คู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติม

คณิตศาสตร์ เล่ม ๒

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๓

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑

กระทรวงศึกษาธิการ

สสวท

๑๐๕.-

คู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติม
คณิตศาสตร์ เล่ม ๒
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๓

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑

จัดทำโดย

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

กระทรวงศึกษาธิการ

ISBN 978-974-01-9854-3

พิมพ์ครั้งที่หนึ่ง ๓,๐๐๐ เล่ม

พ.ศ. ๒๕๕๔

องค์การค้าของ สกสค. จัดพิมพ์จำหน่าย

พิมพ์ที่โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว

๒๒๔๙ ถนนลาดพร้าว วังทองหลาง กรุงเทพมหานคร

ประกาศสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน
เรื่อง อนุญาตให้ใช้สื่อการเรียนรู้ในสถานศึกษา

ด้วยสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีได้จัดทำโครงสร้างหลักสูตรรายวิชาเพิ่มเติมและจัดทำคู่มือครู รายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม ๒ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๓ สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐานได้พิจารณาแล้ว อนุญาตให้ใช้ในสถานศึกษาได้

ประกาศ ณ วันที่ ๑๕ ธันวาคม พ.ศ. ๒๕๕๔

(นายชินภัทร ภูมิรัตน)
เลขาธิการคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน

คำนำ

คู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม ๒ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๓ นี้ สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีจัดทำขึ้น สำหรับให้ครูผู้สอนเลือกใช้ประกอบการเรียนการสอนควบคู่กับหนังสือเรียน ตามโครงสร้างหลักสูตรรายวิชาเพิ่มเติมที่ประกอบด้วยคำอธิบายรายวิชาที่มีทั้งผลการเรียนรู้ และสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม โดยให้พิจารณาเทียบเคียงกับหลักสูตรของสถานศึกษา และเลือกใช้ประกอบการเรียนการสอน เพื่อเป็นแนวทางในการสอนคณิตศาสตร์ และออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้ ให้ผู้เรียนสามารถนำไปใช้แก้ปัญหาและพัฒนาทักษะการเรียนรู้นำไปสู่ทักษะการคิดวิเคราะห์ สังเคราะห์ ตามความสามารถและความแตกต่างระหว่างบุคคลของผู้เรียนได้ ในการจัดทำคู่มือครู รายวิชาเพิ่มเติมเล่มนี้ ได้รับความร่วมมือจากคณาจารย์ ผู้ทรงคุณวุฒิ ผู้เชี่ยวชาญด้านคณิตศาสตร์จากสถาบันต่าง ๆ ทั้งภาครัฐและเอกชนเป็นอย่างดี

สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน หวังเป็นอย่างยิ่งว่าคู่มือครูเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการจัดการเรียนรู้ เพื่อประยุกต์ใช้พัฒนาการเรียนรู้ได้อย่างเหมาะสม ขอขอบคุณสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ตลอดจนบุคคลและหน่วยงานที่มีส่วนเกี่ยวข้องในการจัดทำหนังสือไว้ ณ โอกาสนี้

(นายชินภัทร ภูมิรัตน)
เลขาธิการคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน

คำชี้แจง

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้รับมอบหมายจากกระทรวงศึกษาธิการ ให้พัฒนาหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ ของกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ กลุ่มสาระการเรียนรู้วิทยาศาสตร์ รวมทั้งสาระการออกแบบและเทคโนโลยี และสาระเทคโนโลยีสารสนเทศในกลุ่มสาระการเรียนรู้การงานอาชีพและเทคโนโลยี ตลอดจนจัดทำสื่อการเรียนรู้ตามหลักสูตรดังกล่าว

คู่มือครูเล่มนี้จัดทำขึ้นสำหรับใช้ประกอบการสอนควบคู่กับหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๓ เล่ม ๒ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ เพื่อให้ครูผู้สอนใช้เป็นแนวทางในการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ให้ผู้เรียนบรรลุตามมาตรฐานการเรียนรู้ที่กำหนดไว้ ซึ่งในแต่ละบทจะประกอบด้วย สาระการเรียนรู้ จุดประสงค์ประจำบท แนวทางในการจัดการเรียนรู้ เอกสารแนะนำการจัดกิจกรรม ข้อเสนอแนะในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน เฉลยแบบฝึกหัดและกิจกรรม กิจกรรมเสนอแนะและแบบฝึกหัดเพิ่มเติม เพื่อให้เป็นประโยชน์ในการเตรียมการสอน ในส่วนของแบบฝึกหัดนั้นมีการเสนอแนะแนวคิดหลายแนวสำหรับข้อที่สามารถคิดหาคำตอบได้หลายวิธี นอกจากนี้ในหัวข้อเรื่องที่เป็นปัญหาได้เสนอความรู้เพิ่มเติมสำหรับครูไว้ด้วย

ในการจัดทำคู่มือครูเล่มนี้ สสวท. ได้รับความร่วมมืออย่างดียิ่งจากคณะอาจารย์จากโรงเรียนและมหาวิทยาลัย สสวท. จึงขอขอบคุณทุกท่านไว้ ณ ที่นี้ และหวังเป็นอย่างยิ่งว่าคู่มือครูเล่มนี้จะเป็นประโยชน์สำหรับครูผู้สอนคณิตศาสตร์ ให้สามารถนำไปใช้ หรือปรับใช้ให้เหมาะสมกับศักยภาพของผู้เรียน

หากมีข้อเสนอแนะใดที่จะทำให้คู่มือครูเล่มนี้สมบูรณ์ยิ่งขึ้นโปรดแจ้ง สสวท. ทราบด้วย จักขอบคุณยิ่ง

(นางพรพรรณ ไวทยางกูร)
ผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

คำอธิบายรายวิชาเพิ่มเติม

คณิตศาสตร์เล่ม ๒ **กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์**

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๓ ภาคเรียนที่ ๒ **เวลา ๖๐ ชั่วโมง จำนวน ๑.๕ หน่วยกิต**

ศึกษา และฝึกทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์อันได้แก่ การแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์ และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ ในสาระต่อไปนี้

การให้เหตุผลเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม สมบัติเกี่ยวกับวงกลม การให้เหตุผลเกี่ยวกับการสร้างรูปเรขาคณิต

ระบบสมการ การแก้ระบบสมการสองตัวแปรที่สมการมีดีกรีไม่เกินสอง การแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับระบบสมการสองตัวแปรที่สมการมีดีกรีไม่เกินสอง

วงกลม วงกลม มุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม คอร์ด เส้นสัมผัสวงกลม

เศษส่วนของพหุนาม การบวก การลบ การคูณ และการหารเศษส่วนของพหุนาม การแก้สมการเศษส่วนของพหุนาม การแก้ปัญหาเกี่ยวกับเศษส่วนของพหุนาม

โดยจัดประสบการณ์หรือสร้างสถานการณ์ในชีวิตประจำวันที่ใกล้ตัวให้ผู้เรียนได้ศึกษาค้นคว้าโดยการปฏิบัติจริง ทดลอง สรุป รายงาน เพื่อพัฒนาทักษะและกระบวนการในการคิดคำนวณ การแก้ปัญหาการให้เหตุผล การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และนำประสบการณ์ด้านความรู้ ความคิด ทักษะและกระบวนการที่ได้ไปใช้ในการเรียนรู้สิ่งต่างๆ และใช้ในชีวิตประจำวันอย่างสร้างสรรค์ รวมทั้งเห็นคุณค่าและมีเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์ สามารถทำงานอย่างเป็นระบบระเบียบ มีความรอบคอบ มีความรับผิดชอบ มีวิจารณญาณ และมีความเชื่อมั่นในตนเอง

การวัดและประเมินผล ใช้วิธีการที่หลากหลายตามสภาพความเป็นจริงให้สอดคล้องกับเนื้อหาและทักษะที่ต้องการวัด

ผลการเรียนรู้

๑. ใช้สมบัติเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมในการให้เหตุผลได้
๒. สร้างและให้เหตุผลเกี่ยวกับการสร้างที่กำหนดให้ได้
๓. แก้ระบบสมการสองตัวแปรที่สมการมีดีกรีไม่เกินสองที่กำหนดให้ได้
๔. แก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับระบบสมการสองตัวแปรที่สมการมีดีกรีไม่เกินสองที่กำหนดให้ได้
๕. ใช้สมบัติเกี่ยวกับวงกลมในการให้เหตุผลและแก้ปัญหาที่กำหนดให้ได้
๖. บวก ลบ คูณและหารเศษส่วนของพหุนามที่กำหนดให้ได้
๗. แก้สมการเศษส่วนของพหุนามได้
๘. แก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับเศษส่วนของพหุนามได้
๙. ตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้

รวมทั้งหมด ๙ ผลการเรียนรู้

คำชี้แจงการใช้คู่มือครู

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้พิจารณาเห็นว่า เพื่อให้จัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ได้อย่างมีประสิทธิภาพและบรรลุมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัดที่กำหนดไว้ในหลักสูตรครบถ้วนทั้งสามด้าน ได้แก่ ด้านความรู้ ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ และด้านคุณธรรม จริยธรรมและค่านิยม จึงได้จัดทำคู่มือครู ซึ่งเสนอแนะแนวการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนไว้โดยละเอียด เพื่อใช้ควบคู่กับหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ดังนั้นครูควรศึกษาคู่มือครูให้เข้าใจถ่องแท้ ควรทดลองปฏิบัติกิจกรรมเพื่อให้เกิดความพร้อมในการสอนก่อนเข้าสอนทุกบทเรียน และดำเนินกิจกรรมตามที่เสนอแนะไว้ ครูอาจปรับเปลี่ยนกิจกรรมและวิธีจัดกิจกรรมการเรียนการสอนได้ตามความเหมาะสมโดยคำนึงถึงศักยภาพของนักเรียนเป็นสำคัญ

คู่มือครูของแต่ละบทประกอบด้วยหัวข้อต่อไปนี้

1. ชื่อบท ระบุจำนวนชั่วโมงที่ใช้ในการเรียนการสอนของแต่ละบทไว้โดยประมาณ ครูอาจยืดหยุ่นได้ตามที่เห็นสมควร

2. สาระการเรียนรู้ ในแต่ละบทเรียนจะระบุสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามที่ปรากฏอยู่ในหนังสือ**หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551** เพื่อความสะดวกของครูในการตรวจสอบความสอดคล้องและครอบคลุมของหลักสูตรสถานศึกษา

3. จุดประสงค์ประจำบท ครูต้องคำนึงถึงเสมอว่าจะต้องจัดกิจกรรมการเรียนรู้ให้นักเรียนบรรลุจุดประสงค์ประจำบทตามที่กำหนด เพื่อการวัดและประเมินผลหลังจบการเรียนการสอน

4. แนวทางในการจัดการเรียนรู้ ในแต่ละหัวข้อเรื่องของบทเรียนประกอบด้วยหัวข้อดังต่อไปนี้

1) **จุดประสงค์** จุดประสงค์ของการสอนในแต่ละหัวข้อนี้จัดเป็นตัวชี้วัดของแต่ละหัวข้อระบุไว้เพื่อให้ครูคำนึงถึงเสมอว่าจะต้องจัดกิจกรรมการเรียนรู้ให้นักเรียนมีความรู้และมีความสามารถตรงตามจุดประสงค์ที่วางไว้ ซึ่งจะต้องเกิดขึ้นระหว่างเรียนหรือดำเนินกิจกรรม ครูต้องประเมินผลให้ตรงตามจุดประสงค์และใช้วิธีการประเมินผลที่หลากหลายเพื่อให้มีผลบรรลุมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัด

   การประเมินผลที่หลากหลายอาจเป็นการสังเกต การตอบคำถาม การทำแบบฝึกหัด การทำใบกิจกรรม หรือการทดสอบย่อย จุดประสงค์ใดที่ครูเห็นว่านักเรียนส่วนใหญ่ยังไม่ผ่าน ในชั่วโมงต่อไปครูควรนำบทเรียนนั้นมาสอนซ่อมเสริมใหม่

2) **ข้อเสนอแนะในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน** เป็นส่วนสำคัญของคู่มือครู ครูควรศึกษาและทำความเข้าใจควบคู่กับหนังสือเรียน เพื่อเตรียมจัดกิจกรรมการเรียนการสอนให้สอดคล้องกับจุดประสงค์และเหมาะสมกับความสามารถของนักเรียน

5. เฉลยแบบฝึกหัดและกิจกรรม แบบฝึกหัดและคำถามในกิจกรรมที่มีลักษณะเป็นปัญหาชวนคิดในหนังสือเรียนทุกข้อมีคำตอบให้ บางข้อมีเฉลยแนวคิดเพิ่มเติมไว้ให้เพื่อเป็นแนวทางหนึ่งในการหาคำตอบ บางข้อมีหลายคำตอบแต่ให้ไว้เป็นตัวอย่างเพียงหนึ่งคำตอบ ทั้งนี้เพราะแบบฝึกหัดที่ให้นักเรียนทำได้สอดแทรกปัญหาที่เปิดโอกาสให้นักเรียนคิดอย่างหลากหลาย การให้เหตุผลหรือคำอธิบายของนักเรียนอาจแตกต่างจากที่เฉลยไว้ ในการตรวจแบบฝึกหัดครูควรพิจารณาอย่างรอบคอบ ยอมรับคำตอบที่เห็นว่ามีความถูกต้องและเป็นไปได้ที่แตกต่างไปจากที่เฉลยไว้ให้นี้

6. กิจกรรมเสนอแนะ มีหลายลักษณะอาจเป็นกิจกรรมเพื่อนำเข้าสู่เนื้อหาสาระ เสริมเนื้อหาสาระหรือกิจกรรมพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์เพื่อให้ครูเลือกใช้ ในแต่ละกิจกรรมครูอาจปรับเปลี่ยนให้เหมาะสมกับเวลาและความสามารถของนักเรียน

ก่อนดำเนินกิจกรรม ครูควรสนทนากับนักเรียนด้วยบรรยากาศที่เป็นกันเอง เพื่อให้เกิดความเข้าใจและมองเห็นแง่มุมต่าง ๆ ของกิจกรรมที่จะทำ ไม่ควรด่วนอธิบายหรือชี้นำแนวคิด ขณะทำกิจกรรมครูต้องส่งเสริมให้นักเรียนได้มีโอกาสแสดงความคิดเห็นที่หลากหลาย ตลอดจนฝึกฝนให้นักเรียนรู้จักวิเคราะห์ ตัดสินใจและหาข้อสรุป

7. แบบฝึกหัดเพิ่มเติม ในบางบทเรียนได้เตรียมแบบฝึกหัดเพิ่มเติมไว้ให้ครูเลือกหรือปรับใช้

คำแนะนำการใช้หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ประกอบด้วย

1. **จุดมุ่งหมายของบทเรียน**
2. **เนื้อหาสาระ** ในการนำเสนอเนื้อหาสาระของแต่ละบทเรียน ได้คำนึงถึงการเชื่อมโยงความรู้ใหม่กับความรู้พื้นฐานเดิมของนักเรียน โดยพยายามใช้ตัวอย่างจากชีวิตจริงและความรู้จากศาสตร์อื่นประกอบการอธิบายเพื่อให้ได้ข้อสรุปเป็นความรู้ใหม่ต่อไป
3. **ตัวอย่าง** มีไว้เสริมความเข้าใจในเนื้อหาสาระและการนำไปใช้
4. **แบบฝึกหัดท้ายหัวข้อ** แบบฝึกหัดที่นำเสนอไว้มีหลายลักษณะ คือฝึกทักษะการคิดคำนวณ แก้โจทย์ปัญหา ฝึกวิเคราะห์ ให้เหตุผล และฝึกหาข้อสรุปเพื่อนำไปสู่การสร้างข้อความคาดการณ์
5. **ปัญหาชวนคิดหรือเรื่องน่ารู้** เป็นโจทย์ปัญหาหรือสถานการณ์กระตุ้นให้นักเรียนได้ใช้ความรู้ที่เรียนมาเพื่อแก้ปัญหาหรือหาข้อสรุปใหม่

เพื่อให้เกิดประสิทธิภาพสูงสุดในการใช้หนังสือเรียน ครูควรปฏิบัติดังนี้

1. ศึกษา**เนื้อหาสาระ**และ**วิธีนำเสนอ**ควบคู่กับ**กิจกรรม**ของแต่ละเรื่องที่เสนอแนะไว้ในคู่มือครูให้เข้าใจอย่างถ่องแท้
2. ทำแบบฝึกหัดท้ายหัวข้อและแสวงหาวิธีการที่เหมาะสมที่สุดในการหาคำตอบ โดยเฉพาะอย่างยิ่งข้อที่มีวิธีคิดหรือคำตอบที่หลากหลาย
3. วางแผนการจัดการเรียนรู้ตลอดภาคเรียนให้ครอบคลุมทุกเนื้อหาสาระและเหมาะสมกับเวลา
4. ในการสอนเนื้อหาสาระแต่ละเรื่องไม่ควรด่วนบอกนักเรียนทันที ควรใช้วิธีการสอนผ่านกิจกรรมหรืออภิปรายโต้ตอบ เพื่อให้นักเรียนสรุปความคิดรวบยอดด้วยตนเองเท่าที่จะสามารถทำได้
5. สร้างสถานการณ์หรือโจทย์ที่สอดคล้องกับเนื้อหาสาระในบทเรียนเพิ่มเติมจากสิ่งที่อยู่ใกล้ตัวหรือภูมิปัญญาท้องถิ่น เพื่อให้นักเรียนมีความเข้าใจในเนื้อหาสาระมากขึ้นและสามารถเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ เป็นแนวทางในการประยุกต์ต่อไป

กำหนดเวลาสอนโดยประมาณ

รายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

บทที่	เรื่อง	จำนวนชั่วโมง
1	การให้เหตุผลเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม	15
2	ระบบสมการ	11
3	วงกลม	21
4	เศษส่วนของพหุนาม	13
	รวม	**60**

สารบัญ

บทที่ 1
การให้เหตุผลเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม (15 ชั่วโมง)

บทเรียนนี้มี 3 หัวข้อ ดังนี้

1.1 ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการให้เหตุผลทางเรขาคณิต	(2 ชั่วโมง)
1.2 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม	(8 ชั่วโมง)
1.3 การสร้าง	(5 ชั่วโมง)

สาระการเรียนรู้

สาระที่ 3 เรขาคณิต

สาระที่ 6 ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

จุดประสงค์ประจำบท ให้นักเรียนสามารถ

1. ใช้สมบัติเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมในการให้เหตุผลได้
2. สร้างและให้เหตุผลเกี่ยวกับการสร้างที่กำหนดให้ได้

เนื้อหาในบทนี้จะกล่าวถึงสมบัติทางเรขาคณิตบางประการพร้อมทั้งฝึกให้นักเรียนมีความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตซึ่งเป็นทักษะพื้นฐานสำคัญของการเรียนคณิตศาสตร์ นักเรียนจะได้เรียนรู้และฝึกการให้เหตุผลเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม รวมถึงการนำสมบัติต่าง ๆ ของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมไปใช้ในการสร้างทางเรขาคณิตเพิ่มเติมจากสาระที่นักเรียนเคยเรียนมาแล้ว ในตอนเริ่มต้นของบทเรียนนี้ได้ทบทวนความรู้โดยรวบรวมสาระสำคัญที่นักเรียนเคยทราบแล้วเกี่ยวกับการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์และสมบัติเบื้องต้นทางเรขาคณิต ทั้งนี้เพื่อใช้เป็นพื้นฐานในการเรียนสาระต่อไป

ในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ครูควรคำนึงถึงการสอดแทรกแนวคิดพื้นฐานเกี่ยวกับระบบการพิสูจน์ให้นักเรียนมีความเข้าใจซึ่งแสดงด้วยแผนภาพได้ดังนี้

คำอนิยาม บทนิยาม สัจพจน์ สมบัติที่ทราบแล้วทางคณิตศาสตร์	ให้เหตุผล →	ทฤษฎีบท หรือ สมบัติใหม่ทางคณิตศาสตร์

คำอนิยาม ใช้เป็นคำพื้นฐานในการสื่อความหมายให้เข้าใจตรงกันโดยไม่ต้องกำหนดความหมายของคำ เราใช้คำอนิยามในการให้ความหมายของคำที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาสาระในรูป**บทนิยาม** ซึ่งข้อความในบทนิยามทุกบทนิยามสามารถเขียนให้เป็นประโยคที่เชื่อมด้วย "ก็ต่อเมื่อ"

สำหรับ **สัจพจน์** เป็นข้อความที่ยอมรับว่าเป็นจริงโดยไม่ต้องพิสูจน์ เราใช้คำอนิยาม บทนิยาม สัจพจน์ อย่างใดอย่างหนึ่งหรือหลายอย่างประกอบกันในการให้เหตุผลเพื่อพิสูจน์ข้อความต่าง ๆ ว่าเป็นจริงหรือไม่เป็นจริง ข้อความที่พิสูจน์ได้ว่าเป็นจริงอาจนำมาสรุปเป็น**ทฤษฎีบทหรือสมบัติทางคณิตศาสตร์** เพื่อนำไปใช้อ้างอิงในการให้เหตุผลและสร้างทฤษฎีบทใหม่ต่อไปได้

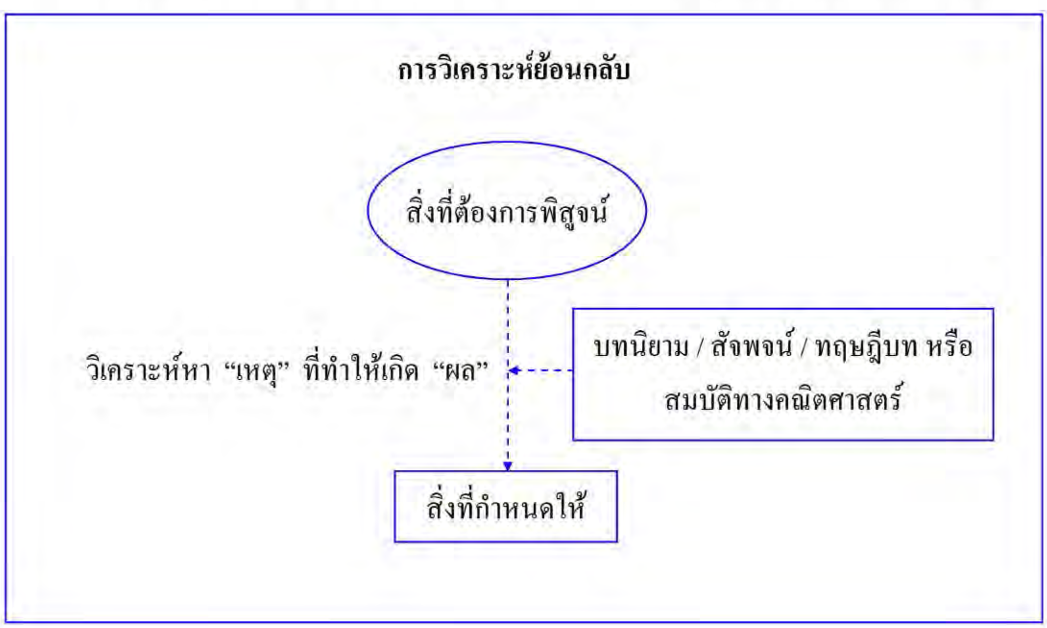
ในการพิสูจน์ข้อความหรือโจทย์ปัญหาที่กำหนดให้ ครูอาจแนะนำให้นักเรียนดำเนินการเป็นขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. อ่านและทำความเข้าใจข้อความหรือโจทย์ปัญหาที่กำหนดให้ โดยการพิจารณาว่าโจทย์กำหนดอะไรบ้างและต้องการให้พิสูจน์อะไร

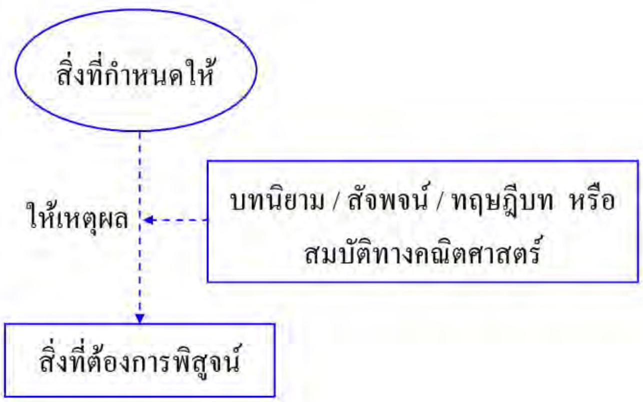
2. วิเคราะห์ย้อนกลับจากผลหรือสิ่งที่โจทย์ต้องการให้พิสูจน์ไปหาเหตุหรือสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ โดยพิจารณาว่าในแต่ละขั้นที่เป็นผลย่อย ๆ ก่อนผลสุดท้ายนั้นต้องเกิดจากเหตุอันใดบ้าง และจากเหตุนั้นต้องอาศัยบทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบทหรือสมบัติทางคณิตศาสตร์ใดบ้างมาประกอบเพื่ออ้างอิงไปสู่ผลย่อย ๆ เหล่านั้น ทำเช่นนี้เรื่อย ๆ จนกว่าผลย่อย ๆ นั้นมาจากเหตุที่เป็นสิ่งที่โจทย์กำหนดให้

3. เขียนแสดงการพิสูจน์จากเหตุหรือสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ผนวกกับเหตุผลตามที่วิเคราะห์ได้ในข้อ 2 มาเขียนตามลำดับเหตุและผลจนได้ผลสุดท้ายเป็นสิ่งที่โจทย์ต้องการให้พิสูจน์

การวิเคราะห์ย้อนกลับและลำดับขั้นการเขียนแสดงการพิสูจน์แสดงได้ด้วยแผนภาพ ดังนี้



การเขียนแสดงการพิสูจน์



สำหรับการสร้าง ครูควรฝึกให้นักเรียนเขียนหรือจินตนาการรูปที่โจทย์ต้องการให้สร้างก่อน แล้วคิดวิเคราะห์ย้อนกลับเพื่อกำหนดลำดับการสร้างตามความจำเป็นก่อนหลัง ตามเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดให้

แนวคิดในการให้เหตุผลและการสร้างในส่วนเฉลย เป็นเพียงแนวคิดหนึ่งเท่านั้น อีกทั้งการเฉลยส่วนใหญ่จะเขียนไว้อย่างรวบรัด ครู**ไม่ควร**ให้นักเรียนเลียนแบบเขียนรวบรัดดังที่เสนอไว้ แต่ครูควรให้นักเรียนได้เพิ่มเติมรายละเอียดการให้เหตุผล และขั้นตอนการสร้างตามที่ควรจะเป็น

แนวทางในการจัดการเรียนรู้

1.1 ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการให้เหตุผลทางเรขาคณิต (2 ชั่วโมง)

จุดประสงค์ นักเรียนสามารถพิสูจน์ข้อความทางเรขาคณิตที่กำหนดให้ได้

ข้อเสนอแนะในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน

1. ในการจัดกิจกรรมเพื่อทบทวนประโยคเงื่อนไข ครูอาจให้นักเรียนช่วยกันยกตัวอย่างข้อความที่มีลักษณะเป็นประโยคเงื่อนไขเชื่อมด้วย **ถ้า...แล้ว...** อย่างชัดเจน และข้อความที่ไม่ปรากฏการเชื่อมด้วย **ถ้า...แล้ว...** อย่างชัดเจน แล้วนำมาวิเคราะห์แยกข้อความส่วนที่เป็น **เหตุ** และ **ผล** เพื่อให้นักเรียนเห็นว่าในชีวิตประจำวันโดยเฉพาะอย่างยิ่งในคณิตศาสตร์ เรามักพบข้อความที่มีลักษณะเป็นประโยคเงื่อนไขและจากประโยคเงื่อนไขดังกล่าว เราสามารถนำมาใช้ในการเขียนบทกลับของประโยคเงื่อนไข รวมทั้งการเขียนประโยคเงื่อนไขและบทกลับของประโยคเงื่อนไขให้เป็นประโยคเดียวกันโดยใช้คำว่า **...ก็ต่อเมื่อ...** โดยใช้กิจกรรม "ทำได้ไหม" ตรวจสอบความรู้และความเข้าใจ

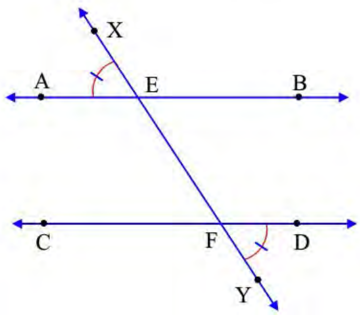
2. ในการวางพื้นฐานเกี่ยวกับการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ครูควรแนะนำคำอนิยามทางเรขาคณิตซึ่งได้แก่ จุด เส้นตรงและระนาบ และยกตัวอย่างบทนิยามที่มีการใช้คำอนิยาม เช่น บทนิยามของรังสี บทนิยามของเส้นขนาน และชี้ให้เห็นว่าทุกบทนิยามสามารถเขียนเป็นประโยคที่เชื่อมด้วย "ก็ต่อเมื่อ" ครูอาจยกตัวอย่างสัจพจน์ที่นักเรียนเคยทราบมาแล้วเพิ่มเติมจากที่ให้ไว้ในหนังสือเรียนอีกก็ได้ เช่น *เส้นตรงที่แบ่งครึ่งมุมมุมหนึ่งมีเพียงเส้นเดียว และเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นตรงที่จุดที่กำหนดให้มีเพียงเส้นเดียว* พร้อมทั้งแนะนำการพิสูจน์ข้อความทางเรขาคณิตซึ่งอาจต้องอ้างอิงบทนิยามหรือสมบัติทางเรขาคณิต ดังเช่นตัวอย่างที่ 1 อ้างอิงบทนิยามของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

3. ครูควรยกตัวอย่างโจทย์ปัญหาให้นักเรียนได้เห็นจริงว่า ในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตมีการพิสูจน์ว่าข้อความที่กำหนดให้เป็นจริง และบางข้อความก็ให้พิสูจน์ว่าไม่เป็นจริงซึ่งทำโดยยกตัวอย่างค้าน ดังตัวอย่างที่ 2 ที่เสนอไว้

4. สำหรับการทบทวนทฤษฎีบทในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีบทเบื้องต้นที่ใช้บ่อย ๆ เกี่ยวกับเส้นตรง เส้นขนานและรูปสามเหลี่ยมก่อน สำหรับทฤษฎีบทเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการจะกล่าวถึงในหัวข้อต่อไป ในการทบทวนความรู้ครูอาจให้นักเรียนช่วยกันบอกสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับเส้นตรง เส้นขนานและรูปสามเหลี่ยม แล้วจึงแนะนำสมบัติเหล่านั้นในรูปทฤษฎีบทที่ให้นักเรียนยอมรับโดยไม่ต้องพิสูจน์

สำหรับตัวอย่างที่ 3 เมื่อนักเรียนได้พิสูจน์แล้ว ครูควรแนะนำว่าข้อความที่กำหนดให้นั้นเป็นสมบัติทางเรขาคณิตอีกประการหนึ่งที่สามารถนำไปใช้อ้างอิงในการให้เหตุผลได้

5. ก่อนให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 1.1 ครูอาจนำแนวการพิสูจน์ที่ได้กล่าวไว้ในบทนำมาอธิบายยกตัวอย่างให้นักเรียนเห็นลำดับขั้นตอนการวิเคราะห์เพื่อเขียนการพิสูจน์ อาจใช้โจทย์ข้อ 2 ในแบบฝึกหัดนี้เป็นตัวอย่างดังนี้



กำหนดให้ $\overleftrightarrow{XY}$ ตัด $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ที่จุด E และจุด F ตามลำดับ และ $A\hat{E}X = D\hat{F}Y$

ต้องการพิสูจน์ว่า $\overleftrightarrow{AB}$ ขนานกับ $\overleftrightarrow{CD}$

ในการวิเคราะห์ย้อนกลับ ครูใช้การถามตอบจากสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ เชื่อมโยงไปสู่สิ่งที่กำหนดให้ อาจใช้ตัวอย่างคำถาม เช่น

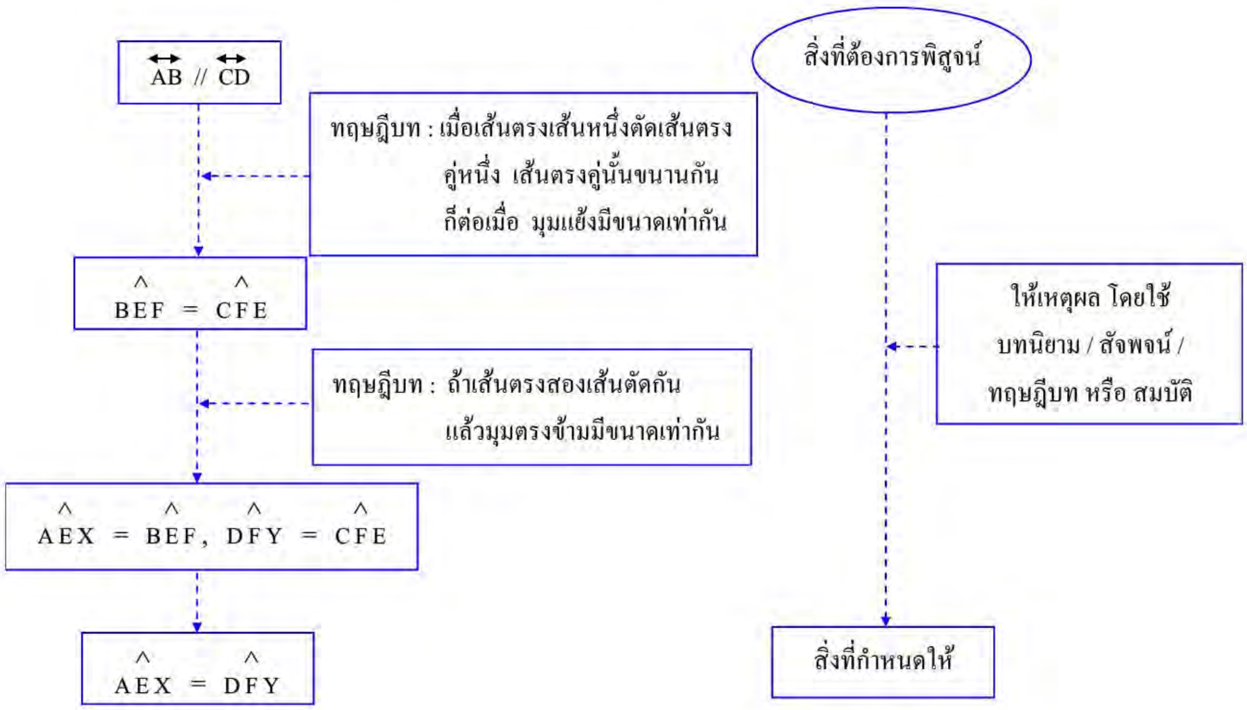
1) โจทย์ต้องการพิสูจน์ข้อความใด [$\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$]

2) มีเงื่อนไขใดบ้างที่ทำให้สรุปได้ว่า $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ และควรใช้เงื่อนไขใด
[เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่นั้นขนานกัน ก็ต่อเมื่อ มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน หรือ *เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่นั้นขนานกัน ก็ต่อเมื่อ มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน* หรือ *เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่นั้นขนานกัน ก็ต่อเมื่อ ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันได้ 180 องศา และในกรณีนี้ควรใช้เงื่อนไขในเรื่องมุมแย้ง]*

3) ถ้าจะพิสูจน์ว่า $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ โดยใช้เงื่อนไขเกี่ยวกับมุมแย้งมีขนาดเท่ากันจะต้องแสดงว่ามุมคู่ใดมีขนาดเท่ากัน [$B\hat{E}F = C\hat{F}E$ หรือ $A\hat{E}F = D\hat{F}E$]

4) ถ้าจะแสดงว่า $B\hat{E}F = C\hat{F}E$ สามารถนำข้อมูลใดมาใช้
[$A\hat{E}X = B\hat{E}F$, $D\hat{F}Y = C\hat{F}E$ *เนื่องจากแต่ละคู่เป็นมุมตรงข้ามกันและกำหนดให้* $A\hat{E}X = D\hat{F}Y$]

การวิเคราะห์ย้อนกลับข้างต้นแสดงได้ด้วยแผนภาพ ดังนี้



จากแผนภาพข้างต้น เขียนแสดงการพิสูจน์จากสิ่งที่กำหนดให้ไปสู่สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ได้ดังนี้

พิสูจน์ $\widehat{AEX} = \widehat{DFY}$ (กำหนดให้)

เนื่องจาก $\widehat{AEX} = \widehat{BEF}$ และ $\widehat{DFY} = \widehat{CFE}$

(ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกัน แล้วมุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน)

จะได้ $\widehat{BEF} = \widehat{CFE}$ (สมบัติของการเท่ากัน)

ดังนั้น $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$

(ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน)

ครูควรฝึกให้นักเรียนใช้การวิเคราะห์ย้อนกลับในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ซึ่งในระยะแรก ๆ ครูอาจใช้คำถามนำเพื่อเป็นแนวทางก่อนหรืออาจให้นักเรียนช่วยกันวิเคราะห์บนกระดาน หลังจากนั้นจึงให้นักเรียนฝึกวิเคราะห์ด้วยตนเอง

1.2 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม (8 ชั่วโมง)

จุดประสงค์ นักเรียนสามารถนำทฤษฎีบทเกี่ยวกับความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมและสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานไปใช้ในการให้เหตุผลได้

ข้อเสนอแนะในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน

1. ครูควรทบทวนทฤษฎีบทเกี่ยวกับเงื่อนไขที่ทำให้สรุปได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการซึ่งได้แก่ รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด.ม.ด., ม.ด.ม., ม.ม.ด. และ ด.ด.ด. โดยไม่แสดงการพิสูจน์ แต่ยกตัวอย่างที่แสดงการนำทฤษฎีบทดังกล่าวไปใช้อ้างอิงในการให้เหตุผล เช่น การพิสูจน์ว่า*จุดใด ๆ ที่อยู่บนเส้นแบ่งครึ่งมุมมุมหนึ่ง ย่อมอยู่ห่างจากแขนทั้งสองข้างของมุมเป็นระยะเท่ากัน* โดยใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ม.ม.ด.

2. นักเรียนเคยทราบสมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมาบ้างแล้ว ในหัวข้อนี้นักเรียนจะได้ทราบถึงทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว คือ การพิสูจน์ว่า *รูปสามเหลี่ยมใด ๆ ที่มุมสองมุมมีขนาดเท่ากัน เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว* โดยพิสูจน์ทฤษฎีบทที่กล่าวว่า *ด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งจะยาวเท่ากัน ก็ต่อเมื่อ มุมที่อยู่ตรงข้ามด้านทั้งสองนั้นมีขนาดเท่ากัน* การพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ครูควรชี้ให้นักเรียนสังเกตว่า การพิสูจน์ข้อความใด ๆ ที่เชื่อมด้วย"ก็ต่อเมื่อ" จะต้องแยกพิสูจน์เป็นสองตอน

ให้ครูสังเกตว่าเราจะไม่พิสูจน์ทฤษฎีบทนี้โดยใช้การแบ่งครึ่งมุมยอดของรูปสามเหลี่ยม ทั้งนี้เพราะในการสร้างเส้นแบ่งครึ่งมุมมีการพิสูจน์ที่อ้างอิงถึง ด.ด.ด. และการพิสูจน์รูปสามเหลี่ยมเท่ากันทุกประการด้วยความสัมพันธ์แบบ ด.ด.ด. ก็อ้างอิงมาจากสมบัติดังกล่าวของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ซึ่งทำให้เกิดลักษณะการให้เหตุผลแบบวนกลับ ในหนังสือเรียนจึงพิสูจน์ทฤษฎีบทดังกล่าวด้วยการใช้ความสัมพันธ์แบบ ด.ม.ด. และ ม.ม.ด.

