ $x = -\sqrt{18}$

ดังนั้น $x = 3\sqrt{2}$ หรือ $x = -3\sqrt{2}$

เมื่อนำค่า x ไปตรวจสอบดังในตัวอย่างที่ 5 จะได้ $3\sqrt{2}$ และ $-3\sqrt{2}$ เป็นคำตอบของสมการ

ตัวอย่างที่ 6 จงแก้สมการ $(x-7)^2 = 3$

วิธีทำ

$$(x-7)^2 = 3$$

$$(x-7)^2 - 3 = 0$$

จะได้ $(x-7)^2 - (\sqrt{3})^2 = 0$

$$[(x-7) - \sqrt{3}][(x-7) + \sqrt{3}] = 0$$

ดังนั้น $(x-7) - \sqrt{3} = 0$ หรือ $(x-7) + \sqrt{3} = 0$

$x - 7 = \sqrt{3}$ หรือ $x - 7 = -\sqrt{3}$

จะได้ $x = 7+\sqrt{3}$ หรือ $x = 7-\sqrt{3}$

ซึ่งอาจเขียนได้ว่า $x = 7\pm\sqrt{3}$

ตรวจสอบ 1) แทน x ด้วย $7+\sqrt{3}$ ในสมการ $(x-7)^2 = 3$

จะได้ $[(7+\sqrt{3})-7]^2 = 3$

$(\sqrt{3})^2 = 3$

$3 = 3$ เป็นสมการที่เป็นจริง

2) แทน x ด้วย $7-\sqrt{3}$ ในสมการ $(x-7)^2 = 3$

จะได้ $[(7-\sqrt{3})-7]^2 = 3$

$(-\sqrt{3})^2 = 3$

$3 = 3$ เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น $7+\sqrt{3}$ และ $7-\sqrt{3}$ เป็นคำตอบของสมการ $(x-7)^2 = 3$

ตอบ $7+\sqrt{3}$ และ $7-\sqrt{3}$

ตัวอย่างที่ 7 จงแก้สมการ $(5x-2)^2-10 = 0$

วิธีทำ

$$(5x-2)^2-10 = 0$$

$$(5x-2)^2-(\sqrt{10})^2 = 0$$

$$[(5x-2)-\sqrt{10}][(5x-2)+\sqrt{10}] = 0$$

ดังนั้น $(5x-2)-\sqrt{10} = 0$ หรือ $(5x-2)+\sqrt{10} = 0$

$5x-2 = \sqrt{10}$ หรือ $5x-2 = -\sqrt{10}$

$5x = 2+\sqrt{10}$ หรือ $5x = 2-\sqrt{10}$

จะได้ $x = \dfrac{2+\sqrt{10}}{5}$ หรือ $x = \dfrac{2-\sqrt{10}}{5}$

ตรวจสอบ 1) แทน x ด้วย $\dfrac{2+\sqrt{10}}{5}$ ในสมการ $(5x-2)^2-10 = 0$

จะได้ $\left[5\left(\dfrac{2+\sqrt{10}}{5}\right)-2\right]^2-10 = 0$

$(2+\sqrt{10}-2)^2-10 = 0$

$(\sqrt{10})^2-10 = 0$

$$10 - 10 = 0$$

$0 = 0$ เป็นสมการที่เป็นจริง

2) แทน x ด้วย $\frac{2-\sqrt{10}}{5}$ ในสมการ $(5x-2)^2 - 10 = 0$

จะได้ $\left[5\left(\frac{2-\sqrt{10}}{5}\right)-2\right]^2 - 10 = 0$

$$(2-\sqrt{10}-2)^2 - 10 = 0$$

$$(-\sqrt{10})^2 - 10 = 0$$

$$10 - 10 = 0$$

$0 = 0$ เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น $\frac{2+\sqrt{10}}{5}$ และ $\frac{2-\sqrt{10}}{5}$ เป็นคำตอบของสมการ $(5x-2)^2 - 10 = 0$

ตอบ $\frac{2+\sqrt{10}}{5}$ และ $\frac{2-\sqrt{10}}{5}$

แบบฝึกหัด 3.1

1. จงแก้สมการต่อไปนี้

1) $x^2 = 3x$

2) $2x^2 - 5x = 0$

3) $4x + 33 = x^2 + 36$

4) $x^2 + 4 = 3$

5) $3x^2 + x - 2 = 0$

6) $25x^2 + 4 = 20x$

7) $6m^2 + 13m - 5 = 0$

8) $10x^2 + 19x - 15 = 0$

9) $12x^2 + 15x = 18$

10) $8p = -(16p^2 + 1)$

11) $2k^2 + 5k + 3 = 0$

12) $8x - 3x^2 = 5$

13) $30n = 9n^2 + 25$

14) $8t^2 + 5 = 0$

15) $31x - 3x^2 = 56$

16) $-3x^2 + 7x - 4 = 0$

2. จงแก้สมการต่อไปนี้

1) $x^2 = 6$
2) $3x^2 = 51$
3) $0.75t^2 - 27 = 0$
4) $0.25x^2 + 0.5 = 0$
5) $(x - 2)^2 - 60 = 0$
6) $(y + 2)^2 + 20 = 0$
7) $(2x + 3)^2 = 36$
8) $(3m - 4)^2 = 18$
9) $(7x - 5)^2 = 26$
10) $(2x + 3)^2 = 25x^2$
11) $(2x + 1)^2 - (x + 3)^2 = 0$
12) $(3x + 2)^2 = (x - 1)^2$
13) $9\frac{1}{2}x - x^2 = 22$
14) $1.6 - 0.8x^2 = 8.8$
15) $-6x^2 - 18\frac{1}{2} = -15$
16) $-9x^2 - \frac{4}{9} = -4x$

3.2 การแก้สมการกำลังสองโดยวิธีทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์

นักเรียนเคยแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่เป็น*กำลังสองสมบูรณ์*มาแล้ว เช่น

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$
$$4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$$
$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$
$$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$$

ในการหาคำตอบของสมการ $ax^2 + bx + c = 0$ เมื่อ a, b, c เป็นค่าคงตัวและ $a \neq 0$ นั้น ในบางครั้งไม่สามารถแยกตัวประกอบของพหุนาม $ax^2 + bx + c$ ได้โดยง่ายดังเช่นที่ผ่านมา ในกรณีเช่นนี้เราอาจใช้ความรู้ในเรื่องกำลังสองสมบูรณ์ และผลต่างของกำลังสองมาช่วยในการแยกตัวประกอบของพหุนามนั้น

พิจารณาการแก้สมการ $ax^2 + bx + c = 0$ ในกรณีที่ $a = 1$ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงแก้สมการ $x^2 + 4x - 2 = 0$

วิธีทำ

$$x^2 + 4x - 2 = 0$$
$$[x^2 + 2(2)x + 2^2] - 2^2 - 2 = 0$$
$$(x + 2)^2 - 4 - 2 = 0$$
$$(x + 2)^2 - 6 = 0$$

$$(x+2)^2 - (\sqrt{6})^2 = 0$$

$$[(x+2) - \sqrt{6}\,][(x+2) + \sqrt{6}\,] = 0$$

$$(x+2-\sqrt{6}\,)(x+2+\sqrt{6}\,) = 0$$

ดังนั้น $x+2-\sqrt{6} = 0$ หรือ $x+2+\sqrt{6} = 0$

จะได้ $x = -2+\sqrt{6}$ หรือ $x = -2-\sqrt{6}$

ตรวจสอบ 1) แทน x ด้วย $-2+\sqrt{6}$ ในสมการ $x^2+4x-2 = 0$

จะได้ $(-2+\sqrt{6}\,)^2 + 4(-2+\sqrt{6}\,) - 2 = 0$

$$4-4\sqrt{6} + 6 - 8 + 4\sqrt{6} - 2 = 0$$

$0 = 0$ เป็นสมการที่เป็นจริง

2) แทน x ด้วย $-2-\sqrt{6}$ ในสมการ $x^2+4x-2 = 0$

จะได้ $(-2-\sqrt{6}\,)^2 + 4(-2-\sqrt{6}\,) - 2 = 0$

$$4+4\sqrt{6} + 6 - 8 - 4\sqrt{6} - 2 = 0$$

$0 = 0$ เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น $-2+\sqrt{6}$ และ $-2-\sqrt{6}$ เป็นคำตอบของสมการ $x^2+4x-2 = 0$

ตอบ $-2+\sqrt{6}$ และ $-2-\sqrt{6}$

ตัวอย่างที่ 2 จงแก้สมการ $x^2-5x+2 = 0$

วิธีทำ

$$x^2-5x+2 = 0$$

$$\left[x^2 - 2\left(\frac{5}{2}\right)x + \left(\frac{5}{2}\right)^2\right] - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 2 = 0$$

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 2 = 0$$

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{17}{4} = 0$$

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2 = 0$$

$$\left[\left(x-\frac{5}{2}\right) - \frac{\sqrt{17}}{2}\right]\left[\left(x-\frac{5}{2}\right) + \frac{\sqrt{17}}{2}\right] = 0$$

ดังนั้น $\left(x - \frac{5}{2}\right) - \frac{\sqrt{17}}{2} = 0$ หรือ $\left(x - \frac{5}{2}\right) + \frac{\sqrt{17}}{2} = 0$

$x - \frac{5}{2} = \frac{\sqrt{17}}{2}$ หรือ $x - \frac{5}{2} = -\frac{\sqrt{17}}{2}$

$x = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}$ หรือ $x = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}$

จะได้ $x = \frac{5 + \sqrt{17}}{2}$ หรือ $x = \frac{5 - \sqrt{17}}{2}$

ตรวจสอบ 1) แทน x ด้วย $\frac{5 + \sqrt{17}}{2}$ ในสมการ $x^2 - 5x + 2 = 0$

จะได้ $\left(\frac{5 + \sqrt{17}}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{5 + \sqrt{17}}{2}\right) + 2 = 0$

$$\frac{25 + 10\sqrt{17} + 17}{4} - \frac{25 + 5\sqrt{17}}{2} + 2 = 0$$

$$\frac{25 + 10\sqrt{17} + 17 - 50 - 10\sqrt{17}}{4} + 2 = 0$$

$$-2 + 2 = 0$$

$0 = 0$ เป็นสมการที่เป็นจริง

2) แทน x ด้วย $\frac{5 - \sqrt{17}}{2}$ ในสมการ $x^2 - 5x + 2 = 0$

จะได้ $\left(\frac{5 - \sqrt{17}}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{5 - \sqrt{17}}{2}\right) + 2 = 0$

$$\frac{25 - 10\sqrt{17} + 17}{4} - \frac{25 - 5\sqrt{17}}{2} + 2 = 0$$

$$\frac{25 - 10\sqrt{17} + 17 - 50 + 10\sqrt{17}}{4} + 2 = 0$$

$$-2 + 2 = 0$$

$0 = 0$ เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น $\frac{5 + \sqrt{17}}{2}$ และ $\frac{5 - \sqrt{17}}{2}$ เป็นคำตอบของสมการ $x^2 - 5x + 2 = 0$

ตอบ $\frac{5 + \sqrt{17}}{2}$ และ $\frac{5 - \sqrt{17}}{2}$

ตัวอย่างที่ 3 จงแก้สมการ $x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 2 = 0$

วิธีทำ

$$x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 2 = 0$$

$$[x^2 - 2\sqrt{2}\,x + (\sqrt{2})^2] - (\sqrt{2})^2 + 2 = 0$$

$$(x - \sqrt{2})^2 - 2 + 2 = 0$$

$$(x - \sqrt{2})^2 = 0$$

ดังนั้น $x - \sqrt{2} = 0$

จะได้ $x = \sqrt{2}$

ตรวจสอบ แทน x ด้วย $\sqrt{2}$ ในสมการ $x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 2 = 0$

จะได้ $(\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{2})(\sqrt{2}) + 2 = 0$

$$2 - 4 + 2 = 0$$

$0 = 0$ เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น $\sqrt{2}$ เป็นคำตอบของสมการ $x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 2 = 0$

ตอบ $\sqrt{2}$

ตัวอย่างที่ 4 จงแก้สมการ $x^2 + x + 1 = 0$

วิธีทำ

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$\left[x^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)x + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$$

เนื่องจาก $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ สำหรับทุกค่าของ x

จะได้ $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ สำหรับทุกค่าของ x

แสดงว่าไม่มีค่า x ที่ทำให้สมการ $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} = 0$ เป็นจริง

นั่นคือ สมการ $x^2+x+1 = 0$ ไม่มีคำตอบ

ตอบ ไม่มีคำตอบ

พิจารณาการแก้สมการ $ax^2+bx+c = 0$ ในกรณีที่ $a \neq 0$ และ $a \neq 1$ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 5 จงแก้สมการ $3m^2-7m-1 = 0$

นำ 3 มาหารทั้งสองข้างของสมการ เพื่อทำให้สัมประสิทธิ์ของ m^2 เป็น 1

วิธีทำ

$$3m^2-7m-1 = 0$$

จะได้ $m^2-\frac{7}{3}m-\frac{1}{3} = 0$

$$\left[m^2-\frac{7}{3}m+\left(\frac{7}{6}\right)^2\right]-\left(\frac{7}{6}\right)^2-\frac{1}{3} = 0$$

นำ $\left(\frac{7}{6}\right)^2$ มาบวกเข้าและลบออก

$$\left(m-\frac{7}{6}\right)^2-\frac{49}{36}-\frac{1}{3} = 0$$

$$\left(m-\frac{7}{6}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{61}}{6}\right)^2 = 0$$

$$\left[\left(m-\frac{7}{6}\right)-\frac{\sqrt{61}}{6}\right]\left[\left(m-\frac{7}{6}\right)+\frac{\sqrt{61}}{6}\right] = 0$$

ดังนั้น $\left(m-\frac{7}{6}\right)-\frac{\sqrt{61}}{6} = 0$ หรือ $\left(m-\frac{7}{6}\right)+\frac{\sqrt{61}}{6} = 0$

$$m = \frac{7}{6}+\frac{\sqrt{61}}{6} \quad \text{หรือ} \quad m = \frac{7}{6}-\frac{\sqrt{61}}{6}$$

จะได้ $m = \frac{7+\sqrt{61}}{6}$ หรือ $m = \frac{7-\sqrt{61}}{6}$

ตรวจสอบ 1) แทน m ด้วย $\frac{7+\sqrt{61}}{6}$ ในสมการ $3m^2 - 7m - 1 = 0$

จะได้ $3\left(\frac{7+\sqrt{61}}{6}\right)^2 - 7\left(\frac{7+\sqrt{61}}{6}\right) - 1 = 0$

$$\frac{49+14\sqrt{61}+61}{12} - \frac{49+7\sqrt{61}}{6} - 1 = 0$$

$$\frac{49+14\sqrt{61}+61 - 98 - 14\sqrt{61}}{12} - 1 = 0$$

$$\frac{12}{12} - 1 = 0$$

$0 = 0$ เป็นสมการที่เป็นจริง

2) แทน m ด้วย $\frac{7-\sqrt{61}}{6}$ ในสมการ $3m^2 - 7m - 1 = 0$

จะได้ $3\left(\frac{7-\sqrt{61}}{6}\right)^2 - 7\left(\frac{7-\sqrt{61}}{6}\right) - 1 = 0$

$$\frac{49-14\sqrt{61}+61}{12} - \frac{49-7\sqrt{61}}{6} - 1 = 0$$

$$\frac{49-14\sqrt{61}+61 - 98 + 14\sqrt{61}}{12} - 1 = 0$$

$$\frac{12}{12} - 1 = 0$$

$0 = 0$ เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น $\frac{7+\sqrt{61}}{6}$ และ $\frac{7-\sqrt{61}}{6}$ เป็นคำตอบของสมการ $3m^2 - 7m - 1 = 0$

ตอบ $\frac{7+\sqrt{61}}{6}$ และ $\frac{7-\sqrt{61}}{6}$

แบบฝึกหัด 3.2 ก

จงแก้สมการต่อไปนี้

1. $x^2 - 6x - 1 = 0$
2. $y^2 + 8y + 5 = 0$
3. $x^2 + 2x + 2 = 0$
4. $a^2 + 3a - 5 = 0$
5. $x^2 - 2\sqrt{3}\,x + 3 = 0$
6. $x^2 + 5x + 8 = 0$
7. $3x^2 - 4x - 1 = 0$
8. $2y^2 + 2y + 7 = 0$
9. $2t^2 + 8t - 25 = 0$
10. $10x^2 + 7x - 12 = 0$
11. $2x^2 + 9x + 6 = 0$
12. $4x^2 + 3x + 2 = 0$
13. $-6x^2 + 11x = 4$
14. $x^2 + \sqrt{10}\,x + \frac{5}{2} = 0$
15. $21x + 10 = 9x^2$
16. $3x^2 = 8x$
17. $9 + 6x - 3x^2 = 0$
18. $-9x^2 - 7x + 2 = 4x^2 - 3x$
19. $11x^2 - 7x = 10x^2 + 2$
20. $-1\frac{1}{2}x^2 = 1\frac{1}{2}x - 12$

ให้นักเรียนพิจารณาการหาคำตอบสำหรับกรณีทั่ว ๆ ไปของสมการ $ax^2 + bx + c = 0$ เมื่อ a, b, c เป็นค่าคงตัว และ $a \neq 0$ โดยใช้ความรู้เกี่ยวกับกำลังสองสมบูรณ์และผลต่างของกำลังสอง ดังต่อไปนี้

$$ax^2 + bx + c = 0$$

นำ a มาหารทั้งสองข้างของสมการ

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0 \qquad \text{..........} (1)$$

เนื่องจาก b^2-4ac เป็นจำนวนจริง ดังนั้น $b^2-4ac \geq 0$ หรือ $b^2-4ac < 0$

ถ้า $b^2-4ac \geq 0$

จะได้ $\sqrt{b^2-4ac}$ เป็นจำนวนจริง และ $\left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2 = b^2-4ac$

จากสมการ (1) จะได้

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2 = 0$$

$$\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right) - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right]\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right) + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right] = 0$$

ดังนั้น $\left(x+\frac{b}{2a}\right) - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = 0$ หรือ $\left(x+\frac{b}{2a}\right) + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = 0$

$$x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \text{หรือ} \qquad x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

จะได้ $x = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ หรือ $x = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

เมื่อนำค่า x ไปตรวจสอบกับสมการ $ax^2+bx+c = 0$ จะได้สมการที่เป็นจริง

ดังนั้น คำตอบของสมการคือ $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ และ $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

อาจเขียนเป็นสูตรเพื่อหาคำตอบของสมการได้ดังนี้

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ถ้า $b^2-4ac < 0$

จากสมการ (1) จะได้

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2} \qquad \text{..........} \ (2)$$

เนื่องจาก $b^2-4ac < 0$ และ $4a^2 > 0$ สำหรับทุกค่าของ a เมื่อ $a \neq 0$

ดังนั้น $\dfrac{b^2-4ac}{4a^2} < 0$

นั่นคือ $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ ซึ่งเป็นจำนวนที่อยู่ทางขวาของเครื่องหมายเท่ากับในสมการ ② เป็นจำนวนจริงลบ

เนื่องจากจำนวนจริงใด ๆ ยกกำลังสองแล้วจะต้องเป็นจำนวนจริงบวกหรือศูนย์

ดังนั้น ไม่มีจำนวนจริงใดที่นำมาแทน x ในสมการ ② แล้วทำให้ได้สมการที่เป็นจริง

นั่นคือ สมการ $ax^2+bx+c = 0$ จะไม่มีคำตอบของสมการที่เป็นจำนวนจริง

ข้อสรุปเกี่ยวกับคำตอบของสมการกำลังสอง

> สมการกำลังสอง $ax^2+bx+c = 0$ เมื่อ a, b, c เป็นค่าคงตัว และ $a \neq 0$
>
> ถ้า $b^2-4ac \geq 0$ แล้วจะมีคำตอบของสมการเป็นจำนวนจริง
>
> ถ้า $b^2-4ac < 0$ แล้วจะไม่มีคำตอบของสมการที่เป็นจำนวนจริง

สำหรับสมการ $ax^2+bx+c = 0$ เมื่อ a, b, c เป็นค่าคงตัว $a \neq 0$ และ $b^2-4ac \geq 0$ ซึ่งมีคำตอบของสมการเป็นจำนวนจริง เราสามารถหาคำตอบได้โดยการแยกตัวประกอบ หรือทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์ หรือใช้สูตร $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ และการหาว่าคำตอบที่เป็นจำนวนจริงของสมการนั้นมีสองคำตอบหรือหนึ่งคำตอบทำได้โดยพิจารณาจาก b^2-4ac ดังนี้

การได้มาของสูตร $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

กรณีที่ 1 ถ้า $b^2-4ac > 0$

จะได้ $\sqrt{b^2-4ac}$ และ $-\sqrt{b^2-4ac}$ เป็นจำนวนจริงที่ต่างกัน

จากสูตร $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ จะได้คำตอบของสมการ $ax^2+bx+c = 0$

เป็นสองคำตอบคือ $\frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ และ $\frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ดังตัวอย่าง

ตัวอย่าง กำหนดสมการ $24x^2 - 74x + 55 = 0$

ในที่นี้ $a = 24,\ b = -74$ และ $c = 55$

จะได้ $b^2 - 4ac = (-74)^2 - 4(24)(55)$

$= 196$

ดังนั้น $x = \frac{-(-74) \pm \sqrt{196}}{2(24)}$

$= \frac{74 \pm 14}{48}$

$x = \frac{74 + 14}{48}$ หรือ $x = \frac{74 - 14}{48}$

จะได้ $x = \frac{11}{6}$ หรือ $x = \frac{5}{4}$

นั่นคือ $\frac{11}{6}$ และ $\frac{5}{4}$ เป็นคำตอบของสมการ $24x^2 - 74x + 55 = 0$

กรณีที่ 2 ถ้า $b^2 - 4ac = 0$

จะได้ $\sqrt{b^2 - 4ac} = 0$

จากสูตร $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \frac{-b \pm 0}{2a}$

นั่นคือ $x = -\frac{b}{2a}$

คำตอบของสมการ $ax^2 + bx + c = 0$ จึงมีเพียงคำตอบเดียวคือ $-\frac{b}{2a}$

ดังตัวอย่าง

ตัวอย่าง กำหนดสมการ $9t^2 - 30t + 25 = 0$

ในที่นี้ $a = 9,\ b = -30$ และ $c = 25$

จะได้ $b^2 - 4ac = (-30)^2 - 4(9)(25)$

$= 0$

ดังนั้น $t = \frac{-(-30) \pm 0}{2(9)}$

$$= \frac{-(-30)}{18}$$

จะได้ $t = \frac{5}{3}$ หรือ $1\frac{2}{3}$

นั่นคือ $\frac{5}{3}$ หรือ $1\frac{2}{3}$ เป็นคำตอบของสมการ $9t^2 - 30t + 25 = 0$

กรณีที่สมการ $ax^2 + bx + c = 0$ เมื่อ a, b, c เป็นค่าคงตัว $a \neq 0$ และ $b^2 - 4ac < 0$ ซึ่งไม่มีคำตอบของสมการที่เป็นจำนวนจริง มีตัวอย่างดังนี้

ตัวอย่าง กำหนดสมการ $2x^2 - 3x + 2 = 0$

ในที่นี้ $a = 2$, $b = -3$ และ $c = 2$

จะได้ $b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(2)(2)$

$= 9 - 16$

$= -7$

ดังนั้น ไม่มีจำนวนจริงใดเป็นคำตอบของสมการ $2x^2 - 3x + 2 = 0$

ตัวอย่างที่ 6 จงหาว่าสมการต่อไปนี้มีคำตอบหรือไม่ ถ้ามี มีกี่คำตอบ

1) $2x^2 + 4x + 5 = 0$

2) $9m^2 - 3m + \frac{1}{4} = 0$

3) $6x^2 + 2x - 3 = 0$

วิธีทำ 1) $2x^2 + 4x + 5 = 0$

ในที่นี้ $a = 2$, $b = 4$ และ $c = 5$

จะได้ $b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(2)(5)$

$= 16 - 40$

$= -24$

เนื่องจาก $b^2 - 4ac < 0$

ดังนั้นไม่มีจำนวนจริงใดเป็นคำตอบของสมการ $2x^2 + 4x + 5 = 0$

ตอบ ไม่มีคำตอบ

2) $9m^2 - 3m + \frac{1}{4} = 0$

ในที่นี้ $a = 9,\ b = -3$ และ $c = \frac{1}{4}$

จะได้ $$b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(9)\left(\frac{1}{4}\right)$$
$$= 9 - 9$$
$$= 0$$

เนื่องจาก $b^2 - 4ac = 0$

ดังนั้น คำตอบของสมการ $9m^2 - 3m + \frac{1}{4} = 0$ มีหนึ่งคำตอบ

ตอบ มีหนึ่งคำตอบ

3) $6x^2 + 2x - 3 = 0$

ในที่นี้ $a = 6,\ b = 2$ และ $c = -3$

จะได้ $$b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(6)(-3)$$
$$= 4 + 72$$
$$= 76$$

เนื่องจาก $b^2 - 4ac > 0$

ดังนั้น คำตอบของสมการ $6x^2 + 2x - 3 = 0$ มีสองคำตอบ

ตอบ มีสองคำตอบ

ตัวอย่างที่ 7 จงแก้สมการ $x^2 - 4x + 13 = 0$

วิธีทำ $$x^2 - 4x + 13 = 0$$

ในที่นี้ $a = 1,\ b = -4$ และ $c = 13$

จะได้ $$b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(1)(13)$$
$$= -36$$

เนื่องจาก $b^2 - 4ac < 0$

ดังนั้น ไม่มีจำนวนจริงใดเป็นคำตอบของสมการ $x^2 - 4x + 13 = 0$

ตอบ ไม่มีคำตอบ

ตัวอย่างที่ 8 จงแก้สมการ $16x^2 + 24x + 9 = 0$

วิธีทำ $16x^2 + 24x + 9 = 0$

ในที่นี้ $a = 16,\ b = 24$ และ $c = 9$

จะได้ $b^2 - 4ac = 24^2 - 4(16)(9)$

$= 576 - 576$

$= 0$

จากสูตร $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

ดังนั้น $x = \dfrac{-24 \pm 0}{2(16)}$

$= -\dfrac{3}{4}$

นั่นคือ $-\dfrac{3}{4}$ เป็นคำตอบของสมการ $16x^2 + 24x + 9 = 0$

ตอบ $-\dfrac{3}{4}$

ตัวอย่างที่ 9 จงหาคำตอบของสมการ $y^2 + 2y - 13 = 0$

วิธีทำ $y^2 + 2y - 13 = 0$

ในที่นี้ $a = 1,\ b = 2$ และ $c = -13$

จะได้ $b^2 - 4ac = 2^2 - 4(1)(-13)$

$= 56$

จากสูตร $y = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

ดังนั้น $y = \dfrac{-2 \pm \sqrt{56}}{2(1)}$

$= \dfrac{-2 \pm 2\sqrt{14}}{2(1)}$

$y = -1 \pm \sqrt{14}$

นั่นคือ $-1 + \sqrt{14}$ และ $-1 - \sqrt{14}$ เป็นคำตอบของสมการ $y^2 + 2y - 13 = 0$

ตอบ $-1 + \sqrt{14}$ และ $-1 - \sqrt{14}$

ทำได้ไหม

ทำได้ไหม

จงหาค่า k ที่ทำให้สมการต่อไปนี้**มีคำตอบหนึ่งคำตอบ**

1. $9x^2 + kx + 4 = 0$
2. $kx^2 + 8x + 1 = 0$
3. $16x^2 - 40x + k = 0$
4. $x^2 + (k+6)x + 8k = 0$

แบบฝึกหัด 3.2 ข

1. จงพิจารณาว่าสมการต่อไปนี้มีคำตอบหรือไม่ ถ้ามี มีกี่คำตอบ

1) $2x^2 - 8x + 3 = 0$
2) $3x^2 + 7x - 1 = 0$
3) $2x^2 + 2x + 7 = 0$
4) $3x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$
5) $\frac{1}{2}x^2 + x = 5$
6) $5x^2 = 2x - 1$
7) $4x^2 - 4x - 35 = 0$
8) $16x^2 - 8x + 1 = 0$
9) $21x^2 + 9x + 100 = 0$
10) $4x^2 + 68x + 289 = 0$

2. จงแก้สมการโดยใช้สูตร

1) $x^2 - 12x + 11 = 0$
2) $x^2 - 3x - 10 = 0$
3) $x^2 + 4x + 1 = 0$
4) $3p^2 + 2 = 2p$
5) $2m^2 = 3m + 14$
6) $10x^2 = 17x - 3$
7) $14t = 1 + 49t^2$
8) $3y^2 = 7y - 3$
9) $7x = 2x^2 + 4$
10) $4 - 4y - 5y^2 = 0$

3. จงแก้สมการต่อไปนี้

1) $2x(x-1) = 3$

2) $5(x+1)^2 = 25$

3) $2(x^2-2) = x$

4) $x^2+3 = 1\frac{1}{2}x$

5) $\left(2x+\frac{1}{2}\right)x = x$

6) $2m+(m-1)^2 = 1$

7) $\frac{1}{5}(2x-5)^2 = \frac{116}{5} - x$

8) $2p^2-3p+\frac{1}{2} = 0$

9) $2x(x-3) = 4(10-x)$

10) $-\frac{17}{3}(y^2-1) = 8y-1$

เกี่ยวข้องกันอย่างไร

กำหนดสมการกำลังสอง $ax^2+bx+c = 0$ เมื่อ a, b, c เป็นค่าคงตัวที่ $a \neq 0$ ถ้า $b^2-4ac > 0$ จงหา

1) ผลบวกของคำตอบของสมการ

2) ผลคูณของคำตอบของสมการ

คำตอบที่ได้ในข้อ 1 และข้อ 2 เกี่ยวข้องกับสัมประสิทธิ์ของพหุนาม ax^2+bx+c อย่างไร

3.3 โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการกำลังสอง

สมการกำลังสองมีประโยชน์ในการหาคำตอบของปัญหาบางปัญหา ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 จำนวนสองจำนวนรวมกันเท่ากับ 22 และกำลังสองของแต่ละจำนวนรวมกันเท่ากับ 274 จงหาจำนวนทั้งสอง

วิธีทำ ให้ x แทนจำนวนจำนวนหนึ่ง

อีกจำนวนหนึ่งคือ $22 - x$

กำลังสองของแต่ละจำนวนรวมกันเท่ากับ 274

จะได้สมการเป็น

$$\begin{aligned} x^2 + (22 - x)^2 &= 274 \\ x^2 + 484 - 44x + x^2 &= 274 \\ 2x^2 - 44x + 210 &= 0 \\ x^2 - 22x + 105 &= 0 \end{aligned}$$

ในที่นี้ $a = 1$, $b = -22$ และ $c = 105$

จะได้

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= (-22)^2 - 4(1)(105) \\ &= 484 - 420 \\ &= 64 \end{aligned}$$

จากสูตร $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

จะได้

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-22) \pm \sqrt{64}}{2(1)} \\ &= \frac{22 \pm 8}{2} \end{aligned}$$

ดังนั้น $x = 15$ หรือ $x = 7$

ตรวจสอบ ถ้าจำนวนหนึ่งคือ 15

จะได้อีกจำนวนหนึ่งคือ $22 - 15 = 7$

กำลังสองของ 15 คือ 225 และกำลังสองของ 7 คือ 49

จะได้กำลังสองของแต่ละจำนวนรวมกัน เท่ากับ $225 + 49 = 274$

ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

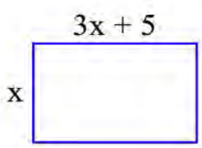
นั่นคือ จำนวนทั้งสองคือ 15 และ 7

ตอบ 15 และ 7

ตัวอย่างที่ 2 รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งมีด้านยาวยาวกว่าสามเท่าของด้านกว้างอยู่ 5 เซนติเมตร และมีพื้นที่ 138 ตารางเซนติเมตร จงหาความยาวของแต่ละด้านของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากนี้

วิธีทำ ให้ด้านกว้างของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากรูปนี้ยาว x เซนติเมตร

ความยาวของด้านยาวยาวกว่าสามเท่าของด้านกว้างอยู่ 5 เซนติเมตร



ดังนั้น ด้านยาวของรูปสี่เหลี่ยมรูปนี้ยาว 3x + 5 เซนติเมตร

เนื่องจากรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากนี้มีพื้นที่ 138 ตารางเซนติเมตร

จะได้สมการเป็น

$$x(3x + 5) = 138$$

$$3x^2 + 5x = 138$$

$$3x^2 + 5x - 138 = 0$$

ในที่นี้ $a = 3,\ b = 5$ และ $c = -138$

จะได้

$$b^2 - 4ac = 5^2 - 4(3)(-138)$$

$$= 25 + 1,656$$

$$= 1,681$$

จากสูตร $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

จะได้

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{1,681}}{2(3)}$$

$$= \frac{-5 \pm 41}{6}$$

ดังนั้น $x = 6$ หรือ $x = -\dfrac{46}{6}$

ตรวจสอบ เนื่องจาก x แทนความยาวของด้านของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากซึ่งจะต้องเป็นจำนวนจริงบวก

ดังนั้น $-\frac{46}{6}$ จึงไม่ใช่ความยาวของด้าน

ถ้าให้ด้านกว้างของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากยาว 6 เซนติเมตร

จะได้ด้านยาว ยาว $(3 \times 6) + 5 = 23$ เซนติเมตร

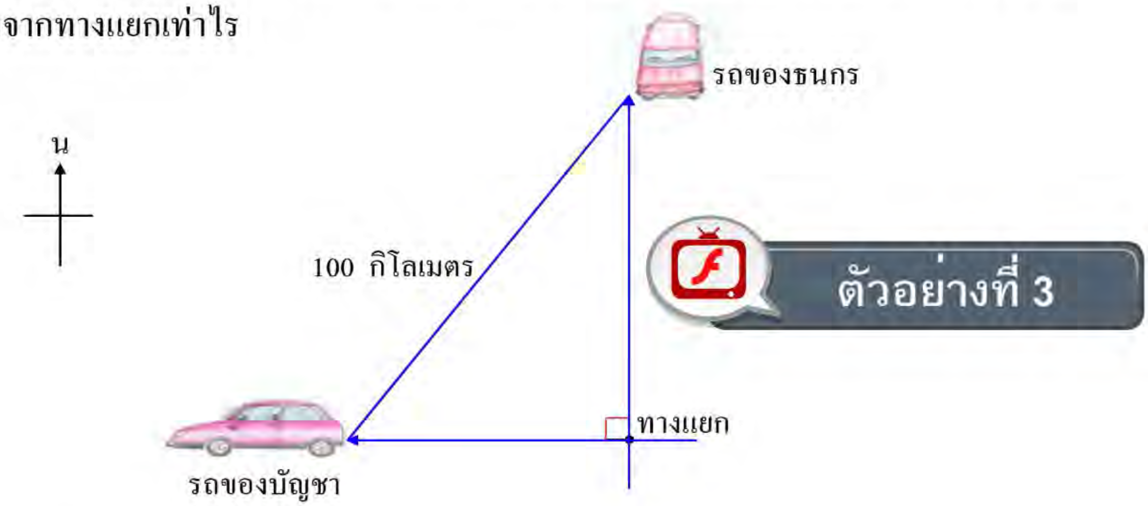
และได้พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเป็น $6 \times 23 = 138$ ตารางเซนติเมตร

ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

นั่นคือ ด้านกว้างของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากยาว 6 เซนติเมตรและด้านยาว ยาว 23 เซนติเมตร

ตอบ 6 เซนติเมตร และ 23 เซนติเมตร

ตัวอย่างที่ 3 บัญชากับธนกรขับรถมาพบกันที่ทางแยกแห่งหนึ่ง หลังจากนั้นบัญชาขับรถไปทางทิศตะวันตก ในขณะที่ธนกรขับรถไปทางทิศเหนือ ดังรูป เมื่อเวลาผ่านไป 1 ชั่วโมง ธนกรขับรถได้ระยะทางมากกว่าบัญชา 20 กิโลเมตร และทั้งสองคนอยู่ห่างกัน 100 กิโลเมตร จงหาว่าบัญชาและธนกรขับรถได้ระยะทางห่างจากทางแยกเท่าไร



วิธีทำ ให้บัญชาขับรถได้ระยะทาง x กิโลเมตร

จะได้ว่า ธนกรขับรถได้ระยะทาง $x + 20$ กิโลเมตร

บัญชาและธนกรอยู่ห่างกันเป็นระยะทาง 100 กิโลเมตร

โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้สมการเป็น

$$x^2 + (x + 20)^2 = 100^2$$

$$x^2 + x^2 + 40x + 400 = 10{,}000$$
$$2x^2 + 40x - 9{,}600 = 0$$
$$x^2 + 20x - 4{,}800 = 0$$

ในที่นี้ $a = 1$, $b = 20$ และ $c = -4{,}800$

จะได้ $b^2 - 4ac = 20^2 - 4(1)(-4{,}800)$

$= 400 + 19{,}200$

$= 19{,}600$

จากสูตร $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

จะได้ $x = \dfrac{-20 \pm \sqrt{19{,}600}}{2}$

$= \dfrac{-20 \pm 140}{2}$

ดังนั้น $x = 60$ หรือ $x = -80$

ตรวจสอบ เนื่องจาก x แทนระยะทางซึ่งจะต้องเป็นจำนวนจริงบวก ดังนั้น -80 จึงไม่ใช่ระยะทาง

ถ้าให้บัญชาขับรถได้ระยะทาง 60 กิโลเมตร

ธนกรขับรถได้ระยะทาง $60 + 20 = 80$ กิโลเมตร

จะได้ $60^2 + 80^2 = 3{,}600 + 6{,}400$

$= 10{,}000$

$= 100^2$

ดังนั้น บัญชาและธนกรอยู่ห่างกัน 100 กิโลเมตร ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

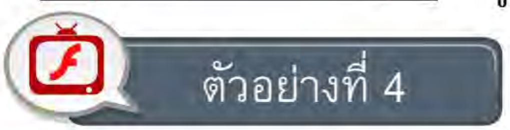
นั่นคือ บัญชาขับรถได้ระยะทาง 60 กิโลเมตร

ธนกรขับรถได้ระยะทาง 80 กิโลเมตร

ตอบ บัญชาขับรถได้ระยะทาง 60 กิโลเมตร
ธนกรขับรถได้ระยะทาง 80 กิโลเมตร

ตัวอย่างที่ 4 สโมสรแห่งหนึ่งต้องการสร้างสระว่ายน้ำรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีขนาดกว้าง 8 เมตร ยาว 25 เมตร และให้มีทางเดินรอบสระว่ายน้ำซึ่งปูด้วยกระเบื้อง ทางเดินมีความกว้างเท่ากันโดยตลอด ถ้าบริเวณที่จะสร้างสระว่ายน้ำรวมทางเดินมีพื้นที่ 434 ตารางเมตร จงหาว่าทางเดินรอบสระว่ายน้ำกว้างเท่าไร

วิธีทำ



ให้ทางเดินรอบสระว่ายน้ำกว้าง x เมตร

ความกว้างของที่ดินเป็น $8 + 2x$ เมตร

ความยาวของที่ดินเป็น $25 + 2x$ เมตร

ที่ดินมีพื้นที่ 434 ตารางเมตร

จะได้สมการเป็น $(8 + 2x)(25 + 2x) = 434$

$$(4 + x)(25 + 2x) = 217$$

$$100 + 33x + 2x^2 = 217$$

$$2x^2 + 33x - 117 = 0$$

ในที่นี้ $a = 2$, $b = 33$ และ $c = -117$

จะได้ $b^2 - 4ac = 33^2 - 4(2)(-117)$

$$= 1{,}089 + 936$$

$$= 2{,}025$$

จากสูตร $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

จะได้ $x = \dfrac{-33 \pm \sqrt{2{,}025}}{2(2)}$

$$= \frac{-33 \pm 45}{4}$$

ดังนั้น $x = 3$ หรือ $x = -\dfrac{39}{2}$

ตรวจสอบ เนื่องจาก x แทนความกว้างของทางเดินรอบสระน้ำซึ่งจะต้องเป็นจำนวนจริงบวก ดังนั้น $-\dfrac{39}{2}$ จึงไม่ใช่ความกว้าง

ถ้าให้ทางเดินรอบสระว่ายน้ำกว้าง 3 เมตร

ความกว้างของที่ดินเป็น $8+(2\times 3) = 14$ เมตร

ความยาวของที่ดินเป็น $25+(2\times 3) = 31$ เมตร

ดังนั้น ที่ดินมีพื้นที่ $14\times 31 = 434$ ตารางเมตร ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

นั่นคือ ทางเดินรอบสระว่ายน้ำกว้าง 3 เมตร

ตอบ 3 เมตร

แบบฝึกหัด 3.3

1. พื้นห้องเรียนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีพื้นที่ 180 ตารางเมตร ด้านยาวยาวกว่าด้านกว้าง 3 เมตร ห้องเรียนนี้กว้างและยาวกี่เมตร

2. กำหนด ΔABC มี $A\hat{B}C$ เป็นมุมฉาก $\overline{AB}$ ยาวกว่า $\overline{BC}$ 7 เซนติเมตร และ $\overline{AC}$ ยาวกว่า $\overline{AB}$ 1 เซนติเมตร จงหาความยาวของ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ และ $\overline{AC}$ ตามลำดับ

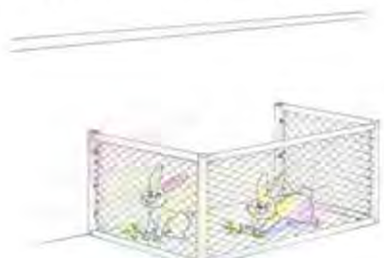
3. ΔABC มีพื้นที่ 52 ตารางเซนติเมตร มีความสูงน้อยกว่าสองเท่าของความยาวของฐาน BC อยู่ 3 เซนติเมตร จงหาความยาวของฐาน BC

4. ผลคูณของจำนวนคี่บวกสองจำนวนที่เรียงติดกันเป็น 675 จงหาจำนวนคี่สองจำนวนนั้น

5. ถังเก็บน้ำทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากใบหนึ่งมีพื้นที่ก้นถังเป็น 120 ตารางเซนติเมตร ความยาวรอบปากถังภายในยาว 46 เซนติเมตร ถ้าถังใบนี้จุน้ำได้ 720 ลูกบาศก์เซนติเมตร จงหาขนาดภายในของถังใบนี้

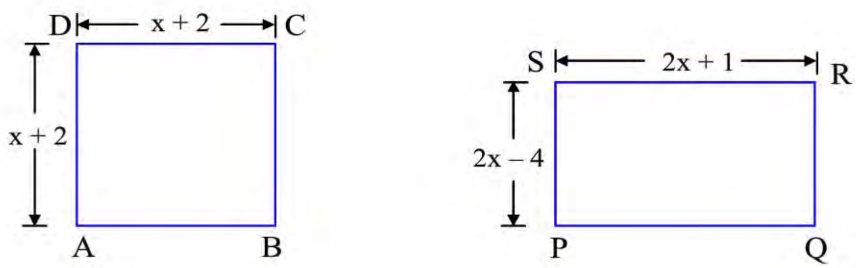
6. กรอบรูปไม้สักสำหรับรูปขนาด 24×30 ซม.^{2} มีพื้นที่โดยรอบของส่วนที่เป็นไม้สักด้านหน้าของกรอบรูปเท่ากับ 496 ตารางเซนติเมตร จงหาว่าไม้ที่ทำกรอบรูปกว้างเท่าไร

7. พิมพ์ใจต้องการสร้างกรงกระต่ายให้มีเนื้อที่ 55 ตารางเมตรติดกับรั้วบ้าน ดังรูป



ถ้าความยาวของด้านทั้งสามของกรงกระต่ายรวมกันเป็น 21 เมตร จงหาความกว้างและความยาวของกรงกระต่ายนี้

8. รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ABCD และรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก PQRS มีพื้นที่เท่ากันและมีขนาดดังรูป จงหาขนาดของรูปสี่เหลี่ยมแต่ละรูป (กำหนดหน่วยความยาวเป็นเซนติเมตร)



9. สวนกำนันจุ่นปลูกส้มเรียงเป็นแถวไว้ 2,000 ต้น แต่ละแถวมีจำนวนต้นส้มเท่ากัน

ถ้าจำนวนต้นส้มในแต่ละแถวน้อยกว่าจำนวนแถวอยู่ 10 จงหาว่าในสวนกำนันจุ่นปลูกส้มไว้กี่แถว และแถวละกี่ต้น

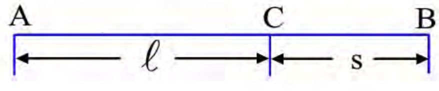
10. บดินทร์มีที่ดินรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสอยู่สองแปลงไม่ติดกัน แต่ละแปลงล้อมรั้วด้วยลวดหนามสี่ชั้นดังรูป ถ้าที่ดินทั้งสองแปลงมีเนื้อที่รวมกันเป็น 170 ตารางวา และใช้ลวดหนามทั้งหมด 576 เมตร อยากทราบว่าที่ดินแต่ละแปลงมีเนื้อที่เท่าไร

หาอัตราส่วนทองอีกวิธีหนึ่ง

นักเรียนเคยทราบถึงวิธีหาอัตราส่วนทองจากรูปสี่เหลี่ยมทองมาแล้ว โดยได้อัตราส่วนทองประมาณ 1.618 : 1 ซึ่งกล่าวสั้น ๆ ว่าอัตราส่วนทองมีค่าประมาณ 1.618 ชาวกรีกโบราณตั้งแต่ก่อนสมัยของยุคลิดแห่งอะเล็กซานเดรียได้กำหนดอัตราส่วนทองว่าเป็นอัตราส่วนที่ได้จากการแบ่งส่วนของเส้นตรง AB ที่จุด C โดยที่ AB : AC = AC : CB และเรียกอัตราส่วนนี้เป็นอัตราส่วนทอง

เราสามารถใช้ความรู้เกี่ยวกับสมการกำลังสองหาอัตราส่วนทองข้างต้นได้ดังนี้

กำหนดให้ AC = ℓ และ CB = s ดังรูป



จาก AB : AC = AC : CB จะเขียนได้เป็น

อัตราส่วนทอง

$$\frac{\ell + s}{\ell} = \frac{\ell}{s}$$

$$(\ell + s) \times s = \ell \times \ell$$

$$s\ell + s^2 = \ell^2$$

นำ $s\ell$ หารทั้งสองข้างของสมการ

จะได้ $$1 + \frac{s}{\ell} = \frac{\ell}{s}$$

เมื่อกำหนดให้ $\frac{\ell}{s} = x$ แล้ว $\frac{s}{\ell} = \frac{1}{x}$

สมการข้างต้นจึงเขียนได้เป็น

$$1 + \frac{1}{x} = x$$

นำ x มาคูณทั้งสองข้างของสมการ

จะได้ $x + 1 = x^2$

หรือ $x^2 - x - 1 = 0$

จากสูตร $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

ในที่นี้ $a = 1$, $b = -1$ และ $c = -1$

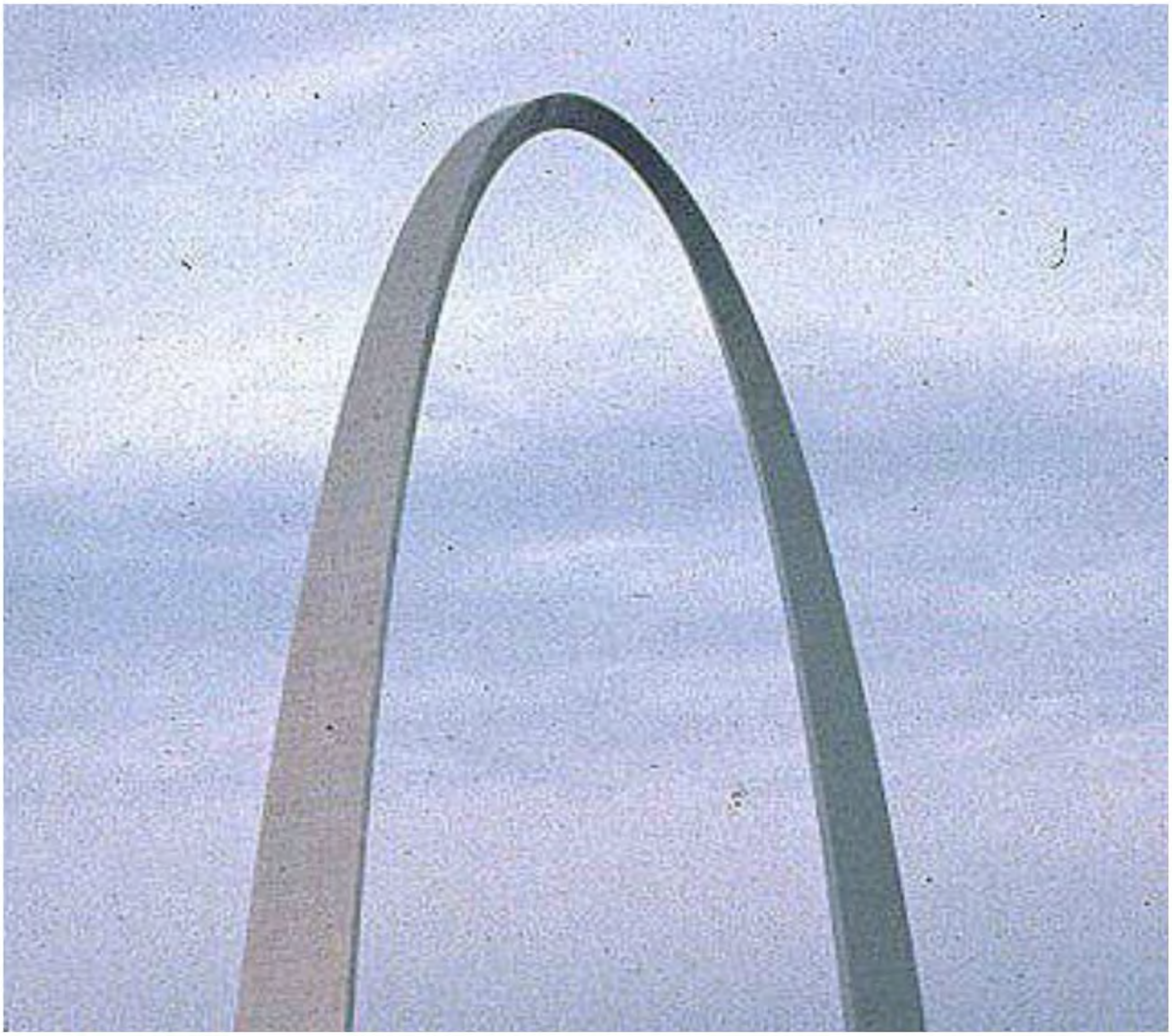
จะได้ $$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

ค่า x ที่เป็นบวก คือ $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

ดังนั้น $\frac{\ell}{s} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

จะได้ อัตราส่วนทองคือ $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ซึ่งคิดเป็นประมาณ 1.618 อัตราส่วนทองที่หามาได้นี้เป็นการหาอีกวิธีหนึ่งตามแนวคิดดั้งเดิมของชาวกรีกโบราณ



เซนต์หลุยส์เกทเวย์อาร์ค เมืองเซนต์หลุยส์ รัฐมิสซูรี ประเทศสหรัฐอเมริกา
(Saint Louis Gateway Arch, Saint Louis, Missouri, U.S.A.)

บทที่ 4

พาราโบลา

ในบทนี้นักเรียนจะได้เรียนรู้เกี่ยวกับพาราโบลา และการเขียนกราฟพาราโบลาที่มีสมการอยู่ในรูป $y = ax^2 + bx + c$ เมื่อ x, y เป็นตัวแปร a, b, c เป็นค่าคงตัว และ $a \neq 0$ โดยเริ่มต้นจากกราฟพาราโบลาที่กำหนดด้วยสมการที่อยู่ในรูปอย่างง่าย คือ $y = ax^2$, $y = ax^2 + k$, $y = a(x-h)^2 + k$ เมื่อ h, k เป็นค่าคงตัว และ $a \neq 0$ ไปสู่สมการที่อยู่ในรูป $y = ax^2 + bx + c$ การเรียนรู้ในแต่ละกิจกรรมนักเรียนจะต้องลงมือปฏิบัติโดยศึกษาสำรวจ สังเกต และสร้างข้อความคาดการณ์ เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปที่เป็นลักษณะทั่วไปของกราฟพาราโบลา และสามารถนำความรู้ไปแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่าง ๆ ที่บางสถานการณ์เกี่ยวข้องเชื่อมโยงกับวิทยาศาสตร์ และศาสตร์อื่น ๆ

จุดมุ่งหมายของบทเรียนบทนี้ มีดังนี้

1. จำแนกได้ว่าสมการที่กำหนดให้สมการใดเป็นสมการของพาราโบลา
2. เขียนกราฟพาราโบลาที่กำหนดให้ได้
3. บอกจุดสูงสุดหรือจุดต่ำสุด และแกนสมมาตร ของกราฟของสมการ $y = ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b, c เป็นค่าคงตัว และ $a \neq 0$
4. บอกค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของ y จากสมการ $y = ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b, c เป็นค่าคงตัว และ $a \neq 0$

4.1 สมการของพาราโบลา

นักเรียนลองสังเกตสิ่งแวดล้อมรอบตัวเรา ก็จะพบสิ่งก่อสร้าง วัสดุ หรืออุปกรณ์บางอย่างที่ส่วนประกอบมีลักษณะเป็นเส้นโค้งทางเรขาคณิต อาทิ สะพานแขวนมีสายเคเบิลโยงด้านบนระหว่างเสาสะพานลักษณะเป็นเส้นโค้งหงายขึ้น เส้นทางการเคลื่อนที่ของสายน้ำของน้ำพุในช่วงเวลาต่าง ๆ กันมีลักษณะเป็นเส้นโค้งคว่ำ ดังรูป

Click

Click

เมื่อเราโยนลูกบอลขึ้นไปในอากาศ จะสังเกตเห็นว่าเส้นทางการเคลื่อนที่ของลูกบอลมีลักษณะเป็นเส้นโค้ง ดังรูป

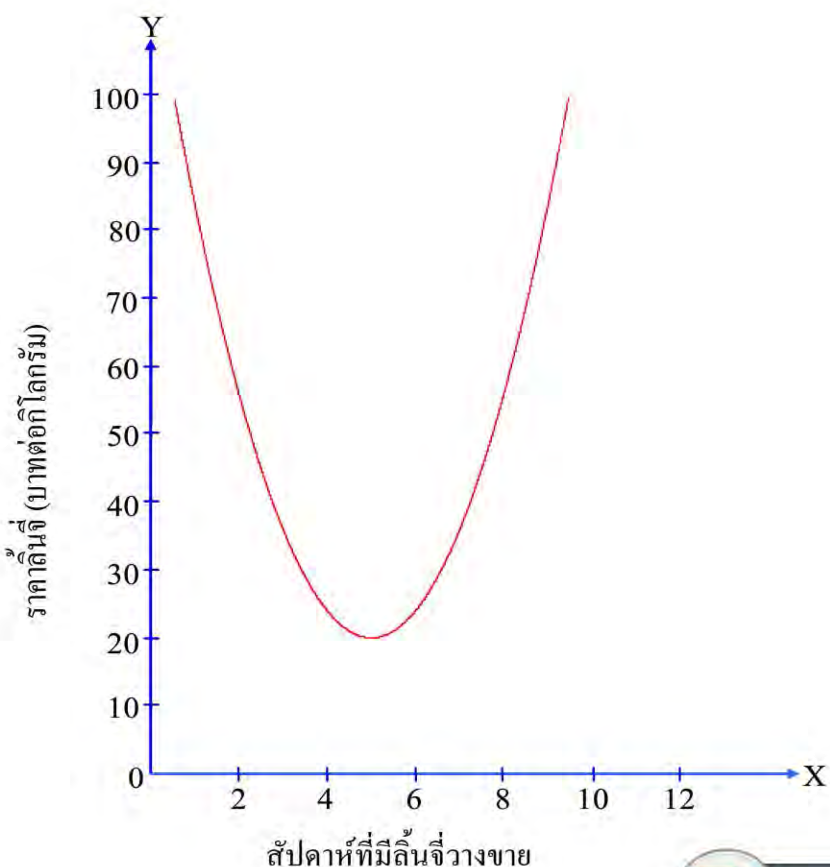
Click

ตัวอย่างเพิ่มเติม

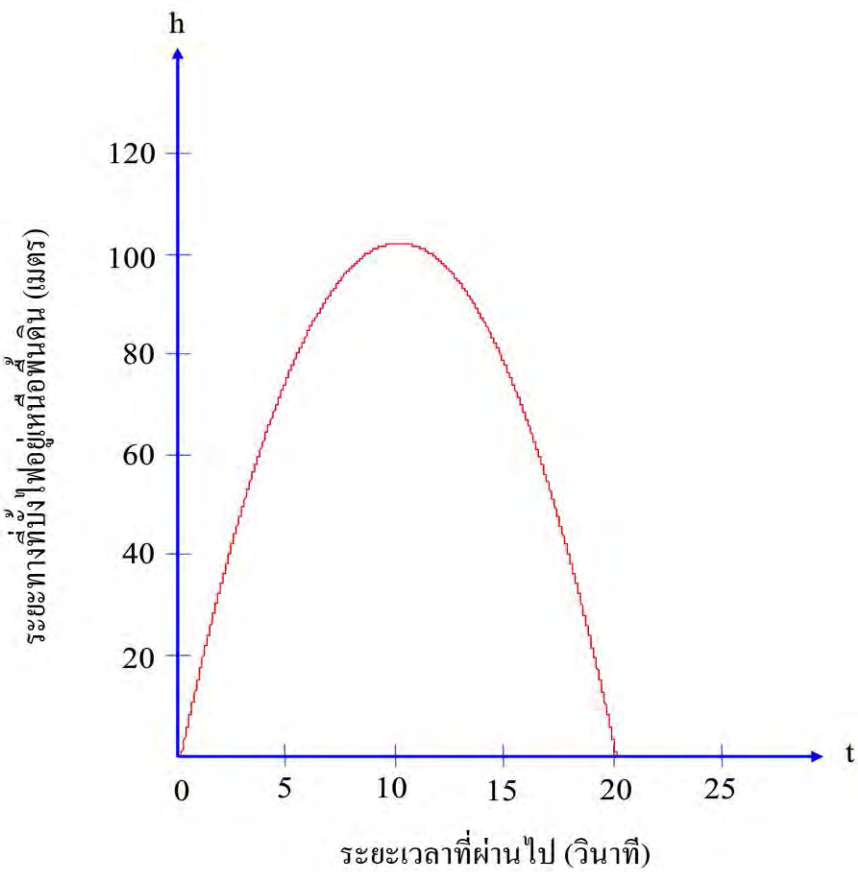
กาลิเลโอ (Galileo ค.ศ. 1564 – 1642) นักวิทยาศาสตร์ที่มีชื่อเสียงของโลกพบว่า เมื่อเราโยนวัตถุขึ้นไปในอากาศ เส้นทางการเคลื่อนที่ของวัตถุนั้นจะมีลักษณะเป็นเส้นโค้ง ดังรูปข้างต้น ในทางคณิตศาสตร์ เรียกเส้นโค้งที่มีลักษณะดังกล่าวนี้ว่า พาราโบลา

ในเรื่องสมการกำลังสองตัวแปรเดียว นักเรียนได้เคยพบความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นพาราโบลามาแล้ว ดังตัวอย่างต่อไปนี้

1. ความสัมพันธ์ระหว่างสัปดาห์ที่มีลิ้นจี่วางขาย (x) กับราคาลิ้นจี่เป็นบาทต่อกิโลกรัม (y) ที่เป็นไปตามสมการ $y = 4x^2 - 40x + 120$ และเขียนกราฟของสมการได้ดังรูป



2. ความสัมพันธ์ระหว่างเวลาที่ผ่านไปเป็นวินาที (t) หลังจากการยิงบั้งไฟกับระยะทางที่บั้งไฟอยู่เหนือพื้นดินเป็นเมตร (h) เป็นไปตามสมการ $h = 20t - t^2$ และเขียนกราฟของสมการได้ดังรูป



จากกราฟของความสัมพันธ์ข้างต้น ลักษณะของกราฟในข้อ 1 เป็น พาราโบลาหงาย และลักษณะของกราฟในข้อ 2 เป็นพาราโบลาคว่ำ ซึ่งสมการในข้อ 1 และข้อ 2 เป็นตัวอย่างของสมการของพาราโบลา

สมการ $y = ax^2 + bx + c$ เมื่อ x, y เป็นตัวแปร a, b, c เป็นค่าคงตัว และ $a \neq 0$ เรียกว่า **สมการของพาราโบลา**

ลองคิดดู

จากสมการ $y = ax^2 + bx + c$ เมื่อ x, y เป็นตัวแปร a, b, c เป็นค่าคงตัว ถ้าให้ $a = 0$ จะได้สมการชนิดใด และมีกราฟเป็นอย่างไร

ลองคิดดู

บอกได้หรือไม่

1. เมื่อเปรียบเทียบสมการของพาราโบลาในแต่ละข้อต่อไปนี้กับสมการของพาราโบลาในรูปทั่วไป $y = ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b, c เป็นค่าคงตัว แล้ว a, b และ c ในแต่ละสมการเป็นเท่าไร

บอกได้หรือไม่ 1

1) $y = x^2 + x - 6$ 2) $y = -2x^2$

3) $y = 9 + x^2$ 4) $2y = 4x - x^2$

5) $y = (x+3)^2$ 6) $y = -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

2. สมการในแต่ละข้อต่อไปนี้ เป็นสมการของพาราโบลาหรือไม่ เพราะเหตุใด

บอกได้หรือไม่ 2

1) $y = x^2$ 2) $y = 3x - 5$

3) $y = x^2 + 2x - 1$ 4) $y = (x+1)^2$

5) $y = -6 - 2x - x^2$ 6) $y = 6$

ตัวอย่าง $y = x^2 - 5$ เป็นสมการของพาราโบลา เพราะสามารถจัดให้อยู่ในรูป $y = ax^2 + bx + c$ ได้ โดยที่ $a = 1$, $b = 0$ และ $c = -5$

$y = 0$ ไม่เป็นสมการของพาราโบลา เพราะไม่สามารถจัดให้อยู่ในรูป $y = ax^2 + bx + c$ ได้ โดยที่ $a \neq 0$

4.2 พาราโบลาที่กำหนดด้วยสมการ $y = ax^2$ เมื่อ $a \neq 0$

จากสมการของพาราโบลา $y = ax^2 + bx + c$ เมื่อกำหนดให้ $a \neq 0$, $b = 0$, $c = 0$ จะได้ $y = ax^2$ เราจะพิจารณากรณี $a > 0$ และ $a < 0$ ต่อไปนี้

กรณี a > 0 จะแยกพิจารณาเป็น 2 กรณีคือ เมื่อ $a = 1$ และเมื่อ $a \neq 1$

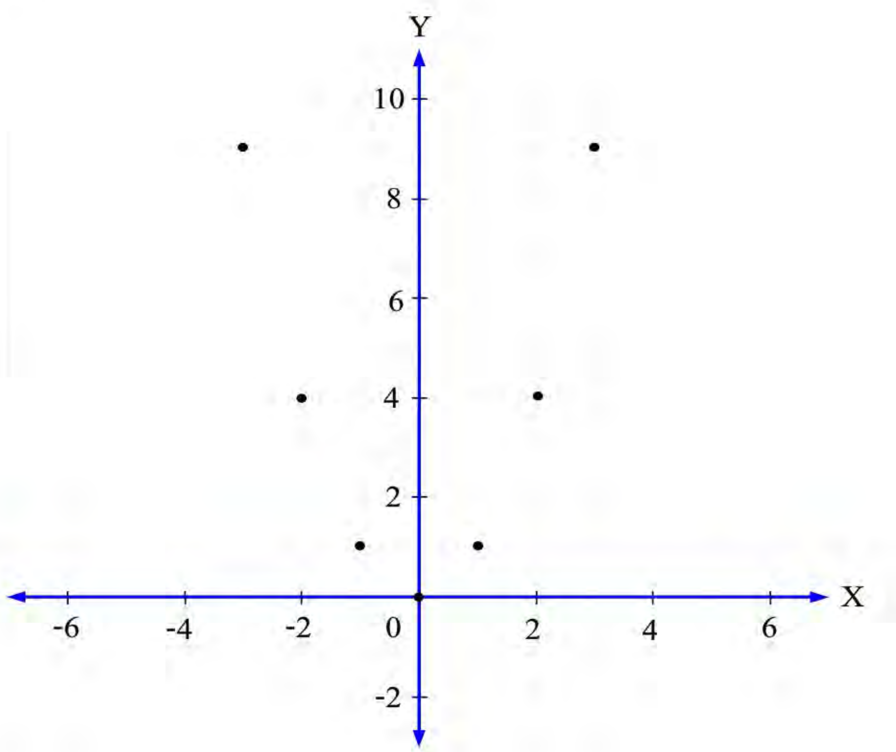
กรณีที่ 1 เมื่อ $a = 1$

สมการ $y = ax^2$ จะเป็น $y = x^2$

เขียนกราฟของสมการ $y = x^2$ โดยกำหนดค่า x และหาค่า y จากสมการ $y = x^2$ จะได้ดังในตาราง

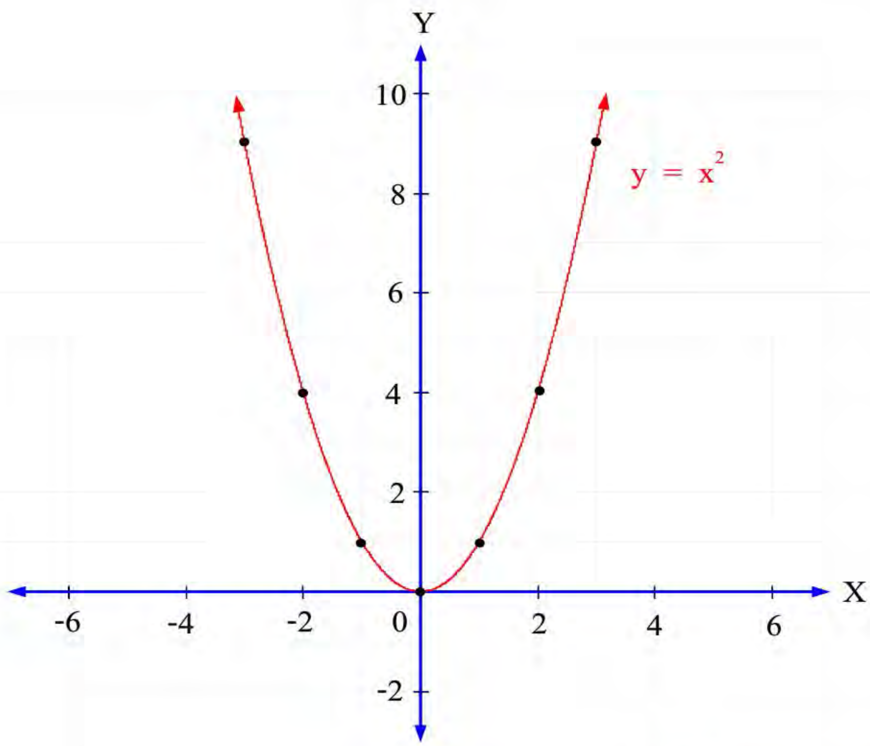
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9

นำคู่อันดับจากตารางมาเขียนกราฟได้ดังนี้



นักเรียนจะเห็นว่า กราฟที่ได้เป็นเพียงจุดบางจุดที่อยู่บนกราฟของพาราโบลา ทั้งนี้เพราะว่าค่า x ที่กำหนดให้ในตารางเป็นเพียงบางค่าที่เลือกมา

เนื่องจากสมการ $y = x^2$ มี x เป็นตัวแปรที่แทนจำนวนจริงใด ๆ ดังนั้นเมื่อแทน x ในสมการ $y = x^2$ ด้วยจำนวนจริงใด ๆ จุดทั้งหมดที่เกิดจากคู่อันดับ (x, y) ที่ทำให้สมการเป็นจริง จะเรียงกันเป็นเส้นโค้งเรียบซึ่งเป็นกราฟของพาราโบลา $y = x^2$ ดังรูป



กราฟของ $y = x^2$

ให้นักเรียนพิจารณากราฟข้างต้น แล้วตอบคำถามต่อไปนี้

1. กราฟของสมการ $y = x^2$ มีลักษณะเป็นพาราโบลาหงายหรือพาราโบลาคว่ำ
2. ถ้าให้ x = 4 ค่า y เป็นเท่าใด

3. ถ้าให้ $x = -4$ ค่า y เป็นเท่าใด
4. ถ้าให้ $y = 9$ ค่า x เป็นเท่าใด
5. กราฟของสมการ $y = x^2$ เป็นรูปสมมาตรหรือไม่ ถ้าเป็น มีเส้นตรงใดเป็นแกนสมมาตร
6. ถ้า $x > 0$ และมีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ แล้วค่า y จะเปลี่ยนแปลงอย่างไร
7. ถ้า $x = 0$ แล้วค่า y เป็นเท่าใด
8. ถ้า $x < 0$ และมีค่าลดลงเรื่อย ๆ แล้วค่า y จะเปลี่ยนแปลงอย่างไร
9. ค่าต่ำสุดของ y เป็นเท่าใดและได้มาจากค่า x ใด
10. ค่าสูงสุดของ y มีหรือไม่ เพราะเหตุใด

จากกิจกรรมข้างต้นจะเห็นว่า กราฟของสมการ $y = x^2$ มีลักษณะเป็นพาราโบลาหงาย ที่เป็นรูปสมมาตรโดยมีแกน Y เป็นแกนสมมาตร จุด (0, 0) เป็นจุดต่ำสุดของกราฟ ค่าต่ำสุดของ y เป็น 0 ที่ได้จากค่า x เป็น 0 ค่าสูงสุดของ y ไม่มี เพราะค่า y เพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ ไม่สิ้นสุด

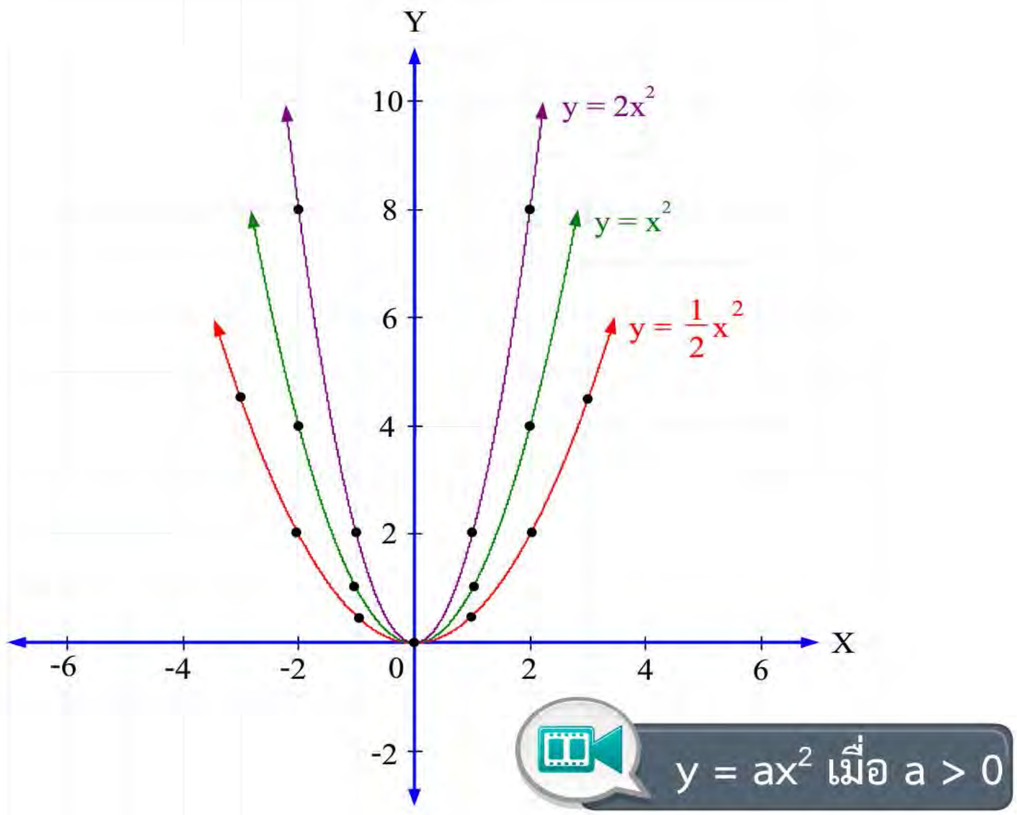
กรณีที่ 2 เมื่อ $a \neq 1$

ให้นักเรียนพิจารณาสมการ $y = 2x^2$ และ $y = \frac{1}{2}x^2$

เมื่อกำหนดค่า x และหาค่า y ในแต่ละสมการ จะได้ดังในตาราง

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2x^2$	18	8	2	0	2	8	18
$y = \frac{1}{2}x^2$	$4\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$4\frac{1}{2}$