3. นอกจากทฤษฎีบทเกี่ยวกับเงื่อนไขที่ทำให้สรุปได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการในแบบข้างต้นแล้ว ครูควรอธิบายทฤษฎีบทที่ทำให้สรุปได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการแบบ ฉ.ด.ด. ด้วย พร้อมทั้งสรุปเงื่อนไขทั้งหมดรวมไว้เป็นชุดเดียวกัน เพื่อประโยชน์ในการอ้างอิงต่อไป

4. ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนทฤษฎีบทเกี่ยวกับรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานมีสาระสำคัญของเนื้อหาที่ครูควรทราบเกี่ยวกับสาระที่นักเรียนเคยทราบมาบ้างแล้ว ดังนี้

บทนิยาม รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน คือ รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามขนานกันสองคู่

ทฤษฎีบท

1) ด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานยาวเท่ากัน
2) ถ้ารูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่งมีด้านตรงข้ามยาวเท่ากันสองคู่ แล้วรูปสี่เหลี่ยมรูปนั้นเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
3) มุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานมีขนาดเท่ากัน

4) ถ้ารูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่งมีมุมตรงข้ามที่มีขนาดเท่ากันสองคู่ แล้วรูปสี่เหลี่ยมรูปนั้นเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

5) เส้นทแยงมุมทั้งสองของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานแบ่งครึ่งซึ่งกันและกันที่จุดตัดของเส้นทแยงมุม

ข้อ 1), 3) และ 5) เป็นสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานซึ่งนักเรียนเคยเรียนมาแล้ว โดยยังไม่มีการพิสูจน์ และจะพิสูจน์ให้เห็นจริงในบทเรียนนี้

ข้อ 2) และข้อ 4) เป็นบทกลับของข้อ 1) และข้อ 3) ตามลำดับ ทำให้ทราบเงื่อนไขเกี่ยวกับความยาวของด้านและขนาดของมุมที่ทำให้รูปสี่เหลี่ยมเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

ดังนั้นในการเรียนการสอน ครูจึงอาจทบทวนทฤษฎีบทข้อ 1), 3) และ 5) โดยให้นักเรียนช่วยกันอธิบายขั้นตอนการพิสูจน์ด้วยวาจาบนกระดานดำก่อน แล้วจึงพิสูจน์ทฤษฎีบท ข้อ 2) และข้อ 4) ต่อเนื่องกันไป

สำหรับทฤษฎีบท *ส่วนของเส้นตรงที่ปิดหัวท้ายของส่วนของเส้นตรงที่ขนานกันและยาวเท่ากัน จะขนานกันและยาวเท่ากัน* ทฤษฎีบทนี้ช่วยให้เราทราบเงื่อนไขที่ทำให้รูปสี่เหลี่ยมเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานเพิ่มอีกหนึ่งเงื่อนไข คือ *รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านที่อยู่ตรงข้ามกันคู่หนึ่งขนานกันและยาวเท่ากัน เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน* และทฤษฎีบทที่กล่าวว่า *ส่วนของเส้นตรงที่ลากเชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ จะขนานกับด้านที่สามและยาวเป็นครึ่งหนึ่งของด้านที่สาม* เป็นทฤษฎีบทที่มีประโยชน์ในการนำไปใช้อ้างอิงได้มาก

5. สำหรับโจทย์ข้อ 1, 3, 5 และ 7 ในแบบฝึกหัด 1.2 ข เป็นทฤษฎีบทที่นำมาเป็นแบบฝึกหัดให้นักเรียนได้พิสูจน์ด้วยตนเอง ครูอาจนำทฤษฎีบทเหล่านี้มาสรุปเป็นความรู้ร่วมกันอีกครั้งก็ได้ และแนะนำให้นักเรียนจดจำไว้ใช้อ้างอิงในการให้เหตุผล และนำไปใช้แก้ปัญหาต่อไป

6. สำหรับกิจกรรม "น่ารู้" มีเจตนาให้ไว้เป็นความรู้และให้นักเรียนเห็นการเชื่อมโยง ที่นำสมบัติทางเรขาคณิตไปใช้ในการสร้างอุปกรณ์ทุ่นแรงเพื่อให้มีความสะดวกต่อการดำรงชีวิต

7. กิจกรรม "พิสูจน์ได้หรือไม่" มีเจตนาให้เป็นความรู้เพิ่มเติม เพื่อเสริมทักษะในการให้เหตุผลและให้เห็นการนำสมบัติดังกล่าวไปใช้ในการพิสูจน์เกี่ยวกับการแบ่งส่วนของเส้นตรงออกเป็นส่วน ๆ ที่เท่ากัน ซึ่งนักเรียนเคยสร้างมาแล้ว แต่ยังไม่มีการพิสูจน์

1.3 การสร้าง (5 ชั่วโมง)

จุดประสงค์ นักเรียนสามารถสร้างรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ได้

ข้อเสนอแนะในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน

1. ครูทบทวนเพื่อตรวจสอบความรู้และความเข้าใจเกี่ยวกับการสร้างที่ใช้เครื่องมือเพียง 2 อย่างคือ

สันตรงและวงเวียน และการสร้างพื้นฐาน 6 อย่างที่นักเรียนเคยเรียนมาแล้ว ครูอาจให้นักเรียนอธิบายการสร้างด้วยวาจาโดยพิจารณาจากร่องรอยการสร้างในแต่ละข้อที่เสนอไว้ในหนังสือเรียน

2. ก่อนทำกิจกรรมการสร้างเส้นขนานผ่านจุด P ซึ่งอยู่ภายนอก $\overleftrightarrow{AB}$ ให้ขนานกับ $\overleftrightarrow{AB}$ ครูอาจทบทวนหลักการและแนวคิดเกี่ยวกับการสร้างที่สมบูรณ์ซึ่งมี 4 ขั้นตอนและเคยแนะนำไว้แล้วในคู่มือครูสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ดังนี้

1) ขั้นวิเคราะห์ ครูควรแนะนำให้นักเรียนทำความเข้าใจโจทย์ หาความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งที่กำหนดให้และสิ่งที่ต้องการสร้าง โดยการเขียนรูปที่ต้องการอย่างคร่าว ๆ ก่อน แล้วจึงคิดลำดับขั้นตอนการสร้างก่อนหลัง

2) ขั้นสร้าง ดำเนินการสร้างตามที่คิดไว้ในข้อ 1) ซึ่งในชั้นนี้ส่วนใหญ่จะให้เขียนวิธีสร้างด้วย ครูอาจตกลงกับนักเรียนให้เขียนการสร้างพื้นฐาน 6 อย่างโดยสังเขปและเขียนขั้นตอนการสร้างอื่น ๆ โดยละเอียด

3) ขั้นพิสูจน์ ครูควรย้ำว่าทุก ๆ การสร้างควรมีการพิสูจน์ยืนยันว่าการสร้างนั้นถูกต้องและเป็นจริงตามที่โจทย์ต้องการ ยกเว้นโจทย์จะกำหนดว่าไม่ต้องพิสูจน์

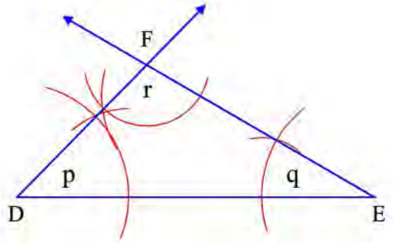
4) ขั้นอภิปรายผล ครูควรชี้ให้นักเรียนเห็นว่าการสร้างรูปที่โจทย์ต้องการบางรูปสามารถสร้างได้รูปแตกต่างกัน และบางรูปก็ใช้วิธีการสร้างแตกต่างกันได้ด้วย ดังนั้นครูอาจให้มีการอภิปรายร่วมกันในชั้นเรียนเพื่อให้นักเรียนได้ทราบถึงแนวคิดที่แตกต่างกัน และแนวคิดใดน่าจะทำให้การสร้างมีประสิทธิภาพกว่า

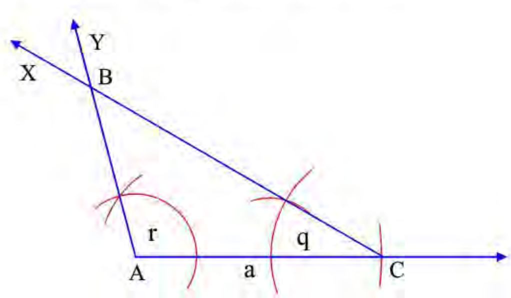
3. กิจกรรม “มีได้รูปเดียว” เป็นกิจกรรมที่ต้องการให้นักเรียนใช้ความรู้เกี่ยวกับสมบัติของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ และสมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมาช่วยวิเคราะห์การสร้าง

ในการทำแบบฝึกหัดของกิจกรรมนี้ ครูอาจให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายถึงลำดับขั้นตอนการสร้างแต่ละข้อ และแนวคิดที่แตกต่างกัน

สำหรับโจทย์ข้อ 5 ครูอาจแนะนำให้นักเรียนสร้างรูป ΔDEF ที่มุมสองมุมมีขนาด p และขนาด q แล้วให้นักเรียนใช้ขนาดของมุมที่สามของ ΔDEF ซึ่งมีขนาด r มาสร้าง ΔABC ตามเงื่อนไขในโจทย์ โดยสร้าง $\overline{AC}$ ยาว a หน่วย สร้าง $A\hat{C}X = q$ สร้าง $C\hat{A}Y = r$ และให้ $\overrightarrow{CX}$ ตัดกับ $\overrightarrow{AY}$ ที่จุด B

จะได้ $A\hat{B}C = p$ และได้ ΔABC ตามต้องการ ดังรูปการสร้างต่อไปนี้

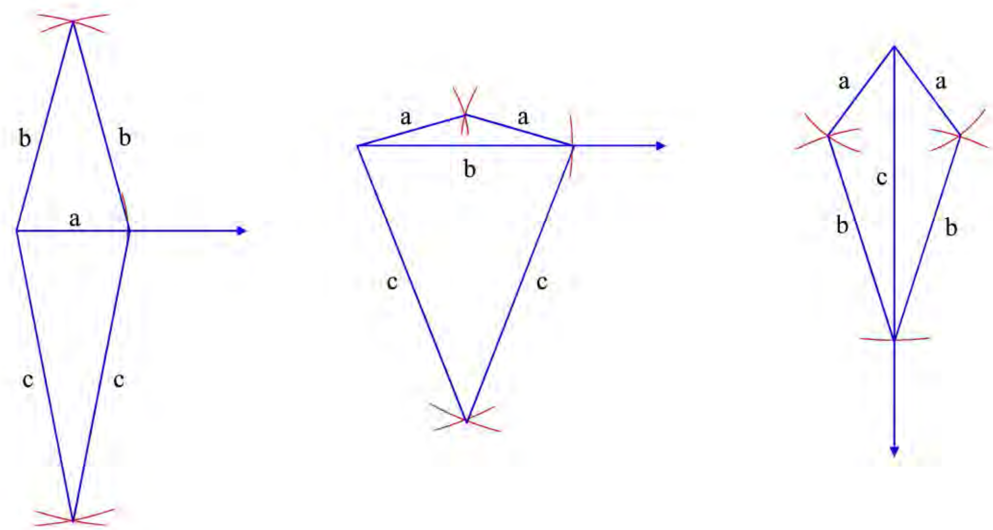




4. สำหรับกิจกรรม “มีได้หลายรูป” มีเจตนาให้นักเรียนเห็นว่าการสร้างรูปเรขาคณิตบางรูป ถ้าเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดมีไม่เพียงพอที่จะทำให้ได้รูปการสร้างเป็นรูปเดียวกัน หรือเป็นรูปที่เท่ากันทุกประการ อาจทำให้รูปที่สร้างมีได้มากกว่า 1 รูป

5. กิจกรรม “สร้างได้ไม่ยาก” มีเจตนาให้นักเรียนได้เรียนรู้เกี่ยวกับการสร้างรูปสี่เหลี่ยมที่ต้องอาศัยสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสหรือรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว มาช่วยในการวิเคราะห์การสร้าง รวมถึงการสร้างรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมตามเงื่อนไขในโจทย์ ครูอาจนำแบบฝึกหัดบางข้อมาให้นักเรียนได้อภิปรายร่วมกันอีกครั้งเพื่อดูแนวคิดของนักเรียนที่แตกต่างกัน เช่น

แบบฝึกหัดข้อ 2 การสร้างรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าวสามารถสร้างได้ 3 แบบโดยใช้ความยาว a หรือ b หรือ c เป็นความยาวของเส้นทแยงมุมหนึ่งเส้น ดังนี้



6. กิจกรรม “แบ่งครึ่งมุม” มีเจตนาเพื่อเสริมความรู้ให้นักเรียนเห็นว่าวิธีสร้างเส้นแบ่งครึ่งมุมอาจทำได้อีกวิธีหนึ่ง ครูอาจให้นักเรียนช่วยกันพิสูจน์หรืออาจให้นักเรียนเขียนการพิสูจน์แล้วนำมาแสดงบนป้ายนิเทศก็ได้

7. สำหรับกิจกรรม “เขาหาได้อย่างไร” มีเจตนาให้เป็นความรู้เพิ่มเติม เพื่อให้นักเรียนเห็นตัวอย่างที่ชาวกรีกโบราณเชื่อมโยงความรู้เกี่ยวกับการสร้างทางเรขาคณิตไปช่วยในการหาคำตอบทางพีชคณิต ครูอาจให้นักเรียนลองทำกิจกรรมตามที่ระบุไว้ในหนังสือเรียน เพื่อตรวจสอบความเข้าใจและเห็นความน่าทึ่งของวิธีการนี้

เฉลยแบบฝึกหัดและกิจกรรม

เฉลยกิจกรรม “ทำได้ไหม” หน้า 3

1.

1) ถ้ารูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า แล้วรูปสามเหลี่ยมนั้นมีส่วนสูงทั้งสามเส้นยาวเท่ากัน
2) ถ้าเส้นทแยงมุมทั้งสองเส้นของ □ABCD ตัดกันเป็นมุมฉากและแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน แล้ว □ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านทั้งสี่ยาวเท่ากัน

2.

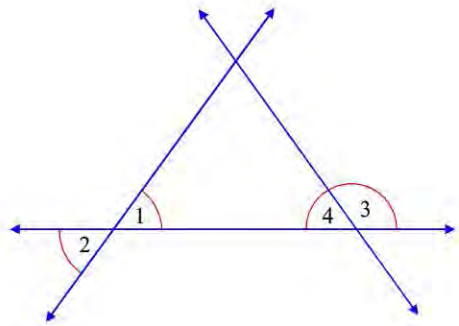
1) รูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีส่วนสูงทั้งสามเส้นยาวเท่ากัน ก็ต่อเมื่อ รูปสามเหลี่ยมนั้นเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า
2) □ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านทั้งสี่ยาวเท่ากัน ก็ต่อเมื่อ เส้นทแยงมุมทั้งสองเส้นของ □ABCD ตัดกันเป็นมุมฉากและแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน

3.

1) “ถ้ารูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน แล้วด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมนั้นยาวเท่ากันสองคู่” และ “ถ้ารูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่งมีด้านตรงข้ามยาวเท่ากันสองคู่ แล้วรูปสี่เหลี่ยมนั้นเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน”
2) “ถ้ารูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีขนาดของมุมเท่ากันสองมุม แล้วรูปสามเหลี่ยมนั้นเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว” และ “ถ้ารูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว แล้วรูปสามเหลี่ยมนั้นมีขนาดของมุมเท่ากันสองมุม”

เฉลยแบบฝึกหัด 1.1

1.



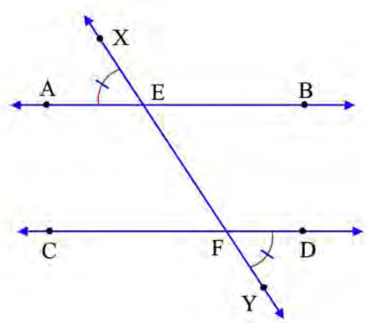
กำหนดให้ $\hat{1} = \hat{4}$

ต้องการพิสูจน์ว่า $\hat{3} + \hat{2} = 180^\circ$

พิสูจน์

เนื่องจาก	$\hat{1} = \hat{4}$	(กำหนดให้)
	$\hat{1} = \hat{2}$	(ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกัน แล้วมุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน)
ดังนั้น	$\hat{4} = \hat{2}$	(สมบัติของการเท่ากัน)
เนื่องจาก	$\hat{3} + \hat{4} = 180^\circ$	(ขนาดของมุมตรง)
ดังนั้น	$\hat{3} + \hat{2} = 180^\circ$	(สมบัติของการเท่ากัน โดยแทน $\hat{4}$ ด้วย $\hat{2}$)

2.



กำหนดให้ $\overleftrightarrow{XY}$ ตัด $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ที่จุด E และ F ตามลำดับ และ $A\hat{E}X = D\hat{F}Y$

ต้องการพิสูจน์ว่า $\overleftrightarrow{AB} \, // \, \overleftrightarrow{CD}$

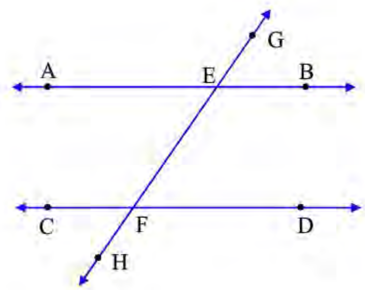
พิสูจน์

เนื่องจาก	$A\hat{E}X = D\hat{F}Y$	(กำหนดให้)
	$A\hat{E}X = B\hat{E}F$ และ $D\hat{F}Y = C\hat{F}E$	(ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกัน แล้วมุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน)

ดังนั้น $B\hat{E}F = C\hat{F}E$ (สมบัติของการเท่ากัน)

นั่นคือ $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ (ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน)

3.



กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{GH}$ ตัด $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ที่จุด E และจุด F ตามลำดับ

ต้องการพิสูจน์ว่า 1) $G\hat{E}A = D\hat{F}H$

2) $G\hat{E}B + C\hat{F}E = 180^{\circ}$

พิสูจน์

1) เนื่องจาก $G\hat{E}A = C\hat{F}E$ (ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน)

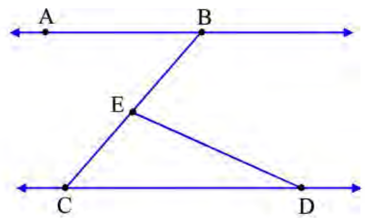
และ $C\hat{F}E = D\hat{F}H$ (ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกัน แล้วมุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน)

ดังนั้น $G\hat{E}A = D\hat{F}H$ (สมบัติของการเท่ากัน)

2) เนื่องจาก $G\hat{E}B + G\hat{E}A = 180^{\circ}$ (ขนาดของมุมตรง)

ดังนั้น $G\hat{E}B + C\hat{F}E = 180^{\circ}$ (สมบัติของการเท่ากัน โดยแทน $G\hat{E}A$ ด้วย $C\hat{F}E$)

4.



กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{CD}$ และ $\overline{DE}$ ตัด $\overline{BC}$ ที่จุด E

ต้องการพิสูจน์ว่า $B\hat{E}D = A\hat{B}E + E\hat{D}C$

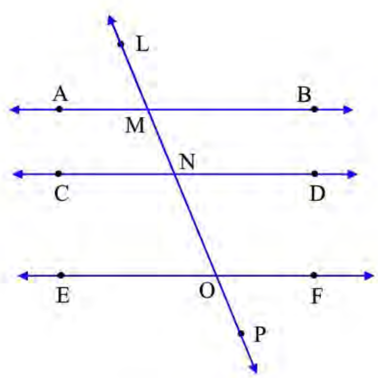
พิสูจน์

เนื่องจาก $A\hat{B}E = D\hat{C}B$ (ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน)

และ $B\hat{E}D = D\hat{C}B + E\hat{D}C$ (ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากับผลบวกของขนาดของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิดของมุมภายนอกนั้น)

ดังนั้น $B\hat{E}D = A\hat{B}E + E\hat{D}C$ (สมบัติของการเท่ากัน โดยแทน $D\hat{C}B$ ด้วย $A\hat{B}E$)

5.



กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{CD}$ และ $\overleftrightarrow{CD} \,//\, \overleftrightarrow{EF}$

$\overleftrightarrow{LP}$ ตัด $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ และ $\overleftrightarrow{EF}$ ที่จุด M, N และ O ตามลำดับ

ต้องการพิสูจน์ว่า 1) $E\hat{O}N = B\hat{M}N$

2) $A\hat{M}N + E\hat{O}N = 180^{\circ}$

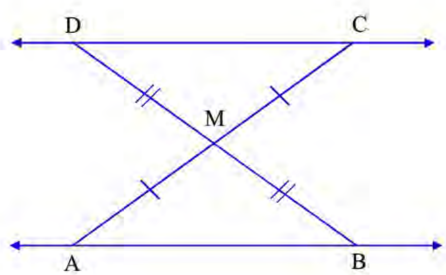
3) $\overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{EF}$

พิสูจน์

1) เนื่องจาก	$B\hat{M}N = C\hat{N}M$	(ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน)
และ	$C\hat{N}M = E\hat{O}N$	(ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน)
ดังนั้น	$E\hat{O}N = B\hat{M}N$	(สมบัติของการเท่ากัน)
2) เนื่องจาก	$A\hat{M}N + B\hat{M}N = 180^\circ$	(ขนาดของมุมตรง)
จะได้	$A\hat{M}N + E\hat{O}N = 180^\circ$	(สมบัติของการเท่ากัน โดยแทน $B\hat{M}N$ ด้วย $E\hat{O}N$)
3) ดังนั้น	$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{EF}$	(ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับ 180 องศา แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน)

เฉลยแบบฝึกหัด 1.2 ก

1.



กำหนดให้ $\overline{AC}$ และ $\overline{BD}$ แบ่งครึ่งซึ่งกันและกันที่จุด M

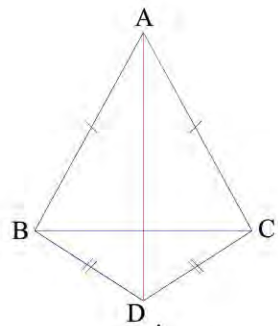
ต้องการพิสูจน์ว่า $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$

พิสูจน์

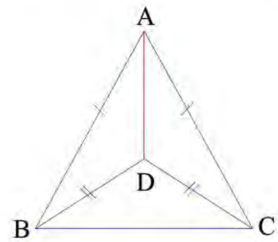
เนื่องจาก	$\Delta AMB \cong \Delta CMD$	(ด.ม.ด. เพราะ $AM = CM$, $A\hat{M}B = C\hat{M}D$ และ $MB = MD$)
จะได้	$A\hat{B}M = C\hat{D}M$	(มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะมีขนาดเท่ากัน)

ดังนั้น $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$ (ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน)

2.



รูปที่ 1



รูปที่ 2

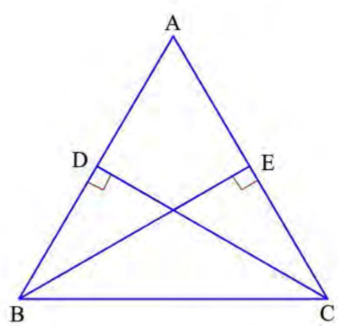
กำหนดให้ ΔABC และ ΔDBC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มี $\overline{BC}$ เป็นฐานร่วมกัน มี $AB = AC$, $DB = DC$ ลาก $\overline{AD}$

ต้องการพิสูจน์ว่า $\Delta ABD \cong \Delta ACD$

พิสูจน์

เนื่องจาก	$AB = AC$ และ $DB = DC$	(กำหนดให้)
และ	$AD = AD$	($\overline{AD}$ เป็นด้านร่วม)
ดังนั้น	$\Delta ABD \cong \Delta ACD$	(ด.ด.ด.)

3.



กำหนดให้ ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว โดยที่ $AB = AC$ $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ ที่จุด D และ $\overline{BE} \perp \overline{AC}$ ที่จุด E

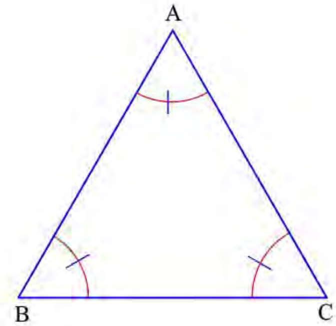
ต้องการพิสูจน์ว่า $CD = BE$ และ $AD = AE$

พิสูจน์

เนื่องจาก	$AB = AC$	(กำหนดให้)
	$A\hat{E}B = A\hat{D}C = 90^{\circ}$	($\overline{BE} \perp \overline{AC}$ และ $\overline{CD} \perp \overline{AB}$)
และ	$B\hat{A}E = C\hat{A}D$	(มุมร่วม)

จะได้	Δ AEB $\cong$ Δ ADC	(ม.ม.ด.)
ดังนั้น	AE = AD และ BE = CD	(ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะยาวเท่ากัน)

4.



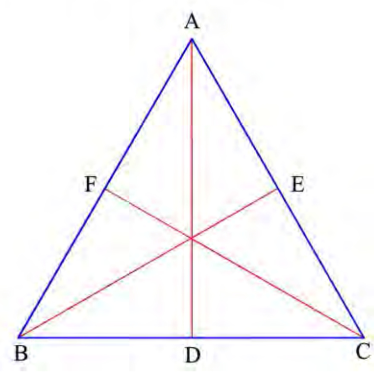
กำหนดให้ Δ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$

ต้องการพิสูจน์ว่า Δ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

พิสูจน์

เนื่องจาก	$\hat{A} = \hat{B}$ และ $\hat{B} = \hat{C}$	(กำหนดให้)
จะได้	BC = AC และ AC = AB	(ถ้ารูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองมุม แล้วด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากัน จะยาวเท่ากัน)
ดังนั้น	BC = AC = AB	(สมบัติของการเท่ากัน)
นั่นคือ	Δ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า	

5.



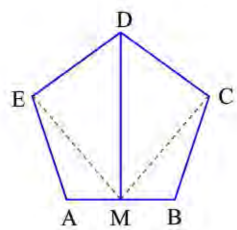
กำหนดให้ Δ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า มี $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ และ $\overline{CF}$ เป็นเส้นมัธยฐาน

ต้องการพิสูจน์ว่า AD = BE = CF

พิสูจน์

เนื่องจาก	$\Delta ABD \cong \Delta CBF$	(ด.ม.ด. เพราะ $AB = CB$, $A\hat{B}D = C\hat{B}F$ และ $BD = BF$)
ดังนั้น	$AD = CF$	(ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการจะยาวเท่ากัน)
เนื่องจาก	$\Delta ACD \cong \Delta BCE$	(ด.ม.ด.)
ดังนั้น	$AD = BE$	(ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการจะยาวเท่ากัน)
นั่นคือ	$AD = BE = CF$	(สมบัติของการเท่ากัน)

6.



กำหนดให้ รูป ABCDE เป็นรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าซึ่ง $AB = BC = CD = DE = EA$

และ $A\hat{B}C = B\hat{C}D = C\hat{D}E = D\hat{E}A = E\hat{A}B$

จุด M เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}$ ลาก $\overline{DM}$

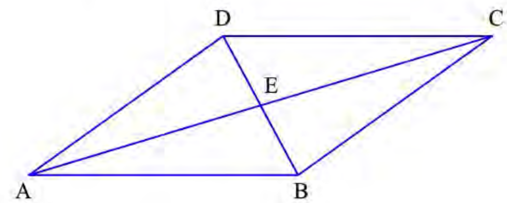
ต้องการพิสูจน์ว่า $E\hat{D}M = C\hat{D}M$

พิสูจน์ ลาก $\overline{EM}$ และ $\overline{CM}$

เนื่องจาก	$\Delta EAM \cong \Delta CBM$	(ด.ม.ด. เพราะ $EA = CB$, $E\hat{A}M = C\hat{B}M$ และ $AM = BM$)
ดังนั้น	$EM = CM$	(ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการจะยาวเท่ากัน)
จะได้	$\Delta DEM \cong \Delta DCM$	(ด.ด.ด.)
ดังนั้น	$E\hat{D}M = C\hat{D}M$	(มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการจะมีขนาดเท่ากัน)

เฉลยแบบฝึกหัด 1.2 ข

1.



กำหนดให้ □ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานมี $\overline{BD}$ และ $\overline{AC}$ เป็นเส้นทแยงมุมตัดกันที่จุด E

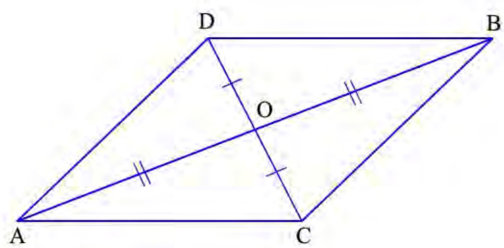
ต้องการพิสูจน์ว่า DE = BE และ AE = CE

พิสูจน์

เนื่องจาก $\Delta DAE \cong \Delta BCE$ (ม.ด.ม. เพราะ $D\hat{A}E = B\hat{C}E$, DA = BC และ $E\hat{D}A = E\hat{B}C$)

ดังนั้น DE = BE และ AE = CE (ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะยาวเท่ากัน)

2.



กำหนดให้ $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ ตัดกันและแบ่งครึ่งซึ่งกันและกันที่จุด O

ต้องการพิสูจน์ว่า □ ACBD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

พิสูจน์

เนื่องจาก $\Delta DOA \cong \Delta COB$ (ด.ม.ด. เพราะ DO = CO, $D\hat{O}A = C\hat{O}B$ และ OA = OB)

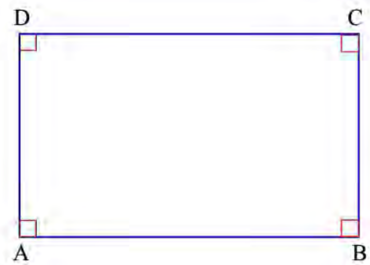
จะได้ AD = BC (ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการจะยาวเท่ากัน)

และ $A\hat{D}C = B\hat{C}D$ (มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการจะมีขนาดเท่ากัน)

ดังนั้น $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ (ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน)

นั่นคือ □ ACBD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน (รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านที่อยู่ตรงข้ามกันคู่หนึ่งขนานกันและยาวเท่ากัน เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน)

3.



กำหนดให้ □ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

ต้องการพิสูจน์ว่า □ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

พิสูจน์

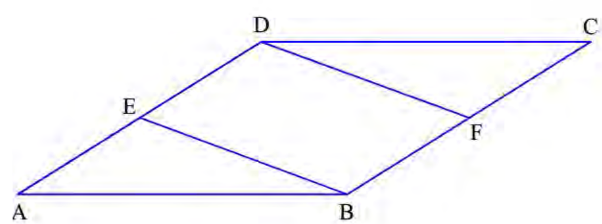
เนื่องจาก $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$ (มุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากแต่ละมุมมีขนาดเท่ากับ 90 องศา)

จะได้ $\hat{A} + \hat{D} = 180^\circ$ และ $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$ (สมบัติของการเท่ากัน)

ดังนั้น $\overline{AB} \,//\, \overline{CD}$ และ $\overline{BC} \,//\, \overline{AD}$ (ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด รวมกันเท่ากับ 180 องศา แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน)

นั่นคือ □ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน (รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน คือ รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามขนานกันสองคู่)

4.



กำหนดให้ □ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน E เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AD และ F เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน BC ลาก $\overline{EB}$ และ $\overline{DF}$

ต้องการพิสูจน์ว่า □ DFBE เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

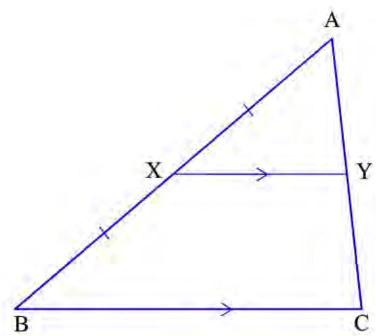
พิสูจน์

เนื่องจาก $\overline{ED} \parallel \overline{BF}$ (ต่างก็เป็นส่วนหนึ่งของด้านตรงข้ามที่ขนานกันของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน)

และ $ED = BF$ (จุด E และจุด F เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AD}$ และ $\overline{BC}$ ซึ่งมีความยาวเท่ากัน)

ดังนั้น □ DFBE เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน (รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านที่อยู่ตรงข้ามกันคู่หนึ่งขนานกันและยาวเท่ากัน เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน)

5. แนวคิดในการพิสูจน์



กำหนดให้ ΔABC มีจุด X เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}$ $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ และ $\overline{XY}$ ตัด $\overline{AC}$ ที่จุด Y

ต้องการพิสูจน์ว่า จุด Y เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AC}$

พิสูจน์

เนื่องจาก $\Delta AXY \sim \Delta ABC$ (ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีขนาดของมุมเท่ากันเป็นคู่ ๆ สามคู่ แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเป็นรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน)

จะได้ $\frac{AX}{AB} = \frac{AY}{AC}$ (สมบัติของรูปสามเหลี่ยมคล้าย)

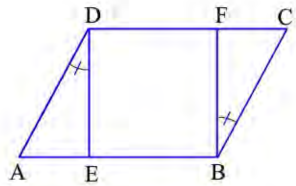
เนื่องจาก $\frac{AX}{AB} = \frac{1}{2}$ (จุด X เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}$)

ดังนั้น $\frac{AY}{AC} = \frac{1}{2}$ (สมบัติของการเท่ากัน)

$AY = \frac{1}{2}AC$ (สมบัติของการเท่ากัน)

นั่นคือ จุด Y เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AC}$

6.



กำหนดให้ □ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $A\hat{D}E = C\hat{B}F$

ต้องการพิสูจน์ว่า □ BEDF เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

พิสูจน์

เนื่องจาก $\Delta AED \cong \Delta CFB$ (ม.ค.ม. เพราะ $D\hat{A}E = B\hat{C}F$, DA = BC และ $E\hat{D}A = F\hat{B}C$)

จะได้ $A\hat{E}D = C\hat{F}B$ (มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการจะมีขนาดเท่ากัน)

เนื่องจาก $A\hat{E}D + D\hat{E}B = C\hat{F}B + B\hat{F}D = 180^{\circ}$ (ขนาดของมุมตรง)

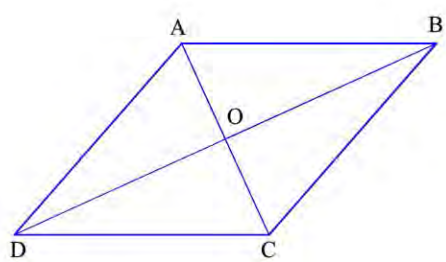
จะได้ $D\hat{E}B = B\hat{F}D$ (สมบัติของการเท่ากัน)

เนื่องจาก $A\hat{D}E + E\hat{D}F = C\hat{B}F + F\hat{B}E$ (มุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานมีขนาดเท่ากัน)

จะได้ $E\hat{D}F = F\hat{B}E$ (สมบัติของการเท่ากัน)

ดังนั้น □ BEDF เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน (ถ้ารูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่งมีมุมตรงข้ามที่มีขนาดเท่ากันสองคู่ แล้ว รูปสี่เหลี่ยมรูปนั้นเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน)

7.



กำหนดให้ □ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนที่มี $\overline{AC}$ และ $\overline{BD}$ เป็นเส้นทแยงมุมตัดกันที่จุด O

ต้องการพิสูจน์ว่า $\overline{AC} \perp \overline{BD}$

พิสูจน์

เนื่องจาก $\Delta AOD \cong \Delta COB$ (ม.ด.ม. เพราะ $O\hat{D}A = O\hat{B}C$, $DA = BC$ และ $D\hat{A}O = B\hat{C}O$)

จะได้ $AO = CO$ (ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการจะยาวเท่ากัน)

จะได้ $\Delta AOB \cong \Delta COB$ (ด.ด.ด.)

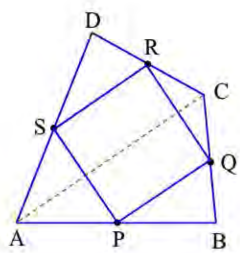
$A\hat{O}B = C\hat{O}B$ (มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการจะมีขนาดเท่ากัน)

$A\hat{O}B + C\hat{O}B = 180^{\circ}$ (ขนาดของมุมตรง)

จะได้ $A\hat{O}B = C\hat{O}B = \frac{180}{2} = 90^{\circ}$ (สมบัติของการเท่ากัน)

ดังนั้น $\overline{AC} \perp \overline{BD}$

8.



กำหนดให้ $\square$ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ จุด P, Q, R และ S เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ และ $\overline{DA}$ ตามลำดับ

ต้องการพิสูจน์ว่า $\square$ PQRS เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

พิสูจน์ ลาก $\overline{AC}$

เนื่องจาก จุด P และ Q เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}$ และ $\overline{BC}$ ตามลำดับ (กำหนดให้)

จะได้ $\overline{PQ} \,//\, \overline{AC}$ และ $PQ = \frac{1}{2}AC$

(ส่วนของเส้นตรงที่ลากเชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ จะขนานกับด้านที่สามและยาวเป็นครึ่งหนึ่งของด้านที่สาม)

ในทำนองเดียวกัน

เนื่องจาก จุด S และ R เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{DA}$ และ $\overline{CD}$ ตามลำดับ (กำหนดให้)

จะได้ $\overline{SR} \,//\, \overline{AC}$ และ $SR = \frac{1}{2}AC$

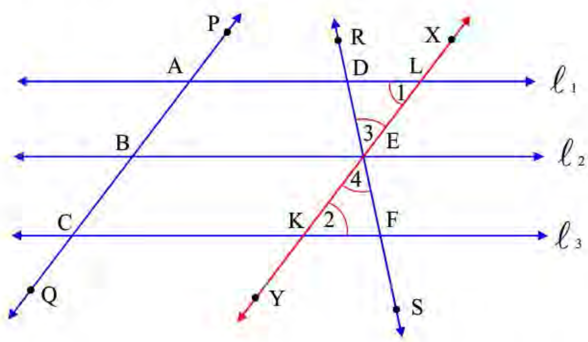
ดังนั้น $\overline{PQ} \,//\, \overline{SR}$ และ $PQ = SR$ (สมบัติของเส้นขนานและสมบัติของการเท่ากัน)

นั่นคือ □ PQRS เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
(รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านที่อยู่ตรงข้ามกันคู่หนึ่งขนานกันและยาวเท่ากัน
เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน)

เฉลยกิจกรรม "พิสูจน์ได้หรือไม่" หน้า 26

1. แนวคิดในการพิสูจน์

กรณีที่มีเส้นตรงสามเส้นขนานซึ่งกันและกัน



กำหนดให้ เส้นตรง ℓ_1, ℓ_2 และ ℓ_3 ขนานซึ่งกันและกัน $\overleftrightarrow{PQ}$ เป็นเส้นตัดเส้นตรง ℓ_1, ℓ_2 และ ℓ_3 ที่จุด A , B และ C ตามลำดับ ทำให้ AB = BC และ $\overleftrightarrow{RS}$ เป็นเส้นตัดเส้นตรง ℓ_1, ℓ_2 และ ℓ_3 ที่จุด D , E และ F ตามลำดับ

ต้องการพิสูจน์ว่า DE = EF

พิสูจน์ ลาก $\overleftrightarrow{XY}$ ผ่านจุด E และให้ขนานกับ $\overleftrightarrow{PQ}$ โดย $\overleftrightarrow{XY}$ ตัดเส้นตรง ℓ_1 ที่จุด L และตัดเส้นตรง ℓ_3 ที่จุด K

เนื่องจาก □ ABEL เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน (รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน คือ รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามขนานกันสองคู่)

ดังนั้น AB = LE (ด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานยาวเท่ากัน)

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า BC = EK

เนื่องจาก AB = BC (กำหนดให้)

ดังนั้น LE = EK (สมบัติของการเท่ากัน)

$\hat{1} = \hat{2}$ (ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน)

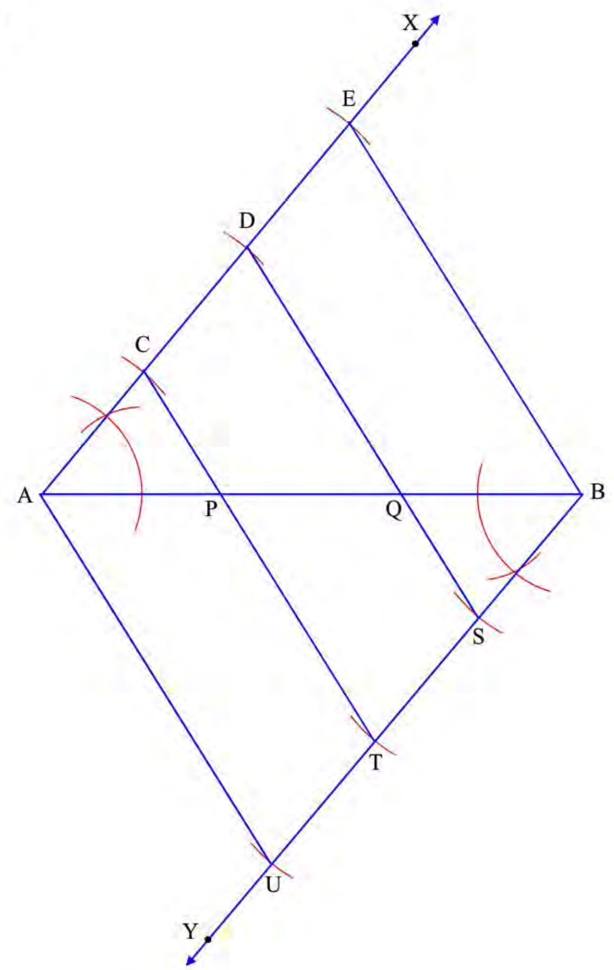
$\hat{3} = \hat{4}$ (ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกัน แล้วมุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน)

จะได้ Δ DEL $\cong$ Δ FEK (ม.ด.ม.)

นั่นคือ DE = FE (ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการจะยาวเท่ากัน)

กรณีที่มีเส้นตรงมากกว่าสามเส้นขนานซึ่งกันและกัน จะพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน

2. แนวการสร้าง



1. สร้าง $B\hat{A}X$ และ $A\hat{B}Y$ ให้เป็นมุมแย้งและมีขนาดเท่ากัน
2. ใช้รัศมีที่ยาวเท่ากันตัด $\overrightarrow{AX}$ และ $\overrightarrow{BY}$ ที่จุด C, จุด D, จุด E และ จุด S, จุด T, จุด U ตามลำดับ ให้ได้ AC = CD = DE = BS = ST = TU
3. ลาก $\overline{EB}$, $\overline{DS}$, $\overline{CT}$ และ $\overline{AU}$ ให้ $\overline{DS}$ และ $\overline{CT}$ ตัด $\overline{AB}$ ที่จุด Q และจุด P ตามลำดับ

จะได้ AP = PQ = QB

พิสูจน์

เนื่องจาก $B\hat{A}X = A\hat{B}Y$ (จากการสร้าง)

จะได้ $\overrightarrow{AX} // \overrightarrow{BY}$ (ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน)

เนื่องจาก $\overline{AC} // \overline{TU}$ และ $AC = TU$ (จากการสร้าง)

จะได้ $\overline{AU} // \overline{CT}$ (ส่วนของเส้นตรงที่ปิดหัวท้ายของส่วนของเส้นตรงที่ขนานกันและยาวเท่ากัน จะขนานกัน)

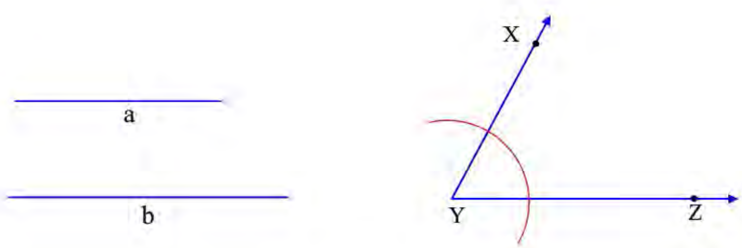
ในทำนองเดียวกันสามารถพิสูจน์ได้ว่า $\overline{CT} // \overline{DS}$ และ $\overline{DS} // \overline{EB}$

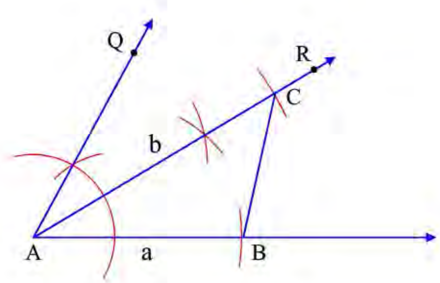
ดังนั้น $\overline{AU}$, $\overline{CT}$, $\overline{DS}$ และ $\overline{EB}$ ขนานซึ่งกันและกัน (สมบัติของเส้นขนาน)

จะได้ $AP = PQ = QB$ (ถ้าเส้นตรงตั้งแต่สามเส้นขึ้นไปขนานซึ่งกันและกัน และมีเส้นตรงเส้นหนึ่งตัด ทำให้ได้ส่วนตัดยาวเท่ากัน แล้วเส้นที่ขนานกันเหล่านี้จะตัดเส้นตัดอื่น ๆ ออกเป็นส่วน ๆ ได้ยาวเท่ากันด้วย)

เฉลยกิจกรรม “มีได้รูปเดียว” หน้า 34

1. แนวการสร้าง

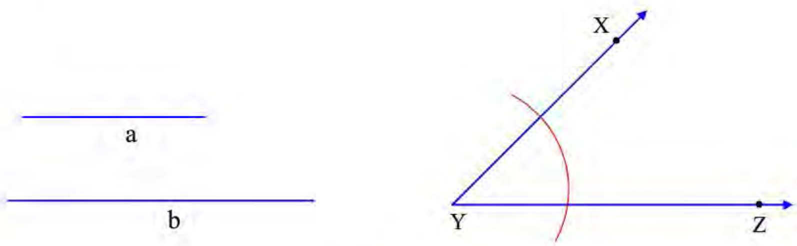


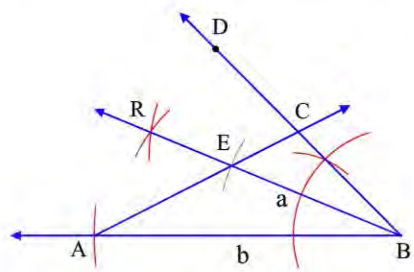


1. สร้าง $\overline{AB}$ ยาว a หน่วย
2. สร้าง $Q\hat{A}B$ ให้มีขนาดเท่ากับขนาดของ $X\hat{Y}Z$
3. สร้าง $\overrightarrow{AR}$ แบ่งครึ่ง $Q\hat{A}B$
4. บน $\overrightarrow{AR}$ สร้าง $\overline{AC}$ ยาว b หน่วย
5. ลาก $\overline{BC}$

จะได้ ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมตามต้องการ

2. แนวการสร้าง

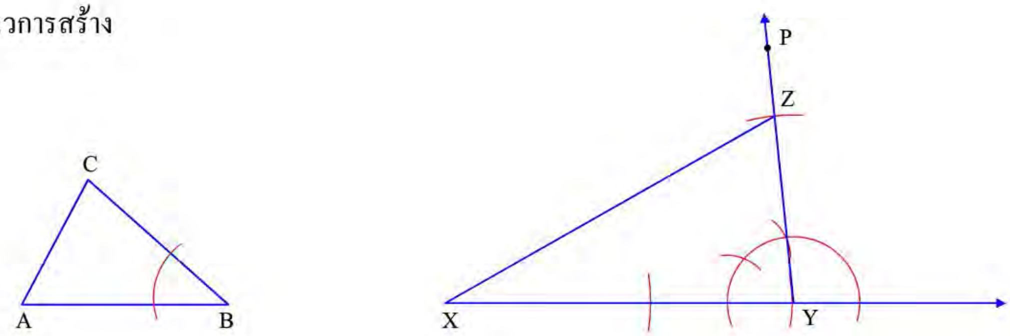




1. สร้าง $\overline{BA}$ ยาว b หน่วย
2. สร้าง $A\hat{B}D$ ให้มีขนาดเท่ากับขนาดของ $X\hat{Y}Z$
3. สร้าง $\overrightarrow{BR}$ แบ่งครึ่ง $A\hat{B}D$
4. บน $\overrightarrow{BR}$ สร้าง $\overline{BE}$ ยาว a หน่วย
5. ลาก $\overrightarrow{AE}$ ตัด $\overrightarrow{BD}$ ที่จุด C

จะได้ ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมตามต้องการ

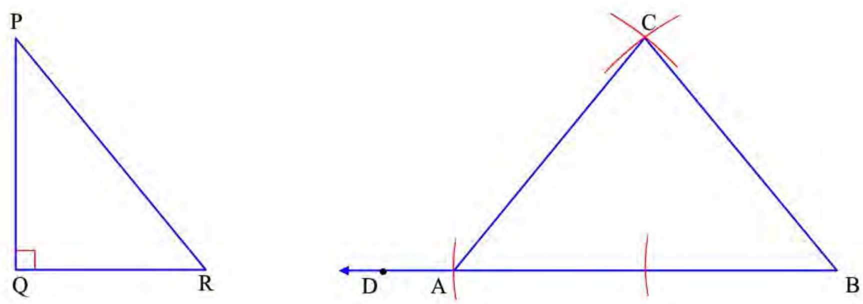
3. แนวการสร้าง



1. สร้าง $\overline{XY}$ ให้ยาวเท่ากับ AB + AC
2. สร้าง $X\hat{Y}P$ ให้มีขนาดเท่ากับสองเท่าของขนาดของ $A\hat{B}C$
3. บน $\overrightarrow{YP}$ สร้าง $\overline{YZ}$ ให้ยาวเท่ากับ BC
4. ลาก $\overline{XZ}$

จะได้ ΔXYZ เป็นรูปสามเหลี่ยมตามต้องการ

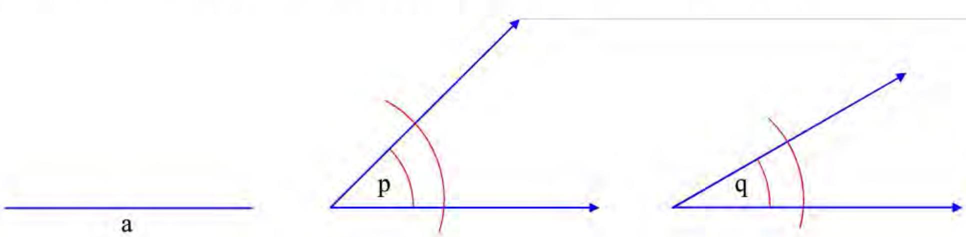
4. แนวการสร้าง

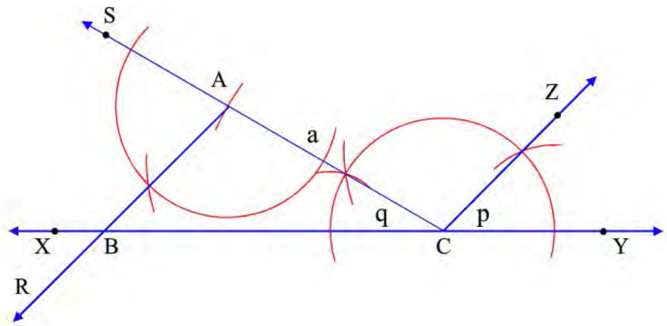


1. สร้าง $\overrightarrow{BD}$
2. บน $\overrightarrow{BD}$ สร้าง $\overline{BA}$ ให้ยาวเป็นสองเท่าของ QR
3. ใช้จุด A และ จุด B เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมีเท่ากับ PR เขียนส่วนโค้งตัดกันที่จุด C
4. ลาก $\overline{AC}$ และ $\overline{BC}$

จะได้ ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วตามต้องการ

5. ตัวอย่างการสร้าง (จะเฉลยอีกวิธีหนึ่งซึ่งแตกต่างจากที่กล่าวมาแล้วในหน้า 9)

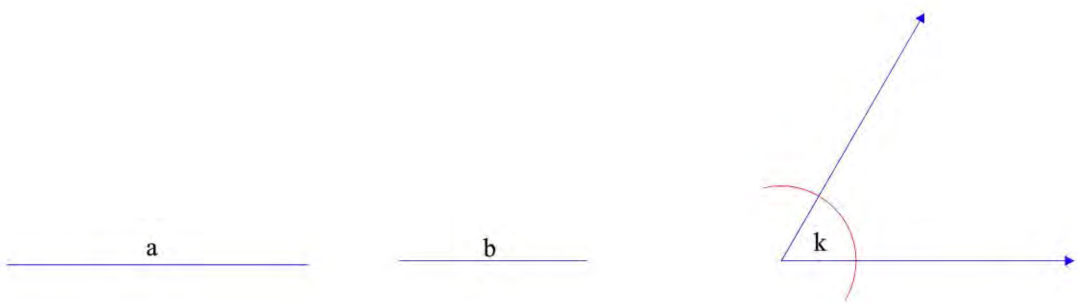


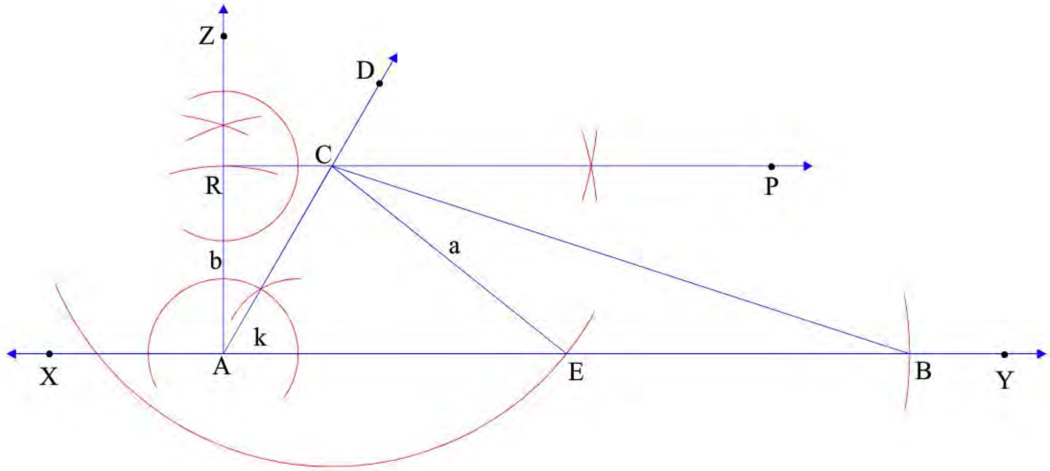


1. ลาก $\overleftrightarrow{XY}$ และกำหนดจุด C บน $\overleftrightarrow{XY}$
2. สร้าง $X\hat{C}S$ และ $Y\hat{C}Z$ คนละข้างของจุด C ให้มีขนาดเท่ากับ q และ p ตามลำดับ
3. บน $\overrightarrow{CS}$ สร้าง $\overline{CA}$ ยาว a หน่วย
4. สร้าง $C\hat{A}R$ ให้มีขนาดเท่ากับขนาดของ $A\hat{C}Z$ โดยให้ $\overrightarrow{AR}$ ตัด $\overleftrightarrow{XY}$ ที่จุด B

จะได้ Δ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมตามต้องการ

6. แนวการสร้าง





1. ลาก $\overleftrightarrow{XY}$ และกำหนดจุด A บน $\overleftrightarrow{XY}$
2. สร้าง $\overrightarrow{AZ}$ ตั้งฉากกับ $\overleftrightarrow{XY}$ ที่จุด A
3. บน $\overrightarrow{AZ}$ สร้าง $\overline{AR}$ ยาว b หน่วย
4. สร้าง $\overrightarrow{RP}$ ตั้งฉากกับ $\overrightarrow{AZ}$ ที่จุด R
5. สร้าง $Y\hat{A}D$ ให้มีขนาดเท่ากับ k และ $\overrightarrow{AD}$ ตัด $\overrightarrow{RP}$ ที่จุด C
   (จะได้จุด C มีระยะห่างจาก $\overrightarrow{AY}$ เท่ากับ b หน่วย)
6. ใช้จุด C เป็นจุดศูนย์กลางรัศมีเท่ากับ a หน่วย เขียนส่วนโค้งตัด $\overrightarrow{AY}$ ที่จุด E
7. ใช้จุด E เป็นจุดศูนย์กลางรัศมีเท่ากับ AE เขียนส่วนโค้งตัด $\overrightarrow{AY}$ ที่จุด B
8. ลาก $\overline{BC}$

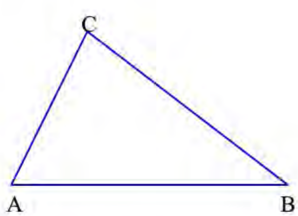
จะได้ Δ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมตามต้องการ

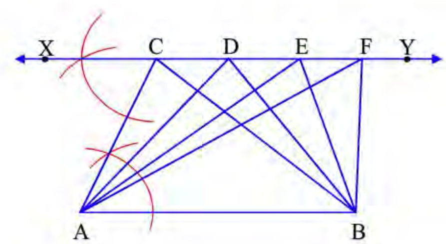
ข้อชวนคิด a จะต้องยาวเท่าใดจึงจะทำให้เกิดรูปสามเหลี่ยมได้มากกว่า 1 รูป

เฉลยกิจกรรม "มีได้หลายรูป" หน้า 38

1. แนวการสร้าง

สร้างรูปตามเงื่อนไขข้อ 1) ถึงข้อ 3) ได้ดังนี้

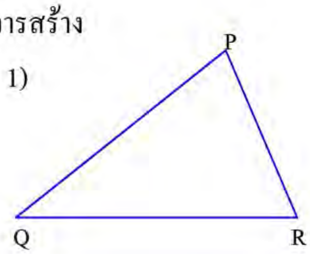


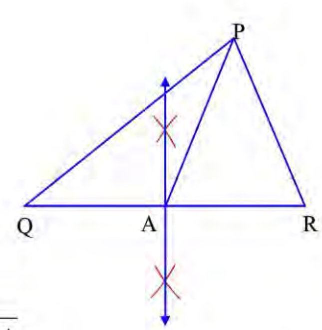


4) เท่ากับพื้นที่ของ Δ ABC เพราะมีความสูงเท่ากัน และมีฐาน AB ร่วมกัน
5) หลายรูปนับไม่ถ้วน และรูปสามเหลี่ยมเหล่านั้นมีจุดยอดอยู่บน $\overleftrightarrow{XY}$ ที่ผ่านจุด C และขนานกับฐาน AB

2. แนวการสร้าง

1)





สร้างเพื่อแบ่งครึ่ง $\overline{QR}$ ที่จุด A ลาก $\overline{PA}$

จะได้ Δ PQA และ Δ PRA แต่ละรูปมีพื้นที่เป็นครึ่งหนึ่งของพื้นที่ของ Δ PQR

แนวคิดในการให้เหตุผล

เนื่องจาก Δ PQA และ Δ PRA แต่ละรูปมีฐานยาวเท่ากับครึ่งหนึ่งของความยาวของฐานของ Δ PQR และมีความสูงเท่ากัน

ดังนั้น พื้นที่ของ Δ PQA = พื้นที่ของ Δ PRA = $\frac{1}{2}$ พื้นที่ของ Δ PQR

2) สร้างได้หลายวิธี เช่น

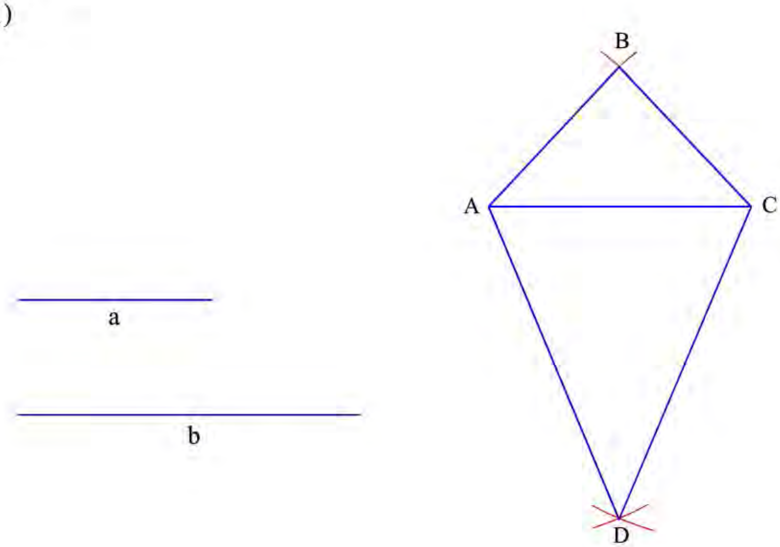
วิธีที่ 1 แบ่งครึ่งฐาน แล้วลากเส้นมัธยฐาน ดังข้อ 1)

วิธีที่ 2 แบ่งครึ่งส่วนสูง แล้วลากส่วนของเส้นตรงจากจุดแบ่งครึ่งที่ได้นั้นไปยังจุดปลายทั้งสองข้างของฐาน

เฉลยกิจกรรม "สร้างได้ไม่ยาก" หน้า 41

1. แนวการสร้าง

1)

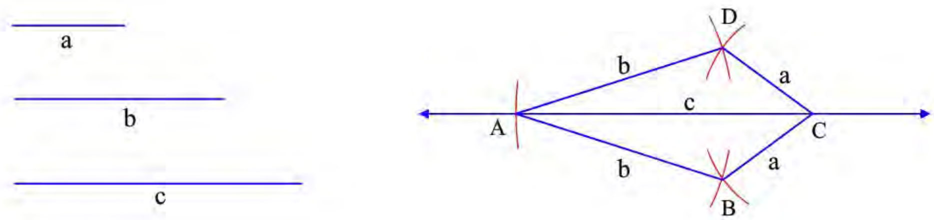


1. สร้าง $\overline{AC}$ ยาวน้อยกว่า 2a หน่วย (เนื่องจากผลบวกของความยาวของด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมมากกว่าความยาวของด้านที่สาม)
2. ใช้จุด A และจุด C เป็นจุดศูนย์กลางรัศมีเท่ากับ a หน่วยเขียนส่วนโค้งตัดกันที่จุด B ลาก $\overline{AB}$ และ $\overline{CB}$
3. ใช้จุด A และจุด C เป็นจุดศูนย์กลางรัศมีเท่ากับ b หน่วย เขียนส่วนโค้งตัดกันที่จุด D ซึ่งอยู่อีกด้านหนึ่งของ $\overline{AC}$
4. ลาก $\overline{AD}$ และ $\overline{CD}$

จะได้ $\square$ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าวตามต้องการ

2) หลายรูปนับไม่ถ้วน เพราะสามารถสร้าง $\overline{AC}$ ยาวน้อยกว่า 2a หน่วย ได้มากมายนับไม่ถ้วน

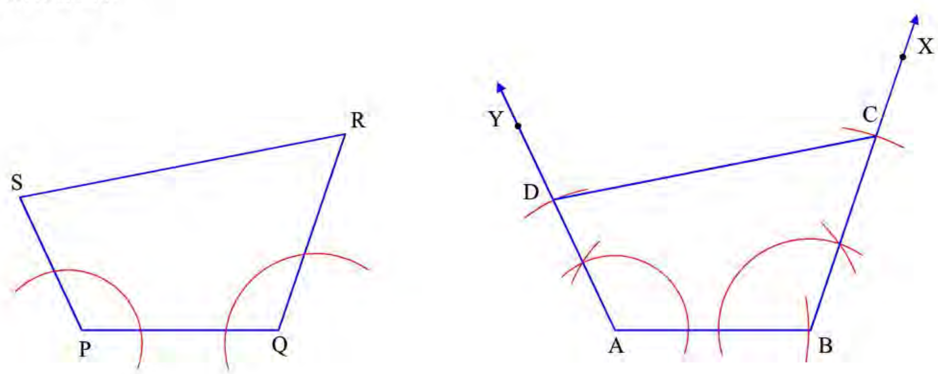
2. แนวการสร้าง



1. สร้าง $\overline{AC}$ ยาว c หน่วย
2. ใช้จุด A เป็นจุดศูนย์กลางรัศมีเท่ากับ b หน่วย เขียนส่วนโค้ง ทั้งสองด้านของ $\overline{AC}$
3. ใช้จุด C เป็นจุดศูนย์กลางรัศมีเท่ากับ a หน่วย เขียนส่วนโค้งตัดส่วนโค้งในข้อ 2 ที่จุด B และจุด D
4. ลาก $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AD}$ และ $\overline{DC}$

จะได้ □ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าวตามต้องการ

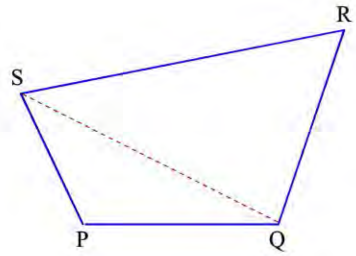
3. แนวการสร้าง

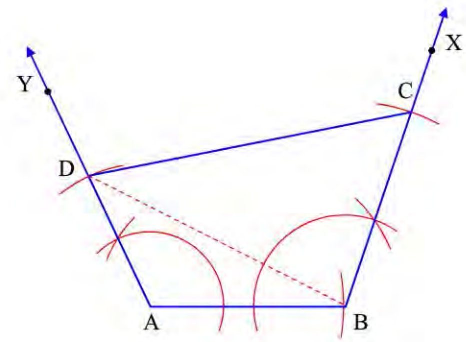


1. สร้าง $\overline{AB}$ ให้ยาวเท่ากับ PQ
2. สร้าง $A\hat{B}X$ และ $B\hat{A}Y$ ให้มีขนาดเท่ากับขนาดของ $P\hat{Q}R$ และขนาดของ $Q\hat{P}S$ ตามลำดับ
3. บน $\overrightarrow{BX}$ สร้าง $\overline{BC}$ ให้ยาวเท่ากับ QR และบน $\overrightarrow{AY}$ สร้าง $\overline{AD}$ ให้ยาวเท่ากับ PS
4. ลาก $\overline{DC}$

จะได้ □ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการกับ □PQRS

แนวคิดในการให้เหตุผล





ลาก $\overline{QS}$ และ $\overline{BD}$

จากการสร้าง $AB = PQ,\ BC = QR,\ AD = PS$

$A\hat{B}C = P\hat{Q}R$ และ $B\hat{A}D = Q\hat{P}S$

เนื่องจาก $\Delta ABD \cong \Delta PQS$ (ด.ม.ด.)

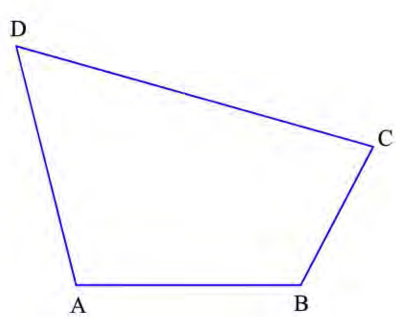
จะได้ $\Delta BDC \cong \Delta QSR$ (ด.ม.ด.)

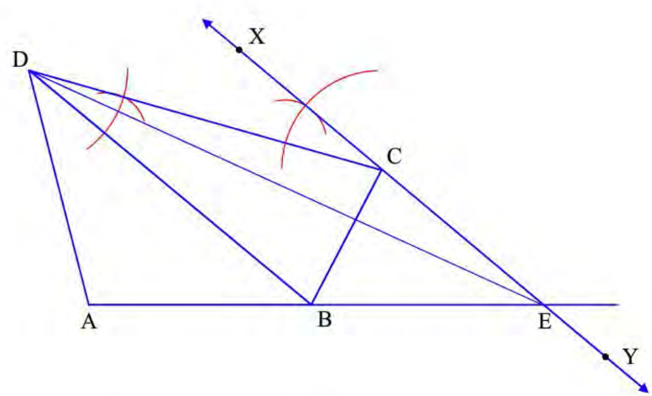
ดังนั้น $CD = RS,\ B\hat{C}D = Q\hat{R}S$ และ $A\hat{D}C = P\hat{S}R$

นั่นคือ □ ABCD $\cong$ □ PQRS (รูปหลายเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ ก็ต่อเมื่อด้านคู่ที่สมนัยกัน และมุมคู่ที่สมนัยกันของรูปหลายเหลี่ยมทั้งสองนั้น มีขนาดเท่ากันเป็นคู่ ๆ)

4. แนวการสร้าง

สร้างรูปตามเงื่อนไขข้อ 1) ถึงข้อ 4) ได้ดังนี้





5) เท่ากัน เพราะ มีฐาน BD ร่วมกันและมีส่วนสูงยาวเท่ากัน คือ จุดยอด C และจุดยอด E อยู่บน $\overleftrightarrow{CE}$ ที่ขนานกับฐาน BD

6) เท่ากัน เพราะ

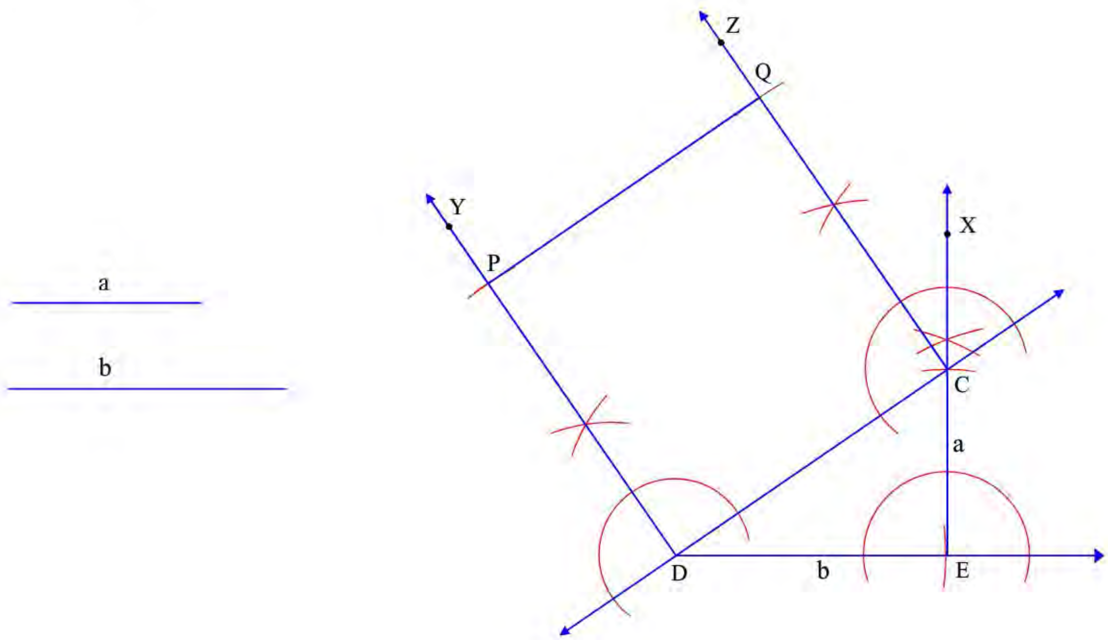
เนื่องจาก พื้นที่ของ □ ABCD = พื้นที่ของ Δ ABD + พื้นที่ของ Δ DBC

และ พื้นที่ของ Δ ADE = พื้นที่ของ Δ ABD + พื้นที่ของ Δ DBE

= พื้นที่ของ Δ ABD + พื้นที่ของ Δ DBC (จากข้อ 5))

ดังนั้น พื้นที่ของ Δ ADE = พื้นที่ของ □ ABCD (สมบัติของการเท่ากัน)

5. แนวการสร้าง



1. สร้าง $\overline{DE}$ ยาว b หน่วย
2. สร้าง $\overrightarrow{EX}$ ให้ตั้งฉากกับ $\overline{DE}$ ที่จุด E และบน $\overrightarrow{EX}$ สร้าง $\overline{EC}$ ยาว a หน่วย
3. ลาก $\overleftrightarrow{DC}$
4. สร้าง $\overrightarrow{DY}$ ให้ตั้งฉากกับ $\overleftrightarrow{DC}$ ที่จุด D และบน $\overrightarrow{DY}$ สร้าง $\overline{DP}$ ยาวเท่ากับ DC
5. สร้าง $\overrightarrow{CZ}$ ให้ตั้งฉากกับ $\overleftrightarrow{DC}$ ที่จุด C และบน $\overrightarrow{CZ}$ สร้าง $\overline{CQ}$ ยาวเท่ากับ DC
6. ลาก $\overline{PQ}$

จะได้ □ DCQP เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสตามต้องการ

แนวคิดในการให้เหตุผล

เนื่องจาก Δ DEC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มี $D\hat{E}C$ เป็นมุมฉาก DE = b หน่วย

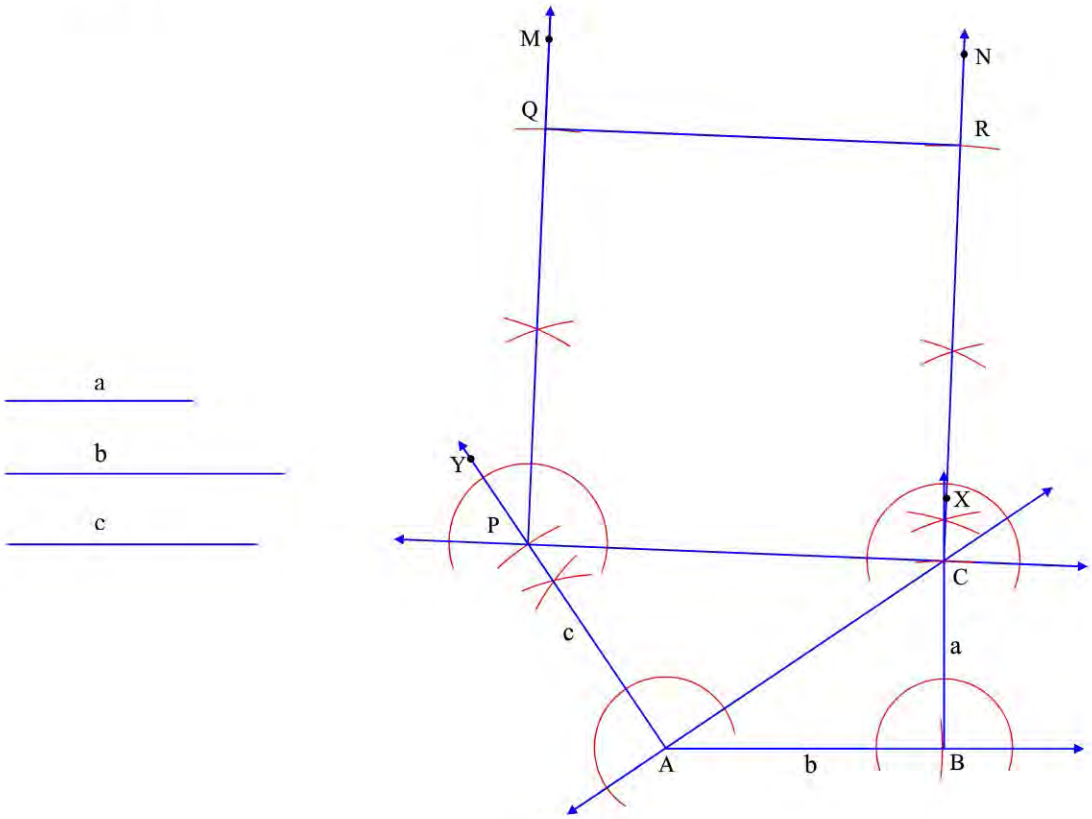
และ EC = a หน่วย (จากการสร้าง)

จะได้ $DC^2 = a^2 + b^2$ (ทฤษฎีบทพีทาโกรัส)

จากการสร้าง จะได้ □DCQP เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่แต่ละด้านยาวเท่ากับ DC

ดังนั้น □DCQP มีพื้นที่เท่ากับ $DC^2 = a^2 + b^2$ ตารางหน่วย

6. แนวการสร้าง



1. สร้าง $\overline{AB}$ ยาว b หน่วย
2. สร้าง $\overrightarrow{BX}$ ให้ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ ที่จุด B และบน $\overrightarrow{BX}$ สร้าง $\overline{BC}$ ยาว a หน่วย
3. ลาก $\overleftrightarrow{AC}$
4. สร้าง $\overrightarrow{AY}$ ให้ตั้งฉากกับ $\overline{AC}$ ที่จุด A และบน $\overrightarrow{AY}$ สร้าง $\overline{AP}$ ยาว c หน่วย
5. ลาก $\overleftrightarrow{PC}$
6. สร้าง $\overrightarrow{PM}$ และ $\overrightarrow{CN}$ ตั้งฉากกับ $\overleftrightarrow{PC}$ ที่จุด P และจุด C ตามลำดับ
7. บน $\overrightarrow{PM}$ และ $\overrightarrow{CN}$ สร้าง $\overline{PQ}$ และ $\overline{CR}$ ตามลำดับ ให้แต่ละส่วนของเส้นตรงยาวเท่ากับ PC
8. ลาก $\overline{QR}$

จะได้ □PCRQ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสตามต้องการ

แนวคิดในการให้เหตุผล

เนื่องจาก ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มี $A\hat{B}C$ เป็นมุมฉาก AB = b หน่วย

และ BC = a หน่วย (จากการสร้าง)

จะได้ $AC^2 = a^2 + b^2$ (ทฤษฎีบทพีทาโกรัส)

เนื่องจาก ΔPAC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มี $P\hat{A}C$ เป็นมุมฉาก และ PA = c หน่วย (จากการสร้าง)

จะได้ $PC^2 = AC^2 + PA^2$ (ทฤษฎีบทพีทาโกรัส)

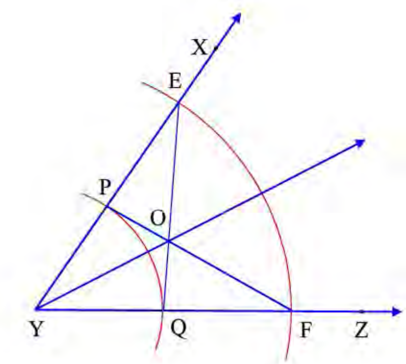
นั่นคือ $PC^2 = a^2 + b^2 + c^2$ (สมบัติของการเท่ากัน)

จากการสร้าง จะได้ □PCRQ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่แต่ละด้านยาวเท่ากับ PC

ดังนั้น □PCRQ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีพื้นที่เท่ากับ $PC^2 = a^2 + b^2 + c^2$ ตารางหน่วย

เฉลยกิจกรรม "แบ่งครึ่งมุม" หน้า 46

แนวคิดในการพิสูจน์



$\Delta PYF \cong \Delta QYE$ (ด.ม.ด. เพราะ PY = QY, $P\hat{Y}F = Q\hat{Y}E$, YF = YE)

$Y\hat{F}P = Y\hat{E}Q$ (มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะมีขนาดเท่ากัน)

$Q\hat{O}F = P\hat{O}E$ (ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกัน แล้วมุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน)

QF = PE (สมบัติของการเท่ากัน)

จะได้ $\Delta QOF \cong \Delta POE$ (ม.ม.ด.)

$OQ = OP$	(ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะยาวเท่ากัน)
เนื่องจาก $YO = YO$	($\overline{YO}$ เป็นด้านร่วม)
จะได้ $\Delta YQO \cong \Delta YPO$	(ด.ด.ด.)
ดังนั้น $P\hat{Y}O = Q\hat{Y}O$	(มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะมีขนาดเท่ากัน)

นั่นคือ $\overrightarrow{YO}$ แบ่งครึ่งมุม $X\hat{Y}Z$

บทที่ 2

ระบบสมการ (11 ชั่วโมง)

บทเรียนนี้มี 2 หัวข้อ ดังนี้

2.1 ระบบสมการที่ประกอบด้วยสมการเชิงเส้นและสมการดีกรีสอง (5 ชั่วโมง)

2.2 ระบบสมการที่ประกอบด้วยสมการดีกรีสองทั้งสองสมการ (6 ชั่วโมง)

สาระการเรียนรู้

สาระที่ 4 พีชคณิต

สาระที่ 6 ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

จุดประสงค์ประจำบท ให้นักเรียนสามารถ

1. แก้ระบบสมการสองตัวแปรที่สมการมีดีกรีไม่เกินสองที่กำหนดให้ได้
2. แก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับระบบสมการสองตัวแปรที่สมการมีดีกรีไม่เกินสองที่กำหนดให้ได้
3. ตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้

เนื้อหาในบทนี้ขยายความรู้ต่อจากระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรที่มีสองสมการและกราฟของระบบสมการดังกล่าว การแก้ระบบสมการที่มีดีกรีไม่เกินสองโดยใช้สมบัติของการเท่ากัน และนำความรู้ที่ได้ไปแก้โจทย์ปัญหาที่กำหนดให้

สาระในบทนี้ไม่เน้นการหาคำตอบของระบบสมการโดยใช้กราฟ สำหรับกราฟที่เสนอไว้ในตัวอย่าง มีเจตนาให้เห็นความสอดคล้องกันระหว่างคำตอบของระบบสมการที่หาได้จากการใช้สมบัติของการเท่ากันและคำตอบที่หาได้จากกราฟ ทั้งยังเป็นการเติมเต็มความรู้เกี่ยวกับการหาคำตอบของระบบสมการจากกราฟ ซึ่งเป็นแนวโน้มของการศึกษาคณิตศาสตร์ประยุกต์ในปัจจุบัน

แนวทางในการจัดการเรียนรู้

2.1 ระบบสมการที่ประกอบด้วยสมการเชิงเส้นและสมการดีกรีสอง (5 ชั่วโมง)

จุดประสงค์ นักเรียนสามารถ

1. แก้ระบบสมการที่ประกอบด้วยสมการเชิงเส้นและสมการดีกรีสองที่กำหนดให้โดยใช้สมบัติของการเท่ากันได้
2. ตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้

ข้อเสนอแนะในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน

1. ในการเริ่มบทเรียนนี้ ครูอาจทบทวนความรู้เกี่ยวกับการแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร และอาจยกตัวอย่างโจทย์ปัญหาเช่นที่เสนอไว้ในบทนำของบทเรียนนี้ เพื่อให้นักเรียนได้เห็นว่าบางปัญหาหรือบางสถานการณ์จะแทนด้วยสมการดีกรีสอง ซึ่งการหาคำตอบด้วยการลองแทนค่าในตัวแปรอาจทำได้ยาก จึงต้องศึกษาวิธีการแก้ระบบสมการ

ครูควรทบทวนความรู้เกี่ยวกับคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร คู่อันดับที่สอดคล้องกับสมการทั้งสอง และจำนวนคำตอบของระบบสมการ จากนั้นจึงแนะนำรูปทั่วไปของระบบสมการที่ประกอบด้วยสมการเชิงเส้นและสมการดีกรีสอง

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0 \quad \text{และ}$$

$$Px + Qy + R = 0$$

ครูอาจใช้คำถามให้นักเรียนพิจารณาว่า ถ้า A, B และ C เท่ากับศูนย์พร้อมกัน และ P, Q เท่ากับศูนย์พร้อมกัน แล้วระบบสมการดังกล่าวจะเป็นอย่างไร

2. ในการแก้ระบบสมการในตัวอย่างได้แสดงการเขียนตัวแปรตัวหนึ่งในสมการเชิงเส้นให้อยู่ในรูปของตัวแปรอีกตัวหนึ่ง แล้วนำตัวแปรนั้นไปแทนในสมการดีกรีสอง เช่น

ระบบสมการ $x + y = 2$ 1

$y - x^2 = 0$ 2

แทน y ในสมการ 2 ด้วย $2 - x$ ได้เป็น $(2 - x) - x^2 = 0$ หรือ $x^2 + x - 2 = 0$

ครูอาจชี้ให้นักเรียนเห็นว่า ในบางระบบสมการอาจแทนตัวแปรใดตัวแปรหนึ่งในรูปพหุนามดีกรีสองก็ได้ เช่น ระบบสมการข้างต้นอาจเขียน $y = x^2$ และแทน y ด้วย x^2 ในสมการ $x + y = 2$ ได้เป็น $x + x^2 = 2$ หรือ $x^2 + x = 2$ หรือ $x^2 + x - 2 = 0$ ก็ได้ แต่วิธีนี้อาจไม่สะดวกถ้าระบบสมการนั้นมีสมการดีกรีสองที่ซับซ้อนปรากฏอยู่

3. ในตัวอย่างที่แสดงให้เห็นคำตอบของระบบสมการโดยการใช้สมบัติของการเท่ากันและจากกราฟ มีเจตนายกตัวอย่างเฉพาะระบบสมการที่ประกอบด้วยสมการดีกรีสองที่มีกราฟเป็นพาราโบลาและสมการเชิงเส้น ทั้งนี้เพราะนักเรียนมีความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับกราฟเส้นตรงและพาราโบลาอยู่แล้ว ตัวอย่างจึงไม่ได้กล่าวถึงระบบสมการที่แสดงกราฟวงกลม วงรีหรือไฮเพอร์โบลากับกราฟเส้นตรง และครูควรชี้ให้เห็นลักษณะของคำตอบของระบบสมการในหัวข้อนี้ซึ่งมีอยู่ 3 แบบคือ มีคำตอบสองคำตอบ มีคำตอบเพียงคำตอบเดียวและไม่มีคำตอบ การพิจารณาคำตอบจากกราฟให้คาดเดาพิกัดของจุดตัดของกราฟทั้งสอง แล้วจึงตรวจสอบจากสมการ

4. สำหรับตัวอย่างที่ 1 ถึงตัวอย่างที่ 4 เป็นการแก้ระบบสมการที่ประกอบด้วยสมการเชิงเส้นและสมการดีกรีสองในรูปทั่วไป โดยใช้สมบัติของการเท่ากันนั้น ครูควรย้ำกับนักเรียนในเรื่องการตรวจสอบคำตอบซึ่งต้องแทนค่า x และ y ที่หาได้ในสมการทั้งสองของระบบสมการ และในกรณีโจทย์ปัญหาเช่นตัวอย่างที่ 5 จะต้องตรวจสอบค่าที่หาได้กับเงื่อนไขในโจทย์ว่าสอดคล้องตามเงื่อนไขในโจทย์หรือไม่

5. สำหรับกิจกรรม “มีเพียงคำตอบเดียว” มีเจตนาให้นักเรียนเห็นการนำความรู้เกี่ยวกับการหาคำตอบของสมการกำลังสองไปใช้ในการวิเคราะห์หาเงื่อนไขเกี่ยวกับคำตอบของระบบสมการ โจทย์ในลักษณะของกิจกรรมนี้ครูไม่ควรนำไปวัดผลกับนักเรียน

6. สำหรับกิจกรรม “ใช้กราฟช่วยหาคำตอบ” มีเจตนาให้นักเรียนได้เห็นว่า สามารถหาคำตอบของระบบสมการจากกราฟที่กำหนดให้ได้โดยพิจารณาที่จุดตัดของกราฟทั้งสองของระบบสมการ พิกัดของจุดตัดทุกจุดคือ คำตอบของระบบสมการ โจทย์ในลักษณะของกิจกรรมนี้ครูไม่ควรนำไปวัดผลกับนักเรียนเช่นกัน

2.2 ระบบสมการที่ประกอบด้วยสมการดีกรีสองทั้งสองสมการ (6 ชั่วโมง)

จุดประสงค์ นักเรียนสามารถ

1. แก้ระบบสมการที่ประกอบด้วยสมการดีกรีสองทั้งสองสมการที่กำหนดให้โดยใช้สมบัติของการเท่ากันได้
2. ตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้

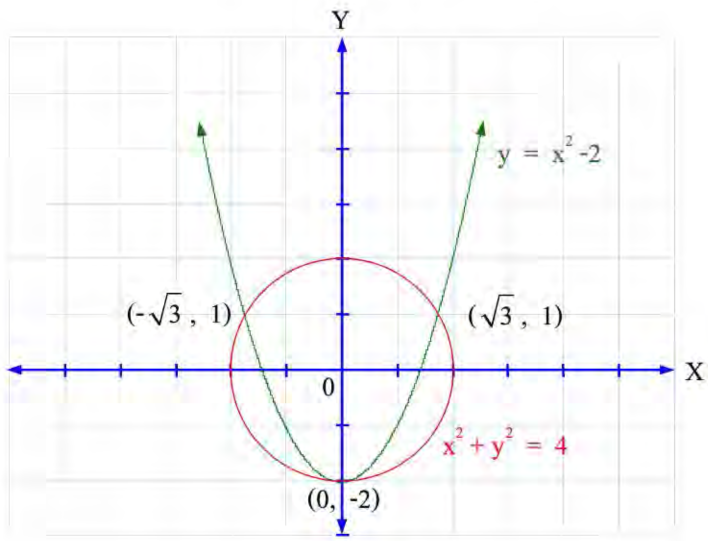
เอกสารแนะนำการจัดกิจกรรม แบบฝึกหัดเพิ่มเติม 2.2

ข้อเสนอแนะในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน

1. ครูให้ข้อสังเกตกับนักเรียนเกี่ยวกับการจำกัดลักษณะของพจน์ที่อยู่ในระบบสมการทั้งสองสมการให้เป็นไปตามเงื่อนไขที่กำหนด ทั้งนี้เพราะไม่ต้องการให้เกิดความยุ่งยากเกินไปในการหาคำตอบของระบบสมการ

2. ครูควรยกตัวอย่างการแก้ระบบสมการที่ประกอบด้วยสมการดีกรีสองทั้งสองสมการโดยใช้สมบัติของการเท่ากันให้นักเรียนเห็นว่า ระบบสมการอาจมีคำตอบเพียงคำตอบเดียว มีคำตอบหลายคำตอบหรือไม่มีคำตอบเลยก็ได้

ถ้าครูมีความรู้เกี่ยวกับเครื่องคำนวณเชิงกราฟหรือโปรแกรมทางคอมพิวเตอร์ก็อาจเขียนกราฟของระบบสมการเพื่อแสดงคำตอบให้นักเรียนเห็น และอาจเพิ่มเติมระบบสมการที่มี 3 คำตอบนอกเหนือจากตัวอย่างในหนังสือเรียนเช่น $x^2 + y^2 = 4$ และ $y = x^2 - 2$



3. การแก้ระบบสมการในหัวข้อนี้แม้จะไม่ได้เน้นถึงการแสดงการตรวจสอบคำตอบของระบบสมการ ทั้งนี้เพราะไม่ต้องการให้นักเรียนเกิดความยุ่งยากในการเขียนแสดงการตรวจสอบคำตอบ แต่ครูควรย้ำกับนักเรียนว่าการตรวจสอบคำตอบของระบบสมการยังจำเป็นต้องทำเสมอ อาจตรวจสอบในใจหรือในกระดาษอื่น ๆ ทั้งนี้เพราะนักเรียนอาจดำเนินการคำนวณผิดพลาดได้ สำหรับโจทย์ปัญหาที่เกี่ยวกับระบบสมการ นักเรียนต้องแสดงการตรวจสอบคำตอบให้สอดคล้องกับเงื่อนไขในโจทย์เสมอ

4. สำหรับกิจกรรม “คิดหน่อยนะ” โจทย์ข้อ 1 เป็นปัญหาที่ต้องการให้นักเรียนได้เห็นระบบสมการที่คำตอบของปัญหาอยู่ในรูปตัวแปร และโจทย์ข้อ 2 เป็นโจทย์ที่นักเรียนจะได้วิเคราะห์และตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้

5. สำหรับกิจกรรม “คำตอบจากกราฟ” มีเจตนาให้นักเรียนหาคำตอบของระบบสมการได้จากการหาพิกัดของจุดตัดของกราฟที่กำหนดให้ ครูอาจทำความเข้าใจเกี่ยวกับคำสั่งของกิจกรรมก่อนก็ได้ ถ้าครูคิดว่านักเรียนส่วนใหญ่จะไม่ทราบ และกิจกรรมนี้ครูไม่ควรนำไปใช้ในการวัดผลและไม่จำเป็นต้องหาโจทย์ในลักษณะนี้เพิ่มเติม

6. ครูอาจใช้แบบฝึกหัดเพิ่มเติม 2.2 เสริมทักษะการคำนวณเกี่ยวกับระบบสมการเพิ่มเติมก็ได้

เฉลยแบบฝึกหัดและกิจกรรม

เฉลยแบบฝึกหัด 2.1

1.