นำคู่อันดับของสมการทั้งสองจากตารางมาเขียนกราฟ โดยใช้แกนคู่เดียวกันกับที่มีกราฟของสมการ $y = x^2$ จะได้กราฟของสมการ $y = 2x^2$ และสมการ $y = \frac{1}{2}x^2$ ดังรูป แล้วนำกราฟที่ได้มาเปรียบเทียบกัน



กราฟของ $y = ax^2$, $a > 0$

ให้นักเรียนพิจารณากราฟข้างต้น แล้วตอบคำถามต่อไปนี้

1. กราฟทั้งสามมีเส้นตรงใดเป็นแกนสมมาตร
2. จุดต่ำสุดของกราฟทั้งสามคือจุดใด และค่าต่ำสุดของ y เป็นเท่าใด
3. นักเรียนคิดว่ากราฟทั้งสามจะบานน้อยหรือบานมากขึ้นอยู่กับค่าใด อย่างไร

คำตอบที่ได้เป็นไปตามลักษณะทั่วไปของกราฟของสมการ $y = ax^2$ เมื่อ $a > 0$ ดังนี้

1. กราฟเป็นพาราโบลาหงายที่มีแกน Y เป็นแกนสมมาตร
2. จุด (0, 0) เป็นจุดต่ำสุดของกราฟที่ค่าต่ำสุดของ y เป็น 0 และไม่มีจุดสูงสุด
3. กราฟจะบานน้อยหรือบานมากขึ้นอยู่กับค่า a กล่าวคือ ถ้า a มีค่าน้อยกราฟจะบานมาก แต่ถ้า a มีค่ามากกราฟจะบานน้อย

กรณี a < 0 จะแยกพิจารณาเป็น 2 กรณีคือ เมื่อ $a = -1$ และเมื่อ $a \neq -1$

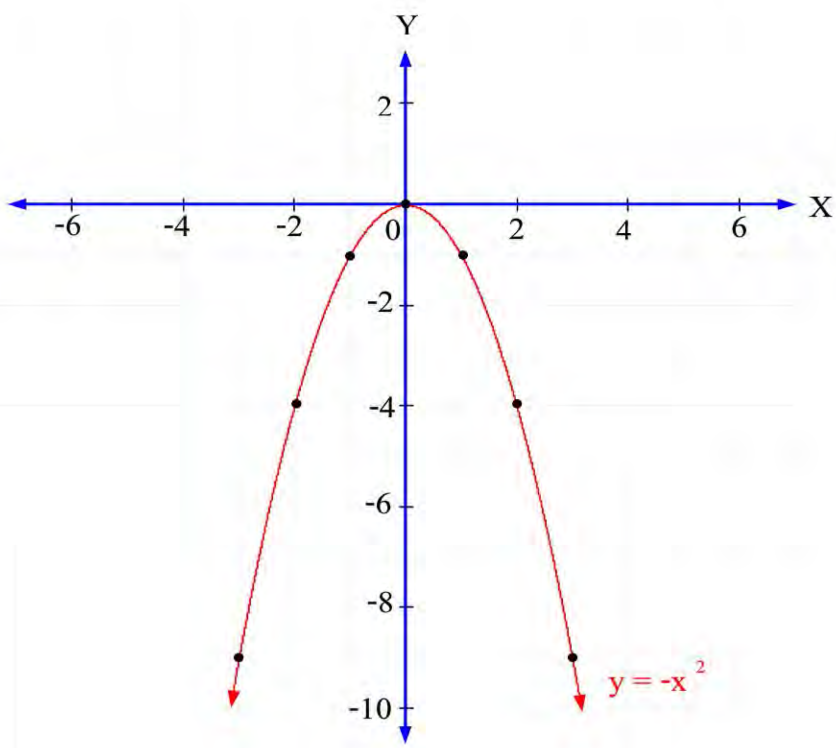
กรณีที่ 1 เมื่อ $a = -1$

สมการ $y = ax^2$ จะเป็น $y = -x^2$

เขียนกราฟของสมการ $y = -x^2$ โดยกำหนดค่า x และหาค่า y จากสมการ $y = -x^2$ จะได้ดังในตาราง

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = -x^2$	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9

นำคู่อันดับจากตารางมาเขียนกราฟจะได้กราฟของสมการ $y = -x^2$ ดังนี้



กราฟของ $y = -x^2$

ให้นักเรียนพิจารณากราฟข้างต้น แล้วตอบคำถามต่อไปนี้

1. กราฟของสมการ $y = -x^2$ มีลักษณะเป็นพาราโบลาหงายหรือพาราโบลาคว่ำ
2. ถ้าให้ $x = 4$ ค่า y เป็นเท่าใด
3. ถ้าให้ $x = -4$ ค่า y เป็นเท่าใด
4. ถ้าให้ $y = -16$ ค่า x เป็นเท่าใด
5. กราฟของสมการ $y = -x^2$ เป็นรูปสมมาตรหรือไม่ ถ้าเป็น มีเส้นตรงใดเป็นแกนสมมาตร
6. ถ้า $x > 0$ และมีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ แล้วค่า y จะเปลี่ยนแปลงอย่างไร
7. ถ้า $x = 0$ แล้วค่า y เป็นเท่าใด
8. ถ้า $x < 0$ และมีค่าลดลงเรื่อย ๆ แล้วค่า y จะเปลี่ยนแปลงอย่างไร
9. ค่าสูงสุดของ y เป็นเท่าใดและได้มาจากค่า x ใด
10. ค่าต่ำสุดของ y มีหรือไม่ เพราะเหตุใด

จากกิจกรรมข้างต้นจะเห็นว่า กราฟของสมการ $y = -x^2$ มีลักษณะเป็นพาราโบลาคว่ำที่เป็นรูปสมมาตรโดยมีแกน Y เป็นแกนสมมาตร จุด (0, 0) เป็นจุดสูงสุดของกราฟ ค่าสูงสุดของ y เป็น 0 ที่ได้มาจากค่า x เป็น 0 ค่าต่ำสุดของ y ไม่มี เพราะค่า y ลดลงเรื่อย ๆ ไม่สิ้นสุด

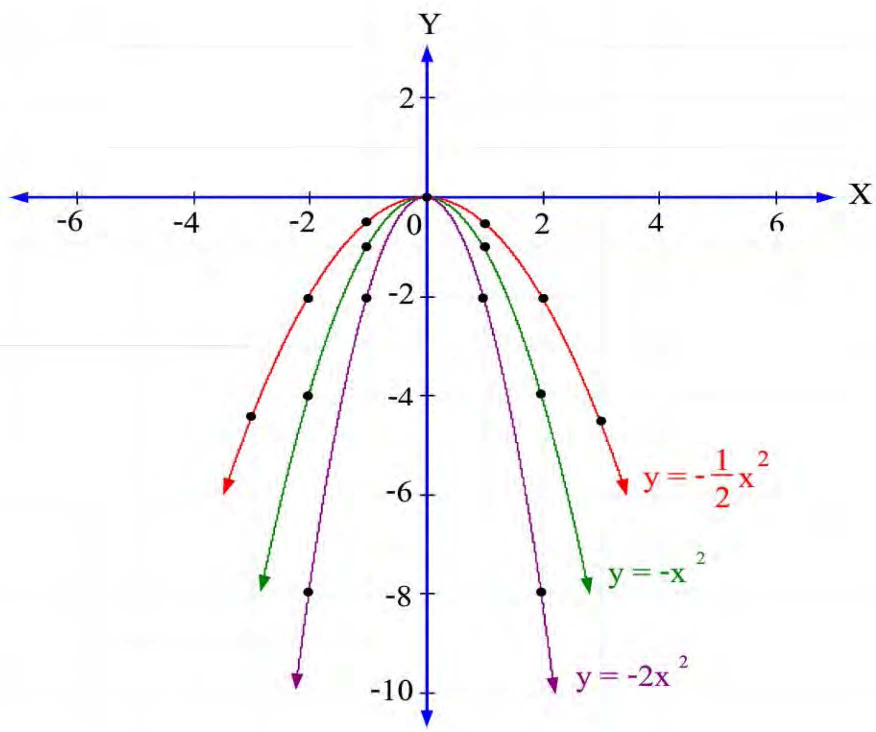
กรณีที่ 2 เมื่อ $a \neq -1$

ให้นักเรียนพิจารณาสมการ $y = -2x^2$ และ $y = -\frac{1}{2}x^2$

เมื่อกำหนดค่า x และหาค่า y ในแต่ละสมการ จะได้ดังในตาราง

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = -2x^2$	-18	-8	-2	0	-2	-8	-18
$y = -\frac{1}{2}x^2$	$-4\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2	$-4\frac{1}{2}$

นำคู่อันดับของสมการทั้งสองจากตารางมาเขียนกราฟ โดยใช้แกนคู่เดียวกันกับที่มีกราฟของสมการ $y = -x^2$ จะได้กราฟของสมการ $y = -2x^2$ และสมการ $y = -\frac{1}{2}x^2$ ดังรูป แล้วนำกราฟที่ได้มาเปรียบเทียบกัน



ให้นักเรียนพิจารณากราฟข้างต้น แล้วตอบคำถามต่อไปนี้

1. กราฟทั้งสามมีเส้นตรงใดเป็นแกนสมมาตร
2. จุดสูงสุดของกราฟทั้งสามคือจุดใด และค่าสูงสุดของ y เป็นเท่าใด
3. นักเรียนคิดว่ากราฟทั้งสามจะบานน้อยหรือบานมากขึ้นอยู่กับค่าใด อย่างไร

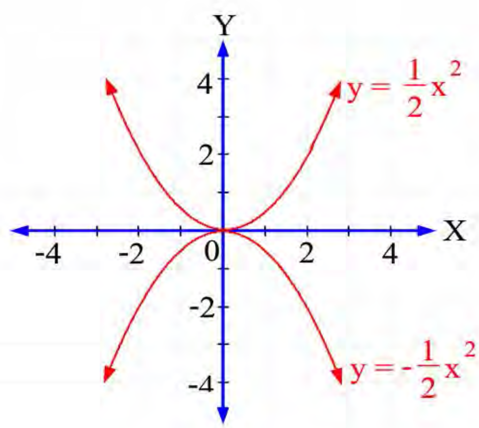
คำตอบที่ได้เป็นไปตามลักษณะทั่วไปของกราฟของสมการ $y = ax^2$ เมื่อ $a < 0$ ดังนี้

1. กราฟเป็นพาราโบลาคว่ำที่มีแกน Y เป็นแกนสมมาตร
2. จุด (0, 0) เป็นจุดสูงสุดของกราฟที่ค่าสูงสุดของ y เป็น 0 และไม่มีจุดต่ำสุด
3. กราฟจะบานน้อยหรือมากขึ้นอยู่กับค่า a กล่าวคือ ถ้า a มีค่าน้อยกราฟจะบานน้อย แต่ถ้า a มีค่ามากกราฟจะบานมาก

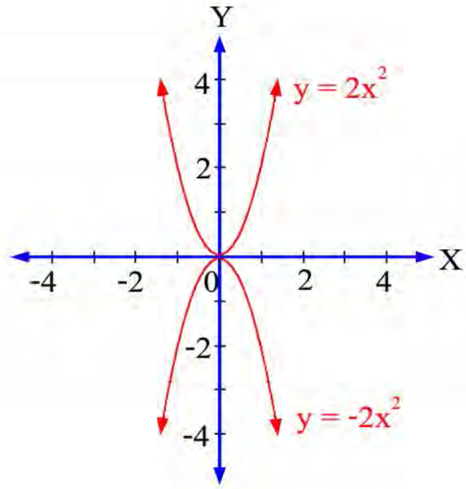
ภาพสะท้อน

ให้นักเรียนพิจารณากราฟต่อไปนี้

1.



2.



นักเรียนจะเห็นว่า ในข้อ 1 กราฟของสมการ $y = \frac{1}{2}x^2$ และ $y = -\frac{1}{2}x^2$ เป็นพาราโบลาที่เป็นภาพสะท้อนซึ่งกันและกันโดยมีแกน X เป็นเส้นสะท้อน

สำหรับในข้อ 2 กราฟของสมการ $y = 2x^2$ และ $y = -2x^2$ จะได้ข้อสรุปเช่นเดียวกันกับข้อ 1

นักเรียนคิดว่ากราฟของสมการ $y = ax^2$ และ $y = -ax^2$, $a > 0$ จะเป็นพาราโบลาที่เป็นภาพสะท้อนซึ่งกันและกัน โดยมีแกน X เป็นเส้นสะท้อนหรือไม่

แบบฝึกหัด 4.2

1. ในตารางแต่ละข้อต่อไปนี้ ให้นักเรียนเติมค่า y ตามค่า x ที่กำหนดแล้วเขียนกราฟ

1)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = \frac{1}{4}x^2$							

2)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = \frac{3}{2}x^2$							

3)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = -\frac{2}{3}x^2$							

4)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = -\frac{4}{3}x^2$							

2. จงเขียนกราฟของสมการ $y = 3x^2$ และ $y = \frac{1}{3}x^2$ โดยใช้แกนคู่เดียวกัน แล้วตอบคำถามต่อไปนี้

   1) กราฟทั้งสองมีเส้นตรงใดเป็นแกนสมมาตร
   2) จุดต่ำสุดของกราฟทั้งสองเป็นจุดใด
   3) ค่าต่ำสุดของ y ในสมการทั้งสองเป็นเท่าใด

3. จงเขียนกราฟของสมการ $y = -4x^2$ และ $y = -\frac{1}{4}x^2$ โดยใช้แกนคู่เดียวกัน แล้วตอบคำถามต่อไปนี้
    1) กราฟทั้งสองมีเส้นตรงใดเป็นแกนสมมาตร
    2) จุดสูงสุดของกราฟทั้งสองเป็นจุดใด
    3) ค่าสูงสุดของ y ในสมการทั้งสองเป็นเท่าใด

4. จงเขียนกราฟของสมการ $y = \frac{5}{2}x^2$ และ $y = -\frac{5}{3}x^2$ โดยใช้แกนคู่เดียวกัน แล้วตอบคำถามต่อไปนี้
    1) กราฟทั้งสองมีเส้นตรงใดเป็นแกนสมมาตร
    2) จุดต่ำสุดหรือจุดสูงสุดของแต่ละกราฟเป็นจุดใด
    3) ค่าต่ำสุดหรือค่าสูงสุดของ y ในแต่ละสมการเป็นเท่าใด

5. จงพิจารณาสมการ $y = 2x^2$, $y = 4x^2$ และ $y = 5x^2$ แล้วตอบคำถามต่อไปนี้ โดยไม่ต้องเขียนกราฟ
    1) กราฟของสมการทั้งสามเป็นพาราโบลาหงายหรือพาราโบลาคว่ำ พิจารณาได้จากค่าใด
    2) กราฟทั้งสามมีเส้นตรงใดเป็นแกนสมมาตร
    3) กราฟทั้งสามมีจุดใดเป็นจุดสูงสุดหรือเป็นจุดต่ำสุด

6. จงพิจารณาสมการ $y = -3x^2$, $y = -6x^2$ และ $y = -7x^2$ แล้วตอบคำถามต่อไปนี้ โดยไม่ต้องเขียนกราฟ
    1) กราฟของสมการทั้งสามเป็นพาราโบลาหงายหรือพาราโบลาคว่ำ พิจารณาได้จากค่าใด
    2) กราฟทั้งสามมีเส้นตรงใดเป็นแกนสมมาตร
    3) กราฟทั้งสามมีจุดใดเป็นจุดสูงสุดหรือเป็นจุดต่ำสุด

4.3 พาราโบลาที่กำหนดด้วยสมการ $y = ax^2 + k$ เมื่อ $a \neq 0$

จากหัวข้อที่ผ่านมาได้กล่าวถึงพาราโบลาที่กำหนดด้วยสมการ $y = ax^2$ เมื่อ $a \neq 0$ ในหัวข้อนี้จะศึกษาเกี่ยวกับพาราโบลาที่กำหนดด้วยสมการ $y = ax^2 + k$ เมื่อ $a \neq 0$

ถ้า $k = 0$ จะได้สมการ $y = ax^2$ ซึ่งนักเรียนได้เรียนมาแล้วในหัวข้อ 4.2

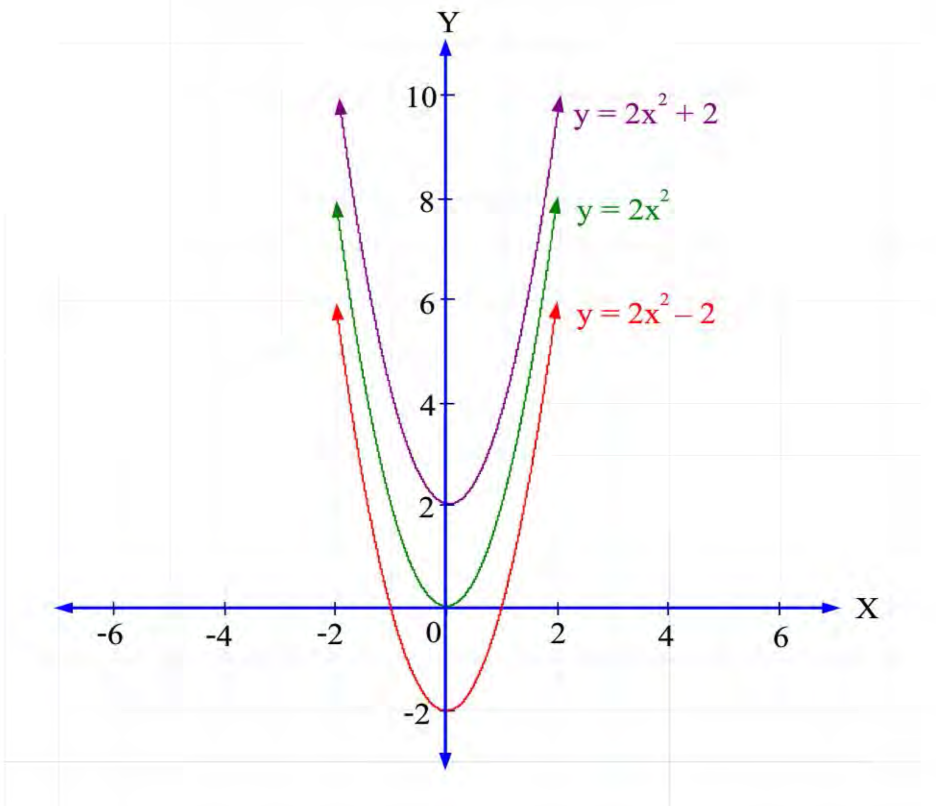
จากสมการของพาราโบลา $y = ax^2 + k$ เราจะพิจารณากรณี $a > 0$ และ $a < 0$ ต่อไปนี้

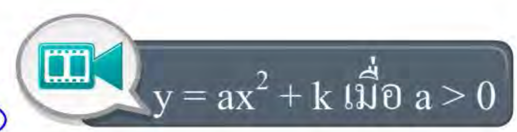
กรณี $a > 0$

ให้นักเรียนพิจารณาสมการ $y = 2x^2$, $y = 2x^2 + 2$ และ $y = 2x^2 - 2$ เมื่อกำหนดค่า x และหาค่า y ในแต่ละสมการ จะได้ดังในตาราง

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2x^2$	8	2	0	2	8
$y = 2x^2 + 2$	10	4	2	4	10
$y = 2x^2 - 2$	6	0	-2	0	6

นำคู่อันดับของสมการทั้งสามจากตารางมาเขียนกราฟ โดยใช้แกนคู่เดียวกัน ดังรูป แล้วนำกราฟที่ได้มาเปรียบเทียบกัน





กราฟของ $y = ax^2 + k$, $a > 0$

ให้นักเรียนพิจารณากราฟข้างต้น ทำกิจกรรมและตอบคำถามต่อไปนี้

1. นำกระดาษลอกลายลอกพาราโบลารูปใดก็ได้ และนำไปซ้อนกับพาราโบลาอีกสองรูปที่เหลือ พาราโบลาทั้งสามทับกันได้สนิทหรือไม่
2. กราฟทั้งสามมีเส้นตรงใดเป็นแกนสมมาตร
3. จุดต่ำสุดของกราฟทั้งสามคือจุดใด และค่าต่ำสุดของ y เป็นเท่าใด
4. จุดต่ำสุดของกราฟของสมการใดอยู่เหนือแกน X และจุดต่ำสุดของกราฟของสมการใดอยู่ใต้แกน X

5. ถ้าให้กราฟของสมการ $y = 2x^2$ เป็นรูปต้นแบบแล้ว กราฟของสมการ $y = 2x^2 + 2$ และ $y = 2x^2 - 2$ เป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานของกราฟของสมการ $y = 2x^2$ อย่างไร จงอธิบาย

คำตอบที่ได้เป็นไปตามลักษณะทั่วไปของกราฟของสมการ $y = ax^2 + k$ เมื่อ $a > 0$ ดังนี้

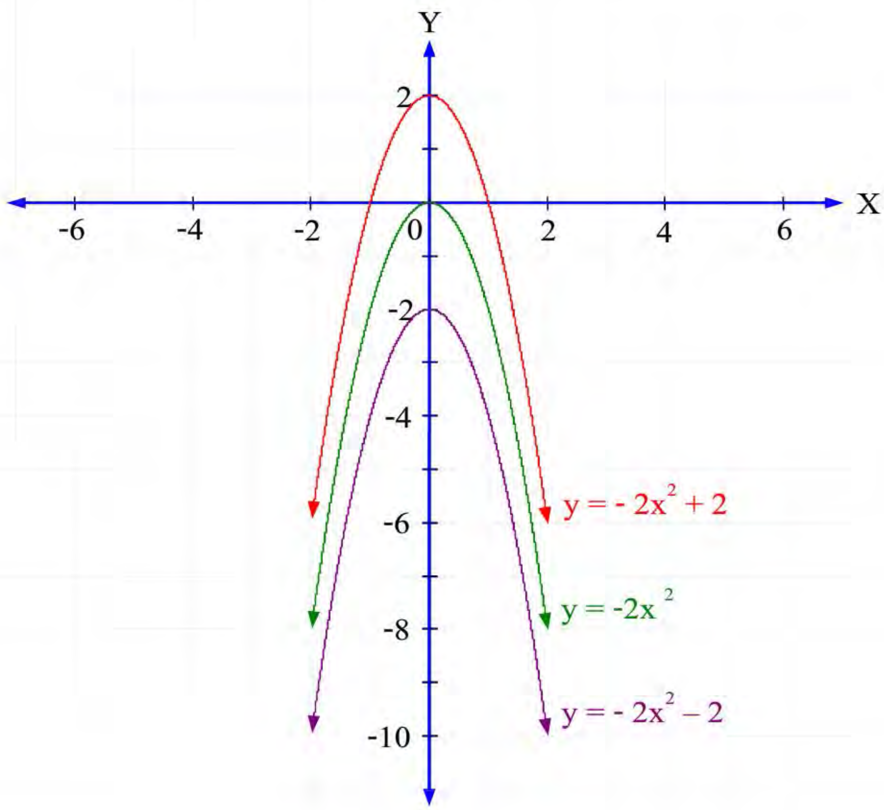
1. กราฟเป็นพาราโบลาหงายที่มีแกน Y เป็นแกนสมมาตร
2. จุด (0, k) เป็นจุดต่ำสุดของกราฟ จุดนี้อยู่เหนือแกน X เมื่อ $k > 0$ และอยู่ใต้แกน X เมื่อ $k < 0$ ค่าต่ำสุดของ y เท่ากับ k
3. กราฟของสมการ $y = ax^2 + k$ เป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานของกราฟของสมการ $y = ax^2$ ตามแนวแกน Y ขึ้นไปเหนือแกน X เป็นระยะ k หน่วย เมื่อ $k > 0$ และลงมาใต้แกน X เป็นระยะ $|k|$ หน่วย เมื่อ $k < 0$

กรณี $a < 0$

ให้นักเรียนพิจารณาสมการ $y = -2x^2$, $y = -2x^2 + 2$ และ $y = -2x^2 - 2$ เมื่อกำหนดค่า x และหาค่า y ในแต่ละสมการ จะได้ดังในตาราง

x	-2	-1	0	1	2
$y = -2x^2$	-8	-2	0	-2	-8
$y = -2x^2 + 2$	-6	0	2	0	-6
$y = -2x^2 - 2$	-10	-4	-2	-4	-10

นำคู่อันดับของสมการทั้งสามจากตารางมาเขียนกราฟ โดยใช้แกนคู่เดียวกัน ดังรูป แล้วนำกราฟที่ได้มาเปรียบเทียบกัน



กราฟของ $y = ax^2 + k$, $a < 0$

$y = ax^2 + k$ เมื่อ $a < 0$

ให้นักเรียนพิจารณากราฟข้างต้น ทำกิจกรรมและตอบคำถามต่อไปนี้

1. นำกระดาษลอกลายลอกพาราโบลารูปใดก็ได้ และนำไปซ้อนกับพาราโบลาอีกสองรูปที่เหลือ พาราโบลาทั้งสามทับกันได้สนิทหรือไม่
2. กราฟทั้งสามมีเส้นตรงใดเป็นแกนสมมาตร
3. จุดสูงสุดของกราฟทั้งสามคือจุดใด และค่าสูงสุดของ y เป็นเท่าใด
4. จุดสูงสุดของกราฟของสมการใดอยู่เหนือแกน X และจุดสูงสุดของกราฟของสมการใดอยู่ใต้แกน X

5. ถ้าให้กราฟของสมการ $y = -2x^2$ เป็นรูปต้นแบบแล้ว กราฟของสมการ $y = -2x^2 + 2$ และ $y = -2x^2 - 2$ เป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานของกราฟของสมการ $y = -2x^2$ อย่างไร จงอธิบาย

คำตอบที่ได้เป็นไปตามลักษณะทั่วไปของกราฟของสมการ $y = ax^2 + k$ เมื่อ $a < 0$ ดังนี้

1. กราฟเป็นพาราโบลาคว่ำที่มีแกน Y เป็นแกนสมมาตร
2. จุด (0, k) เป็นจุดสูงสุดของกราฟ จุดนี้อยู่เหนือแกน X เมื่อ $k > 0$ และอยู่ใต้แกน X เมื่อ $k < 0$ ค่าสูงสุดของ y เท่ากับ k
3. กราฟของสมการ $y = ax^2 + k$ เป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานของกราฟของสมการ $y = ax^2$ ตามแนวแกน Y ขึ้นไปเหนือแกน X เป็นระยะ k หน่วย เมื่อ $k > 0$ และลงมาใต้แกน X เป็นระยะ $|k|$ หน่วย เมื่อ $k < 0$

เราสามารถนำความรู้เกี่ยวกับกราฟของพาราโบลา $y = ax^2 + k$ เมื่อ $k \neq 0$ มาสรุปเป็นขั้นตอนในการเขียนกราฟ ดังนี้

1. พิจารณาว่าเป็นพาราโบลาหงายหรือพาราโบลาคว่ำ โดยดูจากค่า a ในสมการ $y = ax^2 + k$ เมื่อ $k \neq 0$ ซึ่งจะเป็นพาราโบลาหงาย เมื่อ $a > 0$ และจะเป็นพาราโบลาคว่ำ เมื่อ $a < 0$
2. หาจุดสูงสุดหรือจุดต่ำสุดของกราฟ ซึ่งได้แก่ จุด (0, k)
3. หาแกนสมมาตร ซึ่งได้แก่ แกน Y
4. หาจุดต่าง ๆ ที่อยู่บนข้างเดียวกันของแกนสมมาตร ส่วนจุดต่าง ๆ อีกข้างหนึ่งของแกนสมมาตรจะหาได้โดยใช้หลักการสมมาตร

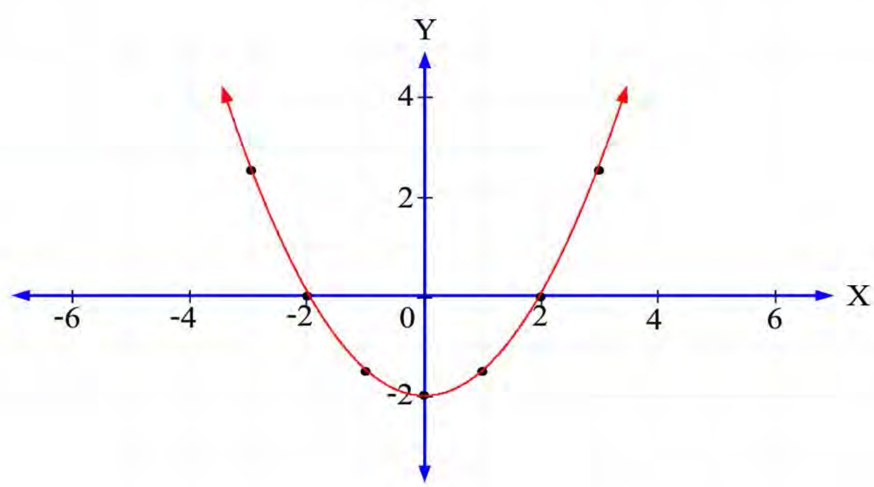
ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนกราฟของสมการ $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$

วิธีทำ พิจารณากราฟของสมการ $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$ จะได้

1. กราฟเป็นพาราโบลาหงาย
2. จุดต่ำสุดคือ จุด (0, -2)
3. แกน Y เป็นแกนสมมาตร
4. หาจุดต่าง ๆ ที่อยู่บนข้างเดียวกันของแกนสมมาตร

x	0	1	2	3
$y = \frac{1}{2}x^2 - 2$	-2	$-1\frac{1}{2}$	0	$2\frac{1}{2}$

เขียนกราฟของสมการ $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$ ได้ดังนี้



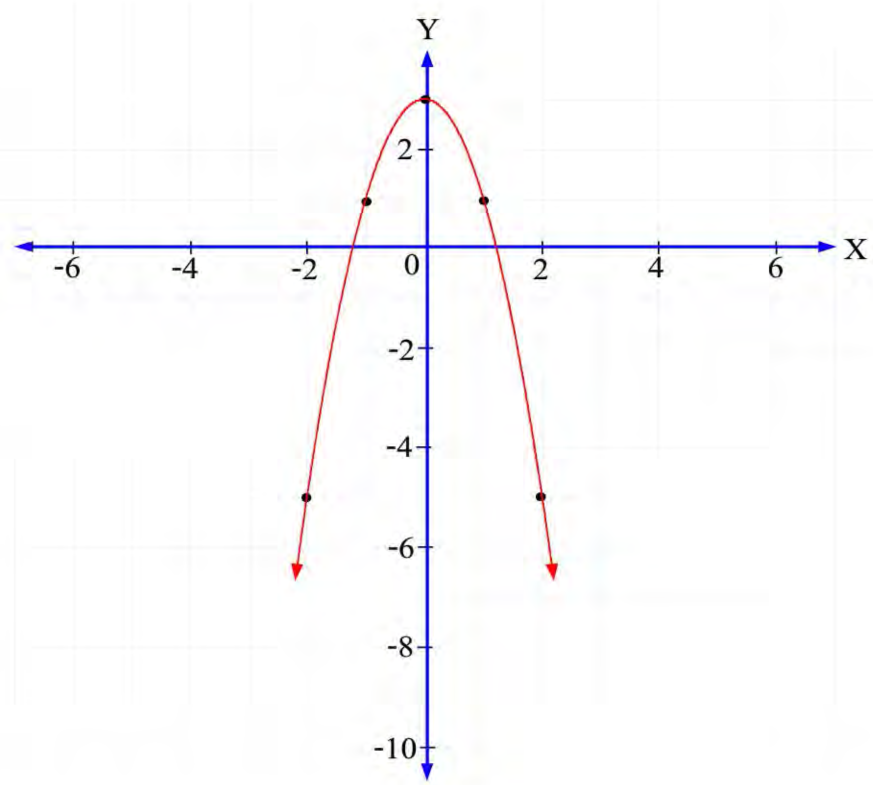
ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนกราฟของสมการ $y = -2x^2 + 3$

วิธีทำ พิจารณากราฟของสมการ $y = -2x^2 + 3$ จะได้

1. กราฟเป็นพาราโบลาคว่ำ
2. จุดสูงสุดคือ จุด (0, 3)
3. แกน Y เป็นแกนสมมาตร
4. หาจุดต่าง ๆ ที่อยู่บนข้างเดียวกันของแกนสมมาตร

x	0	1	2
$y = -2x^2 + 3$	3	1	-5

เขียนกราฟของสมการ $y = -2x^2 + 3$ ได้ดังนี้



แบบฝึกหัด 4.3

1. จงเขียนกราฟของสมการต่อไปนี้

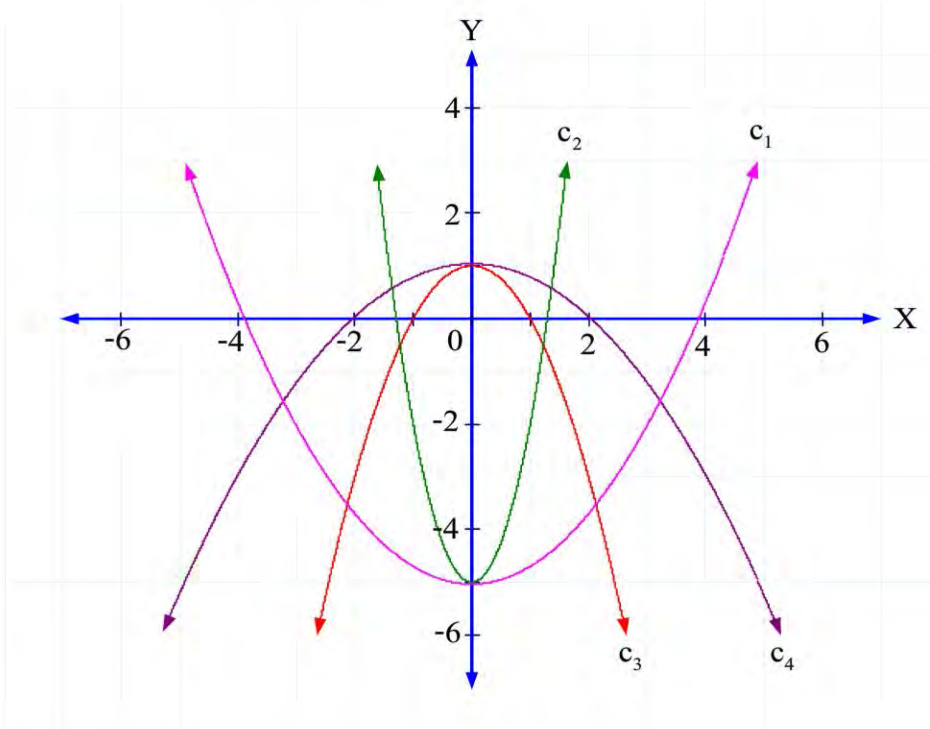
    1) $y = 5x^2 + 4$ 2) $y = -3x^2 - 2$

    3) $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2$ 4) $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$