1) (4, 3) และ (-4, -3)

แนวคิด

$$x^2 + y^2 = 25 \quad \text{--------------} \quad ①$$

$$3x - 4y = 0 \quad \text{--------------} \quad ②$$

จากสมการ ② จะได้

$$x = \frac{4}{3}y$$

แทน x ด้วย $\frac{4}{3}y$ ในสมการ ①

จะได้ $\left(\frac{4}{3}y\right)^2 + y^2 = 25$

$$\frac{16}{9}y^2 + y^2 = 25$$

$$16y^2 + 9y^2 = 225$$

$$25y^2 = 225$$

$$y^2 = 9$$

$$y^2 - 9 = 0$$

$$(y-3)(y+3) = 0$$

ดังนั้น $y - 3 = 0$ หรือ $y + 3 = 0$

จะได้ $y = 3$ หรือ $y = -3$

แทน y ด้วย 3 ในสมการ $x = \frac{4}{3}y$

จะได้ $x = \frac{4}{3}(3) = 4$

แทน y ด้วย -3 ในสมการ $x = \frac{4}{3}y$

จะได้ $x = \frac{4}{3}(-3) = -4$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการอาจเป็น (4, 3) และ (-4, -3)

ตรวจสอบ สำหรับ (4, 3) แทน x ด้วย 4 และแทน y ด้วย 3 ในสมการ ① และ ②

จะได้ $4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$ เป็นสมการที่เป็นจริง

และ $3(4) - 4(3) = 12 - 12 = 0$ เป็นสมการที่เป็นจริง

สำหรับ (-4, -3) แทน x ด้วย -4 และแทน y ด้วย -3 ในสมการ ① และ ②

จะได้ $(-4)^2 + (-3)^2 = 16 + 9 = 25$ เป็นสมการที่เป็นจริง

และ $3(-4) - 4(-3) = (-12) + 12 = 0$ เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการคือ (4, 3) และ (-4, -3)

2) $\left(-\frac{2}{9}, -\frac{22}{9}\right)$ และ (2, 2)

แนวคิด

$$2x - y = 2 \quad \text{--------------} \ (1)$$

$$x^2 + 2y^2 = 12 \quad \text{--------------} \ (2)$$

จากสมการ (1) จะได้ $y = 2x - 2$

แทน y ด้วย $2x - 2$ ในสมการ (2)

จะได้

$$x^2 + 2(2x - 2)^2 = 12$$

$$x^2 + 2(4x^2 - 8x + 4) = 12$$

$$x^2 + 8x^2 - 16x + 8 = 12$$

$$9x^2 - 16x - 4 = 0$$

$$(9x + 2)(x - 2) = 0$$

ดังนั้น $9x + 2 = 0$ หรือ $x - 2 = 0$

จะได้ $x = -\frac{2}{9}$ หรือ $x = 2$

แทน x ด้วย $-\frac{2}{9}$ ในสมการ $y = 2x - 2$

จะได้ $y = 2\left(-\frac{2}{9}\right) - 2 = -\frac{22}{9}$

แทน x ด้วย 2 ในสมการ $y = 2x - 2$

จะได้ $y = 2(2) - 2 = 2$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการอาจเป็น $\left(-\frac{2}{9}, -\frac{22}{9}\right)$ และ (2, 2)

ตรวจสอบ สำหรับ $\left(-\frac{2}{9}, -\frac{22}{9}\right)$ แทน x ด้วย $-\frac{2}{9}$ และแทน y ด้วย $-\frac{22}{9}$

ในสมการ (1) และ (2)

จะได้ $2\left(-\frac{2}{9}\right) - \left(-\frac{22}{9}\right) = -\frac{4}{9} + \frac{22}{9} = 2$ เป็นสมการที่เป็นจริง

และ $\left(-\frac{2}{9}\right)^2 + 2\left(-\frac{22}{9}\right)^2 = \frac{4}{81} + \frac{968}{81} = 12$ เป็นสมการที่เป็นจริง

สำหรับ (2, 2) แทน x ด้วย 2 และแทน y ด้วย 2 ในสมการ (1) และ (2)

จะได้ $2(2) - 2 = 4 - 2 = 2$ เป็นสมการที่เป็นจริง

และ $2^2 + 2(2)^2 = 4 + 8 = 12$ เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการคือ $\left(-\frac{2}{9}, -\frac{22}{9}\right)$ และ (2, 2)

3) (5, 3) และ (-5, -3)

แนวคิด $x^2 - y^2 = 16$ -------------- 1

$3x - 5y = 0$ -------------- 2

จากสมการ 2 จะได้

$$x = \frac{5}{3}y$$

แทน x ด้วย $\frac{5}{3}y$ ในสมการ 1

จะได้ $\left(\frac{5}{3}y\right)^2 - y^2 = 16$

$$\frac{25}{9}y^2 - y^2 = 16$$

$$25y^2 - 9y^2 = 144$$

$$16y^2 = 144$$

$$y^2 - 9 = 0$$

$$(y-3)(y+3) = 0$$

ดังนั้น $y - 3 = 0$ หรือ $y + 3 = 0$

จะได้ $y = 3$ หรือ $y = -3$

แทน y ด้วย 3 ในสมการ $x = \frac{5}{3}y$

จะได้ $x = \frac{5}{3}(3) = 5$

แทน $y = -3$ ในสมการ $x = \frac{5}{3}y$

จะได้ $x = \frac{5}{3}(-3) = -5$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการอาจเป็น (5, 3) และ (-5, -3)

ตรวจสอบ สำหรับ (5, 3) แทน x ด้วย 5 และแทน y ด้วย 3 ในสมการ 1 และ 2

จะได้ $5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$ เป็นสมการที่เป็นจริง

และ $3(5) - 5(3) = 15 - 15 = 0$ เป็นสมการที่เป็นจริง

สำหรับ (-5, -3) แทน x ด้วย -5 และแทน y ด้วย -3 ในสมการ 1 และ 2

จะได้ $(-5)^2 - (-3)^2 = 25 - 9 = 16$ เป็นสมการที่เป็นจริง

และ $3(-5) - 5(-3) = -15 + 15 = 0$ เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการคือ (5, 3) และ (-5, -3)

4) (5, 2)

แนวคิด $x^2 - y^2 = 21$ -------------- 1

$x + y = 7$ -------------- 2

จากสมการ 2 จะได้ $x = 7 - y$

แทน x ด้วย $7 - y$ ในสมการ 1

จะได้ $(7 - y)^2 - y^2 = 21$

$49 - 14y + y^2 - y^2 = 21$

$28 - 14y = 0$

$y = 2$

แทน y ด้วย 2 ในสมการ $x = 7 - y$

จะได้ $x = 7 - 2 = 5$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการอาจเป็น (5, 2)

ตรวจสอบ แทน x ด้วย 5 และแทน y ด้วย 2 ในสมการ 1 และ 2

จะได้ $5^2 - 2^2 = 25 - 4 = 21$ เป็นสมการที่เป็นจริง

และ $5 + 2 = 7$ เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการคือ (5, 2)

5) (1, 1)

แนวคิด 1 $x^2 - y = 0$ -------------- 1

$2x - y = 1$ -------------- 2

จากสมการ 2 จะได้ $y = 2x - 1$

แทน y ด้วย $2x - 1$ ในสมการ 1

จะได้ $x^2 - (2x - 1) = 0$

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$(x - 1)(x - 1) = 0$

ดังนั้น $x - 1 = 0$

จะได้ $x = 1$

แทน x ด้วย 1 ในสมการ $y = 2x - 1$

จะได้ $y = 2(1) - 1 = 1$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการอาจเป็น (1, 1)

แนวคิด 2 $x^2 - y = 0$ -------------- 1

$2x - y = 1$ -------------- 2

จากสมการ 1 จะได้ $y = x^2$

แทน y ด้วย x^2 ในสมการ 2

จะได้ $2x - x^2 = 1$

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$(x - 1)(x - 1) = 0$

ดังนั้น $x - 1 = 0$

จะได้ $x = 1$

แทน x ด้วย 1 ในสมการ $y = x^2$

จะได้ $y = 1^2 = 1$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการอาจเป็น (1, 1)

ตรวจสอบ แทน x ด้วย 1 และแทน y ด้วย 1 ในสมการ 1 และ 2

จะได้ $1^2 - 1 = 1 - 1 = 0$ เป็นสมการที่เป็นจริง

และ $2(1) - 1 = 2 - 1 = 1$ เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการคือ (1, 1)

6) (4, -2) และ (1, 1)

แนวคิด $x - y^2 = 0$ -------------- 1

$x + y = 2$ -------------- 2

จากสมการ 1 จะได้ $x = y^2$

แทน x ด้วย y^2 ในสมการ 2

จะได้ $y^2 + y = 2$

$y^2 + y - 2 = 0$

$(y + 2)(y - 1) = 0$

ดังนั้น $y + 2 = 0$ หรือ $y - 1 = 0$

จะได้ $y = -2$ หรือ $y = 1$

แทน y ด้วย -2 ในสมการ $x = y^2$

จะได้ $x = (-2)^2 = 4$

แทน y ด้วย 1 ในสมการ $x = y^2$

จะได้ $x = 1^2 = 1$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการอาจเป็น (4, -2) และ (1, 1)

ตรวจสอบ สำหรับ (4, -2) แทน x ด้วย 4 และแทน y ด้วย -2 ในสมการ 1 และ 2

จะได้ $4 - (-2)^2 = 4 - 4 = 0$ เป็นสมการที่เป็นจริง

และ $4 + (-2) = 4 - 2 = 2$ เป็นสมการที่เป็นจริง

สำหรับ (1, 1) แทน x ด้วย 1 และแทน y ด้วย 1 ในสมการ 1 และ 2

จะได้ $1 - 1^2 = 1 - 1 = 0$ เป็นสมการที่เป็นจริง

และ $1 + 1 = 2$ เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการคือ (4, -2) และ (1, 1)

7) (-10, -4) และ (2, 2)

แนวคิด

$$x - 2y = -2 \qquad \text{--------------} \quad (1)$$

$$xy + 3x = 10 \qquad \text{--------------} \quad (2)$$

จากสมการ 1 จะได้ $x = 2y - 2$

แทน x ด้วย $2y - 2$ ในสมการ 2

จะได้
$$\begin{aligned}(2y-2)y + 3(2y-2) &= 10\\ 2y^2 - 2y + 6y - 6 &= 10\\ 2y^2 + 4y - 16 &= 0\\ y^2 + 2y - 8 &= 0\\ (y+4)(y-2) &= 0\end{aligned}$$

ดังนั้น $y + 4 = 0$ หรือ $y - 2 = 0$

จะได้ $y = -4$ หรือ $y = 2$

แทน y ด้วย -4 ในสมการ $x = 2y - 2$

จะได้ $x = 2(-4) - 2 = -10$

แทน y ด้วย 2 ในสมการ $x = 2y - 2$

จะได้ $x = 2(2) - 2 = 2$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการอาจเป็น (-10, -4) และ (2, 2)

ตรวจสอบ สำหรับ (-10, -4) แทน x ด้วย -10 และแทน y ด้วย -4 ในสมการ 1 และ 2

จะได้ $(-10) - 2(-4) = -10 + 8 = -2$ เป็นสมการที่เป็นจริง

และ $(-10)(-4) + 3(-10) = 40 - 30 = 10$ เป็นสมการที่เป็นจริง

สำหรับ (2, 2) แทน x ด้วย 2 และแทน y ด้วย 2 ในสมการ 1 และ 2

จะได้ $2 - 2(2) = 2 - 4 = -2$ เป็นสมการที่เป็นจริง

และ $2(2) + 3(2) = 4 + 6 = 10$ เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการคือ (-10, -4) และ (2, 2)

8) $\left(\frac{40}{13}, -\frac{27}{52}\right)$ และ (-3, 1)

แนวคิด

$$xy - 3x^2 = -30 \quad \text{--------------} \quad 1$$

$$x + 4y = 1 \quad \text{--------------} \quad 2$$

จากสมการ 2 จะได้ $x = 1 - 4y$

แทน x ด้วย $1 - 4y$ ในสมการ 1

จะได้
$$\begin{aligned}(1 - 4y)y - 3(1 - 4y)^2 &= -30\\ y - 4y^2 - 3(1 - 8y + 16y^2) &= -30\\ y - 4y^2 - 3 + 24y - 48y^2 &= -30\\ 52y^2 - 25y - 27 &= 0\\ (52y + 27)(y - 1) &= 0\end{aligned}$$

ดังนั้น $52y + 27 = 0$ หรือ $y - 1 = 0$

จะได้ $y = -\frac{27}{52}$ หรือ $y = 1$

แทน y ด้วย $-\frac{27}{52}$ ในสมการ $x = 1 - 4y$

จะได้ $x = 1 - 4\left(-\frac{27}{52}\right) = 1 + \frac{27}{13} = \frac{40}{13}$

แทน y ด้วย 1 ในสมการ $x = 1 - 4y$

จะได้ $x = 1 - 4(1) = 1 - 4 = -3$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการอาจเป็น $\left(\frac{40}{13}, -\frac{27}{52}\right)$ และ (-3, 1)

ตรวจสอบ สำหรับ $\left(\frac{40}{13}, -\frac{27}{52}\right)$ แทน x ด้วย $\frac{40}{13}$ และแทน y ด้วย $-\frac{27}{52}$ ในสมการ 1 และ 2

จะได้ $\left(\frac{40}{13}\right)\left(-\frac{27}{52}\right) - 3\left(\frac{40}{13}\right)^2 = -\frac{270}{169} - \frac{4,800}{169} = -\frac{5,070}{169} = -30$

เป็นสมการที่เป็นจริง

และ $\frac{40}{13} + 4\left(-\frac{27}{52}\right) = \frac{40}{13} - \frac{27}{13} = \frac{13}{13} = 1$ เป็นสมการที่เป็นจริง

สำหรับ (-3, 1) แทน x ด้วย -3 และแทน y ด้วย 1 ในสมการ 1 และ 2

จะได้ $(-3)(1) - 3(-3)^2 = -3 - 27 = -30$ เป็นสมการที่เป็นจริง

และ $(-3) + 4(1) = -3 + 4 = 1$ เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการคือ $\left(\frac{40}{13}, -\frac{27}{52}\right)$ และ $(-3, 1)$

9) $(-3, 4)$ และ $(4, -3)$

แนวคิด

$$x + y = 1 \quad \text{--------------} \; (1)$$

$$xy = -12 \quad \text{--------------} \; (2)$$

จากสมการ (1) จะได้ $x = 1 - y$

แทน x ด้วย $1 - y$ ในสมการ (2)

จะได้

$$(1 - y)y = -12$$

$$y - y^2 = -12$$

$$y^2 - y - 12 = 0$$

$$(y - 4)(y + 3) = 0$$

ดังนั้น $y - 4 = 0$ หรือ $y + 3 = 0$

จะได้ $y = 4$ หรือ $y = -3$

แทน y ด้วย 4 ในสมการ $x = 1 - y$

จะได้ $x = 1 - 4 = -3$

แทน y ด้วย -3 ในสมการ $x = 1 - y$

จะได้ $x = 1 - (-3) = 4$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการอาจเป็น $(-3, 4)$ และ $(4, -3)$

ตรวจสอบ สำหรับ $(-3, 4)$ แทน x ด้วย -3 และแทน y ด้วย 4 ในสมการ (1) และ (2)

จะได้ $-3 + 4 = 1$ เป็นสมการที่เป็นจริง

และ $(-3)(4) = -12$ เป็นสมการที่เป็นจริง

สำหรับ $(4, -3)$ แทน x ด้วย 4 และแทน y ด้วย -3 ในสมการ (1) และ (2)

จะได้ $4 + (-3) = 1$ เป็นสมการที่เป็นจริง

และ $4(-3) = -12$ เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการคือ $(-3, 4)$ และ $(4, -3)$

10) ระบบสมการไม่มีคำตอบ

แนวคิด $y = 2x^2 + 2x + 1$ -------------- 1

$y - x = -1$ -------------- 2

แทน y ด้วย $2x^2 + 2x + 1$ ในสมการ 2

จะได้ $(2x^2 + 2x + 1) - x = -1$

$2x^2 + x + 2 = 0$

ในที่นี้ $a = 2$, $b = 1$ และ $c = 2$

จะได้ $b^2 - 4ac = 1^2 - 4(2)(2) = 1 - 16 = -15$

เนื่องจาก $b^2 - 4ac < 0$

ดังนั้น ไม่มีจำนวนจริงใดเป็นคำตอบของสมการ $2x^2 + x + 2 = 0$

นั่นคือ ระบบสมการนี้ไม่มีคำตอบ

2. $\frac{7}{2}$ และ $\frac{5}{2}$

แนวคิด ให้ x แทนจำนวนแรก

และ y แทนจำนวนที่สอง

เนื่องจาก ผลบวกของจำนวนทั้งสองเท่ากับ 6

จะได้สมการเป็น $x + y = 6$ -------------- 1

เนื่องจาก ผลคูณของจำนวนทั้งสองเป็น $\frac{35}{4}$

จะได้สมการเป็น $xy = \frac{35}{4}$

หรือ $4xy = 35$ -------------- 2

จากสมการ 1 จะได้ $x = 6 - y$

แทน x ด้วย $6 - y$ ในสมการ 2

จะได้ $4(6 - y)y = 35$

$24y - 4y^2 = 35$

$4y^2 - 24y + 35 = 0$

$(2y - 7)(2y - 5) = 0$

ดังนั้น $2y - 7 = 0$ หรือ $2y - 5 = 0$

จะได้ $y = \frac{7}{2}$ หรือ $y = \frac{5}{2}$

แทน y ด้วย $\frac{7}{2}$ ในสมการ $x = 6 - y$

จะได้ $x = 6 - \frac{7}{2} = \frac{5}{2}$

แทน y ด้วย $\frac{5}{2}$ ในสมการ $x = 6 - y$

จะได้ $x = 6 - \frac{5}{2} = \frac{7}{2}$

ดังนั้น คำตอบของสมการอาจเป็น $\left(\frac{5}{2},\ \frac{7}{2}\right)$ และ $\left(\frac{7}{2},\ \frac{5}{2}\right)$

ตรวจสอบ สำหรับ $\left(\frac{5}{2},\ \frac{7}{2}\right)$ จะได้จำนวนแรกเป็น $\frac{5}{2}$ และจำนวนที่สองเป็น $\frac{7}{2}$

สำหรับ $\left(\frac{7}{2},\ \frac{5}{2}\right)$ จะได้จำนวนแรกเป็น $\frac{7}{2}$ และจำนวนที่สองเป็น $\frac{5}{2}$

ถ้าให้จำนวนทั้งสองเป็น $\frac{7}{2}$ และ $\frac{5}{2}$

จะได้ ผลบวกของจำนวนทั้งสองเป็น $\frac{7}{2} + \frac{5}{2} = 6$

และผลคูณของจำนวนทั้งสองเป็น $\left(\frac{7}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{35}{4}$

ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

ดังนั้น จำนวนทั้งสองคือ $\frac{7}{2}$ และ $\frac{5}{2}$

3. 12×18 ตารางเซนติเมตร

แนวคิด ให้รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีความกว้าง x เซนติเมตร และความยาว y เซนติเมตร

เนื่องจาก พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเท่ากับ 216 ตารางเซนติเมตร

จะได้สมการเป็น $xy = 216$ -------------- (1)

เนื่องจาก ความยาวรอบรูปเท่ากับ 60 เซนติเมตร

จะได้สมการเป็น $2(x + y) = 60$

หรือ $x + y = 30$ -------------- (2)

จากสมการ (2) จะได้ $x = 30 - y$

แทน x ด้วย $30 - y$ ในสมการ (1)

จะได้
$$(30 - y)y = 216$$
$$30y - y^2 = 216$$
$$y^2 - 30y + 216 = 0$$
$$(y - 12)(y - 18) = 0$$

ดังนั้น $y - 12 = 0$ หรือ $y - 18 = 0$

จะได้ $y = 12$ หรือ $y = 18$

แทน y ด้วย 12 ในสมการ $x = 30 - y$

จะได้ $x = 30 - 12 = 18$

แทน y ด้วย 18 ในสมการ $x = 30 - y$

จะได้ $x = 30 - 18 = 12$

ดังนั้น คำตอบระบบสมการอาจเป็น (18, 12) และ (12, 18)

ตรวจสอบ สำหรับ (18, 12) และ (12, 18) แสดงว่ารูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีความกว้าง 12 เซนติเมตร และมีความยาว 18 เซนติเมตร

ถ้าให้รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีความกว้าง 12 เซนติเมตร และมีความยาว 18 เซนติเมตร

จะได้ พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเป็น $12 \times 18 = 216$ ตารางเซนติเมตร

ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

และมีความยาวรอบรูป เท่ากับ $2(12 + 18) = 60$ เซนติเมตร

ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

ดังนั้น รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีขนาด 12×18 ตารางเซนติเมตร

4. 7 เซนติเมตร และ 5 เซนติเมตร

แนวคิด ให้ x แทนความยาวของด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปใหญ่

y แทนความยาวของด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปเล็ก

เนื่องจาก ผลต่างของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสทั้งสองเท่ากับ 24 ตารางเซนติเมตร

จะได้สมการเป็น $x^2 - y^2 = 24$ -------------- 1

เนื่องจาก ความยาวของด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปใหญ่น้อยกว่าสองเท่า

ของความยาวของด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปเล็กอยู่ 3 เซนติเมตร

จะได้สมการเป็น $2y - x = 3$ -------------- 2

จากสมการ 2 จะได้ $x = 2y - 3$

แทน x ด้วย $2y - 3$ ในสมการ 1

จะได้

$$
\begin{aligned}
(2y - 3)^2 - y^2 &= 24 \\
4y^2 - 12y + 9 - y^2 &= 24 \\
3y^2 - 12y - 15 &= 0 \\
y^2 - 4y - 5 &= 0 \\
(y - 5)(y + 1) &= 0
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $y - 5 = 0$ หรือ $y + 1 = 0$

จะได้ $y = 5$ หรือ $y = -1$

เนื่องจาก y แทนความยาวของด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่งจะต้องเป็นจำนวนบวก

ดังนั้น -1 จึงไม่ใช่ความยาวของด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

แทน y ด้วย 5 ในสมการ $x = 2y - 3$

จะได้ $x = 2(5) - 3 = 7$

ตรวจสอบ ถ้าให้รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปใหญ่มีด้านยาวด้านละ 7 เซนติเมตร

และ รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปเล็กมีด้านยาวด้านละ 5 เซนติเมตร

จะได้ผลต่างของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสทั้งสองเป็น $7^2 - 5^2 = 49 - 25$

$= 24$ ตารางเซนติเมตร

ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

และความยาวของด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปใหญ่น้อยกว่าสองเท่าของความยาวของด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปเล็กอยู่ $2(5) - 7 = 10 - 7 = 3$ เซนติเมตร

ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

ดังนั้น รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปใหญ่มีด้านยาวด้านละ 7 เซนติเมตร

และรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปเล็กมีด้านยาวด้านละ 5 เซนติเมตร

เฉลยกิจกรรม "มีเพียงคำตอบเดียว" หน้า 65

$k = \frac{17}{4}$

แนวคิด

$$y = 5x - k \quad \text{--------------} \quad (1)$$

$$y = x^2 + 2 \quad \text{--------------} \quad (2)$$

แทน y ด้วย $x^2 + 2$ ใน (1)

จะได้

$$x^2 + 2 = 5x - k$$

$$x^2 - 5x + k + 2 = 0$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(k+2)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4k - 8}}{2}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{17 - 4k}}{2} \quad \text{--------------} \quad (3)$$

เนื่องจาก ต้องการให้ระบบสมการนี้มีคำตอบเพียงคำตอบเดียว

ดังนั้น จะต้องมีค่า x และค่า y เพียงคู่เดียวที่เป็นคำตอบของระบบสมการ

จากสมการ (3) x จะมีเพียงคำตอบเดียวเมื่อ $17 - 4k = 0$

$$k = \frac{17}{4}$$

และเมื่อ x มีเพียงคำตอบเดียว ก็จะทำให้ได้ค่า y เพียงค่าเดียวด้วย

ดังนั้น $k = \frac{17}{4}$

เฉลยกิจกรรม "ใช้กราฟช่วยหาคำตอบ" หน้า 66

1. (-3, 4) และ (0, 1)	2. (1, 0)	3. (-2, 0) และ (0, 2)
4. (0, 1)	5. (2, -1) และ (5, 2)	6. (-1, -1), (0, 0) และ (1, 1)

เฉลยแบบฝึกหัด 2.2

1.

1) (0, 2) และ (0, -2)

แนวคิด $x^2 + y^2 = 4$ -------------- 1

$4x^2 + 9y^2 = 36$ -------------- 2

1 × 4 ; $4x^2 + 4y^2 = 16$ -------------- 3

2 – 3 ; $5y^2 = 20$

$y^2 = 4$

$y = \pm 2$

แทน y ด้วย 2 ในสมการ 1

จะได้ $x^2 + 2^2 = 4$

$x^2 = 0$

$x = 0$

แทน y ด้วย -2 ในสมการ 1

จะได้ $x^2 + (-2)^2 = 4$

$x^2 = 0$

$x = 0$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการคือ (0, 2) และ (0, -2)

2) $\left(\sqrt{2}, 3\right)$, $\left(\sqrt{2}, -3\right)$, $\left(-\sqrt{2}, 3\right)$ และ $\left(-\sqrt{2}, -3\right)$

แนวคิด $3x^2 + y^2 = 15$ -------------- 1

$11x^2 - 2y^2 = 4$ -------------- 2

1 × 2 ; $6x^2 + 2y^2 = 30$ -------------- 3

2 + 3 ; $17x^2 = 34$

$x^2 = 2$

$x = \pm\sqrt{2}$

แทน x ด้วย $\sqrt{2}$ ในสมการ 1

จะได้ $3\left(\sqrt{2}\right)^2 + y^2 = 15$

$6 + y^2 = 15$

$y^2 = 9$

$y = \pm 3$

แทน x ด้วย $-\sqrt{2}$ ในสมการ 1

จะได้ $3\left(-\sqrt{2}\right)^2 + y^2 = 15$

$6 + y^2 = 15$

$y^2 = 9$

$y = \pm 3$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการคือ $\left(\sqrt{2}, 3\right)$, $\left(\sqrt{2}, -3\right)$, $\left(-\sqrt{2}, 3\right)$ และ $\left(-\sqrt{2}, -3\right)$

3) $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{11}{5}\right)$ และ $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{11}{5}\right)$

แนวคิด $4x^2 - y = 3$ -------------- 1

$3x^2 - 1 - 2y = 4$ -------------- 2

1 $\times$ 2 ; $8x^2 - 2y = 6$ -------------- 3

3 $-$ 2 ; $5x^2 + 1 = 2$

$5x^2 = 1$

$x^2 = \frac{1}{5}$

$x = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

จากสมการ 1 จะได้ $y = 4x^2 - 3$

แทน x ด้วย $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ในสมการ $y = 4x^2 - 3$

จะได้ $y = 4\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - 3 = \frac{4}{5} - 3 = -\frac{11}{5}$

แทน x ด้วย $-\frac{1}{\sqrt{5}}$ ในสมการ $y = 4x^2 - 3$

จะได้ $y = 4\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - 3 = \frac{4}{5} - 3 = -\frac{11}{5}$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการคือ $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{11}{5}\right)$ และ $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{11}{5}\right)$

4) (-2, 3) และ (2, -3)

แนวคิด

$$3xy + 2y^2 = 0 \quad \text{--------------} \ (1)$$

$$5xy - 3y^2 = -57 \quad \text{--------------} \ (2)$$

(1) × 5 ; $15xy + 10y^2 = 0$ -------------- (3)

(2) × 3 ; $15xy - 9y^2 = -171$ -------------- (4)

(3) − (4) ; $19y^2 = 171$

$$y^2 = 9$$

$$y = \pm 3$$

แทน y ด้วย 3 ในสมการ (1)

จะได้ $3x(3) + 2(3)^2 = 0$

$$9x + 18 = 0$$

$$x = -2$$

แทน y ด้วย -3 ในสมการ (1)

จะได้ $3x(-3) + 2(-3)^2 = 0$

$$-9x + 18 = 0$$

$$x = 2$$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการคือ (-2, 3) และ (2, -3)

5) $\left(2, \sqrt{5}\right)$ และ $\left(2, -\sqrt{5}\right)$

แนวคิด

$$3y^2 + 2x - 19 = 0 \quad \text{--------------} \ (1)$$

$$2y^2 - 7x + 4 = 0 \quad \text{--------------} \ (2)$$

(1) × 2 ; $6y^2 + 4x - 38 = 0$ -------------- (3)

(2) × 3 ; $6y^2 - 21x + 12 = 0$ -------------- (4)

(3) − (4) ; $25x - 50 = 0$

$$x = 2$$

แทน x ด้วย 2 ในสมการ (2)

จะได้ $2y^2 - 7(2) + 4 = 0$

$$2y^2 = 10$$

$$y^2 = 5$$

$$y = \pm\sqrt{5}$$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการคือ $\left(2, \sqrt{5}\right)$ และ $\left(2, -\sqrt{5}\right)$

6) $\left(\frac{2}{3},\ \frac{3}{2}\right)$

แนวคิด $3(xy - x) = 1$ -------------- 1

$3x(y + 2) = 7$ -------------- 2

จากสมการ 1 จะได้ $3xy - 3x = 1$ -------------- 3

จากสมการ 2 จะได้ $3xy + 6x = 7$ -------------- 4

4 – 3 ; $9x = 6$

$$x = \frac{2}{3}$$

แทน x ด้วย $\frac{2}{3}$ ในสมการ 2

จะได้ $3\left(\frac{2}{3}\right)(y+2) = 7$

$$2(y + 2) = 7$$

$$2y + 4 = 7$$

$$2y = 3$$

$$y = \frac{3}{2}$$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการคือ $\left(\frac{2}{3},\ \frac{3}{2}\right)$

7) $\left(2,\ \sqrt{\frac{15}{2}}\right)$ และ $\left(2,\ -\sqrt{\frac{15}{2}}\right)$

แนวคิด $2y^2 + 2x - 19 = 0$ -------------- 1

$2y^2 - 7x = 1$ -------------- 2

1 – 2 ; $9x - 19 = -1$

$$9x = 18$$

$$x = 2$$

แทน x ด้วย 2 ในสมการ 2

จะได้ $2y^2 - 7(2) = 1$

$$2y^2 = 15$$

$$y^2 = \frac{15}{2}$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{15}{2}}$$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการคือ $\left(2,\ \sqrt{\frac{15}{2}}\right)$ และ $\left(2,\ -\sqrt{\frac{15}{2}}\right)$

8) (1, 3), (1, -3), (-1, 3) และ (-1, -3)

แนวคิด

$$x^2 + y^2 = 10 \quad \text{--------------} \ (1)$$

$$9x^2 + y^2 = 18 \quad \text{--------------} \ (2)$$

(2) – (1);

$$8x^2 = 8$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

แทน x ด้วย 1 ในสมการ (1)

จะได้

$$1^2 + y^2 = 10$$

$$y^2 = 9$$

$$y = \pm 3$$

แทน x ด้วย -1 ในสมการ (1)

จะได้

$$(-1)^2 + y^2 = 10$$

$$y^2 = 9$$

$$y = \pm 3$$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการคือ (1, 3), (1, -3), (-1, 3) และ (-1, -3)

9) ระบบสมการไม่มีคำตอบ

แนวคิด

$$x^2 - y = 0 \quad \text{--------------} \ (1)$$

$$x^2 + 3y = -1 \quad \text{--------------} \ (2)$$

(2) – (1);

$$4y = -1$$

$$y = -\frac{1}{4}$$

แทน y ด้วย $-\frac{1}{4}$ ในสมการ (1)

จะได้

$$x^2 - \left(-\frac{1}{4}\right) = 0$$

$$x^2 = -\frac{1}{4}$$

เนื่องจาก $x^2 \geq 0$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ

นั่นคือ ไม่มีจำนวนจริงใดเป็นคำตอบของสมการ $x^2 = -\frac{1}{4}$

ดังนั้น ระบบสมการนี้ไม่มีคำตอบ

10) $\left(\sqrt{a}, -\frac{\sqrt{a}}{2}\right), \left(\sqrt{a}, \frac{\sqrt{a}}{2}\right), \left(-\sqrt{a}, -\frac{\sqrt{a}}{2}\right)$ และ $\left(-\sqrt{a}, \frac{\sqrt{a}}{2}\right)$

แนวคิด $2x^2 + 4y^2 = 3a$ -------------- (1)

$3x^2 - 8y^2 = a$ -------------- (2)

(1) × 2 ; $4x^2 + 8y^2 = 6a$ -------------- (3)

(2) + (3) ; $7x^2 = 7a$

$x^2 = a$

$x = \pm\sqrt{a}$

แทน x ด้วย $\sqrt{a}$ ในสมการ (1)

จะได้ $2\left(\sqrt{a}\right)^2 + 4y^2 = 3a$

$2a + 4y^2 = 3a$

$4y^2 = a$

$y^2 = \frac{a}{4}$

$y = \pm\frac{\sqrt{a}}{2}$

แทน x ด้วย $-\sqrt{a}$ ในสมการ (1)

จะได้ $2\left(-\sqrt{a}\right)^2 + 4y^2 = 3a$

$2a + 4y^2 = 3a$

$4y^2 = a$

$y^2 = \frac{a}{4}$

$y = \pm\frac{\sqrt{a}}{2}$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการคือ $\left(\sqrt{a}, -\frac{\sqrt{a}}{2}\right), \left(\sqrt{a}, \frac{\sqrt{a}}{2}\right), \left(-\sqrt{a}, -\frac{\sqrt{a}}{2}\right)$ และ $\left(-\sqrt{a}, \frac{\sqrt{a}}{2}\right)$

2. 8 และ 12

แนวคิด ให้ x แทนจำนวนบวกที่เป็นจำนวนมาก

y แทนจำนวนบวกที่เป็นจำนวนน้อย

เนื่องจาก ผลบวกของกำลังสองของแต่ละจำนวนเท่ากับ 208

จะได้สมการเป็น $x^2 + y^2 = 208$ -------------- (1)

เนื่องจาก ผลต่างของกำลังสองของแต่ละจำนวนเท่ากับ 80

จะได้สมการเป็น $x^2 - y^2 = 80$ -------------- (2)

1 + 2 ; $2x^2 = 288$

$$x^2 = 144$$

$$x = \pm 12$$

เนื่องจาก x เป็นจำนวนบวก ดังนั้น $x = 12$

แทน x ด้วย 12 ในสมการ 1

จะได้ $12^2 + y^2 = 208$

$$144 + y^2 = 208$$

$$y^2 = 64$$

$$y = \pm 8$$

เนื่องจาก y เป็นจำนวนบวก ดังนั้น $y = 8$

ตรวจสอบ ถ้าให้จำนวนบวกทั้งสองจำนวนคือ 12 และ 8

ผลบวกของกำลังสองของแต่ละจำนวนเท่ากับ $12^2 + 8^2 = 144 + 64 = 208$

ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

และผลต่างของกำลังสองของแต่ละจำนวนเท่ากับ $12^2 - 8^2 = 144 - 64 = 80$

ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

ดังนั้น จำนวนบวกสองจำนวนคือ 8 และ 12

3. 6 และ $\frac{5}{3}$

แนวคิด ให้ x แทนจำนวนบวกที่เป็นจำนวนมาก

y แทนจำนวนบวกที่เป็นจำนวนน้อย

เนื่องจาก กำลังสองของผลบวกของสองจำนวนนี้มากกว่ากำลังสองของผลต่างของสองจำนวนนี้อยู่ 40

จะได้สมการเป็น $(x + y)^2 - (x - y)^2 = 40$

$$(x^2 + 2xy + y^2) - (x^2 - 2xy + y^2) = 40$$

$$x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2 = 40$$

$$4xy = 40$$

$$xy = 10 \quad \text{--------------} \ 1$$

เนื่องจาก กำลังสองของจำนวนมากลบด้วยผลคูณของสองจำนวนนี้เท่ากับ 26

จะได้สมการเป็น $x^2 - xy = 26$ -------------- 2

แทน xy ด้วย 10 ในสมการ 2

จะได้ $x^2 - 10 = 26$

$x^2 = 36$

$x = \pm 6$

เนื่องจาก x เป็นจำนวนบวก ดังนั้น $x = 6$

แทน x ด้วย 6 ในสมการ 1

จะได้ $6y = 10$

$y = \frac{5}{3}$

ตรวจสอบ ถ้าให้จำนวนบวกทั้งสองจำนวนคือ 6 และ $\frac{5}{3}$

กำลังสองของผลบวกของสองจำนวนนี้มากกว่ากำลังสองของผลต่างของ

สองจำนวนอยู่เท่ากับ $\left(6 + \frac{5}{3}\right)^2 - \left(6 - \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{529}{9} - \frac{169}{9} = 40$

ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

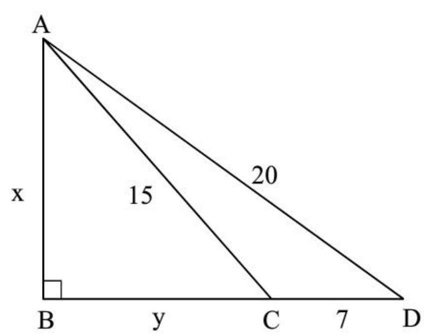
และกำลังสองของจำนวนมากลบด้วยผลคูณของสองจำนวนนี้เท่ากับ

$6^2 - 6\left(\frac{5}{3}\right) = 36 - 10 = 26$ ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

ดังนั้น จำนวนบวกสองจำนวนคือ 6 และ $\frac{5}{3}$

4. 9 เซนติเมตร และ 12 เซนติเมตร

แนวคิด จากโจทย์สร้างแบบจำลองได้ดังนี้



ให้ ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม B เป็นมุมฉาก และมีด้านตรงข้ามมุมฉาก AC ยาว 15 เซนติเมตร

ถ้า x และ y แทนความยาวของด้านประกอบมุมฉาก

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้สมการเป็น

$$x^2 + y^2 = 15^2$$

หรือ $x^2 + y^2 = 225$ -------------- 1

เนื่องจาก เมื่อต่อด้านประกอบมุมฉาก BC ออกไป 7 เซนติเมตร จนถึงจุด D โดยที่ $\overline{AB}$ มีความยาวคงที่ ทำให้ $BD = y + 7$ เซนติเมตร

และ ด้านตรงข้ามมุมฉาก AD จะมีความยาวเพิ่มขึ้นอีก 5 เซนติเมตร จากความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก AC เป็น 20 เซนติเมตร

จะได้สมการเป็น $x^2 + (y+7)^2 = 20^2$

หรือ $x^2 + y^2 + 14y + 49 = 400$ -------------- (2)

แทน $x^2 + y^2$ ด้วย 225 ในสมการ (2)

จะได้

$$225 + 14y + 49 = 400$$
$$225 + 14y = 351$$
$$14y = 126$$
$$y = 9$$

แทน y ด้วย 9 ในสมการ (1)

จะได้

$$x^2 + 9^2 = 225$$
$$x^2 + 81 = 225$$
$$x^2 = 144$$
$$x = \pm 12$$

เนื่องจาก x แทนความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งจะต้องเป็นจำนวนบวก ดังนั้น -12 จึงไม่ใช่ความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