2. จงพิจารณาว่าพาราโบลา c_1, c_2, c_3 และ c_4 เป็นกราฟของสมการใด ต่อไปนี้

    1) $y = \frac{1}{3}x^2 - 5$ 2) $y = -\frac{1}{4}x^2 + 1$

    3) $y = 3x^2 - 5$ 4) $y = -x^2 + 1$



4.4 พาราโบลาที่กำหนดด้วยสมการ $y = a(x-h)^2 + k$ เมื่อ $a \neq 0$

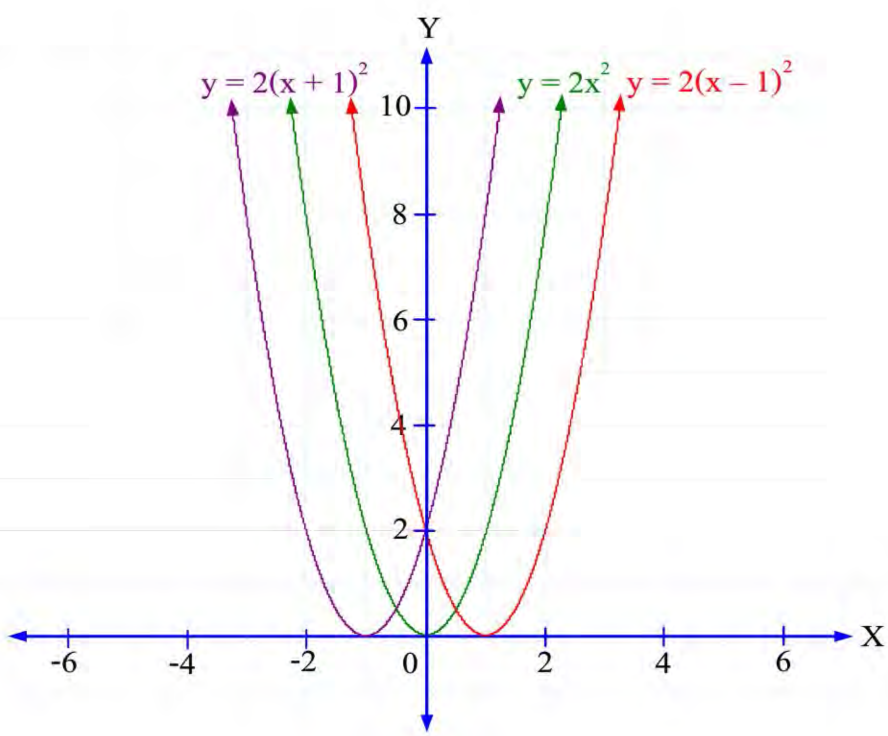
จากสมการ $y = a(x-h)^2 + k$ เมื่อ $a \neq 0$ ถ้าให้ $h = 0$ และ $k = 0$ จะได้สมการ $y = ax^2$ ซึ่งนักเรียนได้เรียนมาแล้วในหัวข้อ 4.2 ดังนั้นเราจะพิจารณากราฟของสมการ $y = a(x-h)^2 + k$ เมื่อ $a \neq 0$ และ $h \neq 0$

กรณี $k = 0$ และ $h \neq 0$ จากสมการ $y = a(x-h)^2 + k$ จะได้ $y = a(x-h)^2$

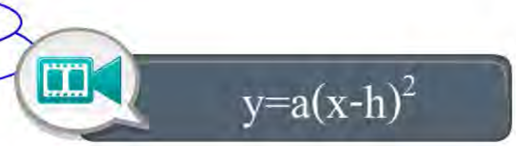
ให้นักเรียนพิจารณาสมการ $y = 2x^2$, $y = 2(x-1)^2$ และ $y = 2(x+1)^2$ เมื่อกำหนดค่า x และหาค่า y ในแต่ละสมการ จะได้ดังในตาราง

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2x^2$	8	2	0	2	8
$y = 2(x-1)^2$	18	8	2	0	2
$y = 2(x+1)^2$	2	0	2	8	18

นำคู่อันดับของสมการทั้งสามจากตารางมาเขียนกราฟ โดยใช้แกนคู่เดียวกัน ดังรูป แล้วนำกราฟที่ได้มาเปรียบเทียบกัน



กราฟของสมการ $y = a(x-h)^2$



ให้นักเรียนพิจารณากราฟข้างต้น ทำกิจกรรมและตอบคำถามต่อไปนี้

1. นำกระดาษลอกลายลอกพาราโบลารูปใดก็ได้ และนำไปซ้อนกับพาราโบลาอีกสองรูปที่เหลือ พาราโบลาทั้งสามทับกันได้สนิทหรือไม่
2. กราฟของแต่ละสมการมีเส้นตรงใดเป็นแกนสมมาตร
3. จุดต่ำสุดของกราฟทั้งสามคือจุดใด และค่าต่ำสุดของ y เป็นเท่าใด
4. จุดต่ำสุดของกราฟของสมการ $y = 2(x-1)^2$ อยู่ทางซ้ายหรือทางขวาของแกน Y
5. จุดต่ำสุดของกราฟของสมการ $y = 2(x+1)^2$ อยู่ทางซ้ายหรือทางขวาของแกน Y
6. ถ้าให้กราฟของสมการ $y = 2x^2$ เป็นรูปต้นแบบแล้ว กราฟของสมการ $y = 2(x-1)^2$ และ $y = 2(x+1)^2$ เป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานของกราฟของสมการ $y = 2x^2$ อย่างไร จงอธิบาย
7. นักเรียนคิดว่ากราฟของสมการ $y = -2x^2$, $y = -2(x-1)^2$ และ $y = -2(x+1)^2$ มีจุดสูงสุดคือจุดใด และค่าสูงสุดของ y เป็นเท่าใด
8. ถ้าให้กราฟของสมการ $y = -2x^2$ เป็นรูปต้นแบบแล้ว กราฟของสมการ $y = -2(x-1)^2$ และ $y = -2(x+1)^2$ เป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานของกราฟของสมการ $y = -2x^2$ อย่างไร จงอธิบาย

คำตอบที่ได้เป็นไปตามลักษณะทั่วไปของกราฟของสมการ $y = a(x-h)^2$ ดังนี้

1. ถ้า $a > 0$ กราฟเป็นพาราโบลาหงายที่มีเส้นตรง $x = h$ เป็นแกนสมมาตร
2. ถ้า $a < 0$ กราฟเป็นพาราโบลาคว่ำที่มีเส้นตรง $x = h$ เป็นแกนสมมาตร
3. จุด (h, 0) เป็นจุดต่ำสุดหรือจุดสูงสุดของกราฟ จุดนี้อยู่ทางขวาของแกน Y เมื่อ $h > 0$ และอยู่ทางซ้ายของแกน Y เมื่อ $h < 0$ ค่าต่ำสุดหรือค่าสูงสุดของ y เป็น 0
4. กราฟของสมการ $y = a(x-h)^2$ เป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานของกราฟของสมการ $y = ax^2$ ตามแนวแกน X ไปทางขวา h หน่วย เมื่อ $h > 0$ และไปทางซ้าย $|h|$ หน่วย เมื่อ $h < 0$

เราสามารถนำความรู้เกี่ยวกับกราฟของพาราโบลา $y = a(x-h)^2$ มาสรุปเป็นขั้นตอนในการเขียนกราฟ ดังนี้

1. พิจารณาว่าเป็นพาราโบลาหงายหรือพาราโบลาคว่ำ โดยดูจากค่า a ในสมการ $y = a(x-h)^2$
2. หาจุดสูงสุดหรือจุดต่ำสุดของกราฟ ซึ่งได้แก่ จุด (h, 0)
3. หาแกนสมมาตร ซึ่งได้แก่ เส้นตรง $x = h$
4. หาจุดต่าง ๆ ที่อยู่บนข้างเดียวกันของแกนสมมาตร ส่วนจุดต่าง ๆ อีกข้างหนึ่งของแกนสมมาตรจะหาได้โดยใช้หลักการสมมาตร

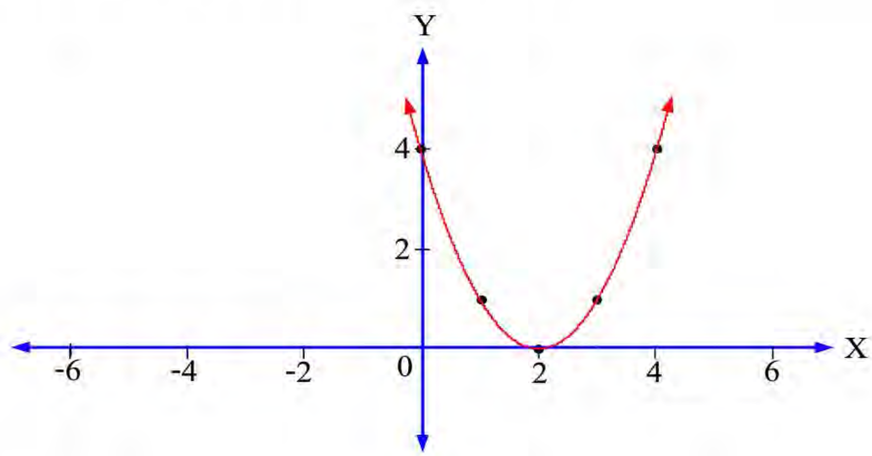
ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนกราฟของสมการ $y = (x-2)^2$

วิธีทำ พิจารณากราฟของสมการ $y = (x-2)^2$ จะได้

1. กราฟเป็นพาราโบลาหงาย
2. จุดต่ำสุดคือ จุด (2, 0)
3. เส้นตรง $x = 2$ เป็นแกนสมมาตร
4. หาจุดต่าง ๆ ที่อยู่บนข้างเดียวกันของแกนสมมาตร

x	2	3	4
$y = (x-2)^2$	0	1	4

เขียนกราฟของสมการ $y = (x-2)^2$ ได้ดังนี้



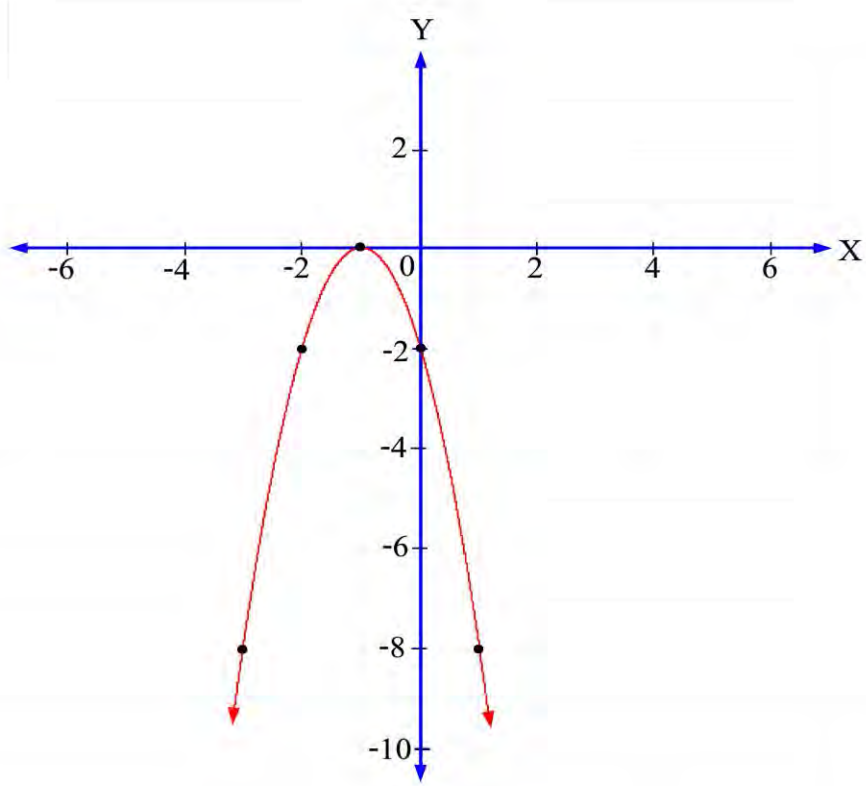
ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนกราฟของสมการ $y = -2(x+1)^2$

วิธีทำ พิจารณากราฟของสมการ $y = -2(x+1)^2$ จะได้

1. กราฟเป็นพาราโบลาคว่ำ
2. จุดสูงสุดคือ จุด (-1, 0)
3. เส้นตรง $x = -1$ เป็นแกนสมมาตร
4. หาจุดต่าง ๆ ที่อยู่บนข้างเดียวกันของแกนสมมาตร

x	-1	0	1
$y = -2(x+1)^2$	0	-2	-8

เขียนกราฟของสมการ $y = -2(x+1)^2$ ได้ดังนี้



แบบฝึกหัด 4.4 ก

1. จงเขียนกราฟของสมการต่อไปนี้

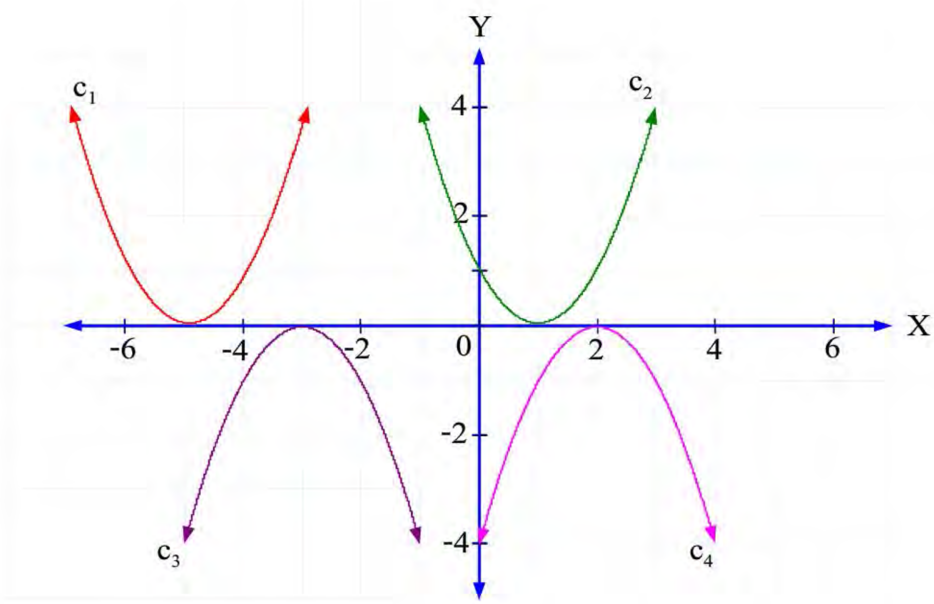
    1) $y = (x+1)^2$ 2) $y = -3(x-1)^2$

    3) $y = -4(x+2)^2$ 4) $y = (x-3)^2$

2. จงพิจารณาว่าพาราโบลา c_1, c_2, c_3 และ c_4 เป็นกราฟของสมการใดต่อไปนี้

    1) $y = -(x+3)^2$ 2) $y = (x+5)^2$

    3) $y = -(x-2)^2$ 4) $y = (x-1)^2$



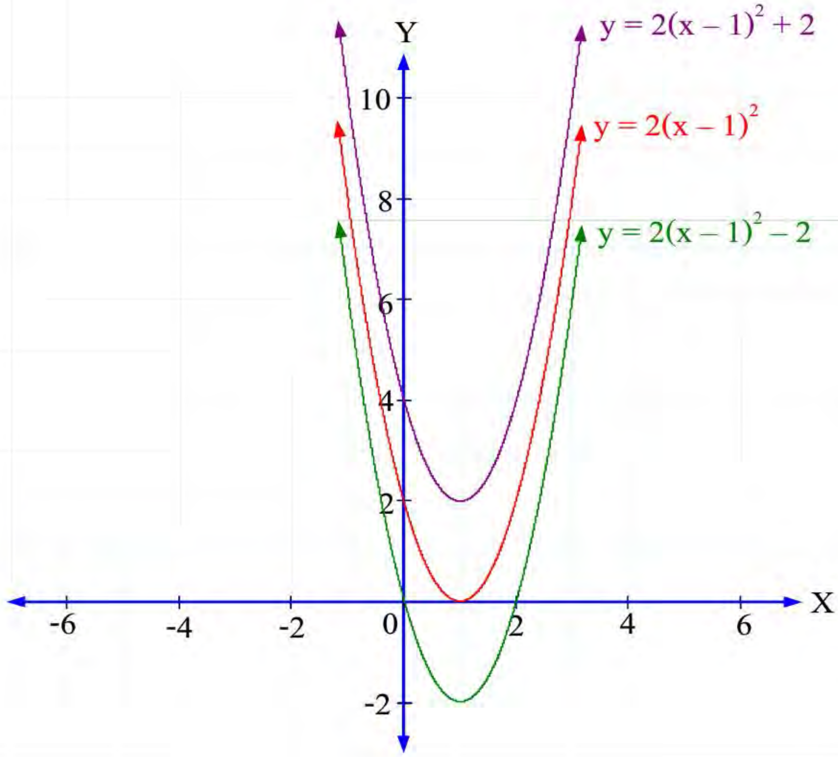
กรณี $k \neq 0$ และ $h \neq 0$ จะได้สมการ $y = a(x-h)^2 + k$

ให้นักเรียนพิจารณาสมการ $y = 2(x-1)^2$, $y = 2(x-1)^2 + 2$ และ $y = 2(x-1)^2 - 2$

เมื่อกำหนดค่า x และหาค่า y ในแต่ละสมการ จะได้ดังในตาราง

x	-1	0	1	2	3
$y = 2(x-1)^2$	8	2	0	2	8
$y = 2(x-1)^2 + 2$	10	4	2	4	10
$y = 2(x-1)^2 - 2$	6	0	-2	0	6

นำคู่อันดับของสมการทั้งสามจากตารางมาเขียนกราฟ โดยใช้แกนคู่เดียวกัน ดังรูป แล้วนำกราฟที่ได้มาเปรียบเทียบกัน



$y=a(x-h)^2 + k$

กราฟของสมการ $y = a(x-h)^2 + k$

ให้นักเรียนพิจารณากราฟข้างต้น ทำกิจกรรมและตอบคำถามต่อไปนี้

1. นำกระดาษลอกลายลอกพาราโบลารูปใดก็ได้ และนำไปซ้อนกับพาราโบลาอีกสองรูปที่เหลือ พาราโบลาทั้งสามทับกันได้สนิทหรือไม่
2. กราฟทั้งสามมีเส้นตรงใดเป็นแกนสมมาตร
3. จุดต่ำสุดของกราฟของแต่ละสมการคือจุดใด และค่าต่ำสุดของ y เป็นเท่าใด
4. จุดต่ำสุดของกราฟของสมการใดอยู่เหนือแกน X และจุดต่ำสุดของกราฟของสมการใดอยู่ใต้แกน X
5. ถ้าให้กราฟของสมการ $y = a(x-h)^2$ เป็นรูปต้นแบบแล้ว กราฟของสมการ $y = a(x-h)^2 + k$ และ $y = a(x-h)^2 - k$ เป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานของกราฟของสมการ $y = a(x-h)^2$ อย่างไร จงอธิบาย
6. นักเรียนคิดว่ากราฟของสมการ $y = -2(x-3)^2$, $y = -2(x-3)^2 + 2$ และ $y = -2(x-3)^2 - 2$ มีจุดสูงสุดคือจุดใด และค่าสูงสุดของ y เป็นเท่าใด
7. ถ้าให้กราฟของสมการ $y = -2(x-3)^2$ เป็นรูปต้นแบบแล้ว กราฟของสมการ $y = -2(x-3)^2 + 2$ และ $y = -2(x-3)^2 - 2$ เป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานของกราฟของสมการ $y = -2(x-3)^2$ อย่างไร จงอธิบาย

คำตอบที่ได้เป็นไปตามลักษณะทั่วไปของกราฟของสมการ $y = a(x-h)^2 + k$ ดังนี้

1. ถ้า $a > 0$ กราฟเป็นพาราโบลาหงายที่มีเส้นตรง $x = h$ เป็นแกนสมมาตร
2. ถ้า $a < 0$ กราฟเป็นพาราโบลาคว่ำที่มีเส้นตรง $x = h$ เป็นแกนสมมาตร
3. จุด (h, k) เป็นจุดต่ำสุดหรือจุดสูงสุดของกราฟ ค่าต่ำสุดหรือค่าสูงสุดของ y เท่ากับ k
4. กราฟของสมการ $y = a(x-h)^2 + k$ เป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานของกราฟของสมการ $y = a(x-h)^2$ ตามแนวแกน Y ขึ้นไปเหนือแกน X เป็นระยะ k หน่วย เมื่อ $k > 0$ และลงมาใต้แกน X เป็นระยะ $|k|$ หน่วย เมื่อ $k < 0$

เราสามารถนำความรู้เกี่ยวกับกราฟของพาราโบลา $y = a(x-h)^2 + k$ มาสรุปเป็นขั้นตอนในการเขียนกราฟ ดังนี้

1. พิจารณาว่าเป็นพาราโบลาหงายหรือพาราโบลาคว่ำ โดยดูจากค่า a ในสมการ $y = a(x-h)^2 + k$ ซึ่งจะเป็นพาราโบลาหงาย เมื่อ $a > 0$ และจะเป็นพาราโบลาคว่ำ เมื่อ $a < 0$
2. หาจุดสูงสุดหรือจุดต่ำสุดของกราฟ ซึ่งได้แก่ จุด (h, k)
3. หาแกนสมมาตร ซึ่งได้แก่ เส้นตรง $x = h$
4. หาจุดต่าง ๆ ที่อยู่บนข้างเดียวกันของแกนสมมาตร ส่วนจุดต่าง ๆ อีกข้างหนึ่งของแกนสมมาตรจะหาได้โดยใช้หลักการสมมาตร

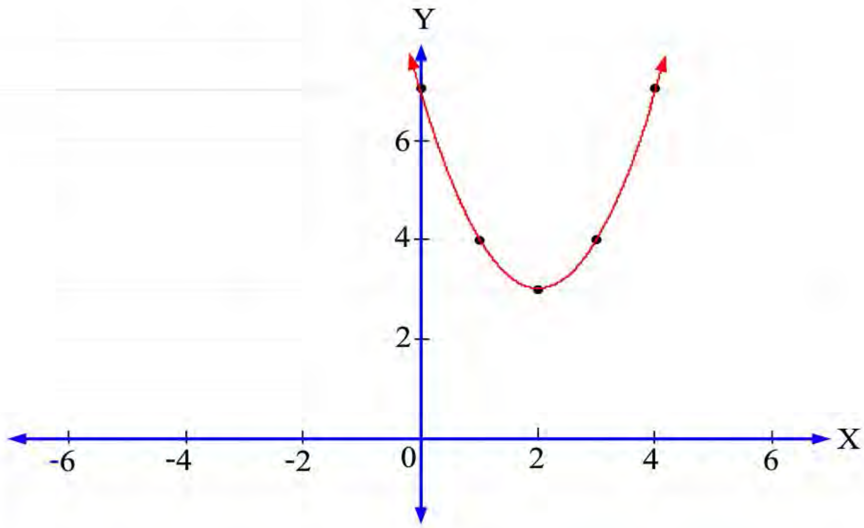
ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนกราฟของสมการ $y = (x-2)^2 + 3$

วิธีทำ พิจารณากราฟของสมการ $y = (x-2)^2 + 3$ จะได้

1. กราฟเป็นพาราโบลาหงาย
2. จุดต่ำสุดคือ จุด (2, 3)
3. เส้นตรง $x = 2$ เป็นแกนสมมาตร
4. หาจุดต่าง ๆ ที่อยู่บนข้างเดียวกันของแกนสมมาตร

x	2	3	4
$y = (x-2)^2 + 3$	3	4	7

เขียนกราฟของสมการ $y = (x-2)^2 + 3$ ได้ดังนี้



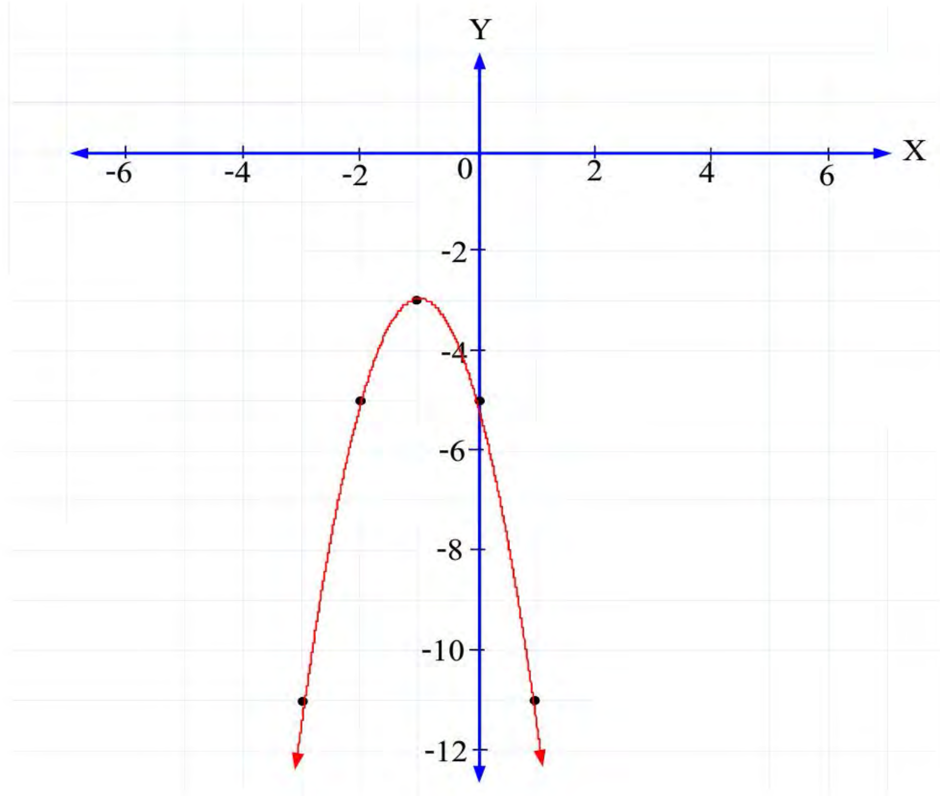
ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนกราฟของสมการ $y = -2(x+1)^2 - 3$

วิธีทำ พิจารณากราฟของสมการ $y = -2(x+1)^2 - 3$ จะได้

1. กราฟเป็นพาราโบลาคว่ำ
2. จุดสูงสุดคือ จุด (-1, -3)
3. เส้นตรง $x = -1$ เป็นแกนสมมาตร
4. หาจุดต่าง ๆ ที่อยู่บนข้างเดียวกันของแกนสมมาตร

x	-1	0	1
$y = -2(x+1)^2 - 3$	-3	-5	-11

เขียนกราฟของสมการ $y = -2(x+1)^2 - 3$ ได้ดังนี้


Y
X
-6
-4
-2
0
2
4
6
-2
-4
-6
-8
-10
-12

แบบฝึกหัด 4.4 ข

1. จงเขียนกราฟของสมการต่อไปนี้

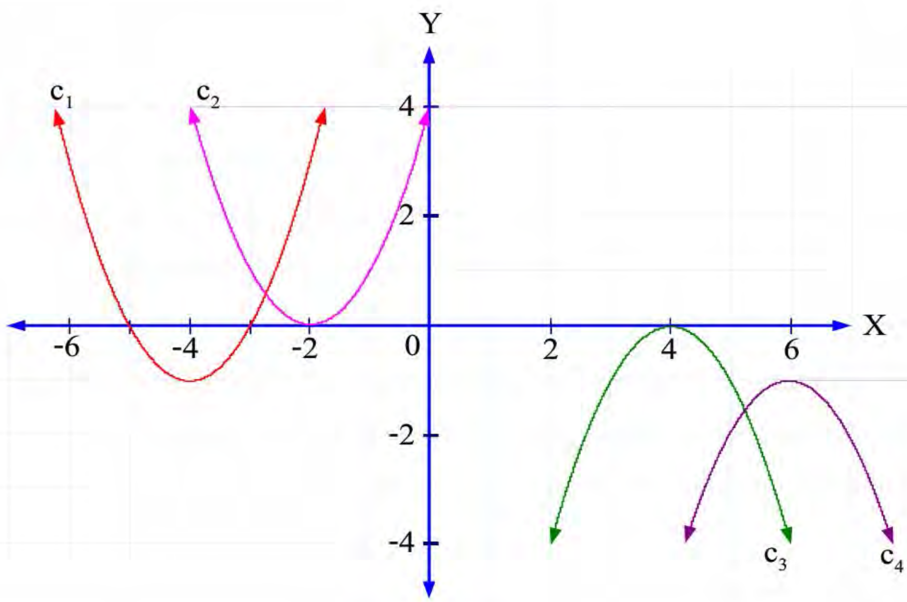
1) $y = \frac{1}{3}(x-1)^2 - 2$ 2) $y = -(x+1)^2 - 3$

3) $y = -3(x+1)^2 + 3$ 4) $y = \frac{1}{5}(x+2)^2 + 2$

2. จงพิจารณาว่าพาราโบลา c_1, c_2, c_3 และ c_4 เป็นกราฟของสมการใดต่อไปนี้

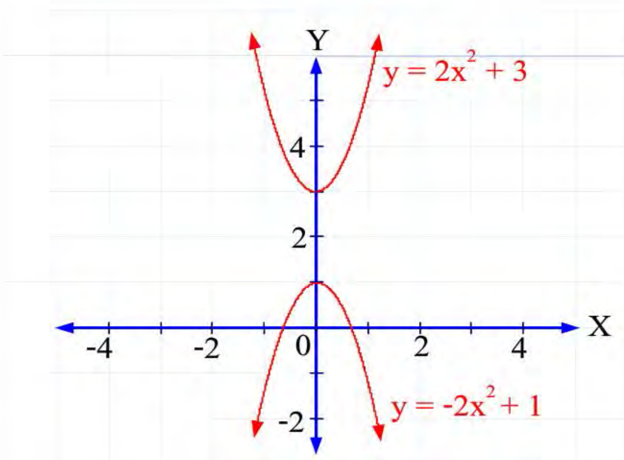
1) $y = -(x-6)^2 - 1$ 2) $y = (x+4)^2 - 1$

3) $y = -(x-4)^2$ 4) $y = (x+2)^2$

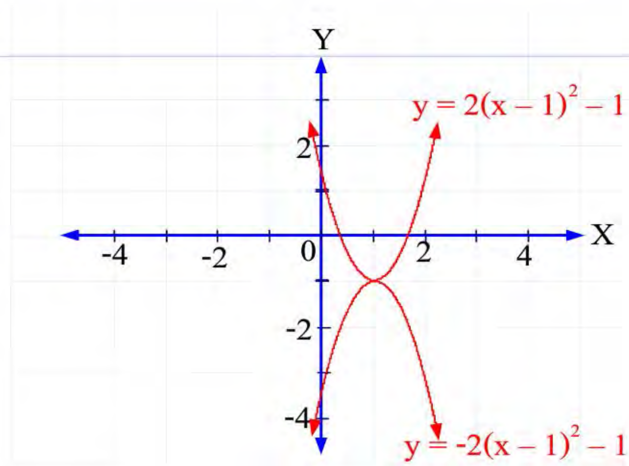


3. จงพิจารณาว่า กราฟในแต่ละข้อต่อไปนี้ ข้อใดแสดงการสะท้อน และข้อใดแสดงการเลื่อนขนาน ถ้าเป็นการสะท้อนให้หาเส้นสะท้อน และถ้าเป็นการเลื่อนขนานให้บอกว่าเป็นการเลื่อนขนานตามแนวเส้นตรงใด เป็นระยะกี่หน่วย ในทิศทางใด

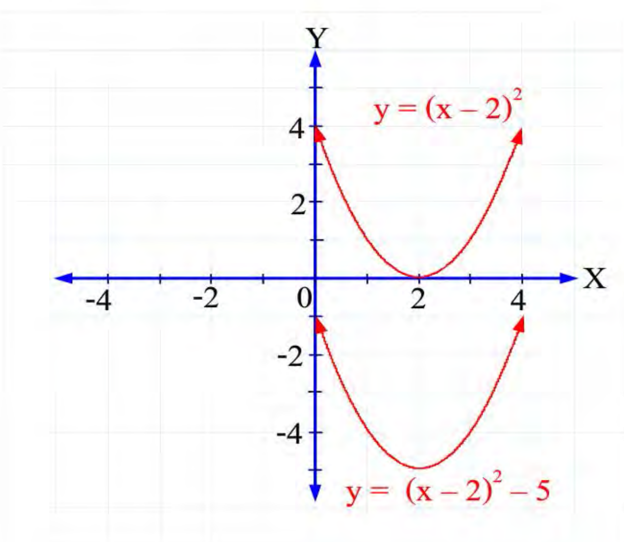
1)



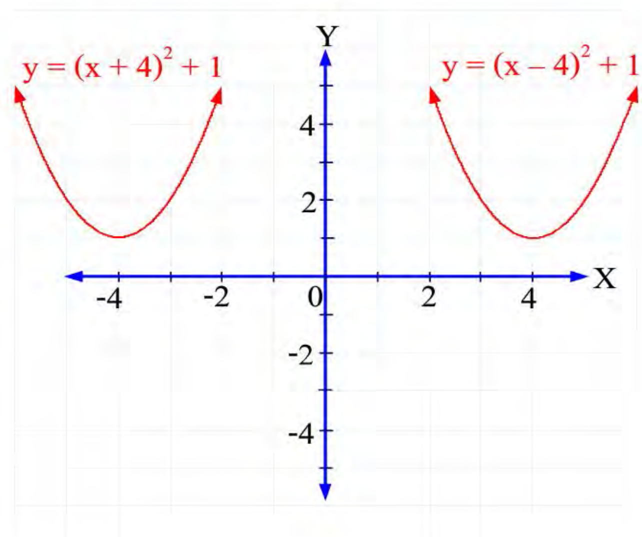
2)



3)



4)



4.5 พาราโบลาที่กำหนดด้วยสมการ $y = ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a \neq 0$

การเขียนพาราโบลาที่ผ่านมาแล้วได้จากการพิจารณาสมการที่อยู่ในรูป $y = a(x-h)^2 + k$ แต่สมการของพาราโบลาที่พบอาจจะอยู่ในรูป $y = ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b, c เป็นค่าคงตัว ในการเขียนกราฟเราจึงนิยมเขียนสมการ $y = ax^2 + bx + c$ ให้อยู่ในรูป $y = a(x-h)^2 + k$ วิธีนี้เป็นการทำบางส่วนของสมการให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์ ซึ่งนักเรียนได้เคยเรียนมาแล้ว

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนกราฟของสมการ $y = 3x^2 - 6x + 1$

วิธีทำ เขียนสมการให้อยู่ในรูป $y = a(x-h)^2 + k$ ได้ดังนี้

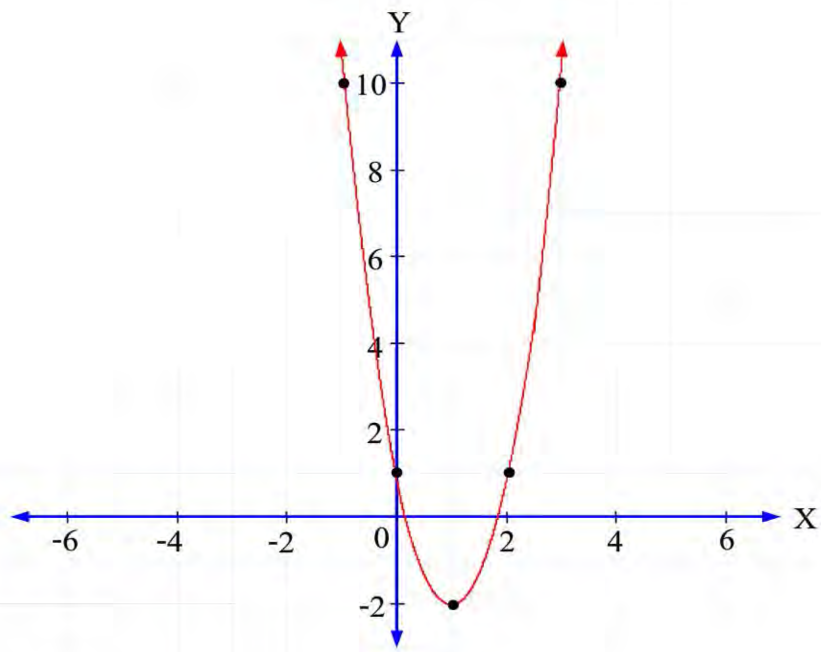
$$
\begin{aligned}
y &= 3x^2 - 6x + 1 \\
&= 3(x^2 - 2x) + 1 \\
&= 3(x^2 - 2x + 1^2 - 1^2) + 1 \\
&= 3(x^2 - 2x + 1^2) - 3(1^2) + 1 \\
&= 3(x-1)^2 - 2
\end{aligned}
$$

พิจารณาสมการ $y = 3(x-1)^2 - 2$ จะได้

1. กราฟเป็นพาราโบลาหงาย
2. จุดต่ำสุดคือ จุด (1, -2)
3. เส้นตรง $x = 1$ เป็นแกนสมมาตร
4. หาจุดต่าง ๆ ที่อยู่บนข้างเดียวกันของแกนสมมาตร

x	1	2	3
$y = 3(x-1)^2 - 2$	-2	1	10

เขียนกราฟของสมการ $y = 3x^2 - 6x + 1$ ได้ดังนี้



ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนกราฟของสมการ $y = -2x^2 - 12x - 17$