จะได้ $x = 12$

ตรวจสอบ ถ้าด้านประกอบมุมฉากทั้งสองด้านยาว 9 และ 12 เซนติเมตร

จะได้ ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉากเท่ากับ $\sqrt{9^2 + 12^2} = 15$ เซนติเมตร

ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

และเมื่อต่อความยาวของด้านประกอบมุมฉากที่ยาว 9 เซนติเมตร ออกไป 7 เซนติเมตร เป็น $9 + 7 = 16$ เซนติเมตร โดยที่ความยาวของด้านประกอบมุมฉากอีกด้านหนึ่งยังคงเป็น 12 เซนติเมตร

จะได้ด้านตรงข้ามมุมฉากยาวเท่ากับ $\sqrt{16^2 + 12^2} = \sqrt{400} = 20$ เซนติเมตร

ทำให้ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉากเพิ่มขึ้นจากเดิม 5 เซนติเมตร

ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

ดังนั้น ด้านประกอบมุมฉากของรูปสามเหลี่ยมนี้ยาว 9 เซนติเมตร และ 12 เซนติเมตร

เฉลยกิจกรรม “คิดหน่อยนะ” หน้า 80

1. $2ax + ah + b$

แนวคิด กำหนดให้ $p = ax^2 + bx + c$

และ $q = a(x+h)^2 + b(x+h) + c$

หรือ $\quad q = a(x^2 + 2xh + h^2) + b(x + h) + c$

$\quad q = ax^2 + 2axh + ah^2 + bx + bh + c$

จะได้ $\quad \dfrac{q - p}{h} = \dfrac{(ax^2 + 2axh + ah^2 + bx + bh + c) - (ax^2 + bx + c)}{h}$

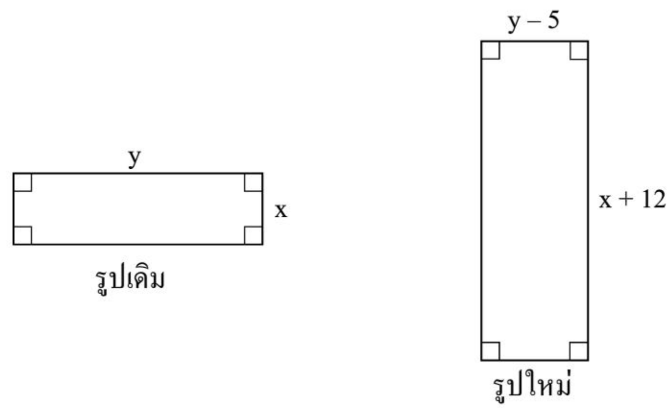
$\quad = \dfrac{2axh + ah^2 + bh}{h}$

$\quad = 2ax + ah + b$

ดังนั้น $\quad \dfrac{q - p}{h} = 2ax + ah + b$

2. ความยาว 7 เซนติเมตร และความกว้าง 2 เซนติเมตร

แนวคิด



ให้ x แทนความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปเดิม

y แทนความยาวของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปเดิม

เนื่องจาก ความยาวรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปเดิมเป็น 18 เซนติเมตร

จะได้สมการเป็น $2(x + y) = 18$

หรือ $x + y = 9$ -------------- 1

เนื่องจาก เมื่อลดความยาวของด้านยาวลง 5 เซนติเมตร เป็น $y - 5$ เซนติเมตร

และเพิ่มความกว้างของด้านกว้าง 12 เซนติเมตร เป็น $x + 12$ เซนติเมตร

จะได้ พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปใหม่เป็นสองเท่าของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมรูปเดิม

จะได้สมการเป็น $(x + 12)(y - 5) = 2xy$

หรือ $xy - 5x + 12y - 60 = 2xy$

$xy + 5x - 12y + 60 = 0$ -------------- 2

จากสมการ 1 จะได้ $x = 9 - y$

แทน x ด้วย $9 - y$ ในสมการ 2

จะได้ $(9 - y)y + 5(9 - y) - 12y + 60 = 0$

$$9y - y^2 + 45 - 5y - 12y + 60 = 0$$
$$y^2 + 8y - 105 = 0$$
$$(y + 15)(y - 7) = 0$$

ดังนั้น $y + 15 = 0$ หรือ $y - 7 = 0$

จะได้ $y = -15$ หรือ $y = 7$

เนื่องจาก y แทนความยาวของด้านของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งจะต้องเป็นจำนวนบวก ดังนั้น -15 จึงไม่ใช่ความยาวของด้านของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

จะได้ $y = 7$

แทน y ด้วย 7 ในสมการ (1)

จะได้ $x + 7 = 9$

$x = 2$

ตรวจสอบ ถ้ารูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปเดิมมีความกว้างเป็น 2 เซนติเมตร และความยาวเป็น 7 เซนติเมตร จะมีพื้นที่เท่ากับ $7 \times 2 = 14$ ตารางเซนติเมตร

เมื่อลดความยาวของด้านยาวลง 5 เซนติเมตร เป็น 2 เซนติเมตร และเพิ่มความกว้างของด้านกว้าง 12 เซนติเมตร เป็น 14 เซนติเมตร

รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปใหม่จะมีพื้นที่เท่ากับ $14 \times 2 = 28$ ตารางเซนติเมตร และเป็นสองเท่าของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปเดิม

ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

ดังนั้น รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปเดิมมีความยาว 7 เซนติเมตร และมีความกว้าง 2 เซนติเมตร

เฉลยกิจกรรม “คำตอบจากกราฟ” หน้า 81

1. (1, 1), (-1, 1)	2. (1, 0), (-1, 0)
3. (0, 2), (0, -2)	4. (3, 2), (3, -2), (-3, -2), (-3, 2)
5. (1, 1), (-1, -1)	6. (1, 1), (0, 1), (-1, 1)

เฉลยกิจกรรม “คิดดูหน่อย” หน้า 84

-3 กับ -4 และ 4 กับ 3

แนวคิด 1 ให้ x แทนจำนวนมาก

y แทนจำนวนน้อย

เนื่องจาก ผลคูณของจำนวนสองจำนวนเท่ากับ 12

จะได้สมการเป็น $xy = 12$ -------------- (1)

เนื่องจาก ถ้าจำนวนมากลดลง 1 เป็น $x-1$

และ จำนวนน้อยเพิ่มขึ้น 1 เป็น $y+1$

ทำให้ผลคูณของสองจำนวนที่ได้ในครั้งหลังยังคงเท่ากับ 12

จะได้สมการเป็น $(x-1)(y+1) = 12$

หรือ $xy + x - y - 1 = 12$ -------------- 2

แทน xy ด้วย 12 ในสมการ 2

จะได้ $12 + x - y - 1 = 12$

หรือ $x = y + 1$

แทน x ด้วย $y+1$ ในสมการ 1

จะได้

$$(y+1)y = 12$$
$$y^2 + y = 12$$
$$y^2 + y - 12 = 0$$
$$(y+4)(y-3) = 0$$

ดังนั้น $y + 4 = 0$ หรือ $y - 3 = 0$

จะได้ $y = -4$ หรือ $y = 3$

แทน y ด้วย -4 ในสมการ $x = y + 1$

จะได้ $x = -4 + 1 = -3$

แทน y ด้วย 3 ในสมการ $x = y + 1$

จะได้ $x = 3 + 1 = 4$

ตรวจสอบ ถ้าจำนวนมากเป็น -3 และจำนวนน้อยเป็น -4

ผลคูณของจำนวนทั้งสองเท่ากับ $(-3)(-4) = 12$

และเมื่อจำนวนมากลดลง 1 เป็น -4 และจำนวนน้อยเพิ่มขึ้น 1 เป็น -3

ผลคูณของสองจำนวนที่ได้ในครั้งหลังเป็น $(-4)(-3) = 12$

ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

ถ้าจำนวนมากเป็น 4 และจำนวนน้อยเป็น 3

ผลคูณของจำนวนทั้งสองเท่ากับ $4 \times 3 = 12$

และเมื่อจำนวนมากลดลง 1 เป็น 3 และจำนวนน้อยเพิ่มขึ้น 1 เป็น 4

ผลคูณของสองจำนวนที่ได้ในครั้งหลังเป็น $3 \times 4 = 12$

ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

ดังนั้น จำนวนทั้งสองคือ -3 กับ -4 และ 4 กับ 3

แนวคิด 2 ให้ x แทนจำนวนมาก

y แทนจำนวนน้อย

เนื่องจาก ผลคูณของจำนวนสองจำนวนเท่ากับ 12

จะได้สมการเป็น $xy = 12$ -------------- (1)

เนื่องจาก ถ้าจำนวนมากลดลง 1 เป็น $x - 1$ และจำนวนน้อยเพิ่มขึ้น 1 เป็น $y + 1$ แล้วผลคูณของสองจำนวนที่ได้ในครั้งหลังเท่ากับ 12

จะได้สมการเป็น $(x-1)(y+1) = 12$

หรือ $xy + x - y - 1 = 12$

$xy + x - y = 13$ -------------- (2)

จากสมการ (1) จะได้ $x = \frac{12}{y}$

แทน x ด้วย $\frac{12}{y}$ ในสมการ (2)

จะได้

$$\left(\frac{12}{y}\right)y + \frac{12}{y} - y = 13$$

$$12 + \frac{12}{y} - y = 13$$

$$12y + 12 - y^2 = 13y$$

$$y^2 + y - 12 = 0$$

$$(y+4)(y-3) = 0$$

ดังนั้น $y + 4 = 0$ หรือ $y - 3 = 0$

จะได้ $y = -4$ หรือ $y = 3$

แทน y ด้วย -4 ในสมการ $x = \frac{12}{y}$

จะได้ $x = \frac{12}{-4} = -3$

แทน y ด้วย 3 ในสมการ $x = \frac{12}{y}$

จะได้ $x = \frac{12}{3} = 4$

ตรวจสอบ ถ้าจำนวนทั้งสองเป็น -3 และ -4

จะได้ ผลคูณของจำนวนสองจำนวนเป็น (-3)(-4) = 12

และเมื่อจำนวนมากลดลง 1 เป็น -4 และจำนวนน้อยเพิ่มขึ้น 1 เป็น -3

ผลคูณของสองจำนวนที่ได้ในครั้งหลังเท่ากับ (-4)(-3) = 12

ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

ถ้าจำนวนทั้งสองเป็น 4 และ 3

จะได้ ผลคูณของจำนวนสองจำนวนเป็น $4 \times 3 = 12$

และเมื่อจำนวนมากลดลง 1 เป็น 3 และจำนวนน้อยเพิ่มขึ้น 1 เป็น 4

ผลคูณของสองจำนวนที่ได้ในครั้งหลังเท่ากับ $3 \times 4 = 12$

ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

ดังนั้น จำนวนทั้งสองคือ -3 กับ -4 และ 4 กับ 3

แบบฝึกหัดเพิ่มเติมและคำตอบ

แบบฝึกหัดเพิ่มเติม 2.2

แบบฝึกหัดนี้จัดไว้เป็นแบบฝึกหัดระคน เพื่อใช้ทบทวนความรู้เรื่องการแก้ระบบสมการและการนำไปใช้แก้โจทย์ปัญหา

1. จงหาคำตอบของระบบสมการต่อไปนี้

1) $x + 2y = 1$

$x^2 + xy = 28$ *[(7, -3) และ (-8, $\frac{9}{2}$)]*

2) $3x - y = -9$

$3x^2 - y^2 = -33$ *[(-1, 6) และ (-8, -15)]*

3) $x^2 - 3x - y = 6$

$2x - y = 0$ *[(6, 12) และ (-1, -2)]*

4) $2xy - x^2 = -95$

$3xy + x^2 = -80$ *[(5, -7) และ (-5, 7)]*

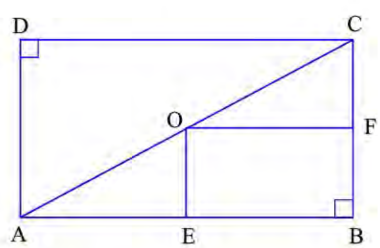
5) $4x^2 - 5y^2 = 1$

$5x^2 + 4y^2 = \frac{61}{16}$ *[($\frac{3}{4}, \frac{1}{2}$), ($\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}$), ($-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}$) และ ($-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}$)]*

2. ผลบวกของจำนวนสองจำนวนเท่ากับ 208 และกำลังสองของผลต่างของจำนวนทั้งสองเท่ากับ 16,384 จงหาจำนวนทั้งสองนั้น *[40 และ 168]*

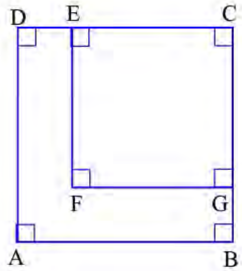
3. ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากมีความยาวรอบรูป 70 เซนติเมตร ด้านประกอบมุมฉากด้านหนึ่งยาว 20 เซนติเมตร จงหาพื้นที่ของ ΔABC *[210 ตารางเซนติเมตร]*

4.



จากรูป □ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก จุด E และจุด F เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}$ และ $\overline{BC}$ ตามลำดับ AC = 17 หน่วย และความยาวรอบรูปของ □BEOF เท่ากับ 23 หน่วย จงหาความยาวของ $\overline{AB}$ และ $\overline{BC}$ *[15 และ 8 หน่วย]*

5.



จากรูป □ ABCD และ □ CEFG เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ถ้าพื้นที่ของ □ ABCD มากกว่าพื้นที่ของ □ CEFG เท่ากับผลบวกของความยาวรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมทั้งสองรูป อยากทราบว่าความยาวของด้านของ □ ABCD มากกว่าความยาวของด้านของ □ CEFG เท่าไร *[4 เซนติเมตร]*

บทที่ 3
วงกลม (21 ชั่วโมง)

บทเรียนนี้มี 4 หัวข้อ ดังนี้

3.1 วงกลม	(1 ชั่วโมง)
3.2 มุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม	(6 ชั่วโมง)
3.3 คอร์ด	(7 ชั่วโมง)
3.4 เส้นสัมผัสวงกลม	(7 ชั่วโมง)

สาระการเรียนรู้

สาระที่ 3 เรขาคณิต

สาระที่ 6 ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

จุดประสงค์ประจำบท ให้นักเรียนสามารถ

ใช้สมบัติเกี่ยวกับวงกลมในการให้เหตุผลและแก้ปัญหาที่กำหนดให้ได้

เนื้อหาในบทนี้มีจุดมุ่งหมายให้นักเรียนรู้จักสมบัติของวงกลมในรูปของทฤษฎีบท ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทอาศัยความรู้พื้นฐานที่นักเรียนเคยเรียนมาแล้วเกี่ยวกับความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม เส้นขนาน รูปสามเหลี่ยมคล้าย และทฤษฎีบทเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม สาระที่เสนอไว้ส่วนใหญ่อยู่ในรูปของกิจกรรมที่ให้นักเรียนศึกษาสมบัติของวงกลม เพื่อนำไปสู่ทฤษฎีบทซึ่งบางทฤษฎีบทได้มีการพิสูจน์ไว้ บางทฤษฎีบทไม่ได้แสดงการพิสูจน์แต่มีคำถามที่นำไปสู่การพิสูจน์ได้ และบางทฤษฎีบทก็ให้นักเรียนยอมรับโดยไม่มีการพิสูจน์ นอกจากนี้ยังมีกิจกรรมที่ให้นักเรียนเห็นการนำสมบัติของวงกลมไปใช้ในการสร้างและใช้แก้ปัญหาที่กำหนดได้

การจัดการเรียนการสอนที่อยู่ในรูปของกิจกรรม ครูควรให้นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติจริง เพื่อฝึกให้นักเรียนมีความสามารถในการสร้างข้อความคาดการณ์เกี่ยวกับสมบัติทางเรขาคณิต สำหรับการพิสูจน์ทฤษฎีบทหรือสมบัติของวงกลมให้อยู่ในดุลพินิจของครูว่าควรให้นักเรียนพิสูจน์ หรือให้นักเรียนยอมรับทฤษฎีบทนั้นไปใช้อ้างอิงได้โดยไม่จำเป็นต้องพิสูจน์อย่างเป็นทางการก็ได้

การเขียนเหตุผลอ้างอิงในแต่ละขั้นตอนของการพิสูจน์ ครูอาจให้นักเรียนเขียนเหตุผลเหล่านั้นอย่างสมบูรณ์หรือเขียนอย่างย่อที่ได้สาระครบถ้วนก็ได้ สำหรับแนวคิดในการให้เหตุผลที่แสดงไว้ในส่วนเฉลยคำตอบของกิจกรรมหรือแบบฝึกหัด ได้เขียนไว้ในลักษณะรวบรัดขั้นตอน ถ้าครูเน้นการเขียนพิสูจน์อย่างเป็นระบบ ควรให้นักเรียนเขียนขั้นตอนเพิ่มเติมตามเหตุและผลที่ควรจะเป็น อย่างไรก็ตามแนวคิดที่ให้ไว้ในส่วนเฉลยเป็นเพียงแนวคิดหนึ่งในการหาคำตอบ นักเรียนอาจมีแนวคิดที่แตกต่างก็ได้ สำหรับแบบฝึกหัดมีทั้งอยู่ในแต่ละกิจกรรมและอยู่ในชุดแบบฝึกหัด ครูควรเลือกให้นักเรียนทำตามความเหมาะสมกับความสามารถของนักเรียนและเวลา

แนวทางในการจัดการเรียนรู้

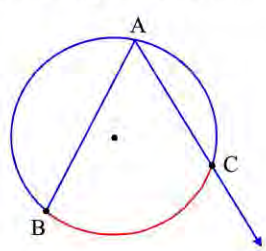
3.1 วงกลม (1 ชั่วโมง)

จุดประสงค์ นักเรียนสามารถระบุส่วนต่าง ๆ ที่กำหนดให้เกี่ยวกับวงกลมได้

ข้อเสนอแนะในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน

1. ครูสนทนากับนักเรียนเกี่ยวกับวงกลมที่ปรากฏอยู่ในสิ่งแวดล้อมรอบตัว อาจให้นักเรียนช่วยกันยกตัวอย่างวัสดุหรือสิ่งที่มีลักษณะเป็นวงกลม เพื่อโยงไปสู่ความหมายของวงกลม เมื่อกล่าวถึงวงกลมซึ่งเป็นรูปเรขาคณิตรูปหนึ่ง จะเรียกชื่อว่าวงกลมโดยไม่มีคำว่ารูปนำหน้าเหมือนชื่อรูปเรขาคณิตอื่น ๆ เช่น รูปสามเหลี่ยม หรือรูปสี่เหลี่ยม

2. ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนเพื่อแนะนำส่วนต่าง ๆ ของวงกลม ครูควรแนะนำทีละชุด โดยแนะนำชุดที่เป็นเส้นตรงหรือส่วนของเส้นตรงที่เกี่ยวข้องกับวงกลม เช่น คอร์ด เส้นสัมผัสวงกลม แล้วตรวจสอบความเข้าใจโดยให้นักเรียนทำกิจกรรม “บอกได้ไหม” ต่อจากนั้นจึงแนะนำชุดของมุมต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับวงกลม เช่น มุมที่จุดศูนย์กลาง มุมในส่วนโค้งของวงกลม และใช้กิจกรรม “ยังบอกได้ไหม” ตรวจสอบความเข้าใจอีกครั้ง สำหรับความหมายของส่วนโค้งที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางหรือรองรับมุมในส่วนโค้งของวงกลมไม่ได้ให้ความหมายไว้เป็นกิจจะลักษณะ ครูควรอธิบายและชี้ให้เห็นว่าส่วนโค้งดังกล่าวมีจุดปลายอยู่บนแขนทั้งสองของมุมที่กล่าวถึง เช่น



$B\hat{A}C$ เป็นมุมในส่วนโค้งของวงกลม ซึ่งมี $\overset{\frown}{BC}$ อยู่ตรงข้ามมุม เป็นส่วนโค้งที่รองรับมุม $B\hat{A}C$ สังเกตได้ว่า จุด B และจุด C อยู่บนวงกลม จุด B อยู่บนแขน AB และจุด C อยู่บนแขน AC

3. การทบทวนและแนะนำเกี่ยวกับส่วนต่าง ๆ ของวงกลมในหัวข้อนี้ มีเจตนาเพียงเพื่อให้นักเรียนเข้าใจและเป็นพื้นฐานในการศึกษาสาระในหัวข้อต่อ ๆ ไป ครูไม่ควรนำสาระในหัวข้อนี้ไปวัดผล

3.2 มุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม (6 ชั่วโมง)

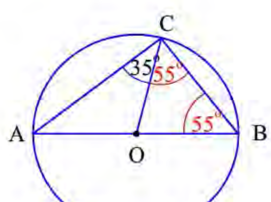
จุดประสงค์ นักเรียนสามารถนำทฤษฎีบทหรือสมบัติของวงกลมที่เกี่ยวกับมุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลมไปใช้ได้

ข้อเสนอแนะในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน

1. สาระส่วนใหญ่ในหัวข้อนี้เสนอไว้ในรูปของกิจกรรม เช่น กิจกรรม "มุมในครึ่งวงกลม" ครูควรให้นักเรียนได้ปฏิบัติกิจกรรมจริง ๆ และเขียนข้อความคาดการณ์ที่นักเรียนค้นพบจากกิจกรรม สำหรับการพิสูจน์ยืนยันข้อความคาดการณ์ในกิจกรรมนี้ได้กล่าวไว้ในรูปของทฤษฎีบท ครูอาจให้นักเรียนช่วยกันบอกแนวคิดในการพิสูจน์บนกระดานดำ และบอกเหตุผลโดยใช้การอธิบายด้วยวาจาแทนการเขียน หลังจากนั้นจึงให้นักเรียนศึกษารายละเอียดของการพิสูจน์ในหนังสือเรียนอีกครั้งก็ได้

2. สำหรับตัวอย่างที่ 1 แสดงให้นักเรียนเห็นว่าโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการคำนวณหาขนาดของมุมที่กำหนดให้ ถ้าต้องการแสดงเหตุผลประกอบจะทำได้อย่างไร

สำหรับโจทย์ปัญหาที่ให้หาขนาดของมุมที่กำหนดให้ในทุก ๆ เรื่องของบทนี้ ในกรณีที่ไม่ต้องแสดงเหตุผล ครูอาจแนะนำให้นักเรียนเขียนขนาดของมุมต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการคำนวณหาคำตอบไว้ในรูป เพื่อครูจะได้ตรวจสอบร่องรอยการคิดคำนวณและการนำสมบัติของวงกลมมาใช้ว่าถูกต้องหรือไม่ เช่น

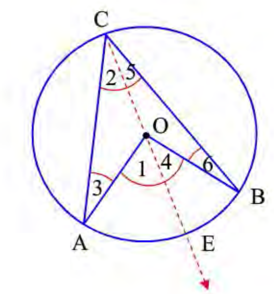


กำหนดให้ $\overline{AB}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม O และ $A\hat{C}O = 35^\circ$ จงหาขนาดของ $O\hat{B}C$

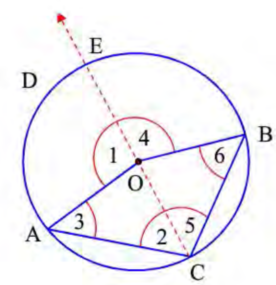
จากรูป จะเห็นแนวคิดของนักเรียนที่มีร่องรอยของขนาดของมุมต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกันตามสมบัติทางเรขาคณิตที่นำมาใช้ ซึ่งจะทำให้ได้ $O\hat{B}C = 55^\circ$

3. การดำเนินกิจกรรมการเรียนการสอนในกิจกรรมอื่น ๆ เช่นกิจกรรม "มุมที่จุดศูนย์กลาง" หรือ "มุมในส่วนโค้งของวงกลม" ก็อาจจัดกิจกรรมการเรียนการสอนในทำนองเดียวกับกิจกรรม "มุมในครึ่งวงกลม"

สำหรับการพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ "มุมที่จุดศูนย์กลาง จะมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน" ถ้าครูเห็นสมควรให้นักเรียนพิสูจน์ ครูอาจแนะนำแนวคิดในการพิสูจน์ ในกรณีที่มุมในส่วนโค้งมีลักษณะเป็นดังรูป ก และรูป ค ดังนี้



รูป ก



รูป ค

ลาก $\overrightarrow{CO}$ ให้ตัดวงกลมที่จุด E

จะได้ $\hat{1} = \hat{2} + \hat{3} = 2(\hat{2})$ --------- ①

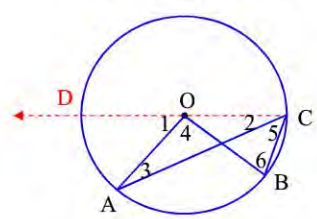
$\hat{4} = \hat{5} + \hat{6} = 2(\hat{5})$ --------- ②

(ขนาดของมุมภายนอกของรูปสามเหลี่ยมเท่ากับผลบวกของขนาดของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิดของมุมภายนอกนั้น)

จาก ① + ② จะได้ $\hat{1} + \hat{4} = 2(\hat{2} + \hat{5})$

ดังนั้น ในรูป ก $A\hat{O}B = 2(A\hat{C}B)$ และในรูป ค มุมกลับ AOB $= 2(A\hat{C}B)$

ในกรณีที่มุมในส่วนโค้งมีลักษณะดังรูป ข ครูอาจแนะนำแนวคิดในการพิสูจน์ ดังนี้



รูป ข

โดยลาก $\overrightarrow{CO}$ ให้ตัดวงกลมที่จุด D

จะได้ $\hat{1} = \hat{2} + \hat{3} = 2(\hat{2})$ ------ ①

$\hat{1} + \hat{4} = (\hat{2} + \hat{5}) + \hat{6} = 2(\hat{2} + \hat{5})$

$= 2(\hat{2}) + 2(\hat{5})$ ------ ②

(เหตุผลเช่นเดียวกันกับข้างต้น)

จาก ② – ① จะได้ $\hat{4} = 2(\hat{5})$

ดังนั้น $A\hat{O}B = 2(A\hat{C}B)$

4. สำหรับแบบฝึกหัด 3.2 ข ข้อ 2 เป็นสมบัติที่ครูควรให้นักเรียนพิสูจน์ และแนะนำให้นักเรียนจดจำทฤษฎีบทนี้ไปใช้ในการให้เหตุผลอ้างอิงต่อไป

สำหรับแบบฝึกหัดข้อ 3 หลังจากพิสูจน์ข้อความดังกล่าวแล้ว ครูควรให้นักเรียนสรุปเป็นสมบัติของวงกลมที่สามารถนำไปใช้อ้างอิงได้เช่นกัน อาจให้จดบันทึกเป็นทฤษฎีบทดังนี้

ในวงกลมวงหนึ่ง ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสี่เหลี่ยมที่แนบในวงกลมออกไป ขนาดของมุมภายนอกจะเท่ากับขนาดของมุมภายในที่อยู่ตรงข้าม

3.3 คอร์ด (7 ชั่วโมง)

จุดประสงค์ นักเรียนสามารถนำทฤษฎีบทหรือสมบัติของวงกลมที่เกี่ยวกับคอร์ดและส่วนโค้งของวงกลมไปใช้ได้

ข้อเสนอแนะในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน

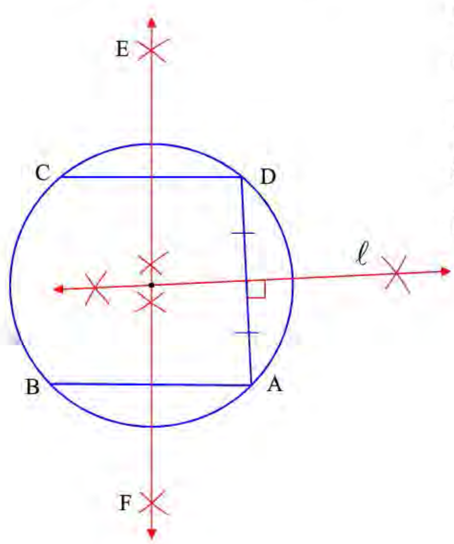
1. สาระในกิจกรรม "คอร์ดและส่วนโค้งของวงกลม" เสนอไว้ในรูปคำถามซึ่งมีคำตอบนำไปสู่การให้เหตุผลเพื่อการพิสูจน์ยืนยันทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องได้ ครูอาจให้นักเรียนสำรวจ ตอบคำถามและช่วยกันสรุปเป็นข้อความคาดการณ์ แล้วให้นักเรียนพิสูจน์ทฤษฎีบทนั้นเป็นการบ้านก็ได้

2. สำหรับกิจกรรม "รูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแนบในวงกลม" มีเจตนาให้นักเรียนได้นำความรู้เกี่ยวกับความสัมพันธ์ของมุมที่จุดศูนย์กลาง ส่วนโค้งที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางและคอร์ดมาใช้ในการสร้างรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าบางรูปแนบในวงกลมและการให้เหตุผลยืนยัน ครูอาจให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายหาข้อสรุปเพื่อตอบคำถามหลังกิจกรรมการสร้าง

3. สำหรับกิจกรรม "คอร์ดกับจุดศูนย์กลางของวงกลม" การพิสูจน์ในกิจกรรมข้อ 1 และข้อ 2 ทำได้ง่าย ครูอาจให้นักเรียนพิสูจน์เป็นการบ้านและนำมาอภิปรายร่วมกันในชั้นเรียนอีกครั้งก็ได้

4. การพิสูจน์สมบัติของวงกลมเกี่ยวกับจุดศูนย์กลางของวงกลมที่อยู่บนเส้นตรงที่ตั้งฉากและแบ่งครึ่งคอร์ดของวงกลมค่อนข้างเข้าใจยาก ครูควรนำมาอภิปรายในชั้นเรียนและชี้ให้นักเรียนเห็นว่าสมบัติดังกล่าวนี้มีประโยชน์ในการนำไปใช้แก้ปัญหาเกี่ยวกับการหาตำแหน่งของจุดศูนย์กลางของวงกลมในกิจกรรม "หาจุดศูนย์กลาง" ต่อไป

สำหรับกิจกรรมการหาจุดศูนย์กลางของวงกลมที่กำหนดคอร์ดสองคอร์ดขนานกัน ครูอาจเพิ่มเติมความรู้โดยใช้คำถามให้นักเรียนคิดว่า ในกรณีเช่นนี้ในทางปฏิบัติจะทำอย่างไรจึงจะทราบตำแหน่งของจุดศูนย์กลางของวงกลม



คำตอบของนักเรียนอาจเป็นดังนี้

จากรูปที่มี $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ และ $\overleftrightarrow{EF}$ ตั้งฉากและแบ่งครึ่ง $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ อาจลาก $\overline{AD}$ แล้วสร้างเส้นตรง ℓ ตั้งฉากและแบ่งครึ่ง $\overline{AD}$ จะได้จุดตัดของเส้นตรง ℓ กับ $\overleftrightarrow{EF}$ เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

5. สำหรับกิจกรรม “วงกลมผ่านจุดที่กำหนด” มีเจตนาให้เป็นกิจกรรมสำรวจ ครูควรให้นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติจริง เพื่อให้ได้ข้อสรุปที่สำคัญตามที่เสนอไว้ท้ายกิจกรรมนี้

6. กิจกรรม “จุดศูนย์กลางวงล้อม” เป็นกิจกรรมที่ต้องการให้นักเรียนเห็นการนำความรู้จากกิจกรรม “หาจุดศูนย์กลาง” ไปใช้ในการสร้างวงกลมล้อมรูปสามเหลี่ยม ครูอาจตั้งคำถามแล้วให้นักเรียนช่วยกันสร้างและให้เหตุผลร่วมกันในชั้นเรียนก็ได้

7. กิจกรรม “รูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม” เป็นกิจกรรมที่ต้องการให้นักเรียนทราบทฤษฎีบทของวงกลมที่น่าสนใจอีกทฤษฎีบทหนึ่งซึ่งเป็นบทกลับของทฤษฎีบทที่กล่าวว่า “ผลบวกของขนาดของมุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมที่แนบในวงกลมเท่ากับ 180 องศา” ครูควรนำมาอธิบายและชี้ให้เห็นว่าแนวคิดในการพิสูจน์จะแตกต่างจากแนวการพิสูจน์ที่นักเรียนคุ้นเคย คือให้เหตุผลเพื่อแสดงว่าผลที่ต้องการเป็นจริง แต่ในการพิสูจน์บทกลับนี้จะพิสูจน์โดยสมมติให้ผลที่ต้องการพิสูจน์เป็นเท็จ แล้วให้เหตุผลจนเกิดข้อขัดแย้งกับสิ่งที่กำหนดให้หรือสิ่งที่ทราบว่าเป็นจริง จึงได้ข้อสรุปว่า ที่สมมติให้ผลที่ต้องการพิสูจน์เป็นเท็จนั้นเป็นไปไม่ได้ ดังนั้นผลที่ต้องการจึงเป็นจริง การพิสูจน์ลักษณะนี้เป็นการพิสูจน์ทางอ้อม

8. สำหรับกิจกรรม “คอร์ดที่ยาวเท่ากัน” หลังจากครูให้นักเรียนตอบคำถามและช่วยกันสรุปคำตอบที่จะนำไปสู่การพิสูจน์แล้ว ครูอาจให้นักเรียนเขียนการพิสูจน์อีกครั้งเป็นการบ้านด้วยก็ได้

9. สำหรับแบบฝึกหัด 3.3 ค ข้อ 6 หลังจากนักเรียนพิสูจน์แล้ว ครูควรแนะนำให้นักเรียนทราบว่าเราสามารถนำสมบัตินี้ไปใช้อ้างอิงในการให้เหตุผลต่อไปได้

3.4 เส้นสัมผัสวงกลม (7 ชั่วโมง)

จุดประสงค์ นักเรียนสามารถนำทฤษฎีบทหรือสมบัติของวงกลมที่เกี่ยวกับเส้นสัมผัสวงกลมไปใช้ได้

ข้อเสนอแนะในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน

1. ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนเกี่ยวกับเส้นสัมผัสวงกลมและรัศมี ครูควรนำทฤษฎีบทที่เป็นประโยคเงื่อนไขและบทกลับของประโยคเงื่อนไขทั้งสองประโยคมาอธิบายและทำความเข้าใจแนวการพิสูจน์ เนื่องจากแนวการพิสูจน์บทกลับเป็นการพิสูจน์ทางอ้อมซึ่งอาจเป็นเรื่องที่เข้าใจยากสำหรับนักเรียนบางคน

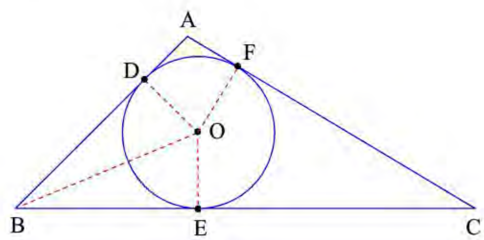
2. สำหรับสาระเกี่ยวกับการสร้างเส้นสัมผัสวงกลมแสดงให้เห็นการสร้าง 2 แบบคือ แบบกำหนดจุดสัมผัสบนวงกลมมาให้และกำหนดจุดภายนอกวงกลมมาให้ ซึ่งเป็นความรู้ที่นักเรียนควรทราบ ครูอาจให้นักเรียนเขียนการพิสูจน์ยืนยันการสร้างด้วย ทั้งนี้เพราะในแบบฝึกหัดที่กำหนดให้เป็นการสร้างเส้นสัมผัสไม่ได้ให้พิสูจน์

3. สำหรับกิจกรรม “ลองคิดดู” มีเจตนาให้นักเรียนได้ฝึกคิดวิเคราะห์และใช้ความรู้ทางเรขาคณิต พีชคณิตและการวัดมาเชื่อมโยงในการแก้ปัญหา ครูอาจให้นักเรียนคิดและนำเสนอแนวคิดบนป้ายนิเทศก็ได้

4. สำหรับกิจกรรม "น่ารู้" มีเจตนาให้เป็นความรู้เพิ่มเติมและให้นักเรียนเห็นการเชื่อมโยงความรู้ โดยนำสมบัติของวงกลมมาใช้ในการอธิบายทางภูมิศาสตร์เกี่ยวกับการกำหนดตำแหน่งของเส้นรุ้ง ครูอาจให้นักเรียนศึกษาด้วยตนเองก็ได้

5. สำหรับกิจกรรม "วงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยม" มีเจตนาให้นักเรียนเห็นการนำความรู้เกี่ยวกับเส้นสัมผัสวงกลมและรัศมีมาใช้ในการวิเคราะห์การสร้างวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยม

ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน ครูอาจเขียนรูปที่ต้องการสร้างอย่างคร่าว ๆ ซึ่งเป็นรูปที่มีวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยมก่อน แล้วใช้คำถามให้นักเรียนคิดวิเคราะห์ย้อนจากผลที่ต้องการไปสู่จุดเริ่มต้นของการสร้าง ดังตัวอย่างคำถามต่อไปนี้



1) ถ้าจุด D, E และ F เป็นจุดสัมผัสของวงกลม แล้ว $\overline{OD}$, $\overline{OE}$ และ $\overline{OF}$ ต้องเกี่ยวข้องกับวงกลม O อย่างไรบ้าง *[แต่ละส่วนของเส้นตรงเป็นรัศมีของวงกลม O มีความยาวเท่ากัน และตั้งฉากกับเส้นสัมผัสหรือด้านของรูปสามเหลี่ยม]*
2) ถ้าต้องการให้มีผลว่า OD = OE เหตุที่จะทำให้เกิดผลดังกล่าว ควรได้จากความรู้เรื่องใด *[ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม]*
3) ถ้าใช้ความรู้เกี่ยวกับความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม สิ่งที่จะใช้เป็นเงื่อนไขในการพิจารณา 3 ประการน่าจะมีอะไรบ้าง *[$B\hat{D}O = B\hat{E}O = 90^\circ$, $BO = BO$ และ $D\hat{B}O = E\hat{B}O$]*
4) จากเงื่อนไข 3 ประการในข้อ 3) มีสิ่งใดที่นักเรียนคิดว่ายังบอกไม่ได้ว่ามีความเท่ากันหรือไม่ *[ขนาดของ $D\hat{B}O$ และขนาดของ $E\hat{B}O$]*
5) นักเรียนสามารถสร้างให้ $D\hat{B}O = E\hat{B}O$ ได้หรือไม่ *[ได้ โดยการสร้างเส้นแบ่งครึ่งมุม]*

จากคำถาม 5 ข้อข้างต้น นักเรียนควรเห็นแล้วว่าทำไมการสร้างวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยมจึงต้องอาศัยการแบ่งครึ่งมุมของรูปสามเหลี่ยม

จากนั้นครูจึงใช้คำถามต่อเนื่อง เช่น

6) ถ้าสร้างเฉพาะเส้นแบ่งครึ่งมุม $A\hat{B}C$ มุมเดียวจะหาจุดศูนย์กลางของวงกลมได้หรือไม่
[ไม่ได้]

7) นักเรียนต้องสร้างเส้นแบ่งครึ่งมุมของรูปสามเหลี่ยมกี่มุม จึงจะได้ตำแหน่งของจุดศูนย์กลางของวงกลม *[2 มุม]*

8) จำเป็นต้องสร้างเส้นแบ่งครึ่งมุมของมุมที่สามอีกหรือไม่ เพราะเหตุใด
[ไม่จำเป็น เพราะจากการสร้างเส้นแบ่งครึ่งมุม 2 มุมก็สามารถพิสูจน์ได้แล้วว่า $DO = EO = FO$ และ $\overline{DO}, \overline{EO}, \overline{FO}$ แต่ละเส้นจะตั้งฉากกับด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม ทำให้สรุปได้ว่าจุด D, E และ F เป็นจุดสัมผัสของวงกลม]

6. ทฤษฎีบทในกิจกรรม "เส้นสัมผัสและคอร์ด" เป็นอีกทฤษฎีบทหนึ่งที่มีการนำไปใช้มาก หลังจากนักเรียนตอบคำถามข้อ 1 แล้ว ครูควรให้นักเรียนพิสูจน์เป็นทฤษฎีบทโดยทำกิจกรรมข้อ 2 ด้วย

7. สำหรับกิจกรรม "ไกลแค่ไหน" มีเจตนาให้เห็นการนำความรู้เรื่องเส้นสัมผัสไปใช้เพื่อเชื่อมโยงกับความรู้ทางภูมิศาสตร์อีกกิจกรรมหนึ่ง ครูอาจให้นักเรียนศึกษาและทำเป็นการบ้านก็ได้ แต่ควรได้มีการอภิปรายกันถึงสถานการณ์ปัญหาที่ต้องการให้เห็นแนวคิดในการหาสูตรการคำนวณ เพื่อใช้ในการคำนวณระยะทางในทางภูมิศาสตร์โดยประมาณ ครูไม่ควรนำเรื่องนี้ไปวัดผล

8. สำหรับกิจกรรม "ระยะรอบโลก" เป็นอีกกิจกรรมหนึ่งที่ต้องการให้นักเรียนเห็นการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์กับภูมิศาสตร์ ต้องการจุดประกายให้นักเรียนเห็นความสามารถของนักคณิตศาสตร์ในอดีตที่มีความคิดสร้างสรรค์ เป็นคนช่างสังเกต ใฝ่รู้ และมีความพยายามในการแก้ปัญหา

นวนิยายเรื่อง 80 วันรอบโลกเสนอไว้ในกิจกรรมนี้เพื่อเสริมกิจกรรมให้น่าสนใจ ภาพยนตร์เรื่องนี้สนุก ตื่นเต้น ครูอาจหาภาพยนตร์เรื่องนี้มาให้นักเรียนชมก็ได้

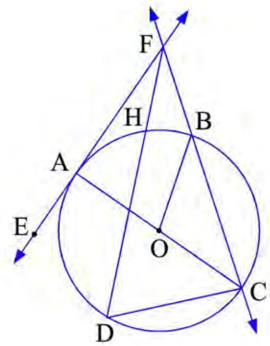
เฉลยแบบฝึกหัดและกิจกรรม

เฉลยกิจกรรม "บอกได้ไหม" หน้า 89

1.

1) หลายเส้นนับไม่ถ้วน
2) ไม่เป็น เพราะรัศมีของวงกลมตัดวงกลมที่จุดจุดเดียว
3) หลายเส้นนับไม่ถ้วน
4) ได้
5) หลายเส้นนับไม่ถ้วน
6) ไม่ได้

2.