วิธีทำ เขียนสมการให้อยู่ในรูป $y = a(x-h)^2 + k$ ได้ดังนี้

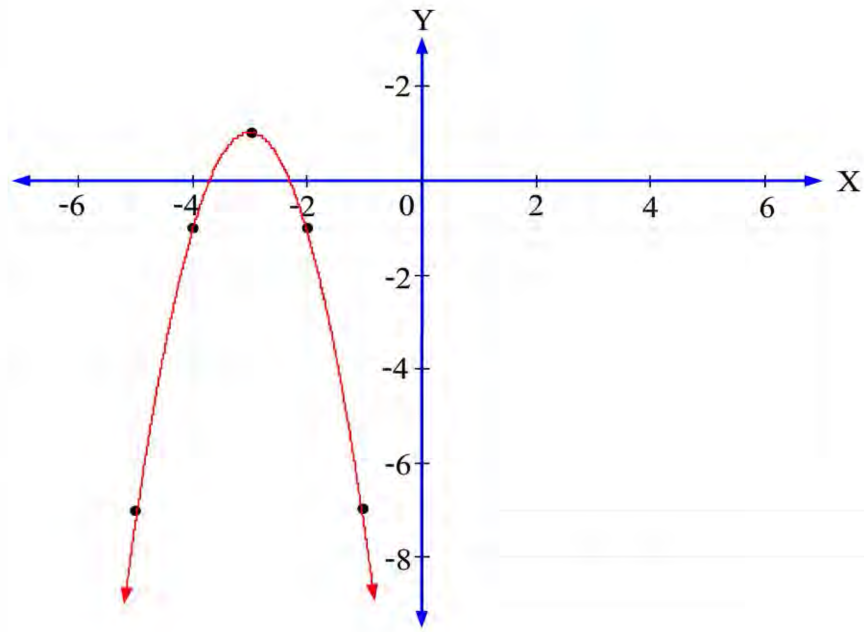
$$
\begin{aligned}
y &= -2x^2 - 12x - 17 \\
&= -2(x^2 + 6x) - 17 \\
&= -2(x^2 + 6x + 3^2 - 3^2) - 17 \\
&= -2(x^2 + 6x + 3^2) - (-2)(3^2) - 17 \\
&= -2(x+3)^2 + 18 - 17 \\
&= -2(x+3)^2 + 1
\end{aligned}
$$

พิจารณาสมการ $y = -2(x+3)^2 + 1$ จะได้

1. กราฟเป็นพาราโบลาคว่ำ
2. จุดสูงสุดคือ จุด (-3, 1)
3. เส้นตรง $x = -3$ เป็นแกนสมมาตร
4. หาจุดต่าง ๆ ที่อยู่บนข้างเดียวกันของแกนสมมาตร

x	-3	-4	-5
$y = -2(x+3)^2 + 1$	1	-1	-7

เขียนกราฟของสมการ $y = -2x^2 - 12x - 17$ ได้ดังนี้



แบบฝึกหัด 4.5

1. จงเขียนกราฟของสมการต่อไปนี้

   1) $y = x^2 + 6x + 8$ 2) $y = -x^2 - 4x - 2$

2. จงพิจารณาสมการ $y = 2x^2 + 5x - 2$ และ $y = -x^2 + 6x - 4$ แล้วตอบคำถามต่อไปนี้ โดยไม่ต้องเขียนกราฟ

   1) กราฟเป็นพาราโบลาคว่ำหรือพาราโบลาหงาย

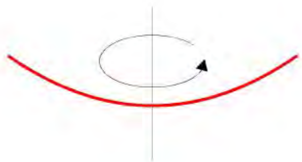
   2) จุดต่ำสุดหรือจุดสูงสุดของกราฟเป็นจุดใด

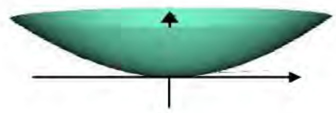
   3) ค่าต่ำสุดหรือค่าสูงสุดของ y เป็นเท่าใด

   4) เส้นตรงใดเป็นแกนสมมาตร

   5) กราฟตัดแกน X ที่จุดใด

จานพาราโบลา





เมื่อหมุนพาราโบลารอบแกนสมมาตร จะได้สิ่งที่มีลักษณะคล้ายจาน เรียกว่า *ผิวเชิงพาราโบลา* (parabolic surface) หรือในที่นี้จะเรียกง่าย ๆ ว่า *จานพาราโบลา*

จานพาราโบลามีสมบัติว่า ถ้ามีแหล่งกำเนิดแสงอยู่ที่โฟกัส (focus) ของจานพาราโบลา แสงจากแหล่งกำเนิดแสงที่สะท้อนจากจานพาราโบลาจะขนานกัน ดังนั้น จึงใช้จานพาราโบลาสะท้อนแสงของไฟฉายและแสงของโคมไฟรถยนต์

คลื่นวิทยุเป็นคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าเช่นเดียวกับแสง และเป็นคลื่นที่ใช้สำหรับสื่อสารโทรคมนาคม จานพาราโบลาเป็นอุปกรณ์ที่สำคัญสำหรับการรับส่งสัญญาณจากดาวเทียม สัญญาณโทรศัพท์และสัญญาณเรดาร์ นอกจากการส่งคลื่นวิทยุแล้ว ในการรับคลื่นวิทยุ เมื่อคลื่นวิทยุมากระทบกับจานพาราโบลาก็จะสะท้อนไปรวมกันที่โฟกัสซึ่งมีอุปกรณ์รับสัญญาณส่งต่อไปยังเครื่องรับ

นักเรียนคิดว่าถ้าเราสร้างเตาพลังงานแสงอาทิตย์ที่จานรับแสงอาทิตย์สร้างจากกระจกเงาเล็ก ๆ มาประกอบกันจนมีลักษณะเป็นจานพาราโบลา เราควรวางอุปกรณ์รับความร้อนไว้ตรงจุดใดจึงจะรับความร้อนและทำให้มีอุณหภูมิสูงสุด

สูงแค่ไหน

งานบุญบั้งไฟหรือบุญเดือนหกเป็นประเพณีประจำปีของชาวอีสานหลายจังหวัด ในงานบุญบั้งไฟจะมีการยิงบั้งไฟขึ้นฟ้า การยิงแต่ละครั้งจะมีความสัมพันธ์ระหว่างเวลาที่ผ่านไปหลังจากการยิงและระยะทางที่บั้งไฟอยู่เหนือพื้นดิน ซึ่งแสดงได้ด้วยสมการของพาราโบลา

ถ้าการยิงบั้งไฟครั้งหนึ่งสามารถกำหนดสมการได้เป็น $h = 16t - t^2$ เมื่อ h แทนความสูงที่บั้งไฟอยู่เหนือพื้นดินเป็นเมตร และ t แทนเวลาที่ผ่านไปเป็นวินาทีหลังจากการยิง ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

1. บั้งไฟขึ้นไปได้สูงสุดเมื่อเวลาผ่านไปกี่วินาทีหลังจากการยิง และขึ้นไปได้สูงสุดเท่าใด
2. เมื่อเวลาผ่านไป 7 วินาทีหลังจากการยิง บั้งไฟอยู่เหนือพื้นดินกี่เมตร
3. เมื่อบั้งไฟอยู่เหนือพื้นดิน 40 เมตร จะเป็นเวลากี่วินาทีหลังจากการยิงบั้งไฟ (กำหนดให้ $\sqrt{6} \approx 2.45$)

ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดต่อไปนี้

เมื่อยิงพลุสัญญาณจากเรือลำหนึ่งขึ้นไปบนท้องฟ้า ความสูง h ของพลุจากพื้นน้ำในหน่วยเป็นเมตร เมื่อเวลาผ่านไป t วินาทีหลังจากการยิงมีความสัมพันธ์กันตามสมการ $h = -1.8t^2 + 18t + 5$ จงหาว่า

1. จุดที่ยิงพลุอยู่สูงจากพื้นน้ำเท่าใด
2. พลุขึ้นไปได้สูงสุดเมื่อเวลาผ่านไปเท่าใดหลังจากการยิง และขึ้นไปได้สูงสุดเท่าไร

หาได้อย่างไร

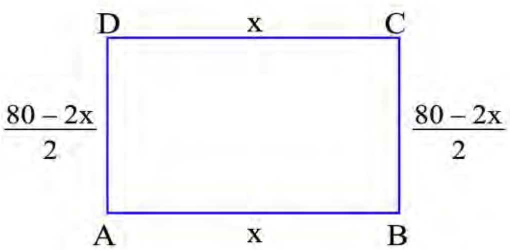
ชมรมเกษตรกรรมของโรงเรียนมีโครงการปลูกผักปลอดสารพิษ จ้อนและแดงได้รับมอบหมายให้ปลูกผักปลอดสารพิษในพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีความยาวรอบรูป 24 เมตร จ้อนและแดงอยากได้เนื้อที่ปลูกผักมาก ๆ จึงช่วยกันคิดหาวิธีกำหนดขอบเขตของแปลงผัก ครั้งแรกเขาทั้งสองลองกำหนดขนาดของแปลงผักโดยสร้างตารางให้ด้านด้านหนึ่งเป็นจำนวนนับที่มีค่าต่าง ๆ แล้วหาความยาวของอีกด้านหนึ่งตามไปด้วย พร้อมทั้งคำนวณหาพื้นที่ดังตารางต่อไปนี้

ความยาวของด้านด้านหนึ่ง (เมตร)	ความยาวของด้านอีกด้านหนึ่ง (เมตร)	พื้นที่ (ตารางเมตร)
1	11	11
2	10	20
3	9	27
4	8	32
5	7	35
6	6	36
7	5	35
8	4	32
9	3	27
10	2	20
11	1	11

จากตารางข้างต้น ทั้งสองคนพบว่าเมื่อรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากนั้นเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีแต่ละด้านยาว 6 เมตร จะได้พื้นที่มากที่สุดเป็น 36 ตารางเมตร จ้อนและแดงจึงสรุปว่าจะต้องปลูกผักในแปลงที่มีขนาด 6×6 ตารางเมตร จึงจะได้พื้นที่มากที่สุด

นักเรียนจะพบว่า การหาคำตอบโดยใช้ตารางช่วยดังข้างต้น อาจเป็นเรื่องยุ่งยาก ถ้าครูกำหนดความยาวรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเป็นจำนวนอื่น ๆ ที่ไม่ใช่จำนวนนับ เช่น 27.5 หรือจำนวนนับที่มีค่ามาก เช่น 168 ในทางคณิตศาสตร์มีวิธีหาคำตอบของปัญหาข้างต้นได้อีกวิธีหนึ่งโดยใช้ความรู้เกี่ยวกับพาราโบลา ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง จงหาวิธีกำหนดขนาดของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีความยาวรอบรูปเป็น 80 เมตร เพื่อให้ได้พื้นที่มากที่สุด



ถ้ากำหนดให้ □ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีความยาวรอบรูป 80 เมตร และให้ด้าน AB ยาว x เมตร

จะได้ด้าน BC ยาว $\frac{80-2x}{2}$ เมตร

หรือ $40 - x$ เมตร

ถ้าให้พื้นที่ของ □ ABCD เป็น y ตารางเมตร

จะได้สมการเป็น $y = x(40 - x)$

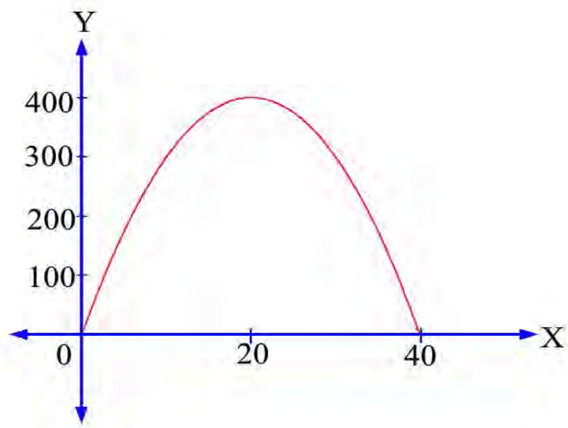
หรือ $y = -x^2 + 40x$

กราฟของสมการ $y = -x^2 + 40x$ เป็นพาราโบลาคว่ำซึ่งมีจุดสูงสุด

นักเรียนสามารถหาจุดสูงสุดของพาราโบลานี้ได้จากการเขียนสมการ $y = -x^2 + 40x$ ให้อยู่ในรูป $y = a(x-h)^2 + k$ จะได้จุด (h, k) เป็นจุดสูงสุด

$$
\begin{aligned}
\text{จาก } y &= -x^2 + 40x \\
&= -[\{x^2 - 2(20)x + 20^2\} - 20^2] \\
&= -(x-20)^2 + 400
\end{aligned}
$$

จะได้จุดสูงสุดของพาราโบลาเป็น (20, 400) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y ที่กำหนด เป็นดังนี้

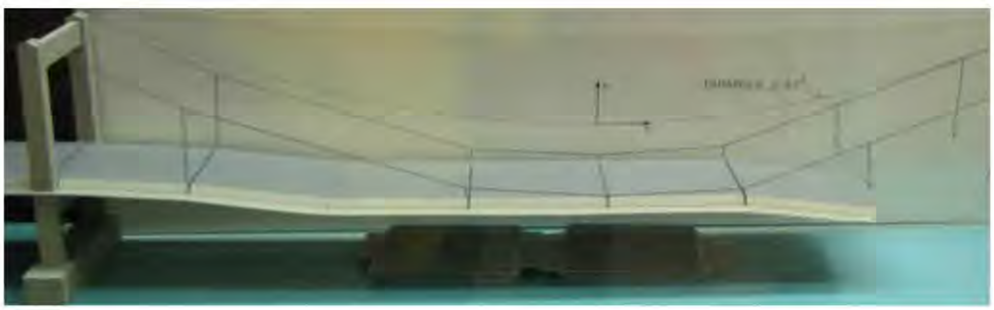


จากกราฟข้างต้นทำให้เราทราบว่า ควรกำหนดรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากให้มีด้านด้านหนึ่งยาว 20 เมตร จะได้ด้านประกอบมุมฉากของด้านนี้ยาว $40 - x = 20$ เมตร ทำให้ได้รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีพื้นที่เท่ากับ $20 \times 20 = 400$ ตารางเมตร และมีพื้นที่มากที่สุดตามต้องการ

ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดต่อไปนี้

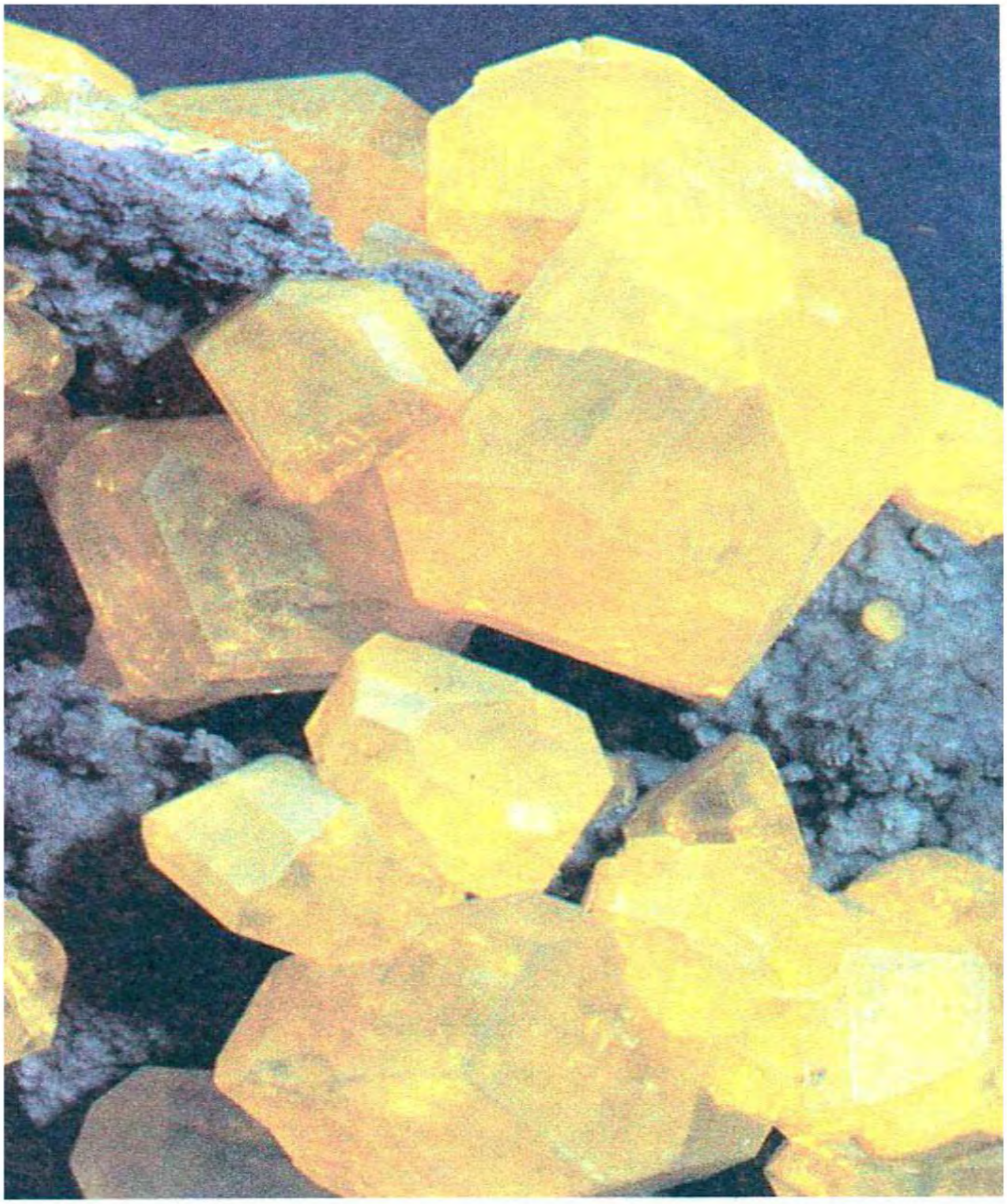
1. ถ้าใน พ.ศ. 2600 มนุษย์เริ่มไปตั้งนิคมที่ดวงจันทร์ ทุกครอบครัวใหม่ที่ไปถึงจะได้รับจัดสรรที่อยู่มีลักษณะเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่กำหนดขอบเขตได้เอง แต่ให้มีความยาวรอบรูปเป็น 100 เมตร ถ้านักเรียนเป็นสมาชิกคนหนึ่งของครอบครัวใหม่ นักเรียนจะกำหนดขอบเขตที่ดินเป็นอย่างไรจึงจะได้พื้นที่มากที่สุด
2. จงหาวิธีกำหนดขนาดของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีความยาวรอบรูปเป็น 62 เมตร เพื่อให้ได้พื้นที่มากที่สุด
3. ถ้าต้องการหารูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีความยาวรอบรูปเป็น p หน่วย และมีพื้นที่มากที่สุด นักเรียนคิดว่ารูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ได้จะเป็นรูปสี่เหลี่ยมชนิดใดและมีขนาดเท่าไร
4. ไพฑูรย์ต้องการล้อมรั้วที่ดินที่อยู่ติดคลองโดยล้อมเพียงสามด้าน ด้านที่อยู่ติดคลองจะไม่มีรั้วกั้น และให้รั้วทั้งสามด้านเป็นส่วนหนึ่งของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ถ้าไพฑูรย์มีวัสดุสำหรับทำรั้วได้ยาว 200 เมตร และอยากให้ได้พื้นที่ภายในรั้วมากที่สุด ไพฑูรย์จะต้องกำหนดขนาดของรั้วเป็นอย่างไร และได้พื้นที่เท่าไร

สะพานแขวน



นักเรียนอาจเคยเห็นสะพานแขวนมาแล้ว สะพานแขวนประกอบด้วยสายเคเบิลใหญ่ที่โยงด้านบนระหว่างเสาสะพานที่ตั้งอยู่ที่ปลายทั้งสองข้างของสะพานข้างละสองต้น พื้นสะพานแขวนไว้กับสายเคเบิลใหญ่ สายเคเบิลใหญ่จะมีทิศทางเปลี่ยนไปจากเดิม ณ จุดแขวนแต่ละจุด เพื่อทำให้สายเคเบิลใหญ่สามารถรับน้ำหนักของสะพานและน้ำหนักที่บรรทุกได้ โดยแต่ละจุดแขวนเฉลี่ยรับน้ำหนักเท่ากัน วิศวกรผู้สร้างสะพานจะคำนวณน้ำหนักของสะพานและน้ำหนักที่บรรทุกเฉลี่ยให้เท่ากันหมดที่จุดแขวนทุกจุด ซึ่งทำให้การเปลี่ยนของทิศทางของสายเคเบิลใหญ่ เป็นมุมขนาดเดียวกันหมดและจุดแขวนเหล่านั้นจะเรียงกันเป็นลักษณะพาราโบลาหงายบนสายเคเบิลใหญ่

วิศวกรผู้สร้างสะพานใช้สมการของพาราโบลาในการคำนวณเกี่ยวกับแรงต่าง ๆ ที่กระทำกับสะพาน



บทที่ 5
พื้นที่ผิวและปริมาตร

เนื้อหาในบทนี้เป็นสาระเพิ่มเติมเกี่ยวกับพื้นที่ผิว และปริมาตรของรูปเรขาคณิตสามมิติที่เน้นการหาพื้นที่ผิวของพีระมิด กรวย และทรงกลม ซึ่งจะทำให้นักเรียนสามารถนำความรู้ทั้งหมดเกี่ยวกับพื้นที่ผิว และปริมาตรของปริซึม พีระมิด ทรงกระบอก กรวย และทรงกลม ไปใช้แก้ปัญหาในสถานการณ์ต่าง ๆ ในชีวิตประจำวันได้อย่างหลากหลาย ในการเรียนรู้แต่ละกิจกรรมนักเรียนจะต้องลงมือปฏิบัติโดยศึกษาสำรวจ สังเกต คิดวิเคราะห์ และสร้างข้อความคาดการณ์เพื่อหาข้อสรุปด้วยตนเอง รวมถึงการนำสูตรต่าง ๆ ที่ค้นพบไปใช้แก้ปัญหาที่ซับซ้อนได้มากยิ่งขึ้น

จุดมุ่งหมายของบทเรียนบทนี้ มีดังนี้

1. หาพื้นที่ผิวของพีระมิด กรวย และทรงกลมได้
2. แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ที่กำหนดให้โดยใช้ความรู้เกี่ยวกับพื้นที่ผิว และปริมาตรได้พร้อมทั้งตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้

5.1 พื้นที่ผิวของพีระมิด กรวย และทรงกลม

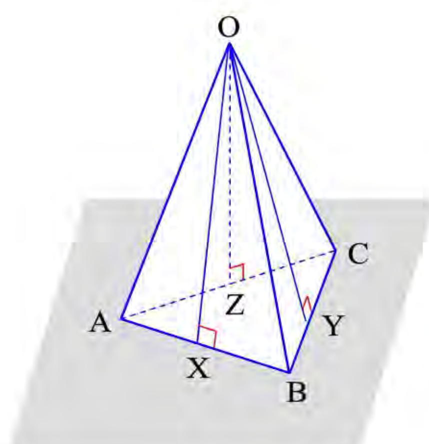
นักเรียนเคยหาพื้นที่ผิวของปริซึมและทรงกระบอกมาแล้ว ในหัวข้อนี้นักเรียนจะได้ศึกษาเพิ่มเติมเกี่ยวกับการหาพื้นที่ผิวของพีระมิด กรวย และทรงกลม สำหรับพีระมิดและกรวยที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้จะกล่าวถึงเฉพาะพีระมิดตรง และกรวยตรง เท่านั้น

พื้นที่ผิวของพีระมิด

ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้

ส่วนสูงเอียง

ให้นักเรียนพิจารณาพีระมิดฐานสามเหลี่ยมด้านเท่าดังรูป แล้วตอบคำถามต่อไปนี้



พื้นที่ผิวของพีระมิด

กำหนดให้ $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ และ $\overline{OC}$ เป็นสันของพีระมิด ΔOAB, ΔOBC และ ΔOAC เป็นหน้าของพีระมิด ซึ่งมี $\overline{OX}$, $\overline{OY}$ และ $\overline{OZ}$ เป็นส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยมแต่ละรูปตามลำดับ

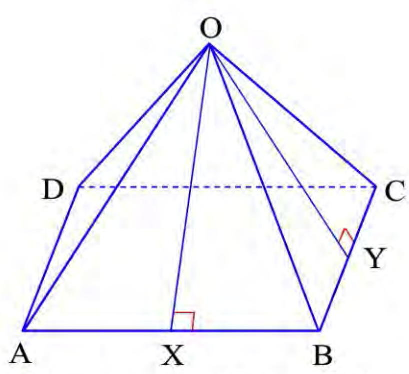
1. $OA = OB = OC$ หรือไม่ เพราะเหตุใด
2. $AB = BC = CA$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

3. Δ OAB, Δ OBC และ Δ OCA เท่ากันทุกประการหรือไม่ เพราะเหตุใด
4. หน้าทุกหน้าของพีระมิดมีพื้นที่เท่ากันหรือไม่ เพราะเหตุใด
5. OX = OY = OZ หรือไม่ เพราะเหตุใด
6. ส่วนสูงเอียงของพีระมิดที่มีฐานเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า แต่ละเส้นยาวเท่ากันหรือไม่
7. นักเรียนคิดว่าพีระมิดที่มีฐานเป็นรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า จะมีส่วนสูงเอียงทุกเส้นยาวเท่ากันหรือไม่

พีระมิดที่มีฐานเป็นรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า จะมีส่วนสูงเอียงทุกเส้นยาวเท่ากัน

เท่ากันหรือไม่

ให้นักเรียนพิจารณาส่วนสูงเอียงของพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้าดังรูป แล้วตอบคำถามต่อไปนี้



กำหนดให้ $\square$ ABCD มี $\overline{AB}$ ยาวกว่า $\overline{BC}$, $\overline{OX}$ และ $\overline{OY}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ และ $\overline{BC}$ ที่จุด X และจุด Y ตามลำดับ

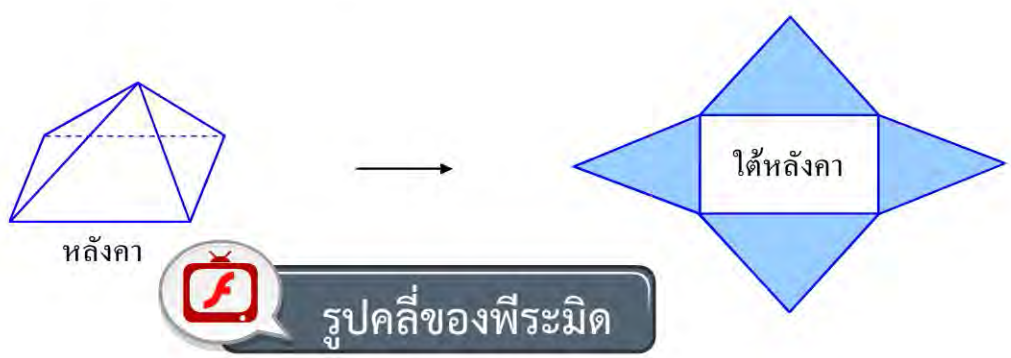
1. OA = OB = OC หรือไม่ เพราะเหตุใด
2. AX = BX และ BY = CY หรือไม่ เพราะเหตุใด

3. $\overline{BX}$ ยาวกว่าหรือสั้นกว่า $\overline{BY}$ เพราะเหตุใด
4. $\overline{OX}$ ยาวกว่าหรือสั้นกว่า $\overline{OY}$ เพราะเหตุใด
5. นักเรียนคิดว่าส่วนสูงเอียงของพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้ายาวเท่ากันทุกเส้นหรือไม่

ให้นักเรียนพิจารณาปัญหาต่อไปนี้

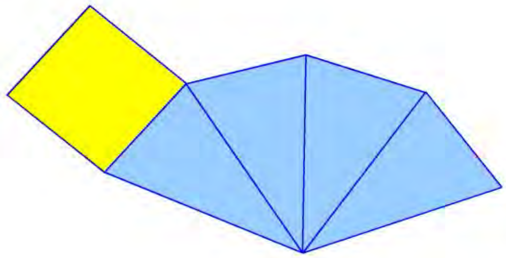
ปราโมทย์ต้องการทาสีหลังคาด้านนอกของศาลาพักผ่อน ถ้าปราโมทย์จะประมาณพื้นที่ที่ต้องทาสีทั้งหมด เขาจะต้องคำนวณหาสิ่งใดบ้าง

จากรูปข้างต้น จะเห็นว่าหลังคานี้มีลักษณะเป็นพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมมุมฉาก เมื่อพิจารณาส่วนของหลังคาที่ต้องทาสีจะเป็นส่วนที่แรเงาดังรูป



พื้นที่ของส่วนที่แรเงาทั้งหมดคือ *พื้นที่ผิวข้าง*ของพีระมิด และถ้านำพื้นที่ของส่วนใต้หลังคาซึ่งเป็นฐานของพีระมิดมารวมด้วยจะเรียกพื้นที่ทั้งหมดว่า *พื้นที่ผิว*ของพีระมิด

ตัวอย่าง



จากรูป พื้นที่ส่วนที่แรเงาสีฟ้าทั้งหมด คือ พื้นที่ผิวข้างของพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส พื้นที่ส่วนที่แรเงาสีเหลือง คือ พื้นที่ฐานของพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส

พื้นที่ของส่วนที่แรเงาสีฟ้า + พื้นที่ของส่วนที่แรเงาสีเหลือง = พื้นที่ผิวของพีระมิด

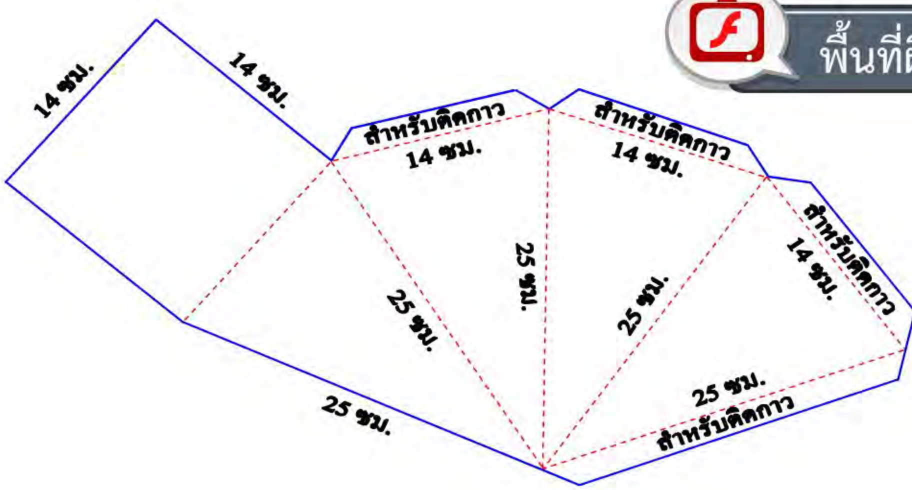
หรือ พื้นที่ผิวข้างของพีระมิด + พื้นที่ฐานของพีระมิด = พื้นที่ผิวของพีระมิด

พื้นที่ผิวของพีระมิดเท่ากับผลบวกของพื้นที่ผิวข้างของพีระมิดกับพื้นที่ฐานของพีระมิด

ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้

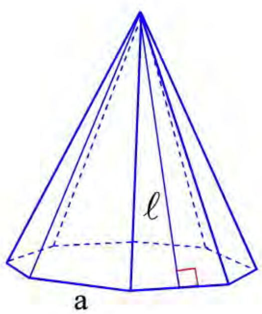
พื้นที่ผิวเป็นเท่าใด

จงลอกรูปที่กำหนดให้ข้างล่างนี้และพับตามแนวเส้นประให้ได้พีระมิด แล้วตอบคำถามต่อไปนี้



1. พีระมิดที่ได้มีฐานเป็นรูปอะไร
2. พื้นที่ฐานของพีระมิดเท่ากับเท่าไร
3. นักเรียนสามารถคำนวณหาความสูงของรูปสามเหลี่ยมที่เป็นหน้าด้านข้างของพีระมิดได้หรือไม่ ถ้าได้ นักเรียนนำความรู้ในเรื่องใดมาใช้ในการคำนวณ และคำนวณได้เท่าใด
4. ความสูงของรูปสามเหลี่ยมที่หาได้เป็นความยาวของส่วนใดของพีระมิด
5. นักเรียนหาพื้นที่ผิวข้างของพีระมิดนี้ได้เท่าไร
6. พีระมิดนี้มีพื้นที่ผิวเป็นเท่าใด

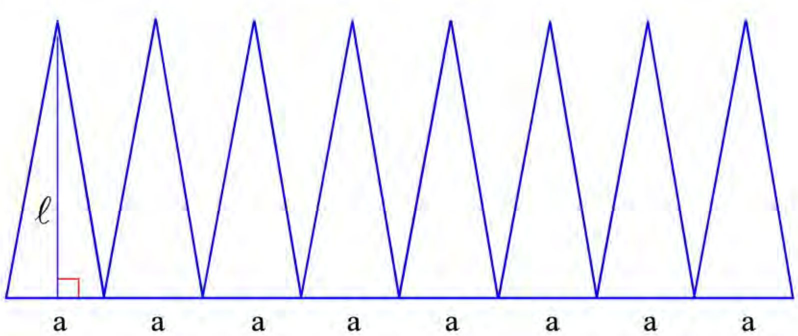
พื้นที่ผิวข้างหาได้อย่างไร



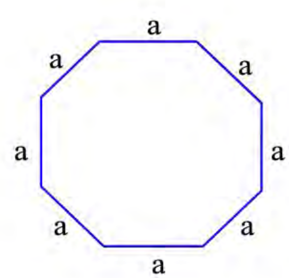
รูป ก

ให้นักเรียนพิจารณาการหาพื้นที่ผิวข้างของพีระมิดที่มีฐานเป็นรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า มีส่วนสูงเอียงยาวเท่ากันทุกเส้น เช่น รูป ก กำหนดเป็นพีระมิดฐานแปดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า มีฐานยาวด้านละ a หน่วยและส่วนสูงเอียงยาว ℓ หน่วย

จากพีระมิดที่กำหนดให้ จะเห็นว่าพื้นที่ผิวของพีระมิดมี 2 ส่วน คือ พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมทั้งหมดดังรูป ข เป็นพื้นที่ผิวข้าง และพื้นที่ของรูปแปดเหลี่ยมดังรูป ค เป็นพื้นที่ฐาน



รูป ข



รูป ค

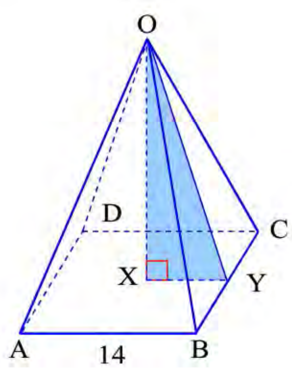
ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

1. รูปสามเหลี่ยมในรูป ข มีกี่รูป แต่ละรูปมีพื้นที่เท่าไร
2. พื้นที่ผิวข้างของพีระมิดรูป ก เป็นเท่าไร
3. ถ้าให้ p แทนความยาวรอบรูปของฐานของพีระมิดรูป ก แล้วพีระมิดรูป ก จะมีพื้นที่ผิวข้างเป็นเท่าไร

พื้นที่ผิวข้างของพีระมิดที่มีฐานเป็นรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า เท่ากับ $\frac{1}{2}$ × ความยาวรอบรูปของฐาน × สูงเอียง

ตัวอย่างที่ 1 จงหาพื้นที่ผิวของพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่งมีฐานยาวด้านละ 14 เซนติเมตร และสูง 24 เซนติเมตร

วิธีทำ



กำหนดให้ □ABCD เป็นฐานของพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส ฐานมีด้านยาวด้านละ 14 เซนติเมตร

O เป็นจุดยอดของพีระมิด

$\overline{OX}$ เป็นส่วนสูง

และ $\overline{OY}$ เป็นส่วนสูงเอียง ดังรูป

จาก Δ OXY เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากมี

OX = 24 เซนติเมตร และ XY = $\frac{14}{2}$ = 7 เซนติเมตร

โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัส

จะได้ $OY^2 = OX^2 + XY^2$

$= 24^2 + 7^2$

$= 625$

ดังนั้น $OY = 25$

เนื่องจาก พื้นที่ผิวข้างของพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสเท่ากับ

$\frac{1}{2}$ × ความยาวรอบรูปของฐาน × สูงเอียง

จะได้ พื้นที่ผิวข้างของพีระมิดเท่ากับ $\frac{1}{2} \times (4 \times 14) \times 25$

= 700 ตารางเซนติเมตร

พื้นที่ฐานของพีระมิดเท่ากับ 14×14

= 196 ตารางเซนติเมตร

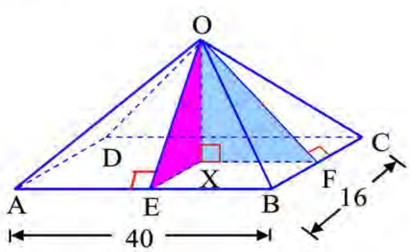
ดังนั้น พื้นที่ผิวของพีระมิดเท่ากับ $700 + 196$

= 896 ตารางเซนติเมตร

ตอบ 896 ตารางเซนติเมตร

ตัวอย่างที่ 2 จงหาพื้นที่ผิวข้างของพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีฐานยาว 40 เซนติเมตร กว้าง 16 เซนติเมตร และพีระมิดสูง 15 เซนติเมตร

วิธีทำ



กำหนดให้ □ ABCD เป็นฐานของพีระมิด

O เป็นจุดยอดของพีระมิด

$\overline{OX}$ เป็นส่วนสูง

$\overline{OE}$ เป็นส่วนสูงเอียงที่ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ และ

$\overline{OF}$ เป็นส่วนสูงเอียงที่ตั้งฉากกับ $\overline{BC}$ ดังรูป

จากรูป AB = 40 เซนติเมตร และ BC = 16 เซนติเมตร

จะได้ $XF = \frac{40}{2} = 20$ เซนติเมตร

และ $XE = \frac{16}{2} = 8$ เซนติเมตร

โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัส

จาก Δ OXE จะได้

$$
\begin{aligned}
OE^2 &= OX^2 + XE^2 \\
&= 15^2 + 8^2 \\
&= 289 \\
&= 17^2
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $OE = 17$

จาก Δ OXF จะได้

$$
\begin{aligned}
OF^2 &= OX^2 + XF^2 \\
&= 15^2 + 20^2 \\
&= 225 + 400 \\
&= 625 \\
&= 25^2
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $OF = 25$

พื้นที่ผิวข้างของพีระมิดฐานสี่เหลี่ยม ABCD เท่ากับ ผลบวกของพื้นที่ของ Δ OAB, Δ OBC, Δ OCD และ Δ ODA

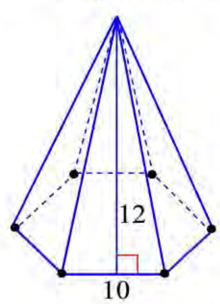
ดังนั้น พื้นที่ผิวข้างของพีระมิดเท่ากับ $2\left(\frac{1}{2} \times 40 \times 17\right) + 2\left(\frac{1}{2} \times 16 \times 25\right)$

$= 680 + 400$

$= 1,080$ ตารางเซนติเมตร

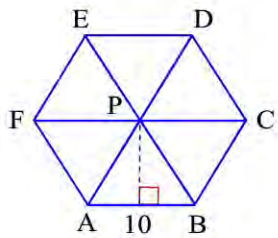
ตอบ 1,080 ตารางเซนติเมตร

ตัวอย่างที่ 3 พีระมิดฐานหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่ามีฐานยาวด้านละ 10 เซนติเมตร ส่วนสูงเอียงยาว 12 เซนติเมตร เมื่อกำหนดให้ $\sqrt{3} \approx 1.732$ จงหา



1) พื้นที่ฐานของพีระมิด
2) พื้นที่ผิวข้างของพีระมิด
3) พื้นที่ผิวของพีระมิด

วิธีทำ



1) กำหนดให้ รูปหกเหลี่ยม ABCDEF เป็นฐานของพีระมิดฐานหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่แต่ละด้านยาว 10 เซนติเมตร ดังรูป

จากสูตร พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า เท่ากับ $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

เมื่อ a แทนความยาวของด้าน

จากรูป จะได้พื้นที่ของ Δ APB เป็น $\frac{\sqrt{3}}{4}10^2$

$= 25\sqrt{3}$ ตารางเซนติเมตร

ดังนั้น พื้นที่ฐานของพีระมิดเท่ากับ $6 \times 25\sqrt{3} \approx 6 \times 25 \times 1.732$

$\approx$ 259.8 ตารางเซนติเมตร

2) พื้นที่ผิวข้างของพีระมิดฐานหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า เท่ากับ

$\frac{1}{2} \times$ ความยาวรอบรูปของฐาน $\times$ สูงเอียง

จะได้ พื้นที่ผิวข้างของพีระมิดเท่ากับ $\frac{1}{2} \times (6 \times 10) \times 12$

$= 360$ ตารางเซนติเมตร

3) พื้นที่ผิวของพีระมิด = พื้นที่ผิวข้าง + พื้นที่ฐาน

จะได้ พื้นที่ผิวของพีระมิดประมาณ $360 + 259.8$

$\approx$ 619.8 ตารางเซนติเมตร

ตอบ
1) พื้นที่ฐานของพีระมิดประมาณ 259.8 ตารางเซนติเมตร
2) พื้นที่ผิวข้างของพีระมิดเป็น 360 ตารางเซนติเมตร
3) พื้นที่ผิวของพีระมิดประมาณ 619.8 ตารางเซนติเมตร

แบบฝึกหัด 5.1 ก

1. จงหาพื้นที่ผิวของพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสซึ่งมีฐานยาวด้านละ 12 เซนติเมตร ส่วนสูงเอียงยาว 12 เซนติเมตร

2. จงหาพื้นที่ผิวข้างของพีระมิดฐานห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า ฐานยาวด้านละ 10 เซนติเมตร และส่วนสูงเอียงยาว 6 เซนติเมตร

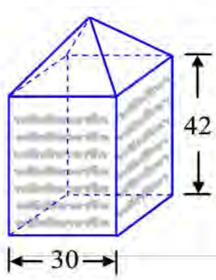
3. พีระมิดทำด้วยไม้อันหนึ่งมีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ 6 เซนติเมตร และพีระมิดสูง 4 เซนติเมตร ถ้าต้องการทาสีพื้นผิวของพีระมิดนี้ บริเวณที่ทาสีมีพื้นที่กี่ตารางเซนติเมตร

4. จงหาพื้นที่ผิวของพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งมีด้านประกอบมุมฉากยาว 32 เซนติเมตร และ 10 เซนติเมตร และมีความสูง 12 เซนติเมตร

5. พีระมิดฐานห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า ฐานยาวด้านละ 8 เซนติเมตร และมีพื้นที่ผิวข้าง 120 ตารางเซนติเมตร จะมีสูงเอียงเท่าไร

6. พีระมิดฐานสิบเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า วัดความยาวรอบฐานได้ 56 เมตร และมีพื้นที่ผิวข้าง 224 ตารางเมตร ส่วนสูงเอียงของพีระมิดยาวเท่าใด

7. รูปจำลองศิลาจารึกมีส่วนล่างเป็นปริซึมสี่เหลี่ยมจัตุรัส ส่วนบนเป็นพีระมิด ดังรูป

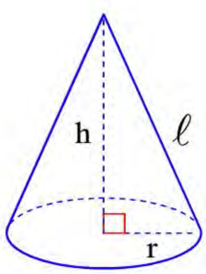


ฐานของทั้งสองเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ยาวด้านละ 30 นิ้ว และมีปริมาตรทั้งหมด 40,200 ลูกบาศก์นิ้ว ถ้าส่วนล่างสูง 42 นิ้ว จงหา

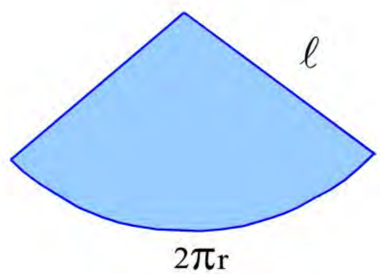
1) สูงเอียงของพีระมิด
2) พื้นที่ผิวทั้งหมดของรูปจำลองศิลาจารึก

พื้นที่ผิวของกรวย

ถ้าตัดกรวยกระดาษอันหนึ่งตามแนวส่วนสูงเอียง แล้วคลี่กระดาษออก รูปคลี่ของกรวยจะมีลักษณะเป็นรูปสามเหลี่ยมฐานโค้ง ดังรูป



กรวย



รูปคลี่ของกรวย

พื้นที่ของรูปคลี่ของกรวยกระดาษข้างต้น คือ *พื้นที่ผิวข้าง*ของกรวย

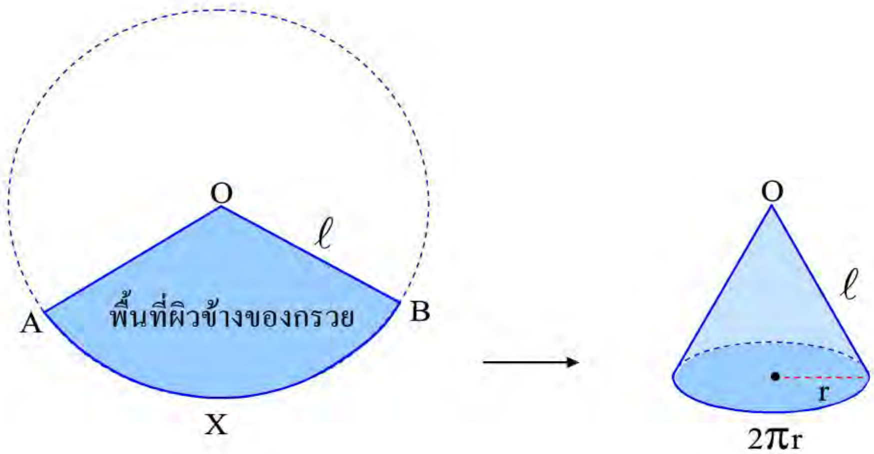
ถ้าเป็นกรวยกระดาษที่มีฝาปิดจะได้ฝาวงกลมเป็นฐานของกรวย และพื้นที่ของรูปวงกลมจะเป็นพื้นที่ฐานของกรวย

พื้นที่ผิวของกรวยเท่ากับผลบวกของพื้นที่ผิวข้างของกรวยกับพื้นที่ฐานของกรวย

เราอาจหาพื้นที่ผิวของกรวยได้โดยใช้ความรู้เกี่ยวกับอัตราส่วน ดังกิจกรรมต่อไปนี้

พื้นที่ผิวของกรวย

นักเรียนเคยสร้างกรวยจากกระดาษรูปวงกลมมาแล้ว ดังรูปต่อไปนี้



จากรูป จะเห็นว่า O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมและเป็นจุดยอดของกรวย

ℓ แทนรัศมีของวงกลมและแทนสูงเอียงของกรวย

ความยาวของส่วนโค้ง AXB ของวงกลมเป็นความยาวของเส้นรอบวงของฐานของกรวยซึ่งเท่ากับ $2\pi r$

พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมฐานโค้ง OAXB เท่ากับพื้นที่ผิวข้างของกรวย

วงกลมที่มี O เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี ℓ มีพื้นที่เท่ากับ $\pi\ell^2$ และความยาวของเส้นรอบวงของวงกลมเท่ากับ $2\pi\ell$

เนื่องจากอัตราส่วนของพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมฐานโค้ง OAXB ต่อพื้นที่ของวงกลมที่มี O เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี ℓ เท่ากับอัตราส่วนของความยาวของส่วนโค้ง AXB ต่อความยาวของเส้นรอบวงของวงกลมที่มี O เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี ℓ

ดังนั้น จึงเขียนความสัมพันธ์เป็นสัดส่วนได้ดังนี้

$$\frac{\text{พื้นที่ผิวข้างของกรวย}}{\pi\ell^2} = \frac{2\pi r}{2\pi\ell}$$

จะได้ พื้นที่ผิวข้างของกรวย $= \frac{2\pi r \times \pi \ell^2}{2\pi \ell}$

$= \pi r \ell$

เนื่องจาก พื้นที่ผิวของกรวย = พื้นที่ผิวข้างของกรวย + พื้นที่ฐานของกรวย

ดังนั้น พื้นที่ผิวของกรวย $= \pi r \ell + \pi r^2$

เมื่อ r แทนรัศมีของฐานของกรวย และ ℓ แทนสูงเอียงของกรวย

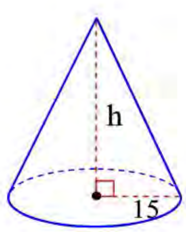
พื้นที่ผิวของกรวย $= \pi r \ell + \pi r^2$

เมื่อ r แทนรัศมีของฐานของกรวย และ

ℓ แทนสูงเอียงของกรวย

ตัวอย่างที่ 1 ฝาชีครอบอาหารที่สานด้วยตอกไม้ไผ่มีลักษณะใกล้เคียงกับกรวย ถ้าฝาชีใบหนึ่งมีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 30 เซนติเมตร และสูงเอียง 39 เซนติเมตร ฝาชีสูงกี่เซนติเมตร และส่วนที่สานด้วยตอกไม้ไผ่มีพื้นที่กี่ตารางเซนติเมตร (กำหนดให้ $\pi \approx \frac{22}{7}$)

วิธีทำ



ฝาชีมีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 30 เซนติเมตร

จะมีรัศมี $\frac{30}{2} = 15$ เซนติเมตร

สูงเอียงของฝาชี 39 เซนติเมตร

ถ้าให้ h แทนส่วนสูงของฝาชี

จะได้ $h^2 = 39^2 - 15^2$

$= 1,521 - 225$

$= 1,296$

$h = 36$

ดังนั้น ฝาชีสูง 36 เซนติเมตร

เนื่องจาก พื้นที่ผิวข้างของกรวยเท่ากับ $\pi r \ell$

ดังนั้น ส่วนที่สานด้วยตอกไม้ไผ่มีพื้นที่ประมาณ $\frac{22}{7} \times 15 \times 39$

$\approx$ 1,839 ตารางเซนติเมตร

ตอบ $\begin{cases} \text{ฝาชีสูง 36 เซนติเมตร} \\ \text{ส่วนที่สานด้วยตอกไม้ไผ่มีพื้นที่ประมาณ 1,839 ตารางเซนติเมตร} \end{cases}$

ตัวอย่างที่ 2 ปากกรวยกระดาษสำหรับดื่มน้ำจากเครื่องทำน้ำเย็น มีรัศมี 3.5 เซนติเมตร สูงเอียง 10 เซนติเมตร กำหนดให้ $\pi \approx \frac{22}{7}$

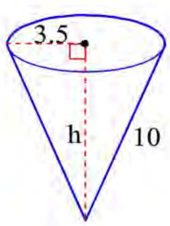
จงหา

1) กระดาษที่ใช้ทำกรวยแต่ละใบมีพื้นที่อย่างน้อยกี่ตารางเซนติเมตร
2) กรวยกระดาษจุน้ำได้มากที่สุดเท่าไร
3) ถ้าขวดน้ำบนเครื่องทำน้ำเย็นมีความจุ 18.9 ลิตร จะสามารถใช้กรวยกระดาษนี้กดน้ำมาดื่มได้อย่างน้อยกี่ครั้ง

วิธีทำ

1) ปากกรวยมีรัศมี 3.5 เซนติเมตร

สูงเอียง 10 เซนติเมตร



จากสูตร พื้นที่ผิวข้างของกรวยเท่ากับ $\pi r \ell$

ดังนั้น กระดาษที่ใช้ทำกรวยมีพื้นที่อย่างน้อยประมาณ $\frac{22}{7} \times 3.5 \times 10$

$\approx$ 110 ตารางเซนติเมตร

2) ให้กรวยกระดาษสูง h เซนติเมตร

จะได้
$$\begin{aligned} h^2 &= \ell^2 - r^2 \\ &= 10^2 - 3.5^2 \\ &= 100 - 12.25 \\ &= 87.75 \\ h &\approx 9.4 \end{aligned}$$

จะได้ กรวยกระดาษสูงประมาณ 9.4 เซนติเมตร

จากสูตร ปริมาตรของกรวยเท่ากับ $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

ดังนั้น กรวยกระดาษจุน้ำได้มากที่สุดประมาณ $\frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (3.5)^2 \times 9.4$

$\approx$ 120.6 ลูกบาศก์เซนติเมตร

3) ขวดน้ำบนเครื่องทำน้ำเย็นมีความจุ 18.9 ลิตร และน้ำ 1 ลิตรเท่ากับ 1,000 ลูกบาศก์เซนติเมตร

จะได้ น้ำในขวดเท่ากับ 18.9×10^3 = 18,900 ลูกบาศก์เซนติเมตร

ดังนั้น สามารถใช้กรวยกระดาษกดน้ำมาดื่มได้อย่างน้อยประมาณ

$$\frac{18{,}900}{120.6} \approx 156.7$$

นั่นคือ ใช้กรวยกระดาษกดน้ำดื่มได้อย่างน้อย 156 ครั้ง

ตอบ
1) กระดาษที่ใช้ทำกรวยมีพื้นที่อย่างน้อยประมาณ 110 ตารางเซนติเมตร
2) กรวยกระดาษจุน้ำได้มากที่สุดประมาณ 120.6 ลูกบาศก์เซนติเมตร
3) ใช้กรวยกระดาษกดน้ำจากขวดมาดื่มได้อย่างน้อย 156 ครั้ง

ตัวอย่างที่ 3 ศจีใช้ผ้าเย็บหมอนข้างให้เด็กมีลักษณะเป็นทรงดินสอ ซึ่งมีส่วนบนเป็นกรวยและส่วนล่างเป็นทรงกระบอก ดังรูป เมื่อยัดนุ่นเต็มหมอนวัดความยาวรอบหมอนทรงกระบอกได้ 44 เซนติเมตร วัดจากปลายแหลมของกรวยถึงฐานของทรงกระบอกได้ยาว 66.8 เซนติเมตร และวัดส่วนสูงเอียงของกรวยได้ยาว 18.2 เซนติเมตร กำหนดให้ $\pi \approx \frac{22}{7}$ จงหา

1) ตัวหมอนที่เป็นทรงกระบอกยาวกี่เซนติเมตร
2) ผ้าที่ใช้เย็บหมอนข้าง (ไม่รวมตะเข็บผ้าที่เย็บ) มีพื้นที่กี่ตารางเซนติเมตร

วิธีทำ 1) ความยาวรอบหมอนทรงกระบอกวัดได้ 44 เซนติเมตร

จากสูตร ความยาวของเส้นรอบวงของวงกลมเท่ากับ $2\pi r$

เมื่อ r แทนรัศมีของฐานของทรงกระบอก

จะได้ $2\pi r = 44$

$$r = \frac{44}{2\pi}$$

$$= \frac{22}{\pi}$$

$$\approx 22 \times \frac{7}{22}$$

$$\approx 7$$

ดังนั้น หมอนทรงกระบอกมีรัศมีของฐานประมาณ 7 เซนติเมตร

ส่วนปลายหมอนที่เป็นกรวยมีสูงเอียง 18.2 เซนติเมตร

ถ้าให้ส่วนสูงของกรวยยาว d เซนติเมตร

จะได้ $d^2 \approx (18.2)^2 - 7^2$

$$\approx 331.24 - 49$$

$$\approx 282.24$$

$$d \approx 16.8$$

ดังนั้น ตัวหมอนที่เป็นทรงกระบอกยาวประมาณ $66.8 - 16.8 = 50$ เซนติเมตร

2) เนื่องจาก พื้นที่ผิวของหมอนข้าง

= พื้นที่ผิวข้างของกรวย + พื้นที่ผิวข้างของทรงกระบอก + พื้นที่ของฐานของทรงกระบอก

ถ้าให้สูงเอียงของกรวยและความสูงของทรงกระบอกเป็น ℓ และ h เซนติเมตร ตามลำดับ

ดังนั้น พื้นที่ผิวของหมอนข้าง $= \pi r\ell + 2\pi rh + \pi r^2$

$$= \pi r(\ell + 2h + r)$$

$$\approx \frac{22}{7} \times 7 \times \{18.2 + (2 \times 50) + 7\}$$

$$\approx 2{,}754.4$$

ดังนั้น ผ้าที่ใช้เย็บหมอนข้างมีพื้นที่ประมาณ 2,754.4 ตารางเซนติเมตร

ตอบ
1) ตัวหมอนที่เป็นทรงกระบอกยาวประมาณ 50 เซนติเมตร
2) ผ้าที่ใช้เย็บหมอนข้างมีพื้นที่ประมาณ 2,754.4 ตารางเซนติเมตร

แบบฝึกหัด 5.1 ข

ในการทำแบบฝึกหัดต่อไปนี้ ให้นักเรียนเลือกใช้ค่า π ประมาณ $\frac{22}{7}$ หรือ 3.14 ตามความเหมาะสม

1. จงหาพื้นที่ผิวข้างของกรวยสังกะสีอันหนึ่งที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางของฐานยาว 10 เซนติเมตร และสูง 12 เซนติเมตร
2. โรงเรียนอนุบาลแห่งหนึ่งทำกระโจมที่มีส่วนล่างเป็นทรงกระบอกมีหลังคาเป็นกรวย สำหรับให้นักเรียนเข้าไปเล่น ส่วนที่เป็นทรงกระบอกสูง 120 เซนติเมตร หลังคากระโจมสูง 150 เซนติเมตร ฐานกระโจมมีรัศมียาว 80 เซนติเมตร ถ้าทางโรงเรียนต้องการเขียนลวดลายบนหลังคา จงหาพื้นที่ที่ต้องการเขียนลวดลาย

3. ลูกตุ้มเหล็กมีลักษณะเป็นกรวยมีความสูง 4 เซนติเมตร มีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 6 เซนติเมตร ลูกตุ้มลูกนี้มีพื้นที่ผิวและปริมาตรเป็นเท่าไร

4. ต้องการทำหมวกกระดาษรูปกรวยสำหรับงานเลี้ยงปีใหม่ ให้มีความยาวรอบฐานหมวก 62.8 เซนติเมตร ส่วนสูงเอียงยาว 30 เซนติเมตร หมวกแต่ละใบต้องใช้กระดาษอย่างน้อยกี่ตารางเซนติเมตร
5. หมวกของชาวเวียดนามมีลักษณะเป็นกรวย โครงภายในหมวกทำด้วยเส้นไม้ไผ่เหลากลมขดเป็นวงกลมยึดด้วยใบลาน ถ้าหมวกใบหนึ่งวัดความยาวของเส้นรอบวงของฐานหมวกได้ 128 เซนติเมตร และสูงเอียง 27 เซนติเมตร พื้นที่ของใบลานซึ่งเป็นผิวข้างของกรวยเท่ากับเท่าไร

6. ทศสร้างวงกลมบนกระดาษให้มีรัศมี 7 เซนติเมตร และสร้างกรวยจากกระดาษครึ่งวงกลมนี้โดยให้กรวยมีพื้นที่ผิวข้างมากที่สุด จงหาว่าฐานของกรวยมีรัศมียาวกี่เซนติเมตรและกรวยสูงกี่เซนติเมตร
7. ทวีพรต้องการทำกรวยสังกะสีที่มีความจุ 297 ลูกบาศก์เซนติเมตร กรวยสูง 14 เซนติเมตร เขาจะต้องตัดสังกะสีจากแผ่นสังกะสีรูปวงกลมที่มีรัศมียาวกี่เซนติเมตรและสามารถทำกรวยจากแผ่นวงกลมนี้ได้อย่างมากกี่อัน

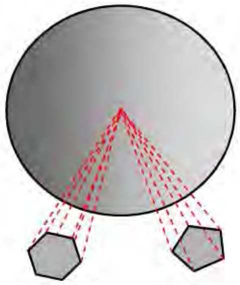
พื้นที่ผิวของทรงกลม

นักเรียนทราบแล้วว่าจุดทุกจุดบนผิวโค้งของทรงกลมอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางของทรงกลมเท่ากัน

ในการหาพื้นที่ผิวโค้งของทรงกลมอาจทำได้โดยใช้วิธีการแบ่งผิวโค้งออกเป็นส่วนย่อย เช่น อาจแบ่งเป็นรูปหลายเหลี่ยมหลาย ๆ รูป แล้วหาผลบวกของพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมเหล่านั้นทั้งหมด

เมื่อเราแบ่งผิวโค้งของทรงกลมออกเป็นรูปหลายเหลี่ยมหลาย ๆ รูป เช่น รูปห้าเหลี่ยมหรือรูปหกเหลี่ยมบนผิวโค้งของลูกฟุตบอลข้างบนนี้ ถ้าแบ่งเป็นจำนวนน้อยรูป พื้นผิวบนรูปหลายเหลี่ยมแต่ละรูปจะเป็นผิวโค้งไม่แบนราบ แต่ถ้าเราแบ่งเป็นรูปหลายเหลี่ยมให้มากรูปขึ้นเป็นร้อยรูป พันรูป หมื่นรูป ฯลฯ พื้นผิวบนรูปหลายเหลี่ยมเหล่านั้นก็มีความโค้งน้อยลงจนเกือบเป็นแบนราบ ผลบวกของพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมเหล่านั้นก็จะใกล้เคียงกับพื้นที่ผิวของทรงกลม ดังตัวอย่าง

พื้นที่ผิวของทรงกลม



กำหนดให้ พื้นที่ผิวของทรงกลมเป็น s ตารางหน่วย

1. สมมติว่าแบ่งพื้นผิวของทรงกลมที่กำหนดให้ออกเป็นรูปหลายเหลี่ยมจำนวนมาก ๆ เช่น 10,000 รูปและให้แต่ละรูปมีพื้นที่เป็น a_1, a_2, a_3, a_4, … , $a_{10,000}$ ตารางหน่วย จะได้ $s = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{10,000}$
2. เนื่องจากในข้อ 1 มีการแบ่งพื้นผิวของทรงกลมเป็นรูปหลายเหลี่ยมจำนวนมาก ๆ จึงทำให้เสมือนเป็นการแบ่งทรงกลมเป็นพีระมิดที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดศูนย์กลางของทรงกลม และพีระมิดแต่ละรูปมีส่วนสูงยาวเท่ากับรัศมีของทรงกลม (r)
3. เนื่องจาก ปริมาตรของพีระมิดแต่ละรูปเท่ากับ $\frac{1}{3} \times$ พื้นที่ฐาน $\times$ ความสูง

จะได้ ปริมาตรของทรงกลมเท่ากับ $\frac{1}{3}a_1r + \frac{1}{3}a_2r + \frac{1}{3}a_3r + \ldots + \frac{1}{3}a_{10,000}\ r$

$$= \frac{1}{3}r\left(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{10,000}\right)$$

$$= \frac{1}{3}rs$$

เนื่องจาก ปริมาตรของทรงกลมเท่ากับ $\frac{4}{3}\pi r^3$

จะได้ $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}rs$

หรือ $\frac{1}{3}rs = \frac{4}{3}\pi r^3$

ดังนั้น $s = \frac{4}{3}\pi r^3 \times \frac{3}{r}$

$= 4\pi r^2$

นั่นคือ พื้นที่ผิวของทรงกลมเท่ากับ $4\pi r^2$ ตารางหน่วย

สูตรการหาพื้นที่ผิวของทรงกลมเป็นดังนี้

พื้นที่ผิวของทรงกลม $= 4\pi r^2$ เมื่อ r แทนรัศมีของทรงกลม

ตัวอย่างที่ 1 พงศธรใช้ปูนซีเมนต์ $12,348\pi$ ลูกบาศก์เซนติเมตร หล่อเป็นทรงกลมจะได้พื้นที่ผิวของทรงกลมประมาณเท่าไร (กำหนดให้ $\pi \approx \frac{22}{7}$)

วิธีทำ ทรงกลมมีปริมาตร $12,348\pi$ ลูกบาศก์เซนติเมตร

เนื่องจาก สูตรปริมาตรของทรงกลมเท่ากับ $\frac{4}{3}\pi r^3$ เมื่อ r แทนรัศมีของทรงกลม

จะได้ $\frac{4}{3}\pi r^3 = 12,348\pi$

$$r^3 = 12,348 \times \frac{3}{4}$$

$$= 9,261$$

$$= 21^3$$

ดังนั้น $r = 21$

จากสูตร พื้นที่ผิวของทรงกลมเท่ากับ $4\pi r^2$

จะได้ พื้นที่ผิวของทรงกลมนี้ประมาณ $4 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$

$$\approx 5,544$$

ดังนั้น พื้นที่ผิวของทรงกลมนี้ประมาณ 5,544 ตารางเซนติเมตร

ตอบ ประมาณ 5,544 ตารางเซนติเมตร

ตัวอย่างที่ 2 นุ่นซื้อไอศกรีมใส่ในกรวยขนมปัง ไอศกรีมเป็นก้อนทรงกลม เมื่อวางอยู่บนกรวยจะเห็นเป็นครึ่งทรงกลม ดังรูป ถ้ากรวยมีส่วนสูงเอียงยาว 7.8 เซนติเมตรและกรวยสูง 7.2 เซนติเมตร ไอศกรีมก้อนนี้มีปริมาตรกี่ลูกบาศก์เซนติเมตรและส่วนที่เห็นเป็นครึ่งทรงกลมมีพื้นที่ผิวเป็นเท่าใด (กำหนดให้ $\pi \approx \frac{22}{7}$)

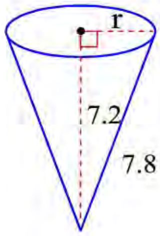
วิธีทำ จากรูป ให้ r แทนรัศมีของปากกรวย

ถ้วยกรวยขนมปังมีส่วนสูงเอียงยาว 7.8 เซนติเมตร

กรวยสูง 7.2 เซนติเมตร

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ $(7.8)^2 = r^2 + (7.2)^2$

หรือ $r^2 = (7.8)^2 - (7.2)^2$



จะได้
$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{(7.8)^2 - (7.2)^2} \\
&= \sqrt{(7.8+7.2)(7.8-7.2)} \\
&= \sqrt{15 \times 0.6} \\
&= \sqrt{9} \\
&= 3
\end{aligned}
$$

จากสูตร ปริมาตรของทรงกลมเท่ากับ $\frac{4}{3}\pi r^3$

ดังนั้น ไอศกรีมก้อนนี้มีปริมาตรประมาณ $\frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 3^3$

$\approx$ 113.1 ลูกบาศก์เซนติเมตร

เนื่องจาก พื้นที่ผิวของทรงกลม เท่ากับ $4\pi r^2$

จะได้ พื้นที่ผิวของครึ่งทรงกลม เท่ากับ $2\pi r^2$

ดังนั้น พื้นที่ผิวของไอศกรีมส่วนที่เห็นเท่ากับ $2 \times \pi \times 3^2$

$\approx 2 \times \frac{22}{7} \times 9$

$\approx$ 56.6 ตารางเซนติเมตร

ตอบ ปริมาตรประมาณ 113.1 ลูกบาศก์เซนติเมตร
พื้นที่ผิวส่วนที่เห็นประมาณ 56.6 ตารางเซนติเมตร

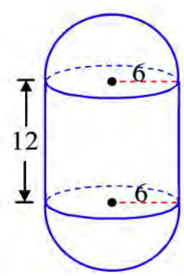
สำรวจ

แบบฝึกหัด 5.1 ค

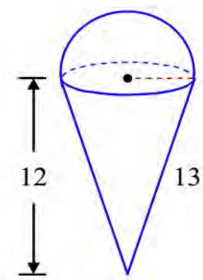
ในการทำแบบฝึกหัดต่อไปนี้ ให้นักเรียนเลือกใช้ค่า π ประมาณ $\frac{22}{7}$ หรือ 3.14 ตามความเหมาะสม

1. จงหาพื้นที่ผิวโดยประมาณของรูปเรขาคณิตสามมิติต่อไปนี้ (กำหนดหน่วยความยาวเป็นเซนติเมตร)

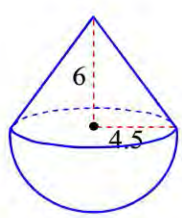
1)



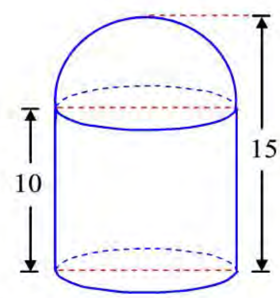
2)



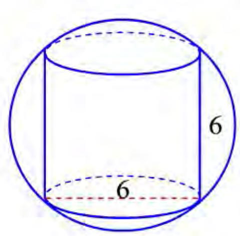
3)



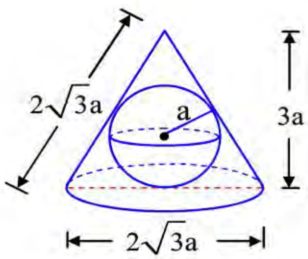
4)



2. ทรงกระบอกมีความสูงเท่ากับความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของฐานซึ่งเท่ากับ 6 เซนติเมตร แนบในทรงกลมได้พอดี ดังรูป จงหาพื้นที่ผิวและปริมาตรของทรงกลม



3. ทรงกลมไม้ลูกหนึ่งแนบในกรวยพลาสติกใสโดยที่ผิวของทรงกลมสัมผัสกับฐานและ



ผิวข้างของกรวยได้พอดี ถ้ากำหนดความยาวของส่วนต่าง ๆ ของทรงกลมและกรวยให้ดังรูป (หน่วยเป็นเซนติเมตร) จงหา

1) อัตราส่วนของพื้นที่ผิวของทรงกลมต่อพื้นที่ผิวของกรวย
2) อัตราส่วนของปริมาตรของทรงกลมต่อปริมาตรของกรวย

4. โลกมีเส้นผ่านศูนย์กลางยาวประมาณ 12,640 กิโลเมตร ผิวโลกส่วนที่ปกคลุมด้วยน้ำมีพื้นที่ประมาณ $\frac{3}{4}$ ของพื้นที่ผิวของโลกทั้งหมด จงหา

1) ความยาวรอบเส้นศูนย์สูตร
2) พื้นที่ผิวของโลกส่วนที่ไม่ได้ปกคลุมด้วยน้ำ
3) ประเทศไทยมีพื้นที่ประมาณ 513,115 ตารางกิโลเมตร คิดประมาณเป็นเศษส่วนเท่าไรของพื้นที่ผิวของโลกส่วนที่ไม่ได้ปกคลุมด้วยน้ำ

5. ลูกบอลพลาสติกลูกหนึ่ง เมื่อเป่าลมเข้าเต็มที่แล้วมีรัศมียาว 26 เซนติเมตร ส่วนผิวโค้ง

ที่เป็นพลาสติกมี 3 สีสลับกัน รวมทั้งหมด 9 แถบ แต่ละแถบมีพื้นที่ผิวเท่ากัน จงหาพื้นที่ผิวของแต่ละแถบ

6. เสริมศรีมีขันเงินรูปครึ่งทรงกลม ซึ่งมีพื้นที่ผิว 1,413 ตารางเซนติเมตร จงหาความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของขันเงินใบนี้

5.2 การนำไปใช้

ในหัวข้อนี้นักเรียนจะได้เห็นการนำความรู้เกี่ยวกับพื้นที่ผิวและปริมาตรของรูปเรขาคณิตสามมิติ ไปใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาที่ซับซ้อนขึ้น ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 บ้านหลังหนึ่งใช้น้ำเฉลี่ยสัปดาห์ละ 5 ลูกบาศก์เมตร ถ้าต้องการสร้างถังเก็บน้ำทรงกระบอกที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 1 เมตร สูง $3\frac{1}{2}$ เมตร เพื่อกักเก็บน้ำฝนไว้ใช้ในฤดูร้อน 13 สัปดาห์ จะต้องสร้างถังเก็บน้ำอย่างน้อยกี่ถัง

(กำหนดให้ $\pi \approx \frac{22}{7}$)

วิธีทำ ใช้น้ำโดยเฉลี่ยสัปดาห์ละ 5 ลูกบาศก์เมตร

ในเวลา 13 สัปดาห์จะต้องมีน้ำไว้ใช้ $5 \times 13 = 65$ ลูกบาศก์เมตร

ถังเก็บน้ำทรงกระบอกแต่ละถังมีรัศมี $\frac{1}{2}$ เมตร สูง $3\frac{1}{2}$ หรือ $\frac{7}{2}$ เมตร

เนื่องจาก ปริมาตรของทรงกระบอกเท่ากับ $\pi r^2 h$

ดังนั้น ถังน้ำแต่ละถังจะเก็บน้ำได้ประมาณ $\frac{22}{7} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{7}{2}$

$$\approx \frac{11}{4} \text{ ลูกบาศก์เมตร}$$

ดังนั้น จะต้องสร้างถังเก็บน้ำอย่างน้อย $65 \div \frac{11}{4} = \frac{65 \times 4}{11} \approx 24$ ถัง