1) $\overline{AC}$

2) $\overline{AO}$, $\overline{BO}$ และ $\overline{CO}$

3) $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ และ $\overline{DH}$

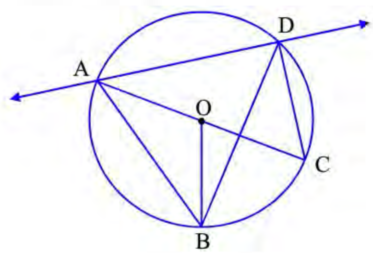
4) $\overline{AC}$

5) $\overleftrightarrow{EF}$

6) $\overleftrightarrow{CF}$

7) $\overset{\frown}{ABC}$ และ $\overset{\frown}{ADC}$

เฉลยกิจกรรม "ยังบอกได้ไหม" หน้า 91



1. $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$, $A\hat{O}C$, มุมกลับ AOB และมุมกลับ BOC
2. $A\hat{D}C$
3. $B\hat{A}C$, $B\hat{A}D$, $C\hat{A}D$, $A\hat{D}B$, $A\hat{D}C$, $B\hat{D}C$, $A\hat{C}D$ และ $A\hat{B}D$
4. $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{ABC}$, $\overset{\frown}{ADC}$, $\overset{\frown}{ADB}$ หรือ $\overset{\frown}{ACB}$, $\overset{\frown}{BAC}$ หรือ $\overset{\frown}{BDC}$
5. $\overset{\frown}{ABC}$
6. $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{BD}$, $\overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{AC}$ และ $\overset{\frown}{AD}$

เฉลยกิจกรรม "มุมในครึ่งวงกลม" หน้า 92

1. – 3. ปฏิบัติกิจกรรมตามที่กำหนด

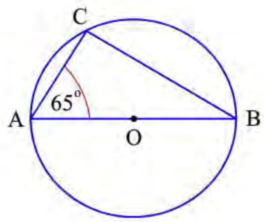
4. 90°

5. ใช่

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายกิจกรรม "มุมในครึ่งวงกลม" หน้า 95

1. 25°

แนวคิด



เนื่องจาก $A\hat{C}B = 90^\circ$

$B\hat{A}C = 65^\circ$

และ $A\hat{B}C + A\hat{C}B + B\hat{A}C = 180^\circ$

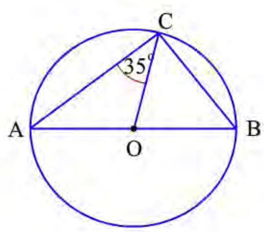
จะได้ $A\hat{B}C + 90 + 65 = 180$

$A\hat{B}C = 180 - 90 - 65 = 25^\circ$

นั่นคือ ขนาดของ $A\hat{B}C$ เท่ากับ 25°

2. 55°

แนวคิด



เนื่องจาก $A\hat{C}O + O\hat{C}B = 90^\circ$

และ $A\hat{C}O = 35^\circ$

จะได้ $35 + O\hat{C}B = 90$

ดังนั้น $O\hat{C}B = 90 - 35 = 55^\circ$

เนื่องจาก $OC = OB$

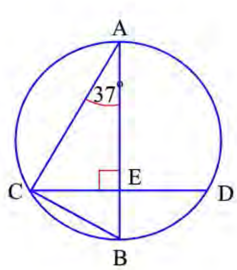
จะได้ ΔBOC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ดังนั้น $O\hat{B}C = O\hat{C}B$

นั่นคือ ขนาดของ $O\hat{B}C$ เท่ากับ 55°

3. 37°

แนวคิด



จากรูป $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ ที่จุด E

เนื่องจาก $C\hat{A}E = 37^\circ$

$C\hat{E}A = 90^\circ$

และ $A\hat{C}E + C\hat{E}A + C\hat{A}E = 180^\circ$

จะได้ $A\hat{C}E + 90 + 37 = 180$

ดังนั้น $A\hat{C}E = 180 - 90 - 37 = 53^\circ$

เนื่องจาก $B\hat{C}D + A\hat{C}E = 90^\circ$

จะได้ $B\hat{C}D + 53 = 90$

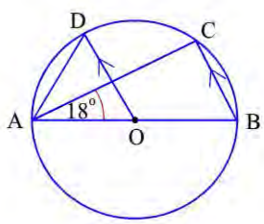
ดังนั้น $B\hat{C}D = 90 - 53 = 37^{\circ}$

นั่นคือ ขนาดของ $B\hat{C}D$ เท่ากับ 37°

เฉลยแบบฝึกหัด 3.2 ก

1. 54°

แนวคิด



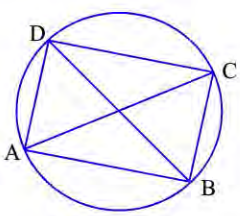
เนื่องจาก $A\hat{B}C = 180 - 90 - 18 = 72^{\circ}$

และ $A\hat{O}D = A\hat{B}C = 72^{\circ}$ (ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกัน และมีเส้นตัด แล้วมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน)

เนื่องจาก Δ ADO เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว (OA = OD)

นั่นคือ $A\hat{D}O = D\hat{A}O = \dfrac{180 - 72}{2} = 54^{\circ}$

2.



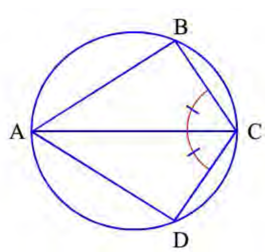
กำหนดให้ $\overline{AC}$ และ $\overline{BD}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม

ต้องการพิสูจน์ว่า □ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

พิสูจน์ เนื่องจาก $A\hat{B}C = A\hat{D}C = B\hat{A}D = B\hat{C}D = 90^{\circ}$ (มุมในครึ่งวงกลมมีขนาด 90 องศา)

นั่นคือ □ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

3.



กำหนดให้ $\overline{AC}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม และ $A\hat{C}B = A\hat{C}D$

ต้องการพิสูจน์ว่า AB = AD

พิสูจน์ เนื่องจาก $\overline{AC}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม (กำหนดให้)

$A\hat{B}C = A\hat{D}C = 90^{\circ}$ (มุมในครึ่งวงกลมมีขนาด 90 องศา)

$A\hat{C}B = A\hat{C}D$ (กำหนดให้)

AC	=	AC	(ด้านร่วม)
ดังนั้น ΔABC	$\cong$	ΔADC	(ม.ม.ด.)
นั่นคือ AB	=	AD	(ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการจะยาวเท่ากัน)

เฉลยกิจกรรม "มุมที่จุดศูนย์กลาง" หน้า 96

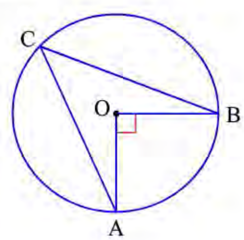
1. – 2. ปฏิบัติกิจกรรมตามที่กำหนด
3. ได้
4. ขนาดของมุมที่จุดศูนย์กลางเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน
5. ปฏิบัติกิจกรรมตามที่กำหนด
6. ได้
7. ได้เช่นเดียวกัน
8. จากรูป ข ได้ $A\hat{O}B = 2(A\hat{C}B)$

   จากรูป ค ได้ มุมกลับ AOB $= 2(A\hat{C}B)$
9. ใช่

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายกิจกรรม "มุมที่จุดศูนย์กลาง" หน้า 96

1. 45°

แนวคิด



เนื่องจาก $A\hat{O}B = 90^\circ$

และ $A\hat{O}B = 2(A\hat{C}B)$

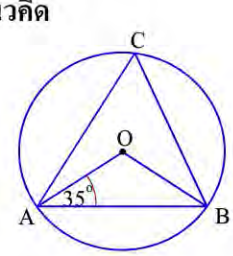
ดังนั้น $2(A\hat{C}B) = 90^\circ$

จะได้ $A\hat{C}B = \frac{90}{2} = 45^\circ$

นั่นคือ ขนาดของ $A\hat{C}B$ เท่ากับ 45°

2. 55°

แนวคิด



เนื่องจาก OA = OB

ดังนั้น ΔAOB เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

จะได้ $A\hat{B}O = O\hat{A}B = 35^\circ$

เนื่องจาก $A\hat{O}B + O\hat{A}B + A\hat{B}O = 180^\circ$

จะได้ $\hat{AOB} + 35 + 35 = 180$

$\hat{AOB} = 180 - 70 = 110^\circ$

เนื่องจาก $\hat{AOB} = 2(\hat{ACB})$

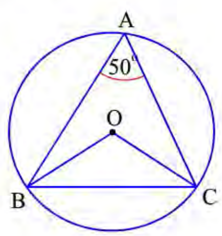
ดังนั้น $2(\hat{ACB}) = 110^\circ$

จะได้ $\hat{ACB} = \frac{110}{2} = 55^\circ$

นั่นคือ ขนาดของ $\hat{ACB}$ เท่ากับ 55°

3. $\hat{OBC} = 40^\circ$ และ $\hat{OCB} = 40^\circ$

แนวคิด



เนื่องจาก $\hat{BOC} = 2(\hat{BAC})$

และ $\hat{BAC} = 50^\circ$

จะได้ $\hat{BOC} = 2(50) = 100^\circ$

เนื่องจาก $BO = CO$

ดังนั้น Δ BOC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

จะได้ $\hat{OBC} = \hat{OCB}$

เนื่องจาก $\hat{OBC} + \hat{OCB} + \hat{BOC} = 180^\circ$

$2(\hat{OBC}) + 100 = 180$

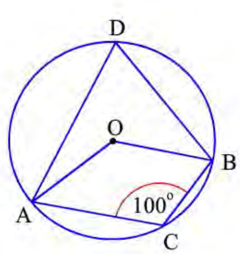
$2(\hat{OBC}) = 180 - 100 = 80$

จะได้ $\hat{OBC} = \frac{80}{2} = 40^\circ$

และ $\hat{OCB} = 40^\circ$

นั่นคือ ขนาดของ $\hat{OBC}$ เท่ากับ 40° และขนาดของ $\hat{OCB}$ เท่ากับ 40°

4.



1) มุมกลับ AOB = $2(\hat{ACB}) = 2(100) = 200^\circ$

นั่นคือ ขนาดของมุมกลับ AOB เท่ากับ 200°

2) $\hat{AOB} = 360 - 200 = 160^\circ$

3) เนื่องจาก $\hat{AOB} = 2(\hat{ADB})$

จะได้ $2(\hat{ADB}) = 160^\circ$

ดังนั้น $\hat{ADB} = 80^\circ$

4) $\hat{ACB} + \hat{BDA} = 100 + 80 = 180^\circ$

5) เนื่องจาก $C\hat{A}D + D\hat{B}C + A\hat{C}B + B\hat{D}A = 360^\circ$

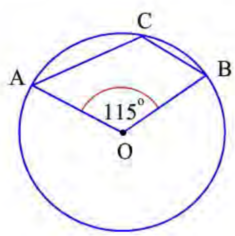
จะได้ $C\hat{A}D + D\hat{B}C + 180 = 360$

ดังนั้น $C\hat{A}D + D\hat{B}C = 360 - 180 = 180^\circ$

เฉลยแบบฝึกหัด 3.2 ข

1. 122.5°

แนวคิด



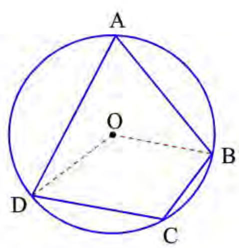
เนื่องจาก มุมกลับ AOB $= 360 - 115 = 245^\circ$

และ มุมกลับ AOB $= 2(A\hat{C}B) = 245^\circ$

(มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม จะมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน)

นั่นคือ $A\hat{C}B = \frac{245}{2} = 122.5^\circ$ (สมบัติของการเท่ากัน)

2.



กำหนดให้ จุด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

จุด A, B, C และ D อยู่บนวงกลม O

ต้องการพิสูจน์ว่า 1. $D\hat{A}B + D\hat{C}B = 180^\circ$

2. $A\hat{B}C + A\hat{D}C = 180^\circ$

พิสูจน์ ลาก $\overline{DO}$ และ $\overline{BO}$

เนื่องจาก $D\hat{O}B = 2(D\hat{A}B)$ และมุมกลับ DOB $= 2(D\hat{C}B)$

(มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม จะมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน)

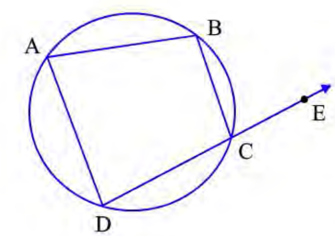
เนื่องจาก $D\hat{O}B$ + มุมกลับ DOB $= 360^\circ$ (มุมรอบจุดศูนย์กลางมีขนาด 360°)

จะได้ $2(D\hat{A}B) + 2(D\hat{C}B) = 360^\circ$ (สมบัติของการเท่ากัน)

$2(D\hat{A}B + D\hat{C}B) = 360^\circ$ (สมบัติของการเท่ากัน)

นั่นคือ $D\hat{A}B + D\hat{C}B = \frac{360}{2} = 180^\circ$ (สมบัติของการเท่ากัน)

ในทำนองเดียวกันสามารถพิสูจน์ได้ว่า $A\hat{B}C + A\hat{D}C = 180^\circ$

3. 

กำหนดให้ □ABCD แนบในวงกลม และ $B\hat{C}E$ เป็นมุมภายนอก □ABCD ที่ได้จากการต่อ $\overline{DC}$ ไปทางจุด C

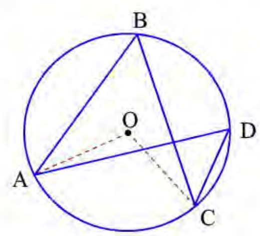
ต้องการพิสูจน์ว่า $B\hat{C}E = B\hat{A}D$

พิสูจน์ เนื่องจาก $B\hat{A}D + D\hat{C}B = 180^\circ$ (ผลบวกของขนาดของมุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมที่แนบในวงกลมเท่ากับ 180 องศา)

และ $D\hat{C}B + B\hat{C}E = 180^\circ$ (ขนาดของมุมตรง)

นั่นคือ $B\hat{C}E = B\hat{A}D$ (สมบัติของการเท่ากัน)

เฉลยกิจกรรม "มุมในส่วนโค้งของวงกลม" หน้า 100

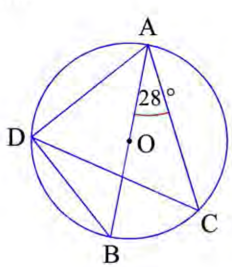


1. $A\hat{O}C = 2(A\hat{B}C)$
2. $A\hat{O}C = 2(A\hat{D}C)$
3. $A\hat{B}C = A\hat{D}C$
4. มุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน จะมีขนาดเท่ากัน
5. ใช่

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายกิจกรรม "มุมในส่วนโค้งของวงกลม" หน้า 100

1. 62°

แนวคิด



เนื่องจาก $B\hat{D}C = B\hat{A}C = 28^\circ$

และ $B\hat{D}C + A\hat{D}C = 90^\circ$

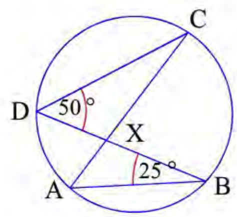
จะได้ $28 + A\hat{D}C = 90$

ดังนั้น $A\hat{D}C = 90 - 28 = 62^\circ$

นั่นคือ ขนาดของ $A\hat{D}C$ เท่ากับ 62°

2. 75°

แนวคิด



เนื่องจาก $\hat{DCA} = \hat{DBA} = 25^\circ$

และ $\hat{XDC} = 50^\circ$

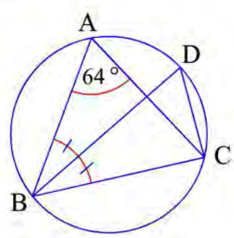
จะได้ $\hat{BXC} = \hat{XDC} + \hat{DCA}$

ดังนั้น $\hat{BXC} = 50 + 25 = 75^\circ$

นั่นคือ ขนาดของ $\hat{BXC}$ เท่ากับ 75°

3. 29°

แนวคิด



เนื่องจาก Δ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มี AB = AC

จะได้ $\hat{ABC} = \hat{ACB}$

เนื่องจาก $\hat{ABC} + \hat{ACB} + \hat{BAC} = 180^\circ$

ดังนั้น $2(\hat{ABC}) + 64 = 180$

$2(\hat{ABC}) = 180 - 64 = 116^\circ$

จะได้ $\hat{ABC} = \frac{116}{2} = 58^\circ$

เนื่องจาก $\hat{ABD} = \frac{\hat{ABC}}{2} = \frac{58}{2} = 29^\circ$

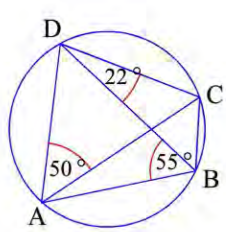
แต่ $\hat{ACD} = \hat{ABD}$

จะได้ $\hat{ACD} = 29^\circ$

นั่นคือ ขนาดของ $\hat{ACD}$ เท่ากับ 29°

4. 53°

แนวคิด



เนื่องจาก $\hat{CBD} = \hat{CAD} = 50^\circ$

$\hat{BAC} = \hat{BDC} = 22^\circ$

และ $\hat{ABD} = 55^\circ$

จะได้ $\hat{ABC} = 55 + 50 = 105^\circ$

$\hat{ACB} + \hat{ABC} + \hat{BAC} = 180^\circ$

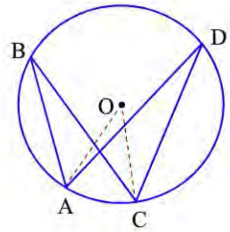
$\hat{ACB} + 105 + 22 = 180$

ดังนั้น $\hat{ACB} = 180 - 105 - 22 \quad = \quad 53^{\circ}$

นั่นคือ ขนาดของ $\hat{ACB}$ เท่ากับ 53°

เฉลยแบบฝึกหัด 3.2 ค

1.



กำหนดให้ จุด O เป็นจุดศูนย์กลางวงกลม

$\hat{ABC}$ และ $\hat{ADC}$ เป็นมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วย $\overset{\frown}{AC}$

ต้องการพิสูจน์ว่า $\hat{ABC} = \hat{ADC}$

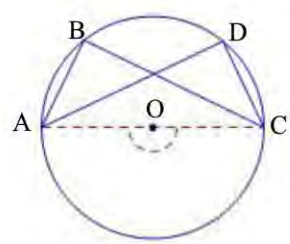
พิสูจน์ ลาก $\overline{AO}$ และ $\overline{CO}$

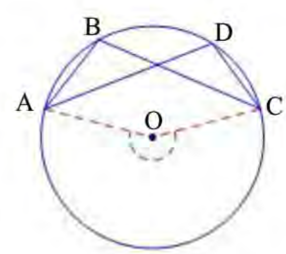
เนื่องจาก $\hat{AOC} = 2(\hat{ABC})$ และ $\hat{AOC} = 2(\hat{ADC})$ (มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมจะมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน)

ดังนั้น $2(\hat{ABC}) = 2(\hat{ADC})$ (สมบัติของการเท่ากัน)

นั่นคือ $\hat{ABC} = \hat{ADC}$ (สมบัติของการเท่ากัน)

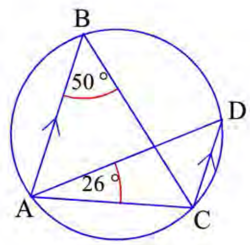
หมายเหตุ รูปที่กำหนดให้ในหนังสือเรียนเป็นกรณีที่มุมในส่วนโค้งของวงกลมเป็นมุมแหลม ส่วนกรณีที่มุมในส่วนโค้งของวงกลมเป็นมุมฉาก หรือมุมป้าน ดังรูปข้างล่างนี้ ก็สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน





2. 76°

แนวคิด



เนื่องจาก $B\hat{C}D = A\hat{B}C = 50^{\circ}$ (ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกัน และมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน)

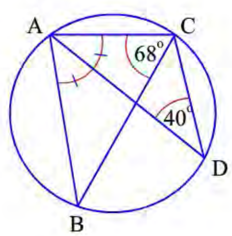
และ $B\hat{A}D = B\hat{C}D = 50^{\circ}$ (มุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันจะมีขนาดเท่ากัน)

เนื่องจาก $B\hat{A}C = B\hat{A}D + C\hat{A}D$

นั่นคือ $B\hat{A}C = 50 + 26 = 76^{\circ}$

3. 36°

แนวคิด



เนื่องจาก $A\hat{B}C = A\hat{D}C = 40^{\circ}$

$A\hat{C}B = 68^{\circ}$

และ $B\hat{A}C + A\hat{B}C + A\hat{C}B = 180^{\circ}$

ดังนั้น $B\hat{A}C + 40 + 68 = 180$

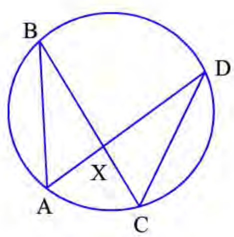
จะได้ $B\hat{A}C = 180 - 108 = 72^{\circ}$

ดังนั้น $B\hat{A}D = \frac{B\hat{A}C}{2} = \frac{72}{2} = 36^{\circ}$

แต่ $B\hat{C}D = B\hat{A}D$

นั่นคือ $B\hat{A}D = 36^{\circ}$

4.



กำหนดให้ $A\hat{B}C$ และ $A\hat{D}C$ เป็นมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วย $\overset{\frown}{AC}$ ให้ $\overline{AD}$ และ $\overline{BC}$ ตัดกันที่จุด X

ต้องการพิสูจน์ว่า 1. $\Delta ABX \sim \Delta CDX$

2. $\frac{BX}{DX} = \frac{AX}{CX}$

3. $BX \cdot CX = DX \cdot AX$

พิสูจน์ พิจารณา ΔABX และ ΔCDX

เนื่องจาก $A\hat{B}X = C\hat{D}X$ และ $B\hat{A}X = D\hat{C}X$ (มุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันจะมีขนาดเท่ากัน)

และ $A\hat{X}B = C\hat{X}D$ (ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกัน แล้วมุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน)

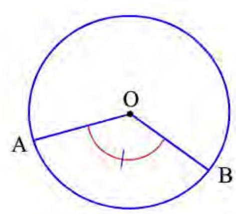
จะได้ $\Delta ABX \sim \Delta CDX$ (ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีขนาดของมุมเท่ากันเป็นคู่ ๆ สามคู่ แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเป็นรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน)

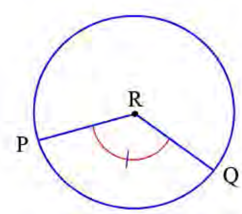
นั่นคือ $\frac{BX}{DX} = \frac{AX}{CX}$ (สมบัติของรูปสามเหลี่ยมคล้าย)

และ $BX \cdot CX = DX \cdot AX$ (สมบัติการคูณไขว้ของอัตราส่วน)

เฉลยกิจกรรม "มุมและส่วนโค้งที่รองรับมุม" หน้า 103

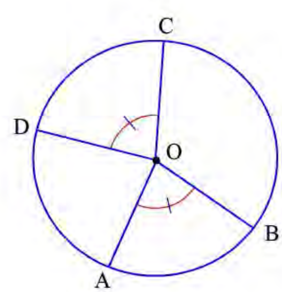
1.





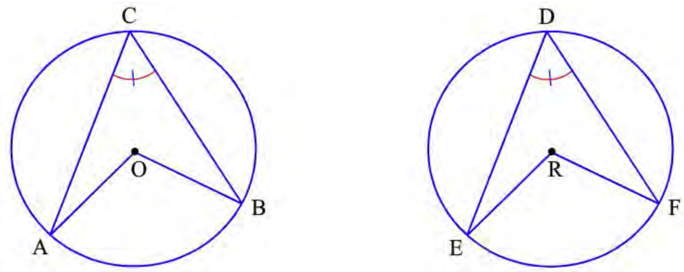
2) ทับกันได้สนิท
3) เท่ากัน
4) ถ้ามุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมมีขนาดเท่ากัน แล้วส่วนโค้งที่รองรับมุมทั้งสองนั้นจะยาวเท่ากัน
5) ใช่

2.



2) ทับกันได้สนิท
3) เท่ากัน
4) ถ้ามุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมมีขนาดเท่ากัน แล้วส่วนโค้งที่รองรับมุมทั้งสองนั้นจะยาวเท่ากัน
5) ใช่

3.



1)

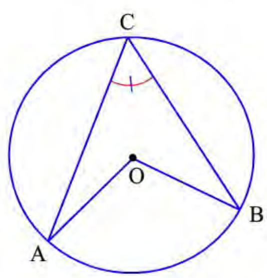
(1) เท่ากัน

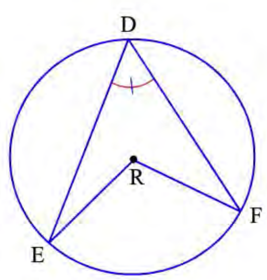
(2) เท่ากัน

(3) ถ้ามุมในส่วนโค้งของวงกลมมีขนาดเท่ากัน แล้วส่วนโค้งที่รองรับมุมทั้งสองนั้นจะยาวเท่ากัน

(4) ใช่

(5) แนวคิดในการพิสูจน์





พิจารณา วงกลม O และวงกลม R ที่เท่ากันทุกประการ

เนื่องจาก $A\hat{C}B = E\hat{D}F$ (กำหนดให้)

$A\hat{O}B = 2(A\hat{C}B)$ และ $E\hat{R}F = 2(E\hat{D}F)$

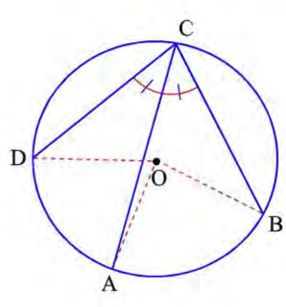
(มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม จะมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน)

$A\hat{O}B = E\hat{R}F$ (สมบัติของการเท่ากัน)

ดังนั้น $m(\overset{\frown}{AB}) = m(\overset{\frown}{EF})$

(ในวงกลมที่เท่ากันทุกประการ ถ้ามุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเท่ากัน แล้วส่วนโค้งที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางนั้นจะยาวเท่ากัน)

2) แนวคิดในการพิสูจน์



ลาก $\overline{AO}$, $\overline{BO}$ และ $\overline{DO}$

เนื่องจาก $A\hat{C}B = A\hat{C}D$ (กำหนดให้)

$A\hat{O}B = 2(A\hat{C}B)$ และ $A\hat{O}D = 2(A\hat{C}D)$

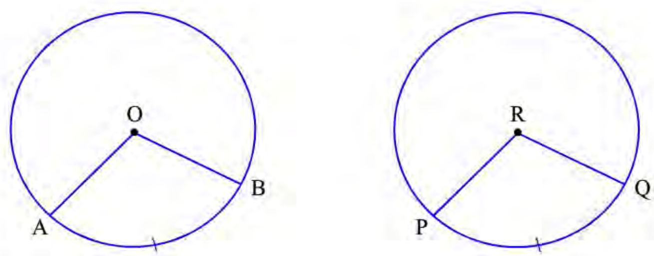
(มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม จะมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน)

$A\hat{O}B = A\hat{O}D$ (สมบัติของการเท่ากัน)

ดังนั้น $m(\overparen{AB}) = m(\overparen{AD})$ (ในวงกลมวงเดียวกัน ถ้ามุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเท่ากัน แล้วส่วนโค้งที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางนั้นจะยาวเท่ากัน)

เฉลยกิจกรรม "มุมและส่วนโค้งที่รองรับมุม (ต่อ)" หน้า 106

1.

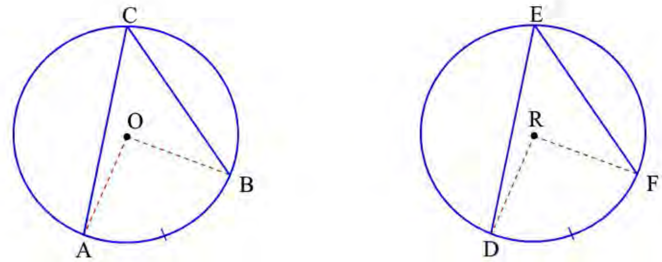


2) ทับกันได้สนิท
3) เท่ากัน
4) ถ้าส่วนโค้งยาวเท่ากัน แล้วมุมที่จุดศูนย์กลางที่รองรับด้วยส่วนโค้งนั้นจะมีขนาดเท่ากัน
5) ใช่

2.

2) ทับกันได้สนิท
3) เท่ากัน
4) ถ้าส่วนโค้งยาวเท่ากัน แล้วมุมที่จุดศูนย์กลางที่รองรับด้วยส่วนโค้งนั้นจะมีขนาดเท่ากัน
5) ใช่

3.



1) **กำหนดให้** จุด O และจุด R เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมสองวงที่เท่ากันทุกประการ และ $m(\overset{\frown}{AB}) = m(\overset{\frown}{DF})$

ต้องการพิสูจน์ว่า $A\hat{C}B = D\hat{E}F$

พิสูจน์ พิจารณาวงกลม O และวงกลม R ที่เท่ากันทุกประการ

ลาก $\overline{AO}$, $\overline{BO}$, $\overline{DR}$ และ $\overline{FR}$

เนื่องจาก $m(\overset{\frown}{AB}) = m(\overset{\frown}{DF})$ (กำหนดให้)

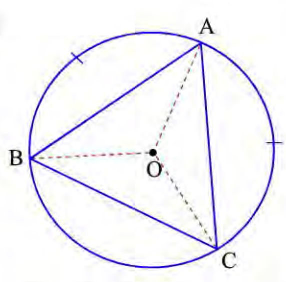
$A\hat{O}B = D\hat{R}F$ (ในวงกลมที่เท่ากันทุกประการ ถ้าส่วนโค้งยาวเท่ากัน แล้วมุมที่จุดศูนย์กลางที่รองรับด้วยส่วนโค้งนั้นจะมีขนาดเท่ากัน)

$A\hat{O}B = 2(A\hat{C}B)$ และ $D\hat{R}F = 2(D\hat{E}F)$ (มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมจะมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน)

จะได้ $2(A\hat{C}B) = 2(D\hat{E}F)$ (สมบัติของการเท่ากัน)

ดังนั้น $A\hat{C}B = D\hat{E}F$ (สมบัติของการเท่ากัน)

2)



กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม และ $m(\overset{\frown}{AB}) = m(\overset{\frown}{AC})$

ต้องการพิสูจน์ว่า $A\hat{C}B = A\hat{B}C$

พิสูจน์ ลาก $\overline{AO}$, $\overline{BO}$ และ $\overline{CO}$

เนื่องจาก $m(\overset{\frown}{AB}) = m(\overset{\frown}{AC})$ (กำหนดให้)

$A\hat{O}B = A\hat{O}C$ (ในวงกลมวงเดียวกัน ถ้าส่วนโค้งยาวเท่ากัน แล้วมุมที่จุดศูนย์กลางที่รองรับด้วยส่วนโค้งนั้นจะมีขนาดเท่ากัน)

$A\hat{O}B = 2(A\hat{C}B)$ และ $A\hat{O}C = 2(A\hat{B}C)$ (มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมจะมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน)

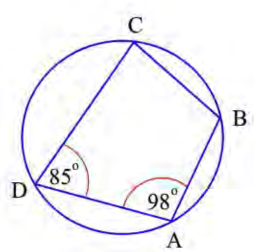
จะได้ $2(A\hat{C}B) = 2(A\hat{B}C)$ (สมบัติของการเท่ากัน)

ดังนั้น $A\hat{C}B = A\hat{B}C$ (สมบัติของการเท่ากัน)

เฉลยแบบฝึกหัด 3.2 ง

1. $A\hat{B}C = 95^{\circ}$ และ $B\hat{C}D = 82^{\circ}$

แนวคิด



เนื่องจาก $A\hat{D}C + A\hat{B}C = 180^{\circ}$

(ผลบวกของขนาดของมุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมที่แนบในวงกลมเท่ากับ 180 องศา)

จะได้ $A\hat{B}C = 180 - 85 = 95^{\circ}$ $(A\hat{D}C = 85^{\circ})$

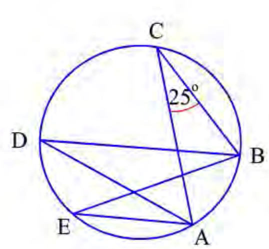
เนื่องจาก $B\hat{A}D + B\hat{C}D = 180^{\circ}$

(ผลบวกของขนาดของมุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมที่แนบในวงกลมเท่ากับ 180 องศา)

จะได้ $B\hat{C}D = 180 - 98 = 82^{\circ}$ $(B\hat{A}D = 98^{\circ})$

2. $A\hat{D}B = 25^{\circ}$ และ $A\hat{E}B = 25^{\circ}$

แนวคิด



เนื่องจาก $A\hat{D}B = A\hat{C}B = 25^{\circ}$

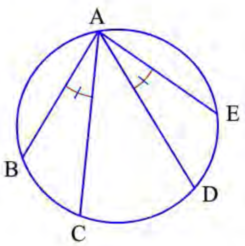
(ในวงกลมวงเดียวกัน มุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน จะมีขนาดเท่ากัน)

และ $A\hat{E}B = A\hat{C}B = 25^{\circ}$

(ในวงกลมวงเดียวกัน มุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน จะมีขนาดเท่ากัน)

3. $m(\overset{\frown}{DE})$

แนวคิด



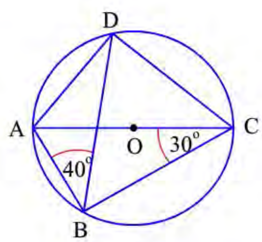
เนื่องจาก $B\hat{A}C = E\hat{A}D$ (กำหนดให้)

จะได้ $m(\overset{\frown}{BC}) = m(\overset{\frown}{DE})$

(ในวงกลมวงเดียวกัน ถ้ามุมในส่วนโค้งของวงกลมมีขนาดเท่ากัน แล้วส่วนโค้งที่รองรับมุมทั้งสองนั้นจะยาวเท่ากัน)

4. $B\hat{D}C = 60^\circ$ และ $C\hat{A}D = 50^\circ$

แนวคิด



เนื่องจาก $A\hat{D}B = A\hat{C}B = 30^\circ$

และ $A\hat{D}B + B\hat{D}C = 90^\circ$

$30 + B\hat{D}C = 90$

จะได้ $B\hat{D}C = 90 - 30 = 60^\circ$

และ $B\hat{A}C = B\hat{D}C = 60^\circ$

แต่ $D\hat{B}A + B\hat{A}C + C\hat{A}D + A\hat{D}B = 180^\circ$

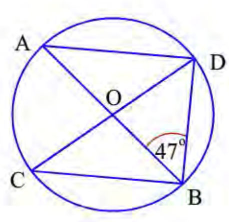
ดังนั้น $40 + 60 + C\hat{A}D + 30 = 180$

จะได้ $C\hat{A}D = 50^\circ$

นั่นคือ $B\hat{D}C$ มีขนาด 60° และ $C\hat{A}D$ มีขนาด 50°

5. $A\hat{D}C = 43^\circ$ และ $B\hat{C}D = 43^\circ$

แนวคิด



เนื่องจาก $A\hat{B}C + A\hat{B}D = 90^\circ$

ดังนั้น $A\hat{B}C + 47 = 90$

จะได้ $A\hat{B}C = 90 - 47 = 43^\circ$

แต่ $A\hat{D}C = A\hat{B}C = 43^\circ$

และ $OC = OB$

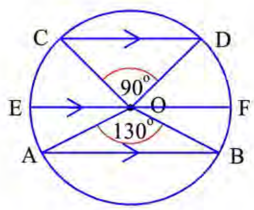
จะได้ Δ BOC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ทำให้ $B\hat{C}D = A\hat{B}C = 43^\circ$

นั่นคือ $A\hat{D}C$ มีขนาด 43° และ $B\hat{C}D$ มีขนาด 43°

6. $A\hat{O}C = 70^{\circ}$ และ $B\hat{O}D = 70^{\circ}$

แนวคิด



ลาก $\overleftrightarrow{EF}$ ผ่านจุด O ขนานกับ $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ ตัดวงกลมที่จุด E และ F

เนื่องจาก $OC = OD$

ทำให้ Δ COD เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

จะได้ $O\hat{C}D = O\hat{D}C$

แต่ $O\hat{C}D + O\hat{D}C + C\hat{O}D = 180^{\circ}$

จะได้ $2(O\hat{C}D) + 90 = 180$

$$O\hat{C}D = \frac{180 - 90}{2} = 45^{\circ}$$

ดังนั้น $O\hat{C}D = O\hat{D}C = 45^{\circ}$

ในทำนองเดียวกันจะได้ $O\hat{A}B = O\hat{B}A = 25^{\circ}$

เนื่องจาก $A\hat{O}E = O\hat{A}B = 25^{\circ}$ และ $E\hat{O}C = O\hat{C}D = 45^{\circ}$

ดังนั้น $A\hat{O}C = A\hat{O}E + E\hat{O}C = 25 + 45 = 70^{\circ}$

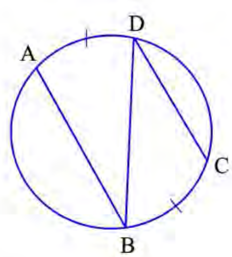
เนื่องจาก $B\hat{O}F = O\hat{B}A = 25^{\circ}$ และ $F\hat{O}D = O\hat{D}C = 45^{\circ}$

ดังนั้น $B\hat{O}D = B\hat{O}F + F\hat{O}D = 25 + 45 = 70^{\circ}$

นั่นคือ ขนาดของ $A\hat{O}C$ เท่ากับ 70° และ

ขนาดของ $B\hat{O}D$ เท่ากับ 70°

7.

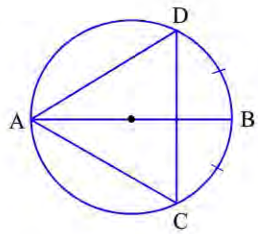


กำหนดให้ $m(\overset{\frown}{AD}) = m(\overset{\frown}{BC})$

ต้องการพิสูจน์ว่า $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

พิสูจน์

เนื่องจาก	$m(\overset{\frown}{AD}) = m(\overset{\frown}{BC})$	(กำหนดให้)
จะได้	$A\hat{B}D = C\hat{D}B$	(ในวงกลมวงเดียวกัน ถ้าส่วนโค้งยาวเท่ากัน แล้วมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งนั้นจะมีขนาดเท่ากัน)
ดังนั้น	$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$	(ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน)

8. 

กำหนดให้ $\overline{AB}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม

$m(\overset{\frown}{BD}) = m(\overset{\frown}{BC})$

ต้องการพิสูจน์ว่า ΔADC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

พิสูจน์

เนื่องจาก $m(\overset{\frown}{BD}) = m(\overset{\frown}{BC})$ (กำหนดให้)

และ $m(\overset{\frown}{ADB}) = m(\overset{\frown}{ACB})$ (ส่วนโค้งครึ่งวงกลมของวงกลมวงเดียวกันยาวเท่ากัน)

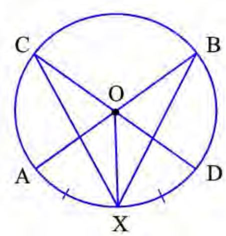
จะได้ $m(\overset{\frown}{ADB}) - m(\overset{\frown}{BD}) = m(\overset{\frown}{ACB}) - m(\overset{\frown}{BC})$ หรือ

$m(\overset{\frown}{AD}) = m(\overset{\frown}{AC})$ (สมบัติของการเท่ากัน)

และ $A\hat{C}D = A\hat{D}C$ (ในวงกลมวงเดียวกัน ถ้าส่วนโค้งยาวเท่ากัน แล้วมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งนั้นจะมีขนาดเท่ากัน)

จะได้ $AD = AC$ (ถ้ามุมสองมุมของรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีขนาดเท่ากัน แล้วด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมทั้งสองนั้นจะยาวเท่ากัน)

นั่นคือ ΔADC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

9. 

กำหนดให้ $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม O

จุด X เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overset{\frown}{AD}$

ต้องการพิสูจน์ว่า $\Delta COX \cong \Delta BOX$

พิสูจน์

เนื่องจาก $m(\overset{\frown}{AX}) = m(\overset{\frown}{DX})$ (กำหนดให้)

จะได้ $A\hat{O}X = D\hat{O}X$ (ในวงกลมวงเดียวกัน ถ้าส่วนโค้งยาวเท่ากัน แล้วมุมที่จุดศูนย์กลางที่รองรับด้วยส่วนโค้งนั้นจะมีขนาดเท่ากัน)

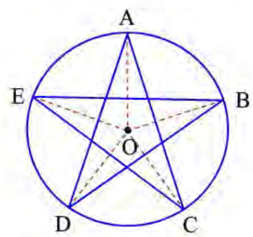
เนื่องจาก $A\hat{O}C = B\hat{O}D$ (ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกัน แล้วมุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน)

ทำให้ $A\hat{O}C + A\hat{O}X = B\hat{O}D + D\hat{O}X$ (สมบัติของการเท่ากัน)

หรือ $C\hat{O}X = B\hat{O}X$ (สมบัติของการเท่ากัน)

จะได้ OC = OB และ OX = OX (รัศมีวงกลมเดียวกัน ยาวเท่ากัน)

นั่นคือ $\Delta COX \cong \Delta BOX$ (ด.ม.ด.)

10. 

กำหนดให้ รูปดาวห้าแฉก ABCDE แนบในวงกลม O

ต้องการพิสูจน์ว่า $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E} = 180^\circ$

พิสูจน์ ลาก $\overline{AO}$, $\overline{BO}$, $\overline{CO}$, $\overline{DO}$ และ $\overline{EO}$

เนื่องจาก $A\hat{O}B + B\hat{O}C + C\hat{O}D + D\hat{O}E + E\hat{O}A = 360^\circ$ (มุมรอบจุดจุดหนึ่งมีขนาดเท่ากับ 360 องศา)

แต่ $A\hat{O}B = 2(A\hat{D}B)$, $B\hat{O}C = 2(B\hat{E}C)$, $C\hat{O}D = 2(C\hat{A}D)$,

$D\hat{O}E = 2(D\hat{B}E)$ และ $E\hat{O}A = 2(E\hat{C}A)$ (มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมจะมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน)

จะได้ $2(A\hat{D}B) + 2(B\hat{E}C) + 2(C\hat{A}D) + 2(D\hat{B}E) + 2(E\hat{C}A) = 360^\circ$

(สมบัติของการเท่ากัน)

จะได้ $A\hat{D}B + B\hat{E}C + C\hat{A}D + D\hat{B}E + E\hat{C}A = 180^\circ$ (สมบัติของการเท่ากัน)

นั่นคือ $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E} = 180^\circ$

เฉลยกิจกรรม "คอร์ดและส่วนโค้งของวงกลม" หน้า 111

1.