ตอบ ประมาณ 24 ถัง

ตัวอย่างที่ 2 ประตูทางเข้าสวนสนุกแห่งหนึ่งมีเสาทรงกระบอกที่มียอดเสาเป็นกรวยอยู่ 3 เสา เสากลางสูง 7 เมตร ส่วนสูงเอียงของกรวยยาว $3\frac{1}{4}$ เมตร ฐานเสามีรัศมี $1\frac{1}{4}$ เมตร เสาข้างสองเสามีขนาดเท่ากันคือ สูง $5\frac{3}{5}$ เมตร ส่วนสูงเอียงของกรวยยาว $2\frac{3}{5}$ เมตร ฐานเสามีรัศมี 1 เมตร ถ้าต้องการทาสีเสาทั้งสาม จงหาว่าพื้นที่ที่ต้องทาสีทั้งหมดเป็นเท่าไร (กำหนดให้ $\pi \approx \frac{22}{7}$)

วิธีทำ ให้ h_1 แทนความสูงของกรวยของเสากลาง

กรวยของเสากลางมีสูงเอียง $3\frac{1}{4}$ หรือ $\frac{13}{4}$ เมตร

ฐานของกรวยมีรัศมี $1\frac{1}{4}$ หรือ $\frac{5}{4}$ เมตร

ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
h_1^2 &= \left(\frac{13}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 \\
&= \frac{169}{16} - \frac{25}{16} \\
&= \frac{144}{16} \\
&= 9 \\
&= 3^2 \\
h_1 &= 3
\end{aligned}
$$

จะได้ กรวยของเสากลางสูง 3 เมตร

เนื่องจาก เสากลางมีความสูง 7 เมตร

ดังนั้น ส่วนที่เป็นทรงกระบอกของเสากลางสูง $7-3 = 4$ เมตร

ให้ h_2 แทนความสูงของกรวยของเสาข้าง

กรวยของเสาข้างมีสูงเอียง $2\frac{3}{5}$ หรือ $\frac{13}{5}$ เมตร

ฐานของกรวยมีรัศมี 1 เมตร

ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
h_2^2 &= \left(\frac{13}{5}\right)^2 - 1^2 \\
&= \frac{169}{25} - 1 \\
&= \frac{144}{25} \\
&= \left(\frac{12}{5}\right)^2 \\
h_2 &= \frac{12}{5}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น กรวยของเสาข้างสูง $\frac{12}{5}$ เมตร

เนื่องจาก เสาข้างสูง $5\frac{3}{5}$ หรือ $\frac{28}{5}$ เมตร

ดังนั้น ส่วนที่เป็นทรงกระบอกของเสาข้างสูง $\frac{28}{5} - \frac{12}{5}$

$= \frac{16}{5}$ หรือ $3\frac{1}{5}$ เมตร

พื้นที่ผิวข้างของเสากลาง = พื้นที่ผิวข้างของทรงกระบอก + พื้นที่ผิวข้างของกรวย

$$= \pi\left(\frac{5}{4}\right)^2(4) + \pi\left(\frac{5}{4}\right)\left(\frac{13}{4}\right)$$

$$= \pi\left(\frac{5}{4}\right)\left\{\left(\frac{5}{4}\times 4\right) + \frac{13}{4}\right\}$$

$$= \pi\left(\frac{5}{4}\right)\left(5 + \frac{13}{4}\right)$$

$$\approx \frac{22}{7} \times \frac{5}{4} \times \frac{33}{4}$$

$\approx$ 32.4 ตารางเมตร

พื้นที่ผิวข้างของเสาข้าง 2 เสา = 2(พื้นที่ผิวข้างของทรงกระบอก + พื้นที่ผิวข้างของกรวย)

$$= 2\left[\pi(1)^2\left(\frac{16}{5}\right) + \pi(1)\left(\frac{13}{5}\right)\right]$$

$$= 2\pi\left(\frac{16}{5} + \frac{13}{5}\right)$$

$$\approx 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{29}{5}$$

$\approx$ 36.5 ตารางเมตร

ดังนั้น พื้นที่ที่ต้องทาสีทั้งหมดประมาณ $32.4 + 36.5 = 68.9$ ตารางเมตร

ตอบ ประมาณ 68.9 ตารางเมตร

ตัวอย่างที่ 3 วินัยนำท่อนเหล็กทรงกระบอกกลวงที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางภายในยาว 7 เซนติเมตร เส้นผ่านศูนย์กลางภายนอก 9 เซนติเมตร ท่อนเหล็กยาว 121.5 เซนติเมตร มาหลอมทำเป็นทรงกลมตัน จะได้ทรงกลมที่มีพื้นที่ผิวและปริมาตรเป็นเท่าไร (กำหนดให้ $\pi \approx \frac{22}{7}$)

วิธีทำ ท่อนเหล็กทรงกระบอกกลวงมีเส้นผ่านศูนย์กลางภายในยาว 7 เซนติเมตร

จะได้ รัศมีของวงกลมภายในเป็น $\frac{7}{2}$ เซนติเมตร

เส้นผ่านศูนย์กลางภายนอกยาว 9 เซนติเมตร

จะได้ รัศมีของวงกลมภายนอกเป็น $\frac{9}{2}$ เซนติเมตร

ท่อนเหล็กยาว 121.5 เซนติเมตร

ดังนั้น ปริมาตรของเหล็กท่อนนี้เท่ากับ $\left[\pi\left(\frac{9}{2}\right)^2 \times 121.5\right] - \left[\pi\left(\frac{7}{2}\right)^2 \times 121.5\right]$

$$= 121.5\pi\left[\left(\frac{9}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2\right]$$

$$= 121.5\pi\left(\frac{9}{2}+\frac{7}{2}\right)\left(\frac{9}{2}-\frac{7}{2}\right)$$

$$= 121.5\pi \times 8 \times 1$$

$= 972\pi$ ลูกบาศก์เซนติเมตร

เนื่องจาก ปริมาตรของเหล็กทรงกลมตันเท่ากับปริมาตรของเนื้อเหล็กทรงกระบอก

จะได้

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 972\pi$$

$$r^3 = 972 \times \frac{3}{4}$$

$$= 729$$

$$= 9^3$$

$$r = 9$$

ดังนั้น ทรงกลมมีรัศมี 9 เซนติเมตร

เนื่องจาก พื้นที่ผิวของทรงกลมเท่ากับ $4\pi r^2$

ดังนั้น พื้นที่ผิวของทรงกลมประมาณ $4 \times \frac{22}{7} \times 9^2$

$\approx$ 1,018 ตารางเซนติเมตร

เนื่องจาก ปริมาตรของทรงกลมเท่ากับ $\frac{4}{3}\pi r^3$

ดังนั้น ปริมาตรของทรงกลมประมาณ $\frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 9^3$

$\approx$ 3,055 ลูกบาศก์เซนติเมตร

ตอบ { พื้นที่ผิวของทรงกลมประมาณ 1,018 ตารางเซนติเมตร
ปริมาตรของทรงกลมประมาณ 3,055 ลูกบาศก์เซนติเมตร

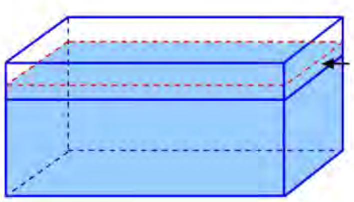
ตัวอย่างที่ 4 เมธีเลี้ยงปลาในตู้กระจกขนาดภายในกว้าง 60 เซนติเมตร ยาว 110 เซนติเมตร และสูง 75 เซนติเมตร เดิมใส่น้ำไว้ประมาณ $\frac{3}{4}$ ของความสูงของตู้ เมื่อเมธีใส่ท่อพลาสติกใสที่มีลักษณะเป็นทรงกระบอกกลวงยาว 60 เซนติเมตร เพื่อให้ปลาว่ายเล่นภายในท่อ เมธีพบว่าท่อพลาสติกทำให้ระดับน้ำในตู้สูงขึ้นจากเดิม $\frac{1}{2}$ เซนติเมตร ถ้าท่อพลาสติกหนา 1 เซนติเมตรแล้ว ท่อนี้มีเส้นผ่านศูนย์กลางภายในเป็นเท่าไร (กำหนดให้ $\pi \approx \frac{22}{7}$)

วิธีทำ ตู้ปลามีขนาดภายในกว้าง 60 เซนติเมตร ยาว 110 เซนติเมตร

จะได้ พื้นที่ฐานของตู้ปลาเท่ากับ 110×60 ตารางเซนติเมตร

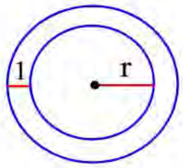
เมื่อใส่ท่อพลาสติกลงไปในตู้ทำให้ระดับน้ำสูงขึ้น $\frac{1}{2}$ เซนติเมตร

เนื่องจาก ปริมาตรของน้ำส่วนที่สูงขึ้นเท่ากับปริมาตรของท่อพลาสติก



ดังนั้น ท่อพลาสติกที่ยาว 60 เซนติเมตร มีปริมาตรเท่ากับ

$\frac{1}{2} \times 110 \times 60 = 55 \times 60$ ลูกบาศก์เซนติเมตร



เนื่องจาก หน้าตัดของท่อพลาสติกเป็นรูปวงแหวน
ถ้าให้รัศมีของวงกลมภายในเป็น r เซนติเมตร
จะได้ รัศมีของวงกลมภายนอกเป็น $r + 1$ เซนติเมตร
และพื้นที่หน้าตัดของวงแหวนจะเท่ากับ $\pi(r + 1)^2 - \pi r^2$ ตารางเซนติเมตร
ดังนั้น ปริมาตรของท่อพลาสติกเท่ากับ $[\pi(r + 1)^2 - \pi r^2] \times h$ ลูกบาศก์เซนติเมตร

จะได้

$$\begin{aligned}
[\pi(r + 1)^2 - \pi r^2] \times h &= 55 \times 60 \\
\pi(r^2 + 2r + 1 - r^2) \times 60 &= 55 \times 60 \\
2r + 1 &= \frac{55}{\pi} \\
2r &\approx \frac{55 \times 7}{22} - 1 \\
&\approx \frac{35}{2} - 1 \\
&\approx \frac{33}{2} \text{ หรือ } 16.5
\end{aligned}$$

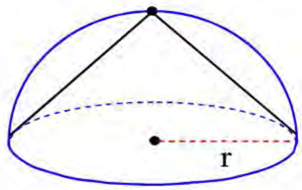
ดังนั้น ท่อพลาสติกมีเส้นผ่านศูนย์กลางภายในยาวประมาณ 16.5 เซนติเมตร

ตอบ ประมาณ 16.5 เซนติเมตร

แบบฝึกหัด 5.2

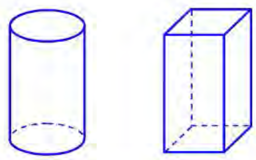
ในการทำแบบฝึกหัดต่อไปนี้ ให้นักเรียนเลือกใช้ค่า π ประมาณ $\frac{22}{7}$ หรือ 3.14 ตามความเหมาะสม

1. ตะกั่วทรงกลมสองลูก ลูกหนึ่งมีเส้นผ่านศูนย์กลางยาวเป็นสองเท่าของเส้นผ่านศูนย์กลางของอีกลูกหนึ่ง จงหาว่าปริมาตรของตะกั่วทรงกลมลูกใหญ่เป็นกี่เท่าของปริมาตรของตะกั่วทรงกลมลูกเล็ก

2. 

จากรูป กรวยแนบในครึ่งทรงกลมซึ่งมีรัศมียาว r เซนติเมตรได้พอดี จงหาอัตราส่วนของปริมาตรของครึ่งทรงกลมต่อปริมาตรของกรวย

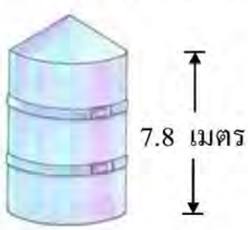
3. แก้วน้ำทรงกระบอกและแก้วน้ำปริซึมสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีความยาวรอบปากแก้วด้านในเท่ากัน



ถ้าแก้วทั้งสองมีความลึกเท่ากัน แก้วใดจุน้ำได้มากกว่า จงอธิบาย

4. ถ้านำลูกตุ้มเหล็กทรงกลมซึ่งมีรัศมี 3 เซนติเมตร 5 ลูก มาหลอมเป็นกรวยที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางของฐานกรวยยาว 6 เซนติเมตรและสูง 6 เซนติเมตรจะได้กรวยเหล็กกี่ลูก

5. ถังเก็บน้ำมันใบหนึ่งมีลักษณะดังรูป ส่วนที่เป็นทรงกระบอกมีรัศมีของฐานยาว 2.1 เมตร



สูง 7.8 เมตรและส่วนที่เป็นกรวยสูง 2.4 เมตร จงหาว่าถังใบนี้จุน้ำมันได้กี่บาร์เรล
(1 บาร์เรล $\approx$ 159 ลิตร)

6. ห้องฉายดาวของท้องฟ้าจำลองกรุงเทพ มียอดโดมเป็นครึ่งทรงกลม มีเส้นผ่านศูนย์กลาง

ภายในของส่วนโดมยาว 20.6 เมตร ฐานโดมเป็นทรงกระบอกสูง 3 เมตร จงหาพื้นที่ผิวภายในเฉพาะส่วนที่เป็นยอดโดม

7. แก้วน้ำทรงกระบอกใบหนึ่งมีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 10 เซนติเมตร ใส่น้ำสูง 5 เซนติเมตร ถ้านำลูกแก้วซึ่งมีรัศมี 0.5 เซนติเมตร จำนวน 60 ลูกใส่ลงในแก้วใบนี้ จะทำให้ระดับน้ำสูงขึ้นอีกเท่าไร

8. เสาเข็มคอนกรีตมีลักษณะเป็นปริซึมหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า แต่ละด้านของฐานยาว 8 เซนติเมตร เสาเข็มยาว 2.5 เมตร เสาเข็มมีรูกลวงตลอดเสาลักษณะเป็นทรงกระบอกขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 3 เซนติเมตร จงหาปริมาตรของคอนกรีตที่ใช้ทำเสาเข็มต้นนี้

9. ขณะที่น้ำแข็งลอยอยู่ในน้ำ $\frac{1}{8}$ ของปริมาตรของน้ำแข็งจะอยู่เหนือระดับน้ำ น้ำแข็งก้อนหนึ่งมีปริมาตร 2,112 ลูกบาศก์เซนติเมตร ถ้าใส่ลงในคูลเลอร์น้ำทรงกระบอกที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางภายในยาว 28 เซนติเมตร และมีความลึก 40 เซนติเมตร จงหาว่าจะต้องใส่น้ำไว้ในคูลเลอร์ให้ระดับน้ำต่ำกว่าปากขอบคูลเลอร์อย่างน้อยกี่เซนติเมตร จึงจะทำให้น้ำในคูลเลอร์ไม่ล้นออกมา

10. ต้องการนำเหล็กทรงกลมตันที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 14 เซนติเมตร มาหลอมทำเป็นทรงกลมลูกเล็กที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 4 เซนติเมตร จำนวน 49 ลูก ปรากฏว่ามีปริมาตรเหล็กไม่พอ จำเป็นต้องทำเป็นทรงกลมกลวง จงหาความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางภายในของทรงกลมลูกเล็กที่กลวง

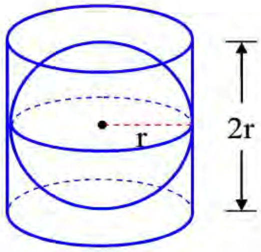
ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้

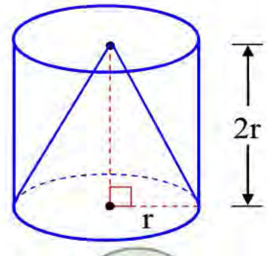
สัมพันธ์กันอย่างไร

กำหนดให้ รัศมีของทรงกลมและรัศมีของฐานของกรวยเท่ากับรัศมีของฐานของทรงกระบอกซึ่งเท่ากับ r หน่วย

เส้นผ่านศูนย์กลางของทรงกลมและความสูงของกรวยยาวเท่ากับความสูงของทรงกระบอกซึ่งเท่ากับ 2r หน่วย

จากเงื่อนไขดังกล่าว จะได้ทรงกลมและกรวยแนบในทรงกระบอกได้พอดี ดังรูป





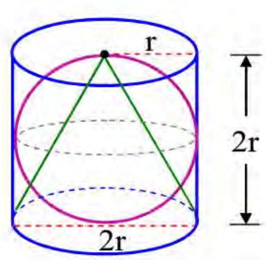
สัมพันธ์กันอย่างไร

ให้นักเรียนเขียนคำตอบเติมในช่องว่างต่อไปนี้

1. ปริมาตรของทรงกระบอก เท่ากับ...............ลูกบาศก์หน่วย
2. ปริมาตรของทรงกลม เท่ากับ...............ลูกบาศก์หน่วย
3. ปริมาตรของกรวย เท่ากับ...............ลูกบาศก์หน่วย
4. ปริมาตรของทรงกระบอก...............ผลบวกของปริมาตรของทรงกลมและปริมาตรของกรวย
5. อัตราส่วนของปริมาตรของกรวยต่อปริมาตรของทรงกลมต่อปริมาตรของทรงกระบอก เท่ากับ...............
6. พื้นที่ผิวของทรงกระบอก เท่ากับ...............ตารางหน่วย
7. พื้นที่ผิวของทรงกลม เท่ากับ...............ตารางหน่วย
8. พื้นที่ผิวของกรวย เท่ากับ...............ตารางหน่วย
9. อัตราส่วนของพื้นที่ผิวของกรวยต่อพื้นที่ผิวของทรงกลมต่อพื้นที่ผิวของทรงกระบอก เท่ากับ...............

จากกิจกรรมนี้จะเห็นว่า *ถ้าฐานของทรงกระบอกและฐานของกรวยมีรัศมีเท่ากับรัศมีของทรงกลม และมีความสูงเท่ากับความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของทรงกลมแล้ว ปริมาตรของทรงกระบอกจะเท่ากับผลบวกของปริมาตรของกรวยกับปริมาตรของทรงกลม* ซึ่งแสดงได้ดังนี้

กำหนดให้ r แทนรัศมีของฐานของทรงกระบอกและ 2r แทนความสูงของทรงกระบอก



จากสูตร ปริมาตรของทรงกระบอก $= \pi r^2 h$

เมื่อ $h = 2r$ จะได้ $\pi r^2 h = \pi r^2(2r)$

ดังนั้น ปริมาตรของทรงกระบอก $= 2\pi r^3$ ลูกบาศก์หน่วย

จากสูตร ปริมาตรของกรวย $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

เมื่อ $h = 2r$ จะได้ $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2(2r)$

ดังนั้น ปริมาตรของกรวย $= \frac{2}{3}\pi r^3$ ลูกบาศก์หน่วย

จากสูตร ปริมาตรของทรงกลม $= \frac{4}{3}\pi r^3$ ลูกบาศก์หน่วย

เนื่องจาก ปริมาตรของกรวย + ปริมาตรของทรงกลม $= \frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{4}{3}\pi r^3$

$= 2\pi r^3$

ดังนั้น ปริมาตรของทรงกระบอก = ปริมาตรของกรวย + ปริมาตรของทรงกลม

ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดต่อไปนี้

1. ถ้านำแท่งไม้ทรงกระบอกที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 2 นิ้วและสูง 2 นิ้ว มากลึงเป็นทรงกลม ทรงกลมที่มีขนาดใหญ่ที่สุดจะมีเส้นผ่านศูนย์กลางยาวเท่าไร และทรงกลมนี้มีปริมาตรเท่าไร

2. จากแท่งไม้ทรงกระบอกในข้อ 1 ถ้านำมากลึงเป็นกรวยให้ได้ฐานกรวยใหญ่ที่สุดและมีความสูงมากที่สุด ฐานของกรวยจะมีเส้นผ่านศูนย์กลางยาวเท่าไร และกรวยนี้มีปริมาตรเท่าไร

3. กรวยอันหนึ่งแนบในครึ่งทรงกลมได้พอดี อัตราส่วนของพื้นที่ผิวของครึ่งทรงกลมต่อพื้นที่ผิวของกรวยเป็นอย่างไร

4. ทรงกลมสองลูก ลูกหนึ่งมีรัศมีเป็นสองเท่าของรัศมีของอีกลูกหนึ่ง จงหาว่า
   1) พื้นที่ผิวของทรงกลมลูกใหญ่เป็นกี่เท่าของพื้นที่ผิวของทรงกลมลูกเล็ก
   2) ปริมาตรของทรงกลมลูกใหญ่เป็นกี่เท่าของปริมาตรของทรงกลมลูกเล็ก

5. ถ้าวัตถุทรงกลมและทรงกระบอกมีปริมาตรเท่ากัน เส้นผ่านศูนย์กลางของทรงกลมยาวเท่ากับเส้นผ่านศูนย์กลางของฐานทรงกระบอก จงหาว่าความสูงของทรงกระบอกคิดเป็นเศษส่วนเท่าไรของความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของทรงกลม

6. ขันน้ำครึ่งทรงกลมและกรวยกรอกน้ำมีเส้นผ่านศูนย์กลางของปากขันและปากกรวยเท่ากัน

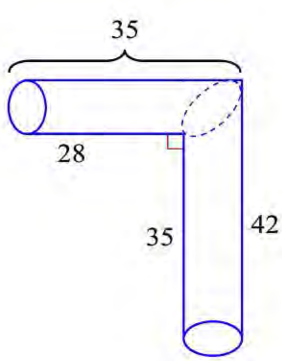
ถ้าความสูงของกรวยกรอกน้ำ (ไม่นับส่วนที่ยื่นมาเป็นทรงกระบอก) เท่ากับรัศมีของขันน้ำ อยากทราบว่าขันน้ำจุน้ำได้เป็นกี่เท่าของกรวยกรอกน้ำ

ทำได้ง่ายดี

ในการคำนวณหาปริมาตรของรูปเรขาคณิตสามมิติต่าง ๆ บางครั้งเราอาจใช้แนวคิดของการแปลงทางเรขาคณิตมาช่วยในการหาปริมาตรดังตัวอย่าง

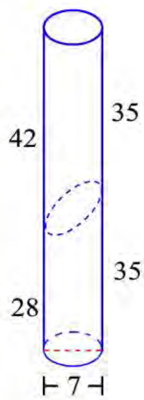
จงหาปริมาตรของรูปเรขาคณิตสามมิติต่อไปนี้

1. ธานีนำท่อระบายน้ำทรงกระบอกที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางภายในยาว 7 เซนติเมตร 2 ท่อนมาต่อกันดังรูป จงหาปริมาตรภายในท่อระบายน้ำนี้ (กำหนดหน่วยความยาวเป็นเซนติเมตรและให้ $\pi \approx \frac{22}{7}$)



ปัญหาปริมาตรทรงกระบอก

จากรูป ถ้าใช้แนวคิดของการหมุนให้ท่อมาต่อกันเป็นทรงกระบอก ดังรูป



จะได้ทรงกระบอกที่มีความยาว $35 + 35 = 70$ เซนติเมตร

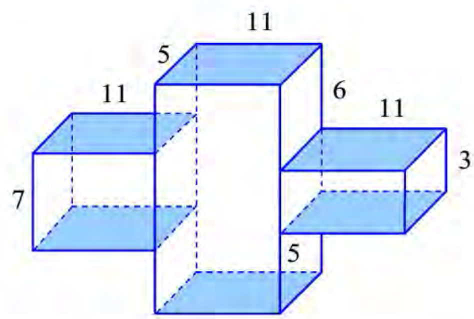
เนื่องจาก ปริมาตรของทรงกระบอก เท่ากับ $\pi r^2 h$

ดังนั้น ปริมาตรภายในท่อระบายน้ำประมาณ

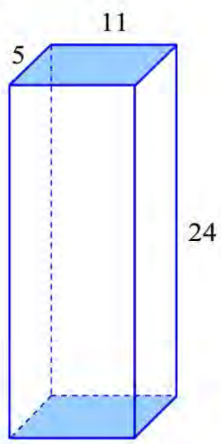
$$\frac{22}{7} \times (3.5)^2 \times 70$$

$$\approx 2{,}695$$ ลูกบาศก์เซนติเมตร

2. มณีมีแท่งไม้อยู่ชิ้นหนึ่ง มีลักษณะและขนาดดังรูป แท่งไม้ชิ้นนี้มีปริมาตรเท่าไร (กำหนดหน่วยความยาวเป็นเซนติเมตร)



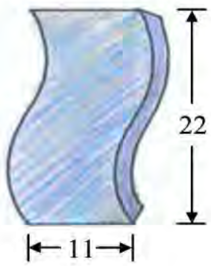
จากรูป ถ้าใช้แนวคิดของการเลื่อนขนานให้แท่งไม้มาต่อกันเป็นปริซึมฐานสี่เหลี่ยมมุมฉาก ดังรูป



จากรูป จะได้ปริซึมที่มีฐานกว้าง 5 เซนติเมตร ยาว 11 เซนติเมตร และได้ปริซึมสูงเท่ากับ $6 + 3 + 5 + 3 + 7 = 24$ เซนติเมตร

จะได้ปริมาตรของปริซึมนี้เป็น $5 \times 11 \times 24 = 1{,}320$ ลูกบาศก์เซนติเมตร
ดังนั้น แท่งไม้ชิ้นนี้มีปริมาตร 1,320 ลูกบาศก์เซนติเมตร

ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

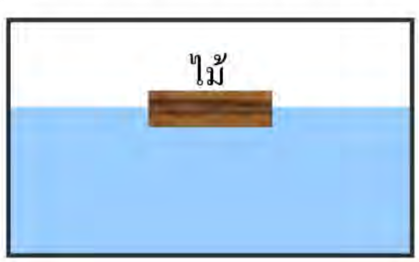


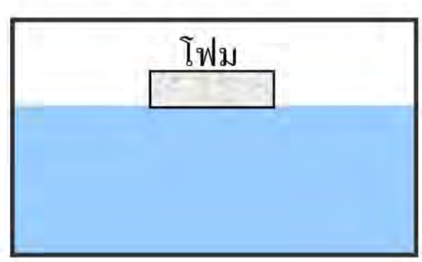
พงษ์ต้องการซื้ออิฐบล็อกปูพื้นมาปูลานหน้าบ้าน บริเวณที่จะปูอิฐมีขนาดกว้าง 3.3 เมตร ยาว 4.4 เมตร อิฐแต่ละก้อนมีขนาดกว้าง 11 เซนติเมตร ยาว 22 เซนติเมตร หนา 8 เซนติเมตร และหนักประมาณ 4.2 กิโลกรัม หน้าตัดของอิฐมีสีต่างกันและมีลักษณะ ดังรูป

1) อิฐแต่ละก้อนมีปริมาตรเท่าไร
2) ถ้าต้องการปูอิฐเรียงติดกันที่รอยต่อมีช่องว่างน้อยที่สุด พงษ์ต้องใช้อิฐอย่างน้อยกี่ก้อน
3) ถ้าพงษ์ไปซื้ออิฐตามจำนวนในข้อ 2) อิฐที่ซื้อมาทั้งหมดหนักประมาณกี่กิโลกรัม

ปริมาตรและความหนาแน่น

นักเรียนเคยสังเกตหรือไม่ว่า วัตถุบางชนิดเมื่อหย่อนลงในน้ำจะจมน้ำและบางชนิดก็จะลอยน้ำ การลอยน้ำของวัตถุแต่ละชนิดก็แตกต่างกันขึ้นอยู่กับว่า วัตถุนั้นทำด้วยสารชนิดใด สารสองชนิดที่มีปริมาตรเท่ากัน เมื่อหย่อนลงในน้ำ ส่วนที่จมอยู่ในน้ำก็ไม่เท่ากัน เช่น ไม้กับโฟมที่มีปริมาตรเท่ากัน ไม้บางชนิดจะมีส่วนที่อยู่เหนือน้ำเพียงเล็กน้อย แต่โฟมจะมีส่วนที่อยู่เหนือน้ำมากกว่า ทั้งนี้เพราะไม้มีความหนาแน่นมากกว่าความหนาแน่นของโฟม แต่สารทั้งสองชนิดนี้มีความหนาแน่นน้อยกว่าความหนาแน่นของน้ำ จึงลอยน้ำได้





ถ้าสารนั้นมีความหนาแน่นมากกว่าความหนาแน่นของน้ำ สารนั้นก็จะจมน้ำ เช่น แท่งเหล็ก

ความหนาแน่นของสารมีความสัมพันธ์กับมวลและปริมาตร ดังนี้

$$\text{ความหนาแน่น} = \frac{\text{มวล}}{\text{ปริมาตร}}$$

โดยทั่วไปนิยมใช้หน่วยวัดมวลของสารเป็นกิโลกรัม และใช้หน่วยวัดปริมาตรของสารเป็นลูกบาศก์เมตร ซึ่งจะได้หน่วยวัดความหนาแน่นของสารเป็นกิโลกรัมต่อลูกบาศก์เมตร ในทางปฏิบัติจะวัดมวลของสารที่กำหนดให้โดยการชั่งน้ำหนักสารนั้นว่าหนักเป็นกี่กิโลกรัม

ตารางต่อไปนี้แสดงความหนาแน่นของสารบางชนิดที่อุณหภูมิ 0 องศาเซลเซียสและความดัน 1 บรรยากาศ

สาร (ของแข็ง)	**ความหนาแน่น (กิโลกรัมต่อลูกบาศก์เมตร)**
เงิน	10.5×10^3
ทอง	19.3×10^3
ตะกั่ว	11.3×10^3
เหล็ก	7.8×10^3
อะลูมิเนียม	2.7×10^3
โซเดียม	0.97×10^3
ทองแดง	8.97×10^3

สาร (ของเหลว)	**ความหนาแน่น (กิโลกรัมต่อลูกบาศก์เมตร)**
ปรอท	13.6×10^3
น้ำทะเล	1.024×10^3
น้ำ (4^{o}C)	1.000×10^3
เอทิลแอลกอฮอล์	0.79×10^3
น้ำมันเบนซิน	0.68×10^3

สาร (ของแข็ง)	ความหนาแน่น (กิโลกรัมต่อลูกบาศก์เมตร)
แก้ว	$2.4 - 2.8 \times 10^3$
คอนกรีต	2.3×10^3
น้ำแข็ง	0.917×10^3
ไม้	$0.3 - 0.9 \times 10^3$
โฟม	0.10×10^3

สาร (แก๊ส)	ความหนาแน่น (กิโลกรัมต่อลูกบาศก์เมตร)
อากาศ	1.21
ฮีเลียม	0.179
คาร์บอน-ไดออกไซด์	1.98

โดยปกติถ้าวัตถุมีลักษณะเป็นปริซึม พีระมิด ทรงกระบอก กรวยและทรงกลม ก็สามารถใช้สูตรมาคำนวณหาปริมาตรได้ง่าย แต่ถ้าไม่สามารถหาปริมาตรของวัตถุนั้นได้โดยง่ายและวัตถุไม่ละลายน้ำ ก็ใช้การแทนที่น้ำตามหลักการทางวิทยาศาสตร์ กล่าวคือ *เมื่อนำวัตถุใส่ในอ่างน้ำที่มีน้ำเต็มอ่างและหย่อนวัตถุนั้นให้จมในอ่าง ปริมาตรของน้ำที่ล้นออกมาจะเท่ากับปริมาตรของวัตถุที่ลงไปแทนที่น้ำ หรือในกรณีที่มีบางส่วนของวัตถุจมอยู่ในน้ำ ปริมาตรของน้ำที่ล้นออกมาก็เท่ากับปริมาตรส่วนที่จมอยู่ในน้ำของวัตถุนั้น*

ในกรณีที่วัตถุละลายน้ำ ก็ใช้การแทนที่สารละลายอื่น ๆ ที่ไม่มีปฏิกิริยากับวัตถุนั้นและใช้หลักการเดียวกันกับการแทนที่น้ำ

จากความสัมพันธ์ข้างต้น เราสามารถนำมาใช้แก้ปัญหาได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 โลหะชนิดหนึ่งหนัก 3.9 กิโลกรัม เมื่อหย่อนโลหะจมลงในอ่างน้ำทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากซึ่งกว้าง 20 เซนติเมตร ยาว 25 เซนติเมตร ทำให้ระดับน้ำในอ่างสูงขึ้นกว่าเดิม 1 เซนติเมตร จงหาว่าโลหะชนิดนี้เป็นโลหะชนิดใด

วิธีทำ อ่างน้ำทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากกว้าง 20 เซนติเมตร และยาว 25 เซนติเมตร

เมื่อนำโลหะแทนที่ในน้ำทำให้ระดับน้ำสูงขึ้นกว่าเดิม 1 เซนติเมตร

ดังนั้น โลหะชนิดนี้มีปริมาตร $1 \times 20 \times 25 = 500$ ลูกบาศก์เซนติเมตร

หรือ 0.0005 ลูกบาศก์เมตร

เนื่องจากความหนาแน่น = $\frac{\text{มวล}}{\text{ปริมาตร}}$ และโลหะนี้หนัก 3.9 กิโลกรัม

จะได้ ความหนาแน่นเท่ากับ $\frac{3.9}{0.0005} = \frac{3.9}{5\times10^{-4}}$

$= \frac{3.9}{5}\times10^{4}$

$= 7.8\times10^{3}$ กิโลกรัมต่อลูกบาศก์เมตร

จากตารางข้อมูล โลหะที่มีความหนาแน่นเป็น 7.8×10^{3} กิโลกรัมต่อลูกบาศก์เมตร ได้แก่ เหล็ก

ตอบ โลหะนี้เป็นเหล็ก

ตัวอย่างที่ 2 ตะกั่วทรงกระบอกท่อนหนึ่งมีเส้นผ่านศูนย์กลางของฐานยาว 6 เซนติเมตร สูง 10 เซนติเมตร ตะกั่วมีความหนาแน่น 11.3×10^{3} กิโลกรัมต่อลูกบาศก์เมตร ตะกั่วท่อนนี้หนักเท่าไร (กำหนดให้ $\pi\approx3.14$)

วิธีทำ ให้ตะกั่วท่อนนี้หนัก x กิโลกรัม

ตะกั่วทรงกระบอกมีรัศมีเท่ากับ $\frac{6}{2} = 3$ เซนติเมตร

$= 0.03$ เมตร

สูง 10 เซนติเมตรหรือเท่ากับ 0.1 เมตร

เนื่องจากปริมาตรของทรงกระบอกเท่ากับ πr^2h

ดังนั้น ตะกั่วท่อนนี้มีปริมาตรเป็น $\pi\times(0.03)^2\times0.1$

$= 0.00009\pi$ ลูกบาศก์เมตร

ตะกั่วท่อนนี้มีความหนาแน่น 11.3×10^{3} กิโลกรัมต่อลูกบาศก์เมตร

เนื่องจาก ความหนาแน่น = $\frac{\text{มวล}}{\text{ปริมาตร}}$

จะได้ ความหนาแน่นของตะกั่ว = $\frac{x}{\text{ปริมาตรของตะกั่วทรงกระบอก}}$

x = ความหนาแน่นของตะกั่ว × ปริมาตรของตะกั่วทรงกระบอก

$x = 11.3\times10^{3}\times0.00009\pi$

$\approx 11{,}300\times0.00009\times3.14$

$$\approx \quad 3.19$$

นั่นคือ ตะกั่วท่อนนี้หนักประมาณ 3.19 กิโลกรัม

ตอบ ประมาณ 3.19 กิโลกรัม

ตัวอย่างที่ 3 นงรามเทน้ำบริสุทธิ์ที่มีอุณหภูมิ $4^{\circ}C$ ใส่ในถาดทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีขนาด $30 \times 50 \times 12$ ลูกบาศก์เซนติเมตร ไว้ประมาณ $\frac{3}{4}$ ของความจุของถาด เมื่อน้ำในถาดนี้เป็นน้ำแข็งจะได้น้ำแข็งมีปริมาตรกี่ลูกบาศก์เซนติเมตร

วิธีทำ ถาดน้ำมีขนาด $30 \times 50 \times 12 = 18{,}000$ ลูกบาศก์เซนติเมตร

ใส่น้ำไว้ในถาด $\frac{3}{4} \times 18{,}000 = 13{,}500$ ลูกบาศก์เซนติเมตร

คิดเป็นน้ำ $\frac{13{,}500}{10^6} = 0.0135$ ลูกบาศก์เมตร

เนื่องจากความหนาแน่นของน้ำบริสุทธิ์เท่ากับ 1×10^3 กิโลกรัมต่อลูกบาศก์เมตร

ซึ่งมีความหมายว่า น้ำ 1 ลูกบาศก์เมตรหนัก 10^3 กิโลกรัม

ดังนั้น น้ำในถาด 0.0135 ลูกบาศก์เมตรหนักเท่ากับ 0.0135×10^3

$$= 13.5 \text{ กิโลกรัม}$$

จากตาราง ความหนาแน่นของน้ำแข็งเท่ากับ 0.917×10^3 กิโลกรัมต่อลูกบาศก์เมตร

จะได้ $0.917 \times 10^3 = \dfrac{13.5}{\text{ปริมาตรของน้ำแข็ง}}$

ดังนั้น ปริมาตรของน้ำแข็ง $= \dfrac{13.5}{0.917 \times 10^3}$ ลูกบาศก์เมตร

หรือ $\dfrac{13.5}{0.917 \times 10^3} \times 10^6$ ลูกบาศก์เซนติเมตร

$\approx 14{,}722$ ลูกบาศก์เซนติเมตร

นั่นคือ จะได้น้ำแข็งมีปริมาตรประมาณ 14,722 ลูกบาศก์เซนติเมตร

ตอบ 14,722 ลูกบาศก์เซนติเมตร

ให้นักเรียนใช้ข้อมูลในตารางแสดงความหนาแน่นของสาร หน้า 182 – 183 หาคำตอบในแบบฝึกหัดต่อไปนี้

1. แท่งแก้วอันหนึ่งหนัก 1.8 กิโลกรัม ถ้าแก้วมีความหนาแน่น 2.5×10^3 กิโลกรัมต่อลูกบาศก์เมตร แท่งแก้วนี้จะมีปริมาตรเท่าไร
2. แท่งไม้ทรงลูกบาศก์หนัก 18.9 กิโลกรัม ถ้าไม้มีความหนาแน่น 0.7×10^3 กิโลกรัมต่อลูกบาศก์เมตร ไม้แท่งนี้มีด้านยาวด้านละกี่เซนติเมตร
3. แท่งอะลูมิเนียมทรงกระบอกมีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 21 เซนติเมตร สูง 10 เซนติเมตร จะหนักประมาณเท่าไร (กำหนดให้ $\pi \approx \frac{22}{7}$)
4. ลูกบอลลูนบรรจุแก๊สฮีเลียม 400 ลูกบาศก์เมตร จงหาว่าแก๊สที่บรรจุลงไปหนักกี่กิโลกรัม
5. ชลิตมีโลหะทรงกลมอยู่ 2 ลูก มีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 14 เซนติเมตรเท่ากัน ทรงกลมลูกหนึ่งเป็นตะกั่ว อีกลูกหนึ่งเป็นเหล็ก ทรงกลมลูกใดมีน้ำหนักมากกว่ากัน จงอธิบาย
6. น้ำมันเบนซินผสมสูตร A หนัก 48 กิโลกรัม บรรจุอยู่ภายในถังทรงกระบอกที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางภายในยาว 40 เซนติเมตร ระดับน้ำมันในถังมีความสูง 56 เซนติเมตร จงหาความหนาแน่นของน้ำมันเบนซินสูตรนี้ (กำหนดให้ $\pi \approx 3.14$)
7. รุ่งโรจน์พบโลหะแท่งหนึ่งหนัก 17.94 กิโลกรัม เขาอยากทราบว่าโลหะแท่งนี้เป็นสารชนิดใด จึงนำโลหะไปแทนที่น้ำในอ่างทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากซึ่งกว้าง 25 เซนติเมตร ยาว 40 เซนติเมตร ปรากฏว่ามีระดับน้ำสูงขึ้น 2 เซนติเมตร จงหาว่าโลหะชนิดนี้เป็นสารชนิดใด
8. นักวิเคราะห์ทางเคมีคนหนึ่ง ได้รับวัตถุมาก้อนหนึ่งซึ่งเขาคิดว่าน่าจะเป็นโซเดียม จึงได้ตรวจสอบโดยนำวัตถุนั้นไปชั่งหาน้ำหนักได้ 145.5 กรัม เมื่อนำไปใส่ในปริซึมฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ด้านแต่ละด้านยาว 10 เซนติเมตร และใส่สารละลายที่ไม่ทำปฏิกิริยากับโซเดียมไว้ ถ้าวัตถุนี้เป็นโซเดียมจะทำให้สารละลายในปริซึมสูงขึ้นเท่าใด

คิดเล่นเย็นใจ

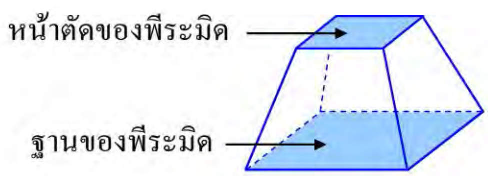
ทวีปแอนตาร์กติกา อยู่ทางขั้วโลกใต้ นักวิทยาศาสตร์ประมาณว่า 97.6% ของพื้นทวีปอันกว้างใหญ่ไพศาลประมาณ 13 ล้านตารางกิโลเมตร ปกคลุมด้วยน้ำแข็งซึ่งมีความหนาเฉลี่ย 5 กิโลเมตรตลอดทั้งปี นักธรณีวิทยาประมาณว่า หากน้ำแข็งที่ปกคลุมทวีปนี้ละลายหมด ระดับน้ำทะเลทั่วโลกจะสูงขึ้นประมาณ 60 เมตร นั่นหมายถึงว่าบรรดาเมืองต่าง ๆ ที่ตั้งอยู่ริมฝั่งทะเลจะจมน้ำหมด จงหาปริมาตรของน้ำแข็งทั้งหมดของทวีปแอนตาร์กติกา

เกาะน้ำแข็ง

เมื่อเดือนมกราคม พ.ศ. 2538 M. Thomson นักวิทยาศาสตร์สัญชาติอเมริกัน ได้สังเกตเห็นเกาะขนาดใหญ่ในทะเล Larsen จากภาพถ่ายที่ได้จากดาวเทียม NOAA แสดงให้เห็นว่า เกาะน้ำแข็งนี้ได้แตกตัวจากทวีปน้ำแข็ง โดยมีความหนาถึง 180 เมตร กว้าง 37 กิโลเมตร และยาว 77 กิโลเมตร โดยประมาณ นักวิทยาศาสตร์เชื่อว่า เกาะน้ำแข็งนี้เกิดจากอิทธิพลของปรากฏการณ์เรือนกระจก ที่ทำให้ดินฟ้าอากาศเหนือทวีปแอนตาร์กติกาอบอุ่นขึ้น 2.5°C และมีผลทำให้ปริมาณพืชบนทวีปได้เพิ่มขึ้นจากเดิมถึง 25 เท่า

นักเรียนคำนวณได้หรือไม่ว่า เกาะน้ำแข็งนี้หนักประมาณกี่ล้านตัน

พีระมิดยอดตัดและกรวยยอดตัด



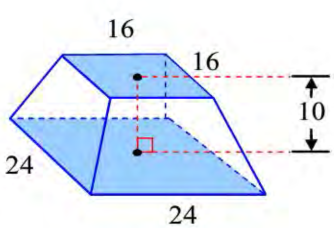
พีระมิดยอดตัด

ถ้านักเรียนลองสังเกตสิ่งก่อสร้าง วัสดุประดิษฐ์ หรือเครื่องใช้สอยต่าง ๆ อาจพบว่า หลายสิ่งมีลักษณะเป็นพีระมิดยอดตัด ซึ่งมีลักษณะดังรูป

พีระมิดยอดตัดอาจได้จากการนำระนาบไปตัดพีระมิดในแนวขนานกับฐานของพีระมิด

วิธีหาปริมาตรของพีระมิดยอดตัดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสสามารถทำได้โดยใช้ความรู้เกี่ยวกับอัตราส่วนและสมบัติของรูปสามเหลี่ยมคล้าย ดังตัวอย่าง

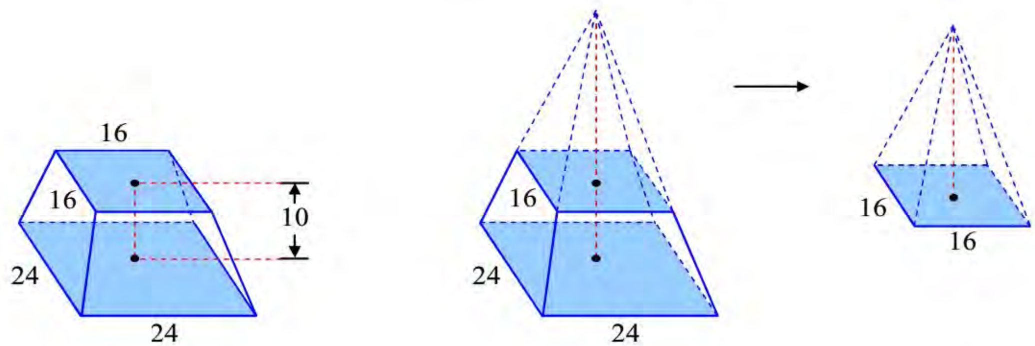
ตัวอย่าง



จากรูป กำหนดให้พีระมิดยอดตัดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส สูง 10 หน่วย ฐานของพีระมิดยอดตัดยาวด้านละ 24 หน่วย และหน้าตัดมีด้านยาวด้านละ 16 หน่วย จงหาปริมาตรของพีระมิดยอดตัดนี้

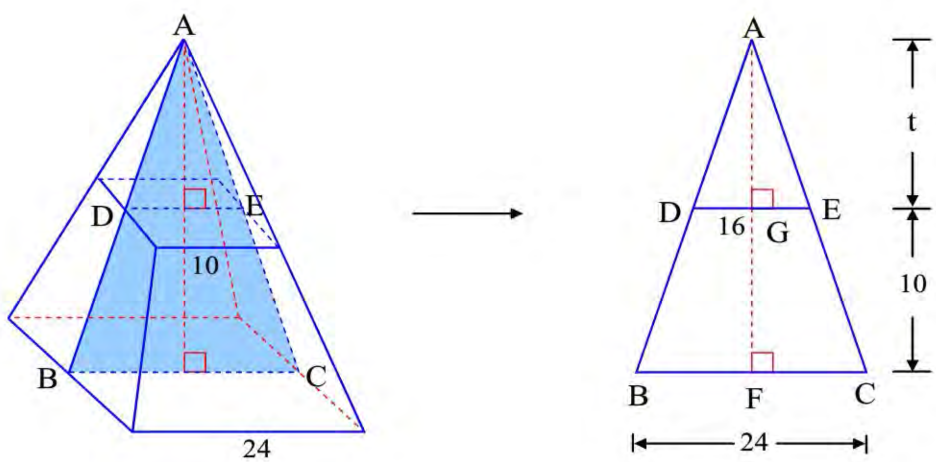
แนวคิด

การคำนวณหาปริมาตรของพีระมิดยอดตัดดังรูป ก อาจทำได้โดยพิจารณารูปนี้ให้เป็นส่วนหนึ่งของพีระมิดก่อนตัดยอดดังรูป ข แล้วหาความสัมพันธ์ระหว่างปริมาตรของพีระมิดก่อนตัดยอดและปริมาตรของพีระมิดส่วนที่ถูกตัดออกไป ดังรูป ค ดังนี้



รูป ก รูป ข รูป ค

วิธีทำ ใช้ระนาบตัดพีระมิดรูป ข ในแนวตั้งฉากกับฐานผ่านจุดยอดของพีระมิด จะได้ ΔABC เป็นหน้าตัดบนระนาบและเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ดังรูป



เนื่องจาก หน้าตัดของพีระมิดยอดตัดขนานกับฐาน

จะได้ $\overline{DE}$ ขนานกับ $\overline{BC}$ ΔABC และ ΔADE เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

จากโจทย์ กำหนดให้ BC = 24 หน่วย GF = 10 หน่วย และ

DE = 16 หน่วย

กำหนดให้ $\overline{AF}$ แทนส่วนสูงของ $\Delta\,ABC$ และให้ $\overline{AG}$ ยาว t หน่วย

จาก $\Delta\,AFC$ จะได้ $FC = \frac{24}{2} = 12$ หน่วย และ $\overline{AF}$ สูง $t + 10$ หน่วย

จาก $\Delta\,AGE$ จะได้ $GE = \frac{16}{2} = 8$ หน่วย และ $\overline{AG}$ สูง t หน่วย

เนื่องจาก $\overline{GE}$ ขนานกับ $\overline{FC}$

ดังนั้น $\Delta\,AFC \sim \Delta\,AGE$

จะได้

$$\begin{aligned}
\frac{FC}{GE} &= \frac{AF}{AG} \\
\frac{12}{8} &= \frac{t+10}{t} \\
12t &= 8(t+10) \\
12t &= 8t + 80 \\
12t - 8t &= 80 \\
4t &= 80 \\
t &= \frac{80}{4} \\
&= 20
\end{aligned}$$

นั่นคือ $AF = 20 + 10 = 30$ หน่วย

จากสูตรการหาปริมาตรของพีระมิด เท่ากับ $\frac{1}{3} \times$ พื้นที่ฐาน $\times$ ความสูง

จะได้ ปริมาตรของพีระมิดรูป ข เท่ากับ $\frac{1}{3} \times 24^2 \times 30$

$= 5,760$ ลูกบาศก์หน่วย

ปริมาตรของพีระมิดรูป ค เท่ากับ $\frac{1}{3} \times 16^2 \times 20$

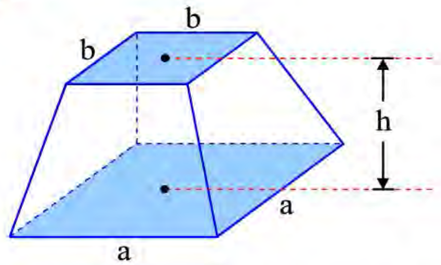
$\approx 1,706.7$ ลูกบาศก์หน่วย

ดังนั้น ปริมาตรของพีระมิดยอดตัดประมาณ $5,760 - 1,706.7$

$\approx 4,053.3$ ลูกบาศก์หน่วย

ตอบ ประมาณ 4,053.3 ลูกบาศก์หน่วย

ลองพิสูจน์ดู



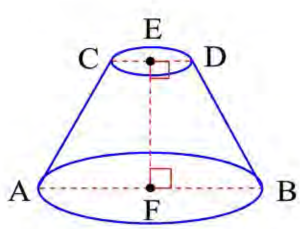
โดยทั่วไป เมื่อกำหนดพีระมิดยอดตัดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสให้ฐานมีความยาวด้านละ a หน่วย หน้าตัดมีความยาวด้านละ b หน่วย และสูง h หน่วย ตามวิธีการดังตัวอย่างข้างต้น ให้นักเรียนพิสูจน์ว่าสูตรการหาปริมาตรของพีระมิดยอดตัดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสเป็นดังนี้

ปริมาตรของพีระมิดยอดตัดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส $= \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$

ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดต่อไปนี้

1. ถ้าใช้ระนาบตัดพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสอันหนึ่งในแนวขนานกับฐาน โดยตัดปลายยอดออกครึ่งหนึ่งของความสูงของพีระมิด อัตราส่วนของปริมาตรของพีระมิดส่วนยอดที่ตัดออกไปต่อปริมาตรของพีระมิดยอดตัด จะเท่ากับอัตราส่วนใด

2. ให้นักเรียนใช้วิธีการในทำนองเดียวกันกับการหาปริมาตรของพีระมิดยอดตัดในตัวอย่างข้างต้น หาปริมาตรของกรวยยอดตัดที่มีขนาดดังนี้



กรวยยอดตัดมี $\overline{AB}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของฐานยาว 18 เซนติเมตร $\overline{CD}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของส่วนปลายที่ถูกตัดยาว 6 เซนติเมตร $\overline{EF}$ เป็นส่วนสูงของกรวยยอดตัดยาว 12 เซนติเมตร (กำหนดให้ $\pi \approx 3.14$)

3. ถ้าใช้ระนาบตัดกรวยอันหนึ่งในแนวขนานกับฐาน โดยตัดปลายยอดออกครึ่งหนึ่งของความสูงของกรวยอันนี้ อัตราส่วนของปริมาตรของกรวยส่วนยอดที่ตัดออกไปต่อปริมาตรของกรวยยอดตัดจะเท่ากับอัตราส่วนใด

4. พีระมิดยอดตัดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสอันหนึ่งสูง 12 เซนติเมตร ฐานมีความยาวด้านละ 20 เซนติเมตร หน้าตัดมีความยาวด้านละ 15 เซนติเมตร จงหาปริมาตรของพีระมิดยอดตัดนี้

5. กระถางปลูกต้นไม้มีลักษณะเป็นพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสยอดตัด ส่วนฐานล่างยาวด้านละ 20 นิ้ว ส่วนบนปากกระถางยาวด้านละ 30 นิ้ว กระถางสูง 12 นิ้ว กระถางใบนี้จุดินได้เต็มพอดีกี่ลูกบาศก์นิ้ว

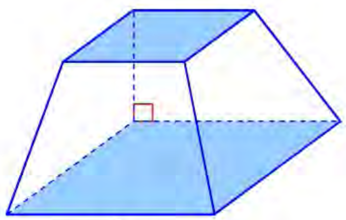
6. กรวยอันหนึ่งสูง 40 เซนติเมตร รัศมีของฐานยาว 28 เซนติเมตร ถ้าใช้ระนาบตัดกรวยให้ขนานกับฐานและให้ห่างจากจุดยอดกรวย 10 เซนติเมตร จงหาปริมาตรของกรวยยอดตัดนี้ (กำหนดให้ $\pi \approx \frac{22}{7}$)

7. จิตราให้ช่างหล่อคอนกรีตเป็นกรวยยอดตัดสำหรับปักร่มขนาดใหญ่ไว้ใช้ที่สนามดังรูป ถ้ากรวยยอดตัดอันนี้สูง 30 เซนติเมตร รัศมีของฐานยาว 18 เซนติเมตร และรัศมีของฐานกรวยที่ตัดออกไปยาว 10 เซนติเมตร ถ้าเจาะรูผ่านจุดศูนย์กลางของฐานกรวยมาถึงยอดตัดเป็นรูทรงกระบอกที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 4.2 เซนติเมตรและมีความสูงเท่ากับความสูงของกรวยยอดตัด จงหาปริมาตรของคอนกรีตที่นำมาหล่อกรวยยอดตัดนี้ (กำหนดให้ $\pi \approx \frac{22}{7}$)

เขาคิดอย่างไร

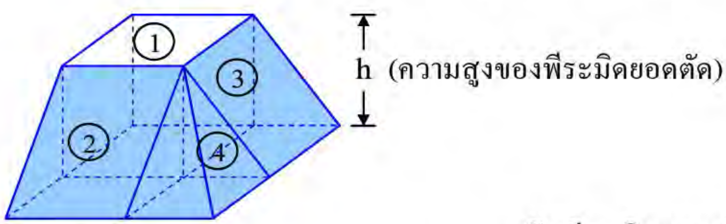
เมื่อหลายพันปีมาแล้วชาวอียิปต์โบราณค้นพบวิธีหาปริมาตรของพีระมิดยอดตัด ซึ่งในยุคนั้นนักคณิตศาสตร์ถือเป็นผลงานที่ยิ่งใหญ่เรื่องหนึ่งที่รู้จักกัน โดยใช้การแบ่งพีระมิดยอดตัดออกเป็นรูปเรขาคณิตสามมิติที่ง่ายต่อการหาปริมาตร

การหาปริมาตรของพีระมิดยอดตัดของชาวอียิปต์โบราณมีแนวคิดดังตัวอย่างต่อไปนี้



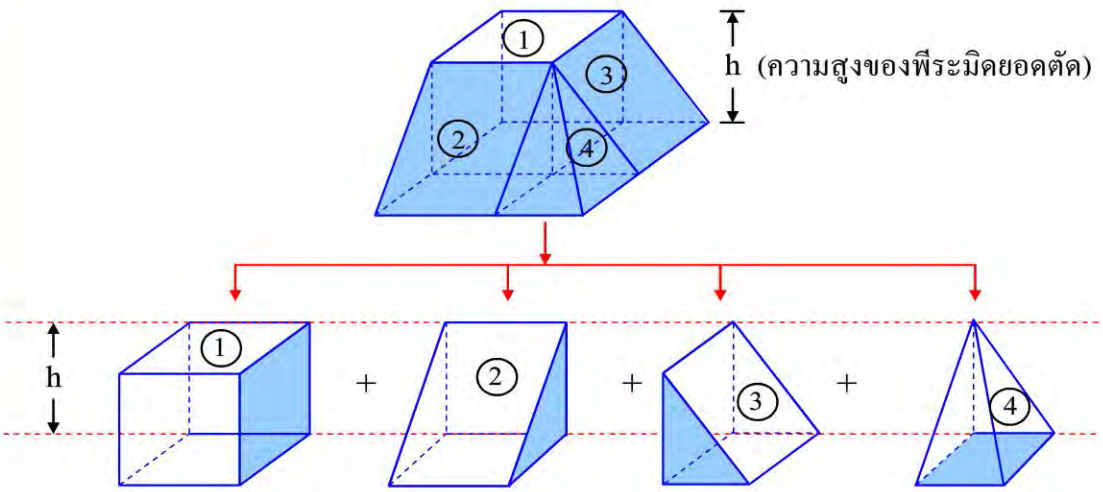
รูป ก

กำหนดพีระมิดยอดตัดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปหนึ่ง ให้สันของพีระมิดเส้นหนึ่งตั้งฉากกับฐาน ซึ่งจะมีความยาวเท่ากับความสูงของพีระมิดยอดตัด ดังรูป ก (ในที่นี้ สันนิษฐานว่าชาวอียิปต์โบราณทราบว่าปริมาตรของพีระมิดที่มีพื้นที่ฐานเท่ากันและความสูงเท่ากัน จะมีปริมาตรเท่ากัน)

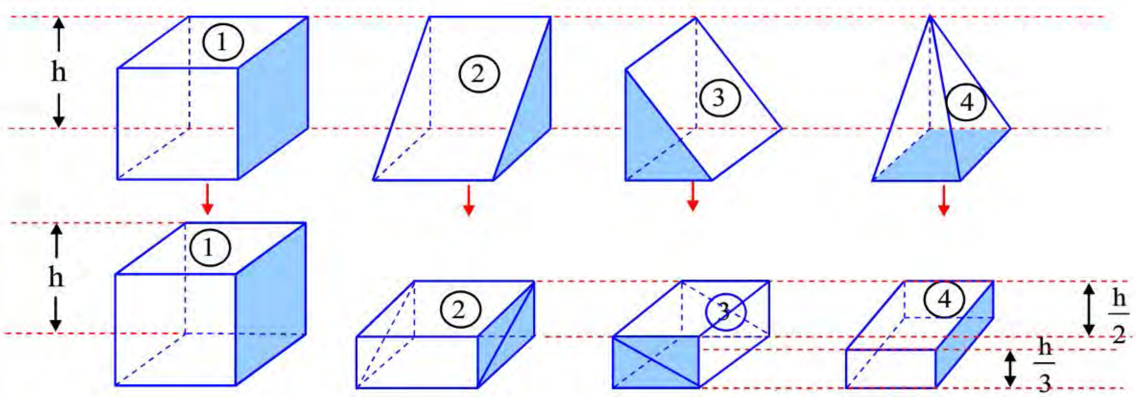


รูป ข

ตัดพีระมิดยอดตัดนี้ด้วยระนาบในแนวตั้งฉากกับฐานเป็นรูปเรขาคณิตสามมิติ 4 รูป ดังรูป ข ความสูงของรูปเรขาคณิตสามมิติทั้งสี่รูปมีความสัมพันธ์กับความสูง (h) ของพีระมิดยอดตัดที่กำหนดให้ดังนี้



ในการคำนวณหาปริมาตรของรูปที่ 2 และรูปที่ 3 ซึ่งเป็นปริซึมฐานสามเหลี่ยม จะวิเคราะห์จากรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีปริมาตรเท่ากัน และคำนวณหาปริมาตรของรูปที่ 4 จากการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ตามสูตรการหาปริมาตรระหว่างปริซึมและพีระมิด ดังรูปต่อไปนี้



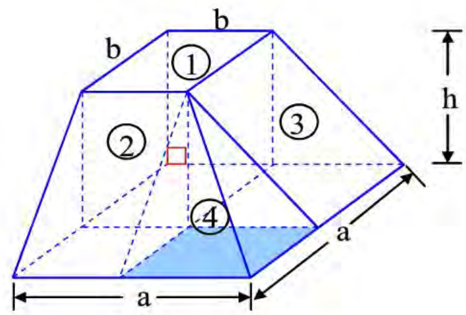
จะเห็นว่าทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากแต่ละรูปที่ได้นี้มีความสูงสัมพันธ์กับความสูงของพีระมิดยอดตัดดังนี้

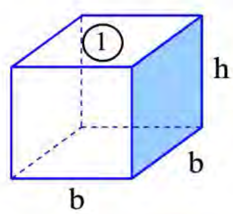
ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากรูปที่ ① สูง h หน่วย

ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากรูปที่ ② และรูปที่ ③ สูง $\frac{h}{2}$ หน่วย

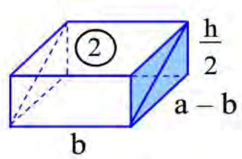
ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากรูปที่ ④ สูง $\frac{h}{3}$ หน่วย

จากแนวคิดข้างต้น ถ้ามีพีระมิดยอดตัดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสสูง h หน่วย ฐานของพีระมิดมีด้านยาวด้านละ a หน่วยและหน้าตัดมีด้านยาวด้านละ b หน่วย สามารถหาปริมาตรของพีระมิดยอดตัดได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

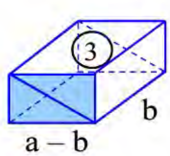




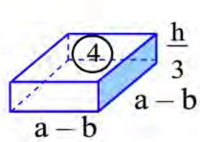
ปริมาตรของรูปที่ ① เท่ากับ b^2h



ปริมาตรของรูปที่ ② เท่ากับ $\frac{h}{2} \times (a - b)b$



ปริมาตรของรูปที่ ③ เท่ากับ $\frac{h}{2} \times (a - b)b$



ปริมาตรของรูปที่ ④ เท่ากับ $\frac{h}{3} \times (a - b)^2$

จะได้ปริมาตรของพีระมิดยอดตัดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส

$$= b^2h + 2\left\{\frac{h}{2}(a-b)b\right\} + \frac{h}{3}(a-b)^2$$

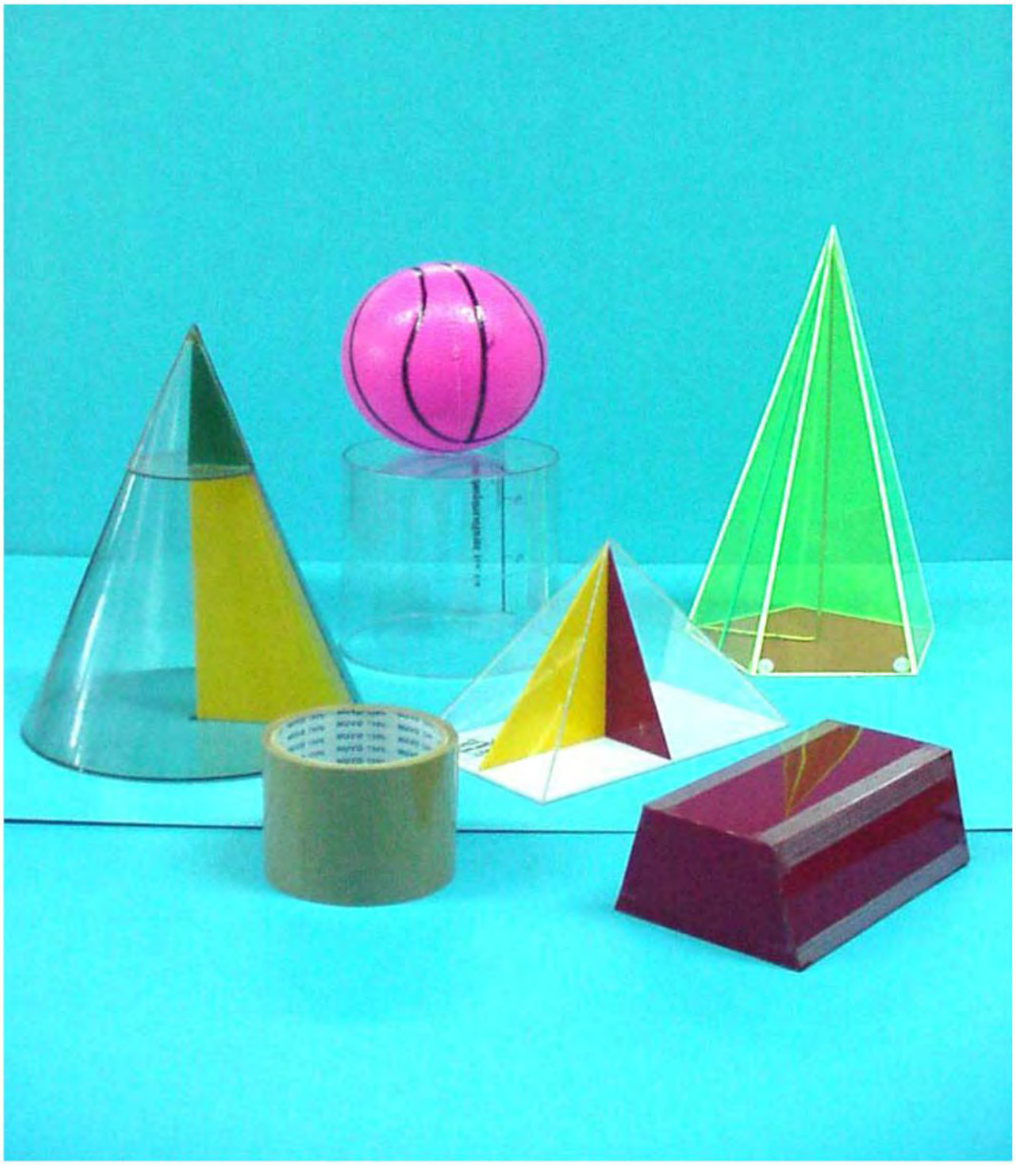
$$= b^2h + h(ab - b^2) + \frac{h}{3}(a^2 - 2ab + b^2)$$

$$= \cancel{b^2h} + abh - \cancel{b^2h} + \frac{a^2h}{3} - \frac{2abh}{3} + \frac{b^2h}{3}$$

$$= \frac{a^2h}{3} + \frac{abh}{3} + \frac{b^2h}{3}$$

$$= \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$$

นั่นคือ ปริมาตรของพีระมิดยอดตัดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสสูง h หน่วย ฐานมีด้านยาวด้านละ a หน่วยและหน้าตัดมีด้านยาวด้านละ b หน่วย เท่ากับ $\frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$



บรรณานุกรม

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2540). **คู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์ รายวิชา ค 011 ชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533).** พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2540). **คู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์ รายวิชา ค 012 ชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533).** พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2540). **คู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์ รายวิชา ค 204 คณิตศาสตร์ 4 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่สอง หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533).** พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2547). **หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้พื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม 1 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 .** พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2547). **หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้พื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม 2 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 .** พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2547). **หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้พื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม 2 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 .** พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2547). **หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 2 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 .** พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2548). **หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้พื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม 1 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 .** พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2548). **หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 1 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 .** พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว

Balch, Kay., and others. (1993). **Mathematics Applications and Connections , Course 1.** U.S.A. : Me Graw – Hill Publishing Company.

Bourke A., and others. (2000). **Cornerstone Mathematics Second Edition Book 1.** Australia. : Addison Wesley Longman.

Charles, Randall I., and others. (1995). **Addison – Wesley Mathematics Grade7 : Teacher's Edition.** New York, U.S.A. : Addison – Wesley Publishing Company, Inc.

Denholm, Richard A. (1970). **Mathematics : Man's key to Progress.** California, U.S.A. : California State Department of Education.

Fey, James T., and others. (1998). **Covering and Surrounding : Two-Dimensional Measurement.** U.S.A. : Dale Seymour Publications.

Fey, James T., and others. (1998). **Filling and Wrapping : Three-Dimensional Measurement.** U.S.A. : Dale Seymour Publications.

Fey, James T., and others. (1998). **Frogs, Fleas, and Painted Cubes : Quadratic Relationships.** U.S.A. : Dale Seymour Publications.

Hong ,Tay Choon, and others. (2001). **New Mathematics Counts For Secondary Normal (Academic) 1 – 4.** Singapore : Federal Publications.

Lial, Margaret L. and others. (1988). **Intermediate Algebra. 5 th.** U.S.A. : Scott, Foresman and Company.

Rising, Gerald R., and others. (1989). **Houghton Mifflin Unified Mathematics, Book 2.** Boston, MA. U.S.A. : Houghton Mifflin Company.

Serra, Michael. (1993). **Discovering Geometry An Inductive Approach.** Berkeley, U.S.A. : Key Curriculum Press.

Serra, Michael. (2003). **Discovering Geometry An Inductive Approach, Third Edition : Teacher's Edition.** Emeryville, U.S.A. : Key Curriculum Press.

ภาคผนวก

บัญชีศัพท์

บทที่ 1

กรณฑ์	radical
รากที่สอง	square root
ค่าสัมบูรณ์	absolute value

บทที่ 2

ทฤษฎีบทเศษเหลือ	remainder theorem

บทที่ 4

พาราโบลา	parabola
แกนสมมาตร	axis of symmetry
จุดสูงสุด	maximum point
จุดต่ำสุด	minimum point

บทที่ 5

พื้นที่ผิว	surface area
พีระมิด	pyramid
กรวย	cone
ทรงกลม	sphere
ทรงกระบอก	cylinder
ส่วนสูงเอียง	slant height
ปริซึม	prism
พีระมิดยอดตัด	frustum of a pyramid

บัญชีสัญลักษณ์

$\sqrt{a}$	รากที่สองที่เป็นบวกของ a หรือกรณฑ์ที่สองของ a
$\lvert a \rvert$	ค่าสัมบูรณ์ของ a
$\sim$	คล้ายกับ

คณะกรรมการจัดทำสื่อการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

นางสาวลัดดาวัลย์ เพ็ญสุภา	มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์
นายปรีชา เนาว์เย็นผล	มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช
นางสาวอัมพร ม้าคนอง	จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
นายสมนึก บุญพาไสว	นักวิชาการอิสระ
นางจารุนี สูตะบุตร	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นายสมพล เล็กสกุล	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางปิยรัตน์ จาตุรันตบุตร	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางอารียา สุวรรณคำ	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางเจริญศรี จันไพบูลย์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวจารุวรรณ แสงทอง	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวปานทอง กุลนาถศิริ	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางชุลีพร สุภธีระ	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวรจนา รัตนานิคม	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นายสุรัชน์ อินทสังข์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาววันดี ตีระสหกุล	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวคนิตา ชื่นอารมณ์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวพิลาลักษณ์ ทองทิพย์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นายทมะ ดวงนามล	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

คณะบรรณาธิการ

นายสมพล เล็กสกุล	นางสาวจารุวรรณ แสงทอง
นางปิยรัตน์ จาตุรันตบุตร	นางชุลีพร สุภธีระ
	นางสาวปานทอง กุลนาถศิริ

คณะบรรณาธิการดำเนินงานปรับปรุงหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์

นายดนัย ยังคง
นางสาวลัดดาวัลย์ เพ็ญสุภา
นายปรีชา เนาว์เย็นผล
นางชมัยพร ตั้งตน
นางสุวรรณา คล้ายกระแส
นางสาวอัมพร ม้าคนอง

ภาพ

นางวรพรรณ ทิณพงษ์
นางสาวดนพร จรัสแสงสกุล

ผู้จัดพิมพ์ต้นฉบับ

นางสาวเสาวนีย์ ประมูลทรัพย์

พิมพ์ที่โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว นายสันติภาพ อินทรพัฒน์ ผู้พิมพ์และผู้โฆษณา พ.ศ. 2554

คำสำคัญในการสืบค้น

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

ศึกษาภัณฑ์พาณิชย์
พิมพ์ที่โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว
นายสันติภาพ อินทรพัฒน์ ผู้พิมพ์โฆษณา
๕๕๐๐๐๓๐
www.suksapan.or.th