1) $\Delta AOB \cong \Delta COD$ (ด.ด.ด.) เพราะ AO = CO, BO = DO และ AB = CD (รัศมีของวงกลมเดียวกันยาวเท่ากันและกำหนดให้)

2) เท่ากัน เพราะ มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะมีขนาดเท่ากัน

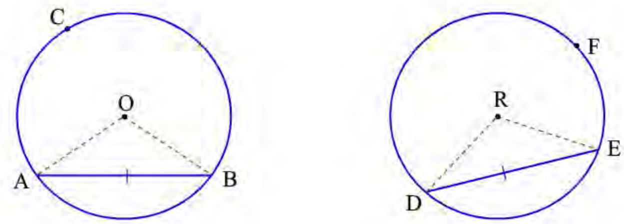
3) เท่ากัน เพราะ ในวงกลมวงเดียวกัน ถ้ามุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเท่ากัน แล้วส่วนโค้งที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางนั้นจะยาวเท่ากัน

4) เท่ากัน เพราะ ความยาวของแต่ละส่วนโค้งเกิดจากความยาวของเส้นรอบวงของวงกลม ลบด้วยความยาวที่เท่ากันของส่วนโค้งของวงกลม

5) ใช่

6) ใช่

7)



กำหนดให้ วงกลม O และวงกลม R เท่ากันทุกประการ

คอร์ด AB และคอร์ด DE ยาวเท่ากัน

ต้องการพิสูจน์ว่า $m(\overset{\frown}{AB}) = m(\overset{\frown}{DE})$ และ $m(\overset{\frown}{ACB}) = m(\overset{\frown}{DFE})$

พิสูจน์ ลาก $\overline{AO}$, $\overline{BO}$, $\overline{DR}$ และ $\overline{ER}$

เนื่องจาก	AB	=	DE	(กำหนดให้)
	AO	=	DR	(รัศมีของวงกลมที่เท่ากันทุกประการยาวเท่ากัน)
	BO	=	ER	(รัศมีของวงกลมที่เท่ากันทุกประการยาวเท่ากัน)
ดังนั้น	Δ AOB	$\cong$	Δ DRE	(ด.ด.ด.)
จะได้	$A\hat{O}B$	=	$D\hat{R}E$	(มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะมีขนาดเท่ากัน)
ทำให้	$m(\overset{\frown}{AB})$	=	$m(\overset{\frown}{DE})$	(ในวงกลมที่เท่ากันทุกประการ ถ้ามุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเท่ากัน แล้วส่วนโค้งที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางนั้นจะยาวเท่ากัน)
และ	$m(\overset{\frown}{AB}) + m(\overset{\frown}{ACB})$	=	$m(\overset{\frown}{DE}) + m(\overset{\frown}{DFE})$	(ต่างก็มีความยาวเท่ากับความยาวของเส้นรอบวงของวงกลมที่เท่ากันทุกประการ)
ดังนั้น	$m(\overset{\frown}{ACB})$	=	$m(\overset{\frown}{DFE})$	(สมบัติของการเท่ากัน)

2.

1) เท่ากัน เพราะ ในวงกลมวงเดียวกัน ถ้าส่วนโค้งยาวเท่ากัน แล้วมุมที่จุดศูนย์กลางที่รองรับด้วยส่วนโค้งนั้นจะมีขนาดเท่ากัน

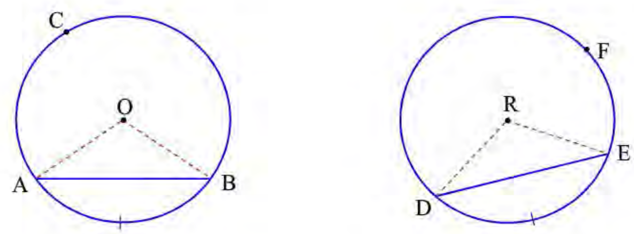
2) เท่ากันทุกประการ เพราะ AO = CO, BO = DO และ $A\hat{O}B = C\hat{O}D$ (ด.ม.ด.)

3) AB = CD เพราะ ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะยาวเท่ากัน

4) ใช่

5) ใช่

6)



กำหนดให้ วงกลม O และวงกลม R เท่ากันทุกประการ และ $m(\overset{\frown}{AB}) = m(\overset{\frown}{DE})$

ต้องการพิสูจน์ว่า คอร์ด AB ยาวเท่ากับ คอร์ด DE

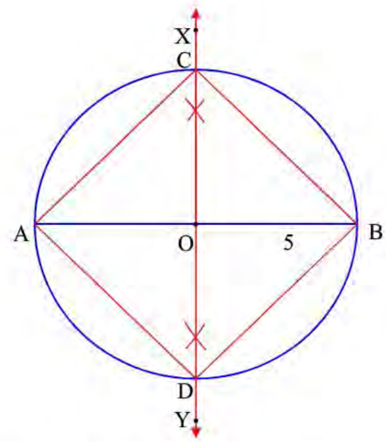
พิสูจน์ ลาก $\overline{AO}$, $\overline{BO}$, $\overline{DR}$ และ $\overline{ER}$

เนื่องจาก	$m(\overset{\frown}{AB}) = m(\overset{\frown}{DE})$	(กำหนดให้)
จะได้	$A\hat{O}B = D\hat{R}E$	(ในวงกลมที่เท่ากันทุกประการ ถ้าส่วนโค้งยาวเท่ากัน แล้วมุมที่จุดศูนย์กลางที่รองรับด้วยส่วนโค้งนั้นจะมีขนาดเท่ากัน)
และ	$AO = DR$	(รัศมีของวงกลมที่เท่ากันทุกประการยาวเท่ากัน)
	$BO = ER$	(รัศมีของวงกลมที่เท่ากันทุกประการยาวเท่ากัน)
จะได้	$\Delta AOB \cong \Delta DRE$	(ด.ม.ด.)
ดังนั้น .	$AB = DE$	(ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะยาวเท่ากัน)

เฉลยกิจกรรม "รูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแนบในวงกลม" หน้า 114

1.

1) ยาวเท่ากัน
2) ตั้งฉากกันและแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน
3) แนวการสร้าง



1. สร้างวงกลม O ให้มีรัศมียาวเท่ากับ $\frac{10}{2} = 5$ เซนติเมตร
2. ลาก $\overline{AB}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง
3. สร้าง $\overleftrightarrow{XY}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ ที่จุด O ตัดวงกลมที่จุด C และจุด D
4. ลาก $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$ และ $\overline{AD}$

จะได้ $\square$ ADBC เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีเส้นทแยงมุม AB ยาว 10 เซนติเมตร

2.

1) พิจารณาการสร้างที่กำหนดให้
2) เป็น
3)

(1) เป็น เพราะความยาวของแต่ละด้านเท่ากับรัศมีของวงกลม

(2) 60° เพราะเป็นขนาดของมุมภายในแต่ละมุมของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

(3) เท่ากัน เพราะในวงกลมวงเดียวกัน ถ้ามุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเท่ากัน แล้วส่วนโค้งที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางนั้นจะยาวเท่ากัน

(4) เท่ากัน เพราะในวงกลมวงเดียวกัน ถ้าคอร์ดสองคอร์ดตัดวงกลมทำให้ได้ส่วนโค้งยาวเท่ากัน แล้วคอร์ดทั้งสองนั้นจะยาวเท่ากัน
(หรือ เพราะความยาวของแต่ละด้านเท่ากับรัศมีของวงกลม)

(5) 60° เพราะ $F\hat{O}A$ มีขนาดเท่ากับขนาดของมุมรอบจุด O ลบด้วย ผลบวกของขนาดของมุมในข้อ (2)

ดังนั้น $F\hat{O}A = 360 - (5 \times 60) = 60^\circ$

(6) เท่ากัน เพราะ ในวงกลมวงเดียวกัน ถ้ามุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเท่ากัน แล้วส่วนโค้งที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางนั้นจะยาวเท่ากัน

(7) เท่ากัน เพราะ ในวงกลมวงเดียวกัน ถ้าคอร์ดสองคอร์ดตัดวงกลมทำให้ได้ส่วนโค้งยาวเท่ากัน แล้วคอร์ดทั้งสองนั้นจะยาวเท่ากัน

(8) เป็น เพราะ ทุกด้านมีความยาวเท่ากัน

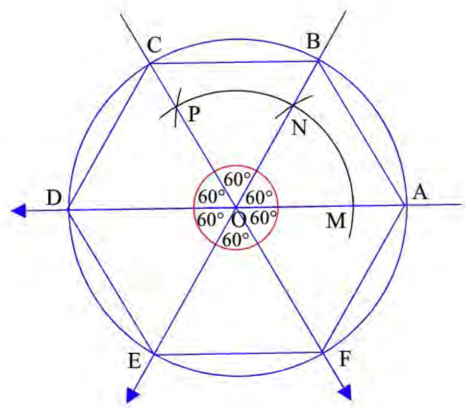
(9) 120° เพราะ แต่ละมุมมีขนาดเท่ากับผลบวกของขนาดของมุมภายในสองมุมของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่เรียงต่อกัน

(10) เป็น

4)

(1) 120° (2) 720°

5) สามารถสร้างได้ ดังนี้



กำหนดให้ จุด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม มี $\overline{OA}$ เป็นรัศมีของวงกลม

ต้องการสร้าง รูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแนบในวงกลม O โดยใช้วิธีแบ่งมุมที่จุดศูนย์กลาง

ขั้นตอนการสร้าง และการพิสูจน์

1. สร้างมุม AOB ให้ $A\hat{O}B = 60^{\circ}$
   โดยใช้ O เป็นจุดศูนย์กลางเขียนส่วนโค้งตัด $\overline{OA}$ ที่จุด M
   และให้ M เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี OM เขียนส่วนโค้งตัดส่วนโค้งเดิมที่จุด N
   ลากส่วนของเส้นตรงจากจุด O ผ่านจุด N และตัดวงกลมที่จุด B
2. สร้างมุม BOC ให้ $B\hat{O}C = 60^{\circ}$ โดยใช้ N เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี MN
   เขียนส่วนโค้งตัดส่วนโค้งเดิมที่จุด P แล้วลากส่วนของเส้นตรงจากจุด O
   ผ่านจุด P ตัดวงกลมที่จุด C
3. ลาก $\overrightarrow{AO}$ ต่อออกไปตัดวงกลมที่จุด D
   ลาก $\overrightarrow{BO}$ ต่อออกไปตัดวงกลมที่จุด E
   ลาก $\overrightarrow{CO}$ ต่อออกไปตัดวงกลมที่จุด F
   จะได้ $C\hat{O}D = 180 - (60 + 60) = 60^{\circ}$ ($A\hat{O}D$ เป็นมุมตรง)

และจะได้ $D\hat{O}E = A\hat{O}B = 60^{\circ}$ (ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกัน

$E\hat{O}F = B\hat{O}C = 60^{\circ}$ แล้วมุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน)

$F\hat{O}A = C\hat{O}D = 60^{\circ}$

ดังนั้น มุม O ที่จุดศูนย์กลางของวงกลมซึ่งมีขนาด 360° จะถูกแบ่งออกเป็น 6 ส่วน แต่ละส่วนมีขนาด 60° เท่ากัน

4. ลาก $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ และ $\overline{FA}$

   จะได้ว่า Δ AOB, Δ BOC, Δ COD, Δ DOE, Δ EOF และ Δ FOA

   เป็นรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ แบบ ด้าน – มุม – ด้าน

   เนื่องจาก OA = OB = OC = OD = OE = OF เป็นรัศมีของวงกลม

   และ $A\hat{O}B = B\hat{O}C = C\hat{O}D = D\hat{O}E = E\hat{O}F = F\hat{O}A$ จากการสร้าง

   ให้แต่ละมุมมีขนาด 60° และสมบัติของมุมตรงข้าม

5. เนื่องจาก $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ และ $\overline{FA}$ เป็นด้านที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ

   ดังนั้น AB = BC = CD = DE = EF = FA

6. พิจารณา รูปสามเหลี่ยม AOB มี OA = OB และ $A\hat{O}B = 60^{\circ}$

   ดังนั้น Δ AOB เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

   จะได้ $O\hat{A}B = O\hat{B}A = \frac{180 - 60}{2} = 60^{\circ}$

   ซึ่งจะได้ว่า Δ AOB เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า เพราะมุมทุกมุมมีขนาด 60° เท่ากัน

   ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า Δ BOC, ΔCOD, ΔDOE, ΔEOF และ ΔFOA เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า มุมทุกมุมมีขนาด 60° เพราะเป็นรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการกับ Δ AOB

7. พิจารณารูปหกเหลี่ยม ABCDEF มี $F\hat{A}B = F\hat{A}O + B\hat{A}O = 60 + 60 = 120^{\circ}$

   ในทำนองเดียวกัน $A\hat{B}C = B\hat{C}D = C\hat{D}E = D\hat{E}F = E\hat{F}A = 120^{\circ}$

8. จากข้อ 5 และ 7 จะได้ว่า

   รูปหกเหลี่ยม ABCDEF เป็นรูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

   ที่สร้างจากการแบ่งมุมที่จุดศูนย์กลางให้เป็น 6 ส่วนเท่ากัน

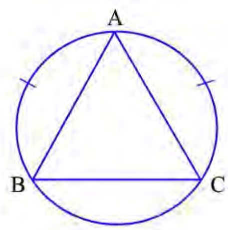
เฉลยคำตอบแบบฝึกหัด หน้า 117

1) 3 มุม แต่ละมุมมีขนาด 120° 2) 8 มุม แต่ละมุมมีขนาด 45°

3) 12 มุม แต่ละมุมมีขนาด 30° 4) 16 มุม แต่ละมุมมีขนาด 22.5°

เฉลยแบบฝึกหัด 3.3 ก

1.



กำหนดให้ $m(\widehat{AB}) = m(\widehat{AC})$

ต้องการพิสูจน์ว่า ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

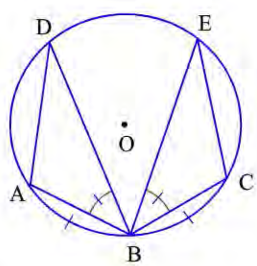
พิสูจน์

เนื่องจาก $m(\widehat{AB}) = m(\widehat{AC})$ (กำหนดให้)

จะได้ $AB = AC$ (ในวงกลมวงเดียวกัน ถ้าคอร์ดสองคอร์ดตัดวงกลม ทำให้ได้ส่วนโค้งยาวเท่ากัน แล้วคอร์ดทั้งสองนั้นจะยาวเท่ากัน)

ดังนั้น ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว (มีด้านประกอบมุมยอดยาวเท่ากัน)

2.



กำหนดให้ วงกลม O มี $m(\widehat{AB}) = m(\widehat{BC})$

และ $A\hat{B}D = C\hat{B}E$

ต้องการพิสูจน์ว่า $BD = BE$

พิสูจน์

เนื่องจาก $m(\widehat{AB}) = m(\widehat{BC})$ (กำหนดให้)

จะได้ $AB = BC$ (ในวงกลมวงเดียวกัน ถ้าคอร์ดสองคอร์ดตัดวงกลม ทำให้ได้ส่วนโค้งยาวเท่ากัน แล้วคอร์ดทั้งสองนั้นจะยาวเท่ากัน)

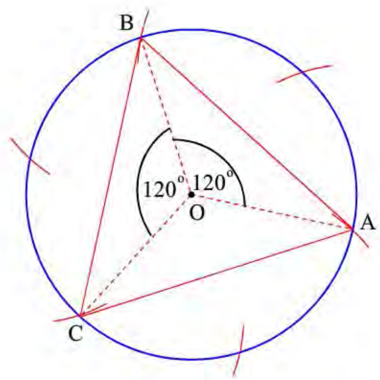
และ $A\hat{D}B = C\hat{E}B$ (ในวงกลมวงเดียวกัน ถ้าส่วนโค้งยาวเท่ากัน แล้วมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งนั้นจะมีขนาดเท่ากัน)

เนื่องจาก $A\hat{B}D = C\hat{B}E$ (กำหนดให้)

จะได้ $\Delta ABD \cong \Delta CBE$ (ม.ม.ด.)

ดังนั้น $BD = BE$ (ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะยาวเท่ากัน)

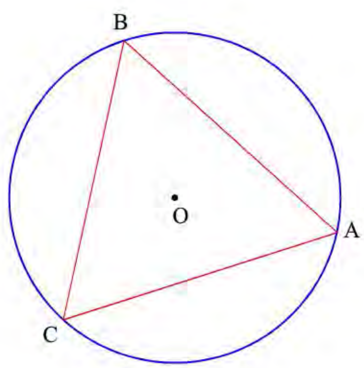
3. แนวการสร้าง 1



1. สร้างวงกลม O โดยใช้รัศมียาวพอสมควร
2. สร้างมุมที่จุดศูนย์กลาง $A\hat{O}B$ และ $B\hat{O}C$ ให้แต่ละมุมมีขนาด 120°
3. ลาก $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ และ $\overline{AC}$

   จะได้ ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

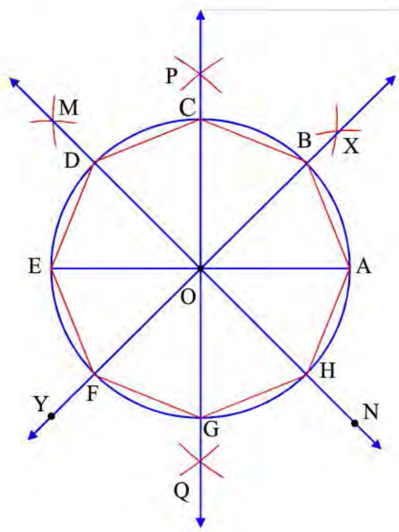
แนวการสร้าง 2



1. สร้างวงกลม O โดยใช้รัศมียาวพอสมควร
2. กำหนดจุด A อยู่บนวงกลม O
3. ใช้จุด O เป็นจุดศูนย์กลางของการหมุน หมุนจุด A ทวนเข็มนาฬิกา ด้วยมุมขนาด 120° ให้จุดที่เกิดจากการหมุนคือจุด B
4. ใช้จุด O เป็นจุดศูนย์กลางของการหมุน หมุนจุด B ทวนเข็มนาฬิกา ด้วยมุมขนาด 120° ให้จุดที่เกิดจากการหมุนคือจุด C
5. ลาก $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ และ $\overline{AC}$

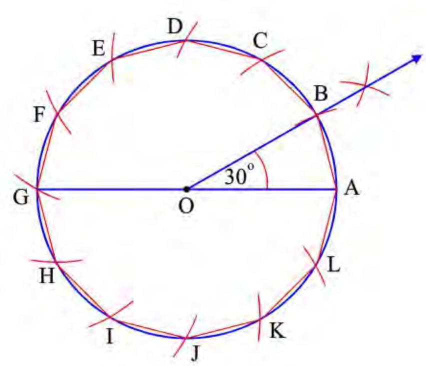
   จะได้ ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

4. แนวการสร้าง



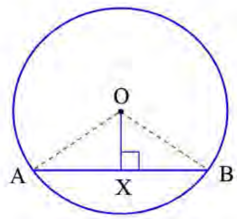
1. สร้างวงกลม O โดยใช้รัศมียาวพอสมควร
2. ลากเส้นผ่านศูนย์กลาง AE
3. สร้าง $\overleftrightarrow{PQ}$ แบ่งครึ่ง $A\hat{O}E$ ตัดวงกลมที่จุด C และจุด G
   จะได้ $A\hat{O}C = 90^\circ$
4. สร้าง $\overleftrightarrow{XY}$ แบ่งครึ่ง $A\hat{O}C$ ตัดวงกลมที่จุด B และจุด F
   จะได้ $A\hat{O}B = 45^\circ$
5. สร้าง $\overleftrightarrow{MN}$ แบ่งครึ่ง $C\hat{O}E$ ตัดวงกลมที่จุด D และจุด H
   จะได้ $C\hat{O}D = 45^\circ$
6. ลาก $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$ และ $\overline{HA}$
   จะได้รูป ABCDEFGH เป็นรูปแปดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

5. แนวการสร้างทำได้ในทำนองเดียวกับข้อ 3 จากรูปการสร้างข้างล่างนี้ จะได้
   รูป ABCDEFGHIJKL เป็นรูปสิบสองเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า



เฉลยกิจกรรม "คอร์ดกับจุดศูนย์กลางของวงกลม" หน้า 118

1.



กำหนดให้ จุด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม และ $\overline{OX}$ ตั้งฉากกับคอร์ด AB ที่จุด X

ต้องการพิสูจน์ว่า $\overline{OX}$ แบ่งครึ่ง $\overline{AB}$

พิสูจน์

เนื่องจาก $A\hat{X}O = B\hat{X}O = 90^\circ$ ($\overline{OX} \perp \overline{AB}$)

$OX = OX$ (ด้านร่วม)

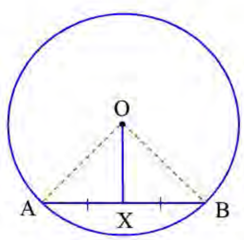
$OA = OB$ (รัศมีของวงกลมเดียวกันยาวเท่ากัน)

จะได้ $\Delta AOX \cong \Delta BOX$ (ฉ.ด.ด.)

ดังนั้น $AX = BX$ (ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการจะยาวเท่ากัน)

นั่นคือ $\overline{OX}$ แบ่งครึ่ง $\overline{AB}$

2.



กำหนดให้ จุด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม และ $\overline{OX}$ แบ่งครึ่งคอร์ด AB ที่จุด X

ต้องการพิสูจน์ว่า $\overline{OX}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$

พิสูจน์

เนื่องจาก $OA = OB$ (รัศมีของวงกลมเดียวกันยาวเท่ากัน)

$OX = OX$ (ด้านร่วม)

$AX = BX$ ($\overline{OX}$ แบ่งครึ่งคอร์ด AB)

จะได้ $\Delta AOX \cong \Delta BOX$ (ด.ด.ด.)

ดังนั้น $A\hat{X}O = B\hat{X}O$ (มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะมีขนาดเท่ากัน)

แต่ $A\hat{X}B = A\hat{X}O + B\hat{X}O = 180^\circ$ (ขนาดของมุมตรง)

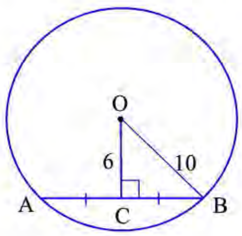
จะได้ $A\hat{X}O = B\hat{X}O = 90^\circ$ (สมบัติของการเท่ากัน)

นั่นคือ $\overline{OX}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$

เฉลยคำตอบท้ายกิจกรรม “คอร์ดกับจุดศูนย์กลางของวงกลม” หน้า 119

1. 16 เซนติเมตร

แนวคิด



จากรูป O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่มีรัศมียาว 10 เซนติเมตร OC เป็นระยะที่คอร์ด AB ห่างจากจุดศูนย์กลางเท่ากับ 6 เซนติเมตร

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

จะได้ $BC^2 = OB^2 - OC^2$

ดังนั้น $BC^2 = 10^2 - 6^2 = 64$

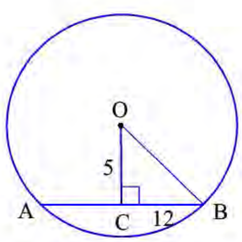
จะได้ $BC = 8$

ดังนั้น $AB = 2 \times 8 = 16$

นั่นคือ ความยาวของ $\overline{AB}$ เท่ากับ 16 เซนติเมตร

2. 13 เซนติเมตร

แนวคิด



ให้ $\overline{AB}$ เป็นคอร์ดยาว 24 เซนติเมตร OC เป็นระยะที่คอร์ด AB ห่างจากจุดศูนย์กลาง O เท่ากับ 5 เซนติเมตร

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

จะได้ $BO^2 = OC^2 + CB^2$

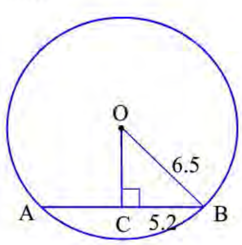
ดังนั้น $BO^2 = 5^2 + 12^2 = 169$

จะได้ $BO = 13$

นั่นคือ วงกลมมีรัศมียาว 13 เซนติเมตร

3. 3.9 เซนติเมตร

แนวคิด



ให้ $\overline{AB}$ เป็นคอร์ดยาว 10.4 เซนติเมตร $\overline{OB}$ เป็นรัศมีของวงกลมยาว 6.5 เซนติเมตร OC เป็นระยะที่คอร์ด AB ห่างจากจุดศูนย์กลาง O

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

จะได้ $OC^2 = OB^2 - BC^2$

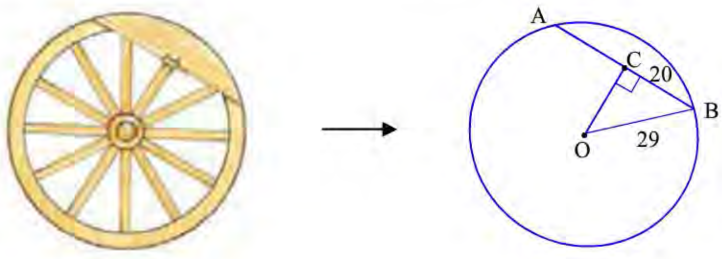
ดังนั้น $OC^2 = (6.5)^2 - (5.2)^2 = 42.25 - 27.04 = 15.21$

จะได้ $OC = 3.9$

นั่นคือ คอร์ด AB อยู่ห่างจากจุดศูนย์กลาง 3.9 เซนติเมตร

4.

1) 21 นิ้ว　　　　　　　　　　2) มีลักษณะเป็นวงกลม



แนวคิด

1) ให้ O แทนจุดศูนย์กลางของวงล้อ

C แทนตำแหน่งที่ตุ๊กแกเกาะอยู่ที่ขอบแผ่นไม้

OB แทนความยาวรัศมีของวงล้อเท่ากับ 29 นิ้ว

$\overline{AB}$ แทนขอบแผ่นไม้ซึ่งยาว 40 นิ้ว

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

จะได้ $OC^2 = OB^2 - BC^2$

ดังนั้น $OC^2 = 29^2 - 20^2 = 441$

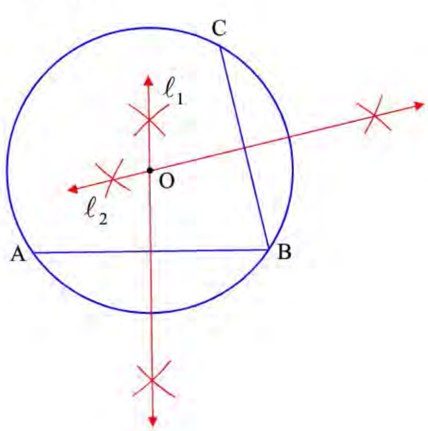
จะได้ $OC = 21$

นั่นคือ ตุ๊กแกอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางของวงล้อ 21 นิ้ว

2) เมื่อวงล้อหมุนไป เส้นทางที่ตุ๊กแกเคลื่อนตามไปจะมีลักษณะเป็นวงกลมที่มี O เป็นจุดศูนย์กลาง และมีรัศมียาว 21 นิ้ว

เฉลยกิจกรรม "หาจุดศูนย์กลาง" หน้า 121

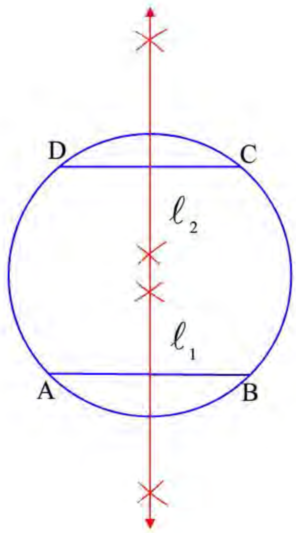
1. **แนวคิด**



1. สร้างเส้นตรง ℓ_1 ตั้งฉากและแบ่งครึ่ง $\overline{AB}$
2. สร้างเส้นตรง ℓ_2 ตั้งฉากและแบ่งครึ่ง $\overline{BC}$
3. ให้เส้นตรง ℓ_1 ตัดกับเส้นตรง ℓ_2 ที่จุด O

จะได้จุด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

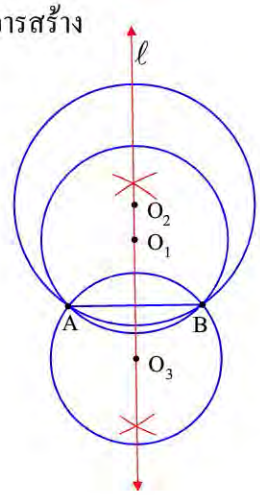
2.



ถ้าคอร์ดสองคอร์ด สมมติเป็นคอร์ด AB และคอร์ด CD ขนานกัน เส้นตรง ℓ_1 และ ℓ_2 ที่เป็นเส้นตั้งฉากและแบ่งครึ่งคอร์ดทั้งสองจะทับกันเป็นเส้นตรงเดียวกัน จึงไม่สามารถหาจุดตัดที่เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมโดยใช้วิธีนี้ได้ ต้องหาโดยใช้วิธีอื่น

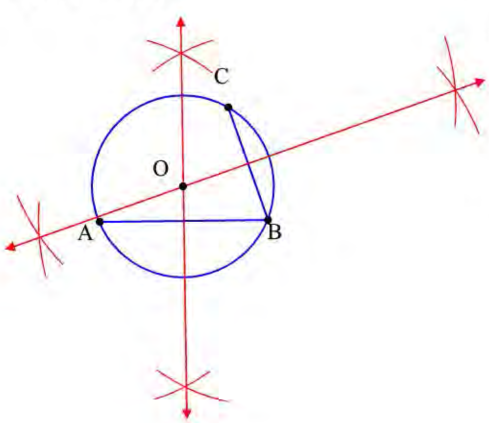
เฉลยกิจกรรม "วงกลมผ่านจุดที่กำหนด" หน้า 122

1. สร้างวงกลมผ่านจุด A ได้จำนวนวงกลมนับไม่ถ้วน และจุดศูนย์กลางของวงกลมเหล่านั้นเป็นจุดต่าง ๆ บนระนาบ
2. ตัวอย่างการสร้าง



สร้างวงกลมผ่านจุด A และจุด B ได้จำนวนวงกลมนับไม่ถ้วน และจุดศูนย์กลางของวงกลมเหล่านั้นจะอยู่บนเส้นตรงที่ตั้งฉากและแบ่งครึ่ง $\overline{AB}$

3. ตัวอย่างการสร้าง



สร้างวงกลมผ่านจุด A, B และ C ได้วงเดียวและจุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่จุดตัดของเส้นตรงสองเส้นซึ่งเป็นเส้นตรงที่ตั้งฉากและแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรงสองเส้นที่เชื่อมสองจุดใด ๆ ของจุด A, B และ C

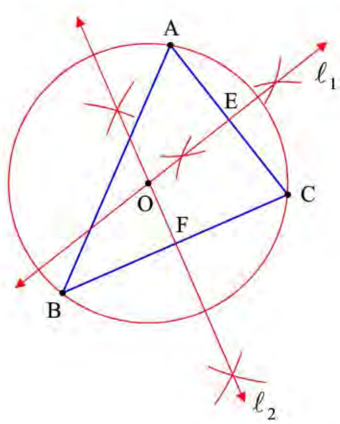
4. สร้างไม่ได้
5. โดยทั่วไปจะสร้างไม่ได้

เฉลยกิจกรรม "รูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม" หน้า 125

1. 180° เพราะ กำหนดให้
2. 180° เพราะ ผลบวกของขนาดของมุมภายในทั้งสี่มุมของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ เท่ากับ 360 องศา
3. 180° เพราะ ผลบวกของขนาดของมุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมที่แนบในวงกลมเท่ากับ 180 องศา
4. เท่ากัน เพราะ สมบัติของการเท่ากัน
5. ได้ เพราะ สมบัติของการเท่ากัน

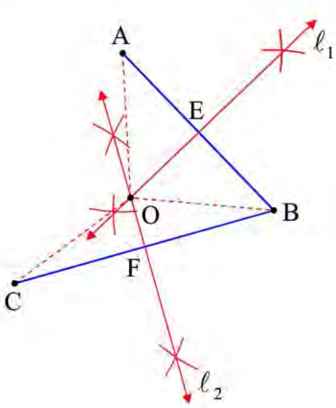
เฉลยแบบฝึกหัด 3.3 ข

1. ตัวอย่างการสร้าง

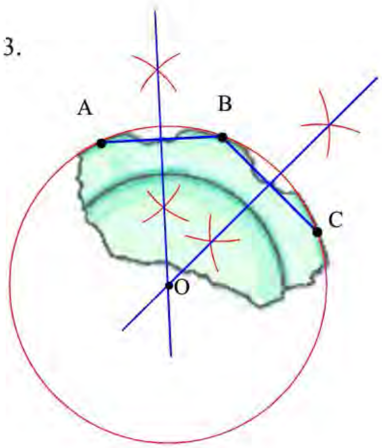


สร้างเส้นตรง ℓ_1 ให้ตั้งฉากและแบ่งครึ่ง $\overline{AC}$ ที่จุด E
สร้างเส้นตรง ℓ_2 ให้ตั้งฉากและแบ่งครึ่ง $\overline{BC}$ ที่จุด F
ให้เส้นตรง ℓ_1 และ ℓ_2 ตัดกันที่จุด O
ใช้จุด O เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมีเท่ากับ OA สร้างวงกลม
จะได้ วงกลมผ่านจุด A, B และ C ตามต้องการ

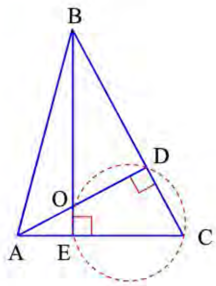
2.



ให้จุด A, B และ C เป็นตำแหน่งของโรงเรียน โรงพยาบาล และท่ารถประจำทาง ตามลำดับ
สร้างเส้นตรงที่ตั้งฉากและแบ่งครึ่ง $\overline{AB}$ และ $\overline{BC}$ แล้วหาจุดตัดของเส้นตรงทั้งสอง
จะได้ว่า จุดตัดที่ได้คือจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ผ่านจุด A, B และ C
ดังนั้น ตำแหน่งที่สร้างตลาดสดอยู่ที่จุด O ซึ่งเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ผ่านจุด A, B และ C

3. 

กำหนดจุด A, B และ C บนขอบจานในบริเวณที่ไม่ชำรุด และจุดเหล่านี้ไม่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน
สร้างเส้นตรงที่ตั้งฉากและแบ่งครึ่ง $\overline{AB}$ และ $\overline{BC}$
แล้วหาจุดตัดของเส้นตรงทั้งสอง
จะได้ จุดศูนย์กลางของจานซึ่งทำให้หาความยาวของรัศมีของจานได้ จากนั้นจึงใช้ความยาวของรัศมีหาความยาวของเส้นรอบจาน

4. 

กำหนดให้ Δ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมแหลม
$\overline{AD}$ และ $\overline{BE}$ เป็นส่วนสูงของ Δ ABC และตัดกันที่จุด O

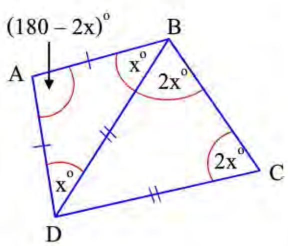
ต้องการพิสูจน์ว่า □ ODCE แนบในวงกลมได้

พิสูจน์

เนื่องจาก $O\hat{D}C = O\hat{E}C = 90^\circ$ (กำหนดให้)

ทำให้ $O\hat{D}C + O\hat{E}C = 180^\circ$ (สมบัติของการเท่ากัน)

ดังนั้น □ ODCE แนบในวงกลมได้ (ถ้ารูปสี่เหลี่ยมใด ๆ มีผลบวกของขนาดของมุมตรงข้ามเท่ากับสองมุมฉาก แล้วรูปสี่เหลี่ยมนั้นแนบในวงกลมวงหนึ่งได้)

5. 

กำหนดให้ □ ABCD มี AB = AD, DB = DC และ $D\hat{B}C = 2(A\hat{B}D)$
และให้ $A\hat{B}D = x^\circ$ จะได้ $D\hat{B}C = 2x^\circ$

ต้องการพิสูจน์ว่า □ ABCD แนบในวงกลมได้

พิสูจน์

เนื่องจาก $A\hat{B}D = A\hat{D}B = x^\circ$ (มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีขนาดเท่ากัน)

และ $B\hat{A}D + A\hat{B}D + A\hat{D}B = 180^{\circ}$ (ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับ 180 องศา)

$B\hat{A}D + 2x = 180^{\circ}$ (สมบัติของการเท่ากัน)

$B\hat{A}D = (180 - 2x)^{\circ}$ (สมบัติของการเท่ากัน)

$D\hat{B}C = D\hat{C}B = 2x^{\circ}$ (มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีขนาดเท่ากัน)

จะได้ $B\hat{A}D + B\hat{C}D = 180 - 2x + 2x = 180^{\circ}$ (สมบัติของการเท่ากัน)

ดังนั้น □ ABCD แนบในวงกลมได้ (ถ้ารูปสี่เหลี่ยมใด ๆ มีผลบวกของขนาดของมุมตรงข้ามเท่ากับสองมุมฉาก แล้วรูปสี่เหลี่ยมนั้นแนบในวงกลมวงหนึ่งได้)

เฉลยกิจกรรม "คอร์ดที่ยาวเท่ากัน" หน้า 128

1.

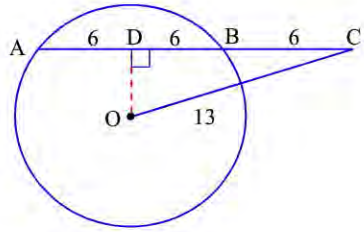
1) เท่ากัน เพราะ ส่วนของเส้นตรงซึ่งผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมและตั้งฉากกับคอร์ดที่ไม่ใช่เส้นผ่านศูนย์กลาง จะแบ่งครึ่งคอร์ด
2) เท่ากัน
3) เท่ากัน เพราะ AB = CD และสมบัติของการเท่ากัน
4) เท่ากันทุกประการ เพราะ $O\hat{E}B = O\hat{F}C = 90^{\circ}$, OB = OC และ BE = CF (ฉ.ด.ด.)
5) เท่ากัน เพราะ ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะยาวเท่ากัน
6) เท่ากัน
7) ใช่

2.

1) เท่ากันทุกประการ เพราะ $O\hat{E}B = O\hat{F}C = 90^{\circ}$, OB = OC และ OE = OF (ฉ.ด.ด.)
2) เท่ากัน เพราะ ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะยาวเท่ากัน
3) เท่ากัน เพราะ สมบัติของการเท่ากัน
4) เท่ากัน เพราะ ส่วนของเส้นตรงซึ่งผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมและตั้งฉากกับคอร์ดที่ไม่ใช่เส้นผ่านศูนย์กลาง จะแบ่งครึ่งคอร์ด
5) เท่ากัน เพราะ ส่วนของเส้นตรงซึ่งผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมและตั้งฉากกับคอร์ดที่ไม่ใช่เส้นผ่านศูนย์กลาง จะแบ่งครึ่งคอร์ด
6) เท่ากัน เพราะ สมบัติของการเท่ากัน
7) ใช่

เฉลยแบบฝึกหัด 3.3 ค

1. 5 เซนติเมตร



เนื่องจาก AC = 18 เซนติเมตร BC = 6 เซนติเมตร

จะได้ AB = 18 – 6 = 12 เซนติเมตร

เมื่อลาก $\overline{OD}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ ที่จุด D

ทำให้จุด D แบ่งครึ่ง $\overline{AB}$

จะได้ AD = DB = 6 เซนติเมตร

ดังนั้น DC = 6 + 6 = 12 เซนติเมตร

และ OC = 13 เซนติเมตร

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

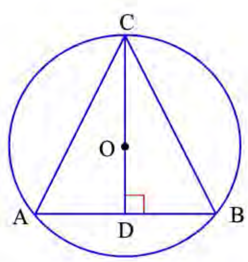
จะได้ $OD^2 = OC^2 - DC^2$

ดังนั้น $OD^2 = 13^2 - 12^2 = 25$

จะได้ $OD = 5$

นั่นคือ $\overline{AB}$ อยู่ห่างจากจุด O 5 เซนติเมตร

2.



กำหนดให้ จุด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

$\overline{OD}$ ตั้งฉากกับคอร์ด AB ที่จุด D

ต่อ $\overline{DO}$ ไปตัดวงกลมที่จุด C

ลาก $\overline{AC}$ และ $\overline{BC}$

ต้องการพิสูจน์ว่า $\overline{AC}$ และ $\overline{BC}$ อยู่ห่างจากจุด O เท่ากัน

พิสูจน์

เนื่องจาก AD = BD (ส่วนของเส้นตรงซึ่งผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลม และตั้งฉากกับคอร์ดที่ไม่ใช่เส้นผ่านศูนย์กลาง จะแบ่งครึ่งคอร์ด)

$A\hat{D}C = B\hat{D}C = 90^\circ$ ($\overline{CD}$ ตั้งฉากกับคอร์ด AB)

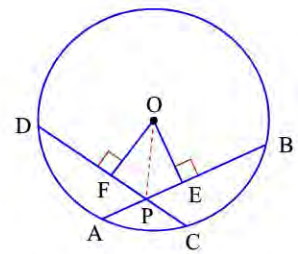
และ $\overline{CD}$ เป็นด้านร่วม

จะได้ $\Delta ACD \cong \Delta BCD$ (ด.ม.ด.)

ดังนั้น AC = BC (ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะยาวเท่ากัน)

นั่นคือ $\overline{AC}$ และ $\overline{BC}$ อยู่ห่างจากจุด O เท่ากัน

(ในวงกลมวงหนึ่ง ถ้าคอร์ดสองเส้นยาวเท่ากัน แล้วคอร์ดทั้งสองนั้นจะอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางของวงกลมเป็นระยะเท่ากัน)

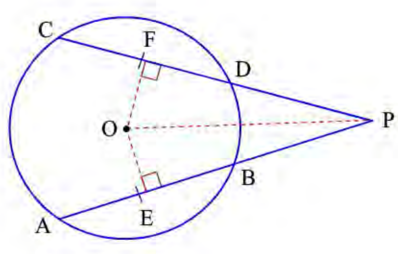
3. 

กำหนดให้ จุด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ เป็นคอร์ดที่ยาวเท่ากัน และตัดกันที่จุด P ลาก $\overline{OE}$ และ $\overline{OF}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ ที่จุด E และจุด F ตามลำดับ

ต้องการพิสูจน์ว่า BP = DP

พิสูจน์ ลาก $\overline{OP}$

เนื่องจาก	OE = OF	(ในวงกลมวงหนึ่ง ถ้าคอร์ดสองเส้นยาวเท่ากัน แล้วคอร์ดทั้งสองนั้นจะอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางของวงกลมเป็นระยะเท่ากัน)
จะได้	Δ OEP $\cong$ Δ OFP	(ฉ.ด.ด.)
ดังนั้น	EP = FP	(ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะยาวเท่ากัน)
และ	BE = DF	(ต่างก็ยาวเป็นครึ่งหนึ่งของคอร์ดที่ยาวเท่ากัน)
จะได้	BE + EP = DF + FP	(สมบัติของการเท่ากัน)
นั่นคือ	BP = DP	(สมบัติของการเท่ากัน)

4. 

กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ เป็นคอร์ดที่ยาวเท่ากัน ไม่ขนานกัน และต่อออกไปตัดกันภายนอกวงกลมที่จุด P ลาก $\overline{OE}$ และ $\overline{OF}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ ที่จุด E และจุด F ตามลำดับ ลาก $\overline{OP}$

ต้องการพิสูจน์ว่า DP = BP

พิสูจน์

เนื่องจาก $OE = OF$ (ในวงกลมวงหนึ่ง ถ้าคอร์ดสองเส้นยาวเท่ากัน แล้วคอร์ดทั้งสองนั้นจะอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางของวงกลมเป็นระยะเท่ากัน)

จะได้ $\Delta OEP \cong \Delta OFP$ (ฉ.ด.ด.)

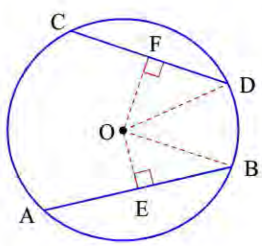
ดังนั้น $EP = FP$ (ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะยาวเท่ากัน)

และ $BE = DF$ (ต่างก็ยาวเป็นครึ่งหนึ่งของคอร์ดที่ยาวเท่ากัน)

จะได้ $EP - BE = FP - DF$ (สมบัติของการเท่ากัน)

นั่นคือ $BP = DP$ (สมบัติของการเท่ากัน)

5.



กำหนดให้ วงกลม O มี $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ เป็นคอร์ดที่ $AB > CD$

ต้องการพิสูจน์ว่า $\overline{AB}$ อยู่ใกล้จุดศูนย์กลางมากกว่า $\overline{CD}$

พิสูจน์ ลาก $\overline{OE}$ และ $\overline{OF}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ ที่จุด E และจุด F ตามลำดับ

ลาก $\overline{OB}$ และ $\overline{OD}$

จาก ΔOEB จะได้ $OB^2 = OE^2 + EB^2$ (ทฤษฎีบทพีทาโกรัส)

จาก ΔOFD จะ ได้ $OD^2 = OF^2 + FD^2$ (ทฤษฎีบทพีทาโกรัส)

และ $OB = OD$ (รัศมีของวงกลมเดียวกันยาวเท่ากัน)

ดังนั้น $OB^2 = OD^2$ (สมบัติของการเท่ากัน)

จะได้ $OE^2 + EB^2 = OF^2 + FD^2$ (สมบัติของการเท่ากัน) -------------- 1

เนื่องจาก $AB > CD$ (กำหนดให้)

จะได้ $\frac{AB}{2} > \frac{CD}{2}$ (สมบัติของการ ไม่เท่ากัน)

เนื่องจาก $EB = \frac{AB}{2}$ และ $FD = \frac{CD}{2}$ (ส่วนของเส้นตรงซึ่งผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมและตั้งฉากกับคอร์ดที่ไม่ใช่เส้นผ่านศูนย์กลาง จะแบ่งครึ่งคอร์ด)

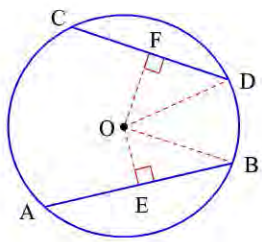
ดังนั้น $EB > FD$ (สมบัติของการเท่ากัน)

จะได้ $EB^2 > FD^2$ (EB และ FD เป็นจำนวนบวก) -------------- 2

ดังนั้น $OE^2 < OF^2$ (สมบัติของการเท่ากัน จาก 1 และ 2)

จะได้	$OE < OF$	(OE และ OF เป็นจำนวนบวก)
นั่นคือ	$\overline{AB}$ อยู่ใกล้จุดศูนย์กลางของวงกลมมากกว่า $\overline{CD}$	

6.



กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม $\overline{CD}$ เป็นคอร์ดที่อยู่ห่างจากจุด O มากกว่าคอร์ด AB ลาก $\overline{OE}$ และ $\overline{OF}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ ที่จุด E และจุด F ตามลำดับ ลาก $\overline{OB}$ และ $\overline{OD}$

ต้องการพิสูจน์ว่า $CD < AB$

พิสูจน์

จาก Δ OEB จะได้	$OB^2 = OE^2 + EB^2$	(ทฤษฎีบทพีทาโกรัส)
จาก Δ OFD จะ ได้	$OD^2 = OF^2+FD^2$	(ทฤษฎีบทพีทาโกรัส)
เนื่องจาก	$OB = OD$	(รัศมีของวงกลมเดียวกันยาวเท่ากัน)
จะได้	$OB^2 = OD^2$	(สมบัติของการเท่ากัน)
ดังนั้น	$OE^2 + EB^2 = OF^2 + FD^2$	(สมบัติของการเท่ากัน)
และ	$OE < OF$	(กำหนดให้)
จะได้	$OE^2 < OF^2$	(OE และ OF เป็นจำนวนบวก)
ดังนั้น	$EB^2 > FD^2$	(สมบัติของการเท่ากัน)
จะได้	$EB > FD$	(EB และ FD เป็นจำนวนบวก)
ดังนั้น	$2(EB) > 2(FD)$	(สมบัติของการไม่เท่ากัน)
นั่นคือ	$AB > CD$	(ส่วนของเส้นตรงซึ่งผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมและตั้งฉากกับคอร์ดที่ไม่ใช่เส้นผ่านศูนย์กลาง จะแบ่งครึ่งคอร์ด)

สำหรับกรณีวงกลมที่เท่ากันทุกประการ จะใช้แนวคิดในการพิสูจน์ทำนองเดียวกัน

เฉลยกิจกรรม “เส้นสัมผัสวงกลมและรัศมี” หน้า 131

1. เป็นรัศมีของวงกลม
2. $O\hat{A}P$ มีขนาด 90° และ $O\hat{B}X$ มีขนาด 90°
3. ตั้งฉาก
4. ตั้งฉาก
5. ใช่

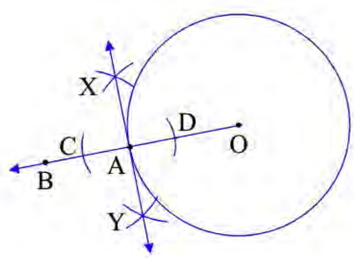
เฉลยคำตอบท้ายกิจกรรม “เส้นสัมผัสวงกลมและรัศมี” หน้า 132

1) $\overline{PC}$
2) เป็น

เฉลยกิจกรรม “เส้นสัมผัสวงกลมและรัศมี (ต่อ)” หน้า 135

1.

(1) ตั้งฉาก เพราะ ได้สร้างให้ $\overleftrightarrow{XY}$ ตั้งฉากกับ $\overrightarrow{OB}$ ที่จุด A



(2) เป็น เพราะ เส้นตรงที่ตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมที่จุดจุดหนึ่งบนวงกลมจะเป็นเส้นสัมผัสวงกลมที่จุดนั้น

2.

(1) เป็น

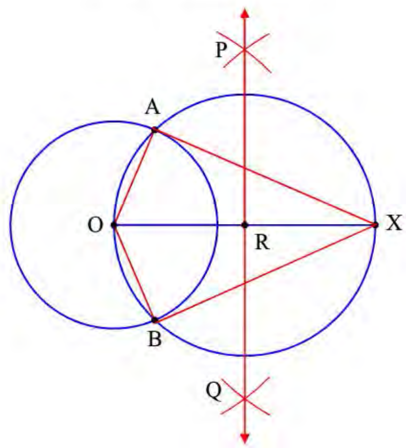
(2) 90° เพราะ แต่ละมุมเป็นมุมในครึ่งวงกลม R ซึ่งมุมในครึ่งวงกลมมีขนาด 90 องศา

(3) ตั้งฉาก เพราะ $O\hat{A}X = 90^{\circ}$ และ $O\hat{B}X = 90^{\circ}$

(4) สัมผัส เพราะ เส้นตรงที่ตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมที่จุดจุดหนึ่งบนวงกลม จะเป็นเส้นสัมผัสวงกลมที่จุดนั้น

(5) สองจุด

(6) เท่ากัน เพราะ



$\hat{OAX} = \hat{OBX} = 90^\circ$ (จากข้อ (2))

OX = OX ($\overline{OX}$ เป็นด้านร่วม)

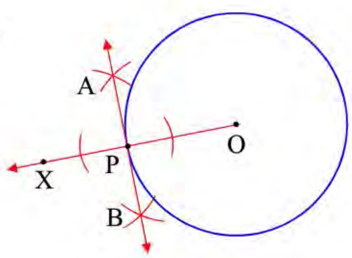
AO = BO (รัศมีของวงกลมเดียวกันยาวเท่ากัน)

จะได้ $\Delta AOX \cong \Delta BOX$ (ฉ.ด.ด.)

ดังนั้น AX = BX (ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะยาวเท่ากัน)

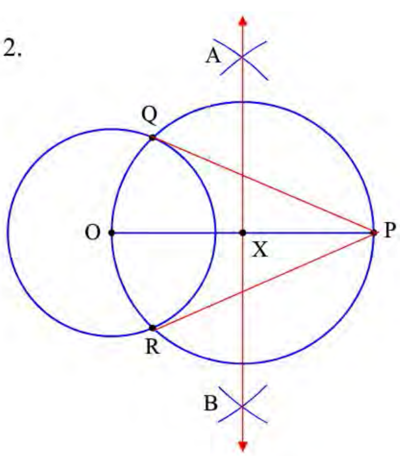
เฉลยคำตอบท้ายกิจกรรม "เส้นสัมผัสวงกลมและรัศมี (ต่อ)" หน้า 138

1.



แนวการสร้าง ทำได้ในทำนองเดียวกันกับในข้อ 1 ของกิจกรรม "เส้นสัมผัสวงกลมและรัศมี (ต่อ)" ในหนังสือเรียนหน้า 135

2.

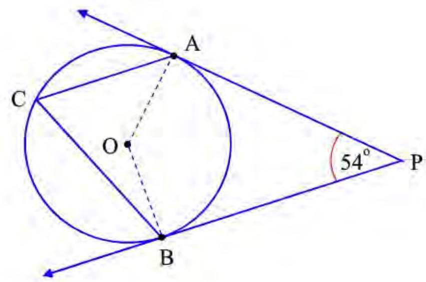


แนวการสร้าง ทำได้ในทำนองเดียวกันกับในข้อ 2 ของกิจกรรม "เส้นสัมผัสวงกลมและรัศมี (ต่อ)" ในหนังสือเรียนหน้า 135

3.

1) 63°

แนวคิด



ลาก $\overline{OA}$ และ $\overline{OB}$

เนื่องจาก $O\hat{A}P = O\hat{B}P = 90^{\circ}$ (เส้นสัมผัสวงกลมจะตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมที่จุดสัมผัส)

และ $A\hat{O}B + O\hat{B}P + B\hat{P}A + O\hat{A}P = 360^{\circ}$ (ขนาดของมุมภายในทั้งสี่ของรูปสี่เหลี่ยมรวมกันได้ 360 องศา)

จะได้ $A\hat{O}B + 90 + 54 + 90 = 360$

ดังนั้น $A\hat{O}B = 126^{\circ}$

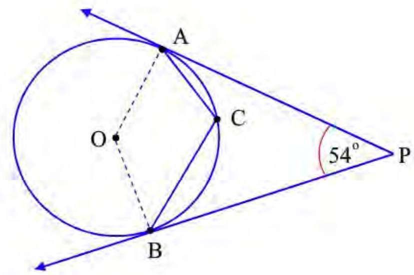
เนื่องจาก $A\hat{O}B = 2(A\hat{C}B)$ (ในวงกลมวงเดียวกัน มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมจะมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน)

จะได้ $A\hat{C}B = \frac{126}{2} = 63^{\circ}$

นั่นคือ $A\hat{C}B$ มีขนาด 63°

2) 117°

แนวคิด



ลาก $\overline{OA}$ และ $\overline{OB}$

เนื่องจาก $O\hat{A}P = O\hat{B}P = 90^{\circ}$ (เส้นสัมผัสวงกลมจะตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมที่จุดสัมผัส)

และ $A\hat{O}B + O\hat{B}P + B\hat{P}A + O\hat{A}P = 360^{\circ}$ (ขนาดของมุมภายในทั้งสี่ของรูปสี่เหลี่ยมรวมกันได้ 360 องศา)

จะได้ $A\hat{O}B + 90 + 54 + 90 = 360^{\circ}$

ดังนั้น $A\hat{O}B = 126^{\circ}$

จะได้มุมกลับ AOB $= 360 - 126 = 234^{\circ}$ (มุมรอบจุดศูนย์กลางของวงกลมเท่ากับ 360°)

เนื่องจากมุมกลับ AOB $= 2(A\hat{C}B)$ (ในวงกลมวงเดียวกัน มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม จะมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน)

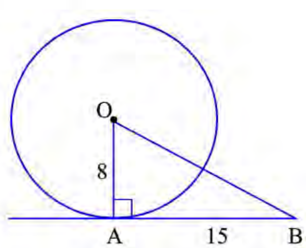
จะได้ $A\hat{C}B = \frac{234}{2} = 117^{\circ}$

นั่นคือ $A\hat{C}B$ มีขนาด 117°

เฉลยแบบฝึกหัด 3.4 ก

1. 17 เซนติเมตร

แนวคิด



จากรูป OAB เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มี $O\hat{A}B = 90^{\circ}$

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

จะได้ $OB^2 = AO^2 + AB^2$

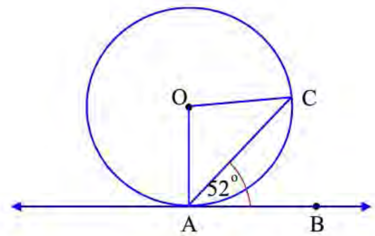
ดังนั้น $OB^2 = 8^2 + 15^2 = 289$

จะได้ $OB = 17$

นั่นคือ จุด B อยู่ห่างจากจุด O 17 เซนติเมตร

2. 104°

แนวคิด



เนื่องจาก $O\hat{A}B = 90^\circ$ (เส้นสัมผัสวงกลมจะตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมที่จุดสัมผัส)

และ $O\hat{A}C + C\hat{A}B = O\hat{A}B$

จะได้ $O\hat{A}C + 52 = 90$

ดังนั้น $O\hat{A}C = 90 - 52 = 38^\circ$

เนื่องจาก $OA = OC$ (รัศมีของวงกลมเดียวกันยาวเท่ากัน)

และ ΔOAC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว (มีด้านประกอบมุมยอดยาวเท่ากัน)

จะได้ $O\hat{A}C = O\hat{C}A = 38^\circ$ (มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีขนาดเท่ากัน)

และ $A\hat{O}C + O\hat{C}A + O\hat{A}C = 180^\circ$ (ขนาดของมุมภายในทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับ 180°)

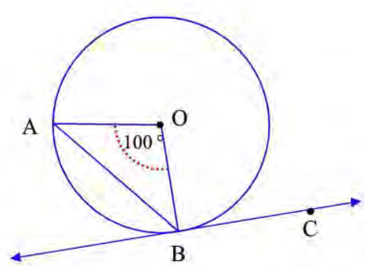
จะได้ $A\hat{O}C + 38 + 38 = 180$

ดังนั้น $A\hat{O}C = 180 - 76 = 104^\circ$

นั่นคือ $A\hat{O}C$ มีขนาด 104°

3. 130°

แนวคิด



เนื่องจาก $AO = BO$ (รัศมีของวงกลมเดียวกันยาวเท่ากัน)

และ ΔABO เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว (มีด้านประกอบมุมยอดยาวเท่ากัน)

ดังนั้น $O\hat{A}B = A\hat{B}O$ (มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีขนาดเท่ากัน)

และ $O\hat{A}B + A\hat{B}O + A\hat{O}B = 180^{\circ}$ (ขนาดของมุมภายในทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับ 180°)

จะได้ $2(O\hat{A}B) + 100 = 180$

ดังนั้น $O\hat{A}B = \frac{180 - 100}{2} = 40^{\circ}$

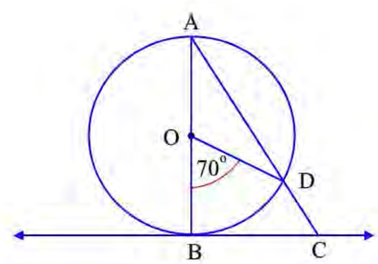
เนื่องจาก $O\hat{B}C = 90^{\circ}$ (เส้นสัมผัสวงกลมจะตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมที่จุดสัมผัส)

ดังนั้น $A\hat{B}C = A\hat{B}O + O\hat{B}C = 40 + 90 = 130^{\circ}$

นั่นคือ $A\hat{B}C$ มีขนาด 130°

4. 55°

แนวคิด



เนื่องจาก $B\hat{O}D = 70^{\circ}$ (กำหนดให้)

และ $B\hat{O}D = 2(B\hat{A}D)$ (ในวงกลมเดียวกัน มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมจะมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน)

จะได้ $2(B\hat{A}D) = 70^{\circ}$

ดังนั้น $B\hat{A}D = \frac{70}{2} = 35^{\circ}$

เนื่องจาก $A\hat{B}C = 90^{\circ}$ (เส้นสัมผัสวงกลมจะตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมที่จุดสัมผัส)

และ $A\hat{C}B + A\hat{B}C + B\hat{A}C = 180^{\circ}$ (ขนาดของมุมภายในทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับ 180°)

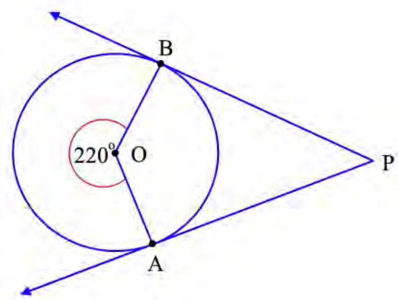
จะได้ $A\hat{C}B + 90 + 35 = 180$

ดังนั้น $A\hat{C}B = 180 - 125 = 55^{\circ}$

นั่นคือ $A\hat{C}B$ มีขนาด 55°

5. 40°

แนวคิด



เนื่องจาก $A\hat{O}B$ + มุมกลับ AOB = 360° (มุมรอบจุดศูนย์กลางของวงกลมเท่ากับ 360°)

จะได้ $A\hat{O}B + 220 = 360$

ดังนั้น $A\hat{O}B = 360 - 220 = 140^\circ$

เนื่องจาก $O\hat{B}P = 90^\circ$ และ $O\hat{A}P = 90^\circ$ (เส้นสัมผัสวงกลมจะตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมที่จุดสัมผัส)

และ $A\hat{P}B + O\hat{B}P + A\hat{O}B + O\hat{A}P = 360^\circ$ (ขนาดของมุมภายในทั้งสี่ของรูปสี่เหลี่ยมรวมกันเท่ากับ 360°)

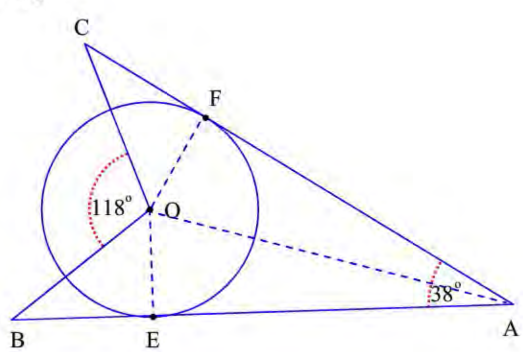
จะได้ $A\hat{P}B + 90 + 140 + 90 = 360$

ดังนั้น $A\hat{P}B = 360 - 320 = 40^\circ$

นั่นคือ $A\hat{P}B$ มีขนาด 40°

6. $A\hat{B}O = 40^\circ$ และ $A\hat{C}O = 40^\circ$

แนวคิด



ลาก $\overline{AO}$, $\overline{EO}$ และ $\overline{FO}$

เนื่องจาก $\Delta AOE \cong \Delta AOF$ (ด.ด.ด. เพราะ OE = OF, OA = OA และ AE = AF)

จะได้ $E\hat{A}O = F\hat{A}O = 19^\circ$ (มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะมีขนาดเท่ากัน)

และ	$AO = AO$	(ด้านร่วม)
	$AB = AC$	(กำหนดให้)
ดังนั้น	$\Delta AOB \cong \Delta AOC$	(ด.ม.ด.)
จะได้	$A\hat{O}B = A\hat{O}C$	(มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะมีขนาดเท่ากัน)

และในทำนองเดียวกัน $A\hat{B}O = A\hat{C}O$

เนื่องจาก $A\hat{O}B + A\hat{O}C + B\hat{O}C = 360^{\circ}$ (มุมรอบจุดศูนย์กลางของวงกลมเท่ากับ 360°)

จะได้ $2(A\hat{O}B) + 118 = 360$

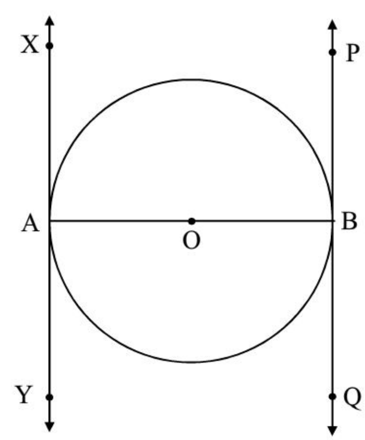
ดังนั้น $A\hat{O}B = \frac{242}{2} = 121^{\circ}$

เนื่องจาก $A\hat{B}O + A\hat{O}B + B\hat{A}O = 180^{\circ}$ (ขนาดของมุมภายในทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับ 180°)

จะได้ $A\hat{B}O + 121 + 19 = 180$

ดังนั้น $A\hat{B}O = 180 - 140 = 40^{\circ} = A\hat{C}O$

7.



กำหนดให้ วงกลม O มี $\overline{AB}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง

$\overleftrightarrow{XY}$ และ $\overleftrightarrow{PQ}$ สัมผัสวงกลมที่จุด A และ B ตามลำดับ

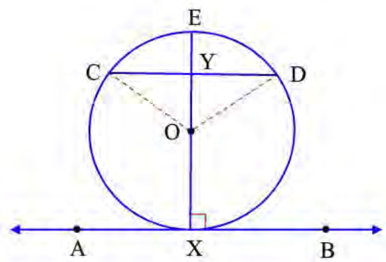
ต้องการพิสูจน์ว่า $\overleftrightarrow{XY} \,//\, \overleftrightarrow{PQ}$

พิสูจน์

เนื่องจาก $Y\hat{A}O = P\hat{B}O = 90^{\circ}$ (เส้นสัมผัสวงกลมจะตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมที่จุดสัมผัส)

จะได้ $\overleftrightarrow{XY} // \overleftrightarrow{PQ}$ (ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน)

8.



กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB}$ สัมผัสวงกลม O ที่จุด X

$\overline{XE}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม คอร์ด CD ขนานกับ $\overleftrightarrow{AB}$ และตัด $\overline{XE}$ ที่จุด Y

ต้องการพิสูจน์ว่า $m(\overset{\frown}{CE}) = m(\overset{\frown}{DE})$

พิสูจน์ ลาก $\overline{CO}$ และ $\overline{DO}$

เนื่องจาก $\overline{EX} \perp \overleftrightarrow{AB}$ (เส้นสัมผัสวงกลมจะตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมที่จุดสัมผัส)

จะได้ $E\hat{X}B = 90^\circ$

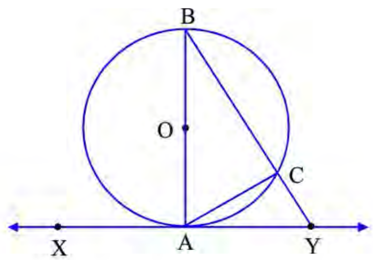
และ $C\hat{Y}X = E\hat{X}B = 90^\circ$ (ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน)

ดังนั้น $\Delta CYO \cong \Delta DYO$ (ฉ.ด.ด.)

จะได้ $C\hat{O}Y = D\hat{O}Y$ (มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการจะมีขนาดเท่ากัน)

และ $m(\overset{\frown}{CE}) = m(\overset{\frown}{DE})$ (ในวงกลมวงเดียวกัน ถ้ามุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเท่ากัน แล้วส่วนโค้งที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางนั้นจะยาวเท่ากัน)

9.



กำหนดให้ $\overleftrightarrow{XY}$ สัมผัสวงกลม O ที่จุด A

$\overline{AB}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม

$\overline{BY}$ ตัดวงกลมที่จุด C

ต้องการพิสูจน์ว่า $B\hat{A}C = A\hat{Y}B$

พิสูจน์

เนื่องจาก $B\hat{A}C + C\hat{A}Y = 90^{\circ}$ (เส้นสัมผัสวงกลมจะตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมที่จุดสัมผัส)

และ $A\hat{C}B = 90^{\circ}$ (มุมในครึ่งวงกลมมีขนาด 90 องศา)

ดังนั้น $A\hat{C}Y = 90^{\circ}$ ($A\hat{C}B + A\hat{C}Y = B\hat{C}Y = 180^{\circ}$)

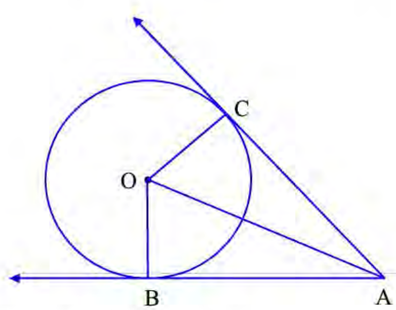
$A\hat{C}Y + C\hat{A}Y + A\hat{Y}B = 180^{\circ}$ (ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับ 180 องศา)

จะได้ $C\hat{A}Y + A\hat{Y}B = 180 - 90 = 90^{\circ}$ (สมบัติของการเท่ากัน)

ดังนั้น $B\hat{A}C + C\hat{A}Y = C\hat{A}Y + A\hat{Y}B = 90^{\circ}$ (สมบัติของการเท่ากัน)

นั่นคือ $B\hat{A}C = A\hat{Y}B$ (สมบัติของการเท่ากัน)

10.



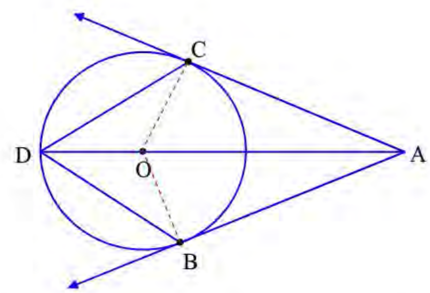
กำหนดให้ $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{AC}$ สัมผัสวงกลม O ที่จุด B และ C ตามลำดับ

ต้องการพิสูจน์ว่า $A\hat{O}B = A\hat{O}C$

พิสูจน์

เนื่องจาก	OB = OC	(รัศมีของวงกลมวงเดียวกันยาวเท่ากัน)
และ	OA = OA	($\overline{OA}$ เป็นด้านร่วม)
	AB = AC	(ส่วนของเส้นตรงที่ลากมาจากจุดจุดหนึ่งภายนอกวงกลมมาสัมผัสวงกลมวงเดียวกันจะยาวเท่ากัน)
ดังนั้น	$\Delta ABO \cong \Delta ACO$	(ด.ด.ด.)
นั่นคือ	$A\hat{O}B = A\hat{O}C$	(มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะมีขนาดเท่ากัน)

11.



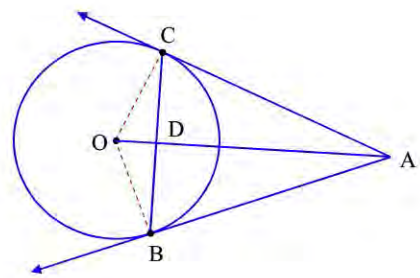
กำหนดให้ $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{AC}$ สัมผัสวงกลม O ที่จุด B และ C ตามลำดับ
$\overline{AD}$ ผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลม O

ต้องการพิสูจน์ว่า BD = CD

พิสูจน์ ลาก $\overline{BO}$ และ $\overline{CO}$

เนื่องจาก	$A\hat{O}B = A\hat{O}C$	(จากการพิสูจน์ในข้อ 10)
และ	$B\hat{O}D + A\hat{O}B = C\hat{O}D + A\hat{O}C = 180^\circ$	(ขนาดของมุมตรง)
จะได้	$B\hat{O}D = C\hat{O}D$	(สมบัติของการเท่ากัน)
ดังนั้น	$m(\overset{\frown}{BD}) = m(\overset{\frown}{CD})$	(ในวงกลมวงเดียวกัน ถ้ามุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเท่ากัน แล้วส่วนโค้งที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางนั้นจะยาวเท่ากัน)
นั่นคือ	BD = CD	(ในวงกลมวงหนึ่ง ถ้าคอร์ดสองคอร์ดตัดวงกลมทำให้ได้ส่วนโค้งยาวเท่ากัน แล้วคอร์ดทั้งสองนั้นจะยาวเท่ากัน)

12.



กำหนดให้ $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{AC}$ สัมผัสวงกลม O ที่จุด B และ C ตามลำดับ

ต้องการพิสูจน์ว่า $\overline{AO}$ ตั้งฉากและแบ่งครึ่ง $\overline{BC}$ ที่จุด D

พิสูจน์ ลาก $\overline{BO}$ และ $\overline{CO}$

เนื่องจาก Δ BOC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว (มีด้านประกอบมุมยอดยาวเท่ากัน)

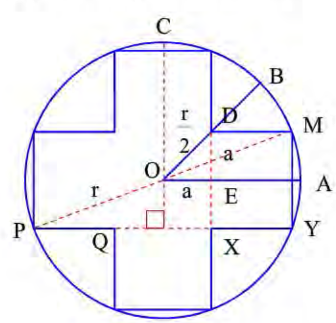
จะได้ $A\hat{O}B = A\hat{O}C$ (จากการพิสูจน์ในข้อ 10)

นั่นคือ $\overline{AO}$ ที่แบ่งครึ่งมุมยอดของ Δ BOC จะตั้งฉากและแบ่งครึ่ง $\overline{BC}$ ที่จุดตัดคือจุด D

(สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว)

เฉลยกิจกรรม "ลองคิดดู" หน้า 141

เครื่องหมายกาชาดมีพื้นที่ $\frac{r^2}{2}\left(2\sqrt{7}-1\right)$ ตารางหน่วย



แนวคิด กำหนดชื่อจุด P, Q, X, Y และ M ดังรูป ลาก $\overline{DX}$ ตัด $\overline{OA}$ ที่จุด E

ให้ DE = a

จะได้ OE = a และ DX = QX = 2a

เนื่องจาก Δ OED เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

จะได้ $a^2 + a^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2$

$2a^2 = \frac{r^2}{4}$

$$a^2 = \frac{r^2}{8}$$

$$a = \frac{r}{2\sqrt{2}}$$

ดังนั้น $DX = QX = 2\left(\frac{r}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{r}{\sqrt{2}}$ หน่วย

จะได้ พื้นที่ของเครื่องหมายกาชาด $= (PY)(DX) + (PQ)(DX) + (XY)(DX)$

$= (DX)(PY + PQ + XY)$

$= \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)(PY + PQ + XY)$ ตารางหน่วย

เนื่องจาก ΔPMY เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

จะได้ $PY^2 = PM^2 - MY^2$

$= PM^2 - DX^2$

$= (2r)^2 - \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2$

$= 4r^2 - \frac{r^2}{2}$

$= \frac{7r^2}{2}$

ดังนั้น $PY = \frac{\sqrt{7}r}{\sqrt{2}}$ หน่วย

จากรูปจะได้ $PQ + XY = PY - QX = \frac{\sqrt{7}r}{\sqrt{2}} - \frac{r}{\sqrt{2}}$ หน่วย

ดังนั้น พื้นที่ของเครื่องหมายกาชาด $= \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{7}r}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{7}r}{\sqrt{2}} - \frac{r}{\sqrt{2}}\right)$

$= \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{7} + \sqrt{7} - 1\right)$

$= \frac{r^2}{2}\left(2\sqrt{7} - 1\right)$ ตารางหน่วย

เฉลยคำตอบกิจกรรม “น่ารู้” หน้า 142

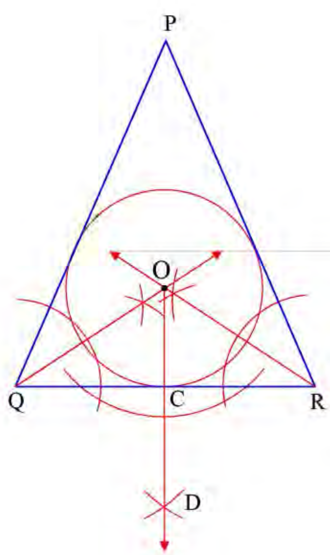
14 องศา

เนื่องจากขนาดของมุมที่เกิดจากแนวเส้นระดับสายตากับแนวสายตาที่มองดูดาวเหนือจะเท่ากับจำนวนองศาของเส้นรุ้ง ณ ตำแหน่งที่ยืนอยู่ และกรุงเทพมหานครตั้งอยู่บนเส้นรุ้ง 14 องศาเหนือ โดยประมาณ

ดังนั้น ถ้าอยู่ในกรุงเทพมหานครและจะดูดาวเหนือจะต้องเงยหน้าขึ้นเป็นมุมขนาด 14 องศา

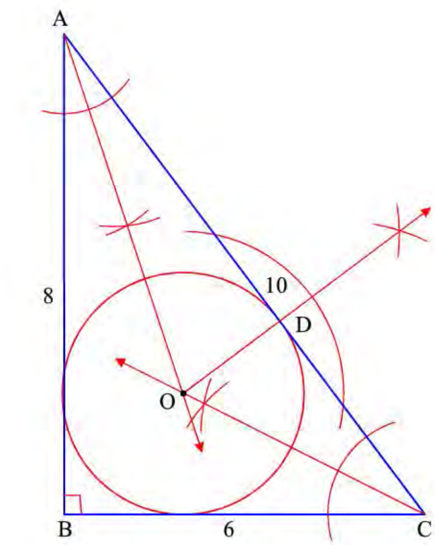
เฉลยคำตอบท้ายกิจกรรม “วงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยม” หน้า 144

1.

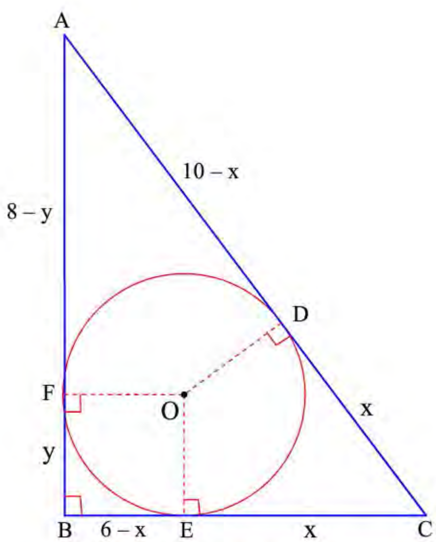


แนวการสร้าง ทำได้ในทำนองเดียวกันกับกิจกรรม “วงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยม” ในหนังสือเรียน หน้า 144

2.



แนวการสร้าง ทำได้ในทำนองเดียวกันกับกิจกรรม "วงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยม" ในหนังสือเรียน หน้า 144



ให้ $\overline{OE}$ และ $\overline{OF}$ ตั้งฉากกับ $\overline{BC}$ และ $\overline{BA}$ ที่จุด E และจุด F ตามลำดับ

จากรูป

ให้ CE = x หน่วย และ BF = y หน่วย

จะได้ $y = 6 - x$ -------- ①

และ $8 - y = 10 - x$ -------- ②

① + ② ; $8 = 16 - 2x$

$2x = 8$

ดังนั้น $x = 4$

แทน x ใน ① จะได้ $y = 6 - 4 = 2$

เนื่องจาก รัศมีของวงกลม O เท่ากับ y หน่วย (□ BEOF เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส)

ดังนั้น รัศมีของวงกลม O เท่ากับ 2 หน่วย

เฉลยกิจกรรม "เส้นสัมผัสและคอร์ด" หน้า 146

1.

1) 90° 2) 90°

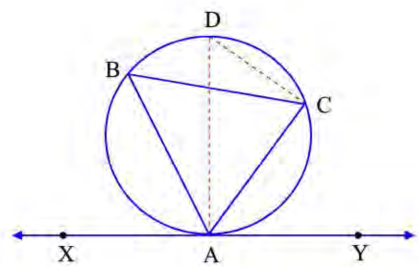
3) 90° 4) เท่ากัน

5) เท่ากัน เพราะ สมบัติของการเท่ากัน

6) เท่ากัน เพราะ $A\hat{D}B = A\hat{C}B$ (ในวงกลมวงเดียวกัน มุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันจะมีขนาดเท่ากัน)

2. **กำหนดให้** คอร์ด AB และคอร์ด AC ทำมุมกับเส้นสัมผัส XY ที่จุด A

ต้องการพิสูจน์ว่า $B\hat{A}X = A\hat{C}B$ และ $C\hat{A}Y = A\hat{B}C$



พิสูจน์ ลากเส้นผ่านศูนย์กลาง AD และลาก $\overline{CD}$

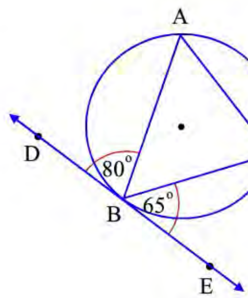
เนื่องจาก	$A\hat{C}D + A\hat{D}C + C\hat{A}D$	=	180°	(ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับ 180 องศา)
และ	$A\hat{C}D$	=	90°	(มุมในครึ่งวงกลมมีขนาด 90 องศา)
จะได้	$A\hat{D}C + C\hat{A}D$	=	90°	(สมบัติของการเท่ากัน)
เนื่องจาก	$C\hat{A}D + C\hat{A}Y$	=	90°	(เส้นสัมผัสวงกลมจะตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมที่จุดสัมผัส)
ดังนั้น	$A\hat{D}C + C\hat{A}D$	=	$C\hat{A}D + C\hat{A}Y$	(สมบัติของการเท่ากัน)
นั่นคือ	$A\hat{D}C$	=	$C\hat{A}Y$	(สมบัติของการเท่ากัน)
เนื่องจาก	$A\hat{D}C$	=	$A\hat{B}C$	(ในวงกลมวงเดียวกัน มุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันจะมีขนาดเท่ากัน)
ดังนั้น	$C\hat{A}Y$	=	$A\hat{B}C$	(สมบัติของการเท่ากัน)

นั่นคือ ในทำนองเดียวกัน เมื่อลาก $\overline{BD}$ จะพิสูจน์ได้ว่า $B\hat{A}X = A\hat{C}B$

เฉลยแบบฝึกหัด 3.4 ข

1. $B\hat{A}C = 65^\circ$ และ $A\hat{C}B = 80^\circ$

แนวคิด

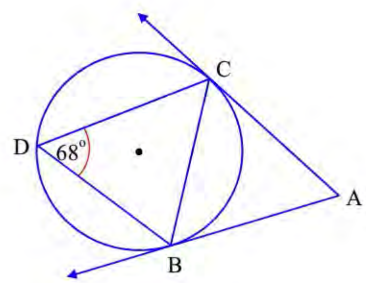


เนื่องจาก $C\hat{B}E = 65^\circ$ จะได้ $B\hat{A}C = 65^\circ$

เนื่องจาก $A\hat{B}D = 80^\circ$ จะได้ $A\hat{C}B = 80^\circ$

2. 44°

แนวคิด



เนื่องจาก $A\hat{B}C = B\hat{D}C = 68^\circ$

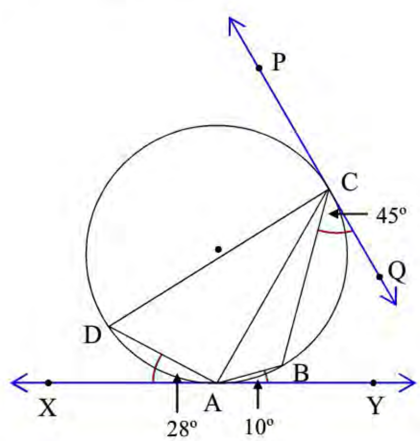
และ $A\hat{C}B = B\hat{D}C = 68^\circ$

เนื่องจาก $A\hat{B}C + A\hat{C}B + B\hat{A}C = 180^\circ$

จะได้ $68 + 68 + B\hat{A}C = 180$

ดังนั้น $B\hat{A}C = 44^\circ$

3. $A\hat{D}C = 55^\circ$, $A\hat{B}C = 125^\circ$ และ $D\hat{C}B = 38^\circ$



แนวคิด ลาก $\overline{AC}$ และ $\overline{DC}$

เนื่องจาก $A\hat{C}B = B\hat{A}Y = 10^\circ$

$$\hat{BAC} = \hat{BCQ} = 45^\circ$$

และ $\hat{ACB} + \hat{BAC} + \hat{ABC} = 180^\circ$

จะได้ $10 + 45 + \hat{ABC} = 180$

ดังนั้น $\hat{ABC} = 125^\circ$

เนื่องจาก $\hat{ABC} + \hat{ADC} = 180^\circ$

จะได้ $125 + \hat{ADC} = 180$

ดังนั้น $\hat{ADC} = 55^\circ$

เนื่องจาก $\hat{DCA} = \hat{DAX} = 28^\circ$

และ $\hat{DCB} = \hat{DCA} + \hat{ACB}$

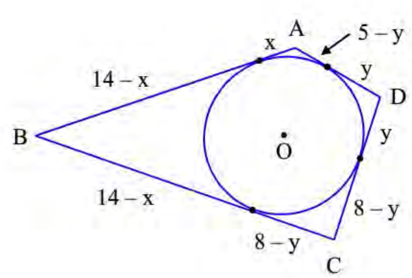
จะได้ $\hat{DCB} = 28 + 10 = 38^\circ$

นั่นคือ $\hat{ADC} = 55^\circ$, $\hat{ABC} = 125^\circ$ และ $\hat{DCB} = 38^\circ$

4. 6 หน่วย (แนวคิดของการหาคำตอบทำนองเดียวกันกับแนวคิดของการหาคำตอบข้อ 2 ของกิจกรรม "วงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยม")

5. 17 เซนติเมตร

แนวคิด



เนื่องจาก $x = 5 - y$ จะได้ $y = 5 - x$

เนื่องจาก $BC = (14 - x) + (8 - y)$

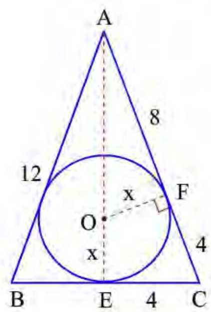
จะได้ $BC = 14 - x + 8 - (5 - x)$

$= 17$ เซนติเมตร

เฉลยกิจกรรม "คิดหน่อย" หน้า 148

รัศมีของวงกลมยาว $2\sqrt{2}$ หน่วย

แนวคิด



ลาก $\overline{AE} \perp \overline{BC}$ ที่จุด E

เนื่องจาก Δ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

จะได้ $\overline{AE}$ แบ่งครึ่ง $\overline{BC}$ (สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว)

และ $\overline{AE}$ ผ่านจุดศูนย์กลาง O

(เส้นสัมผัสวงกลม จะตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมที่จุดสัมผัส)

เนื่องจาก Δ AEC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

จะได้ $AE^2 = 12^2 - 4^2 = 144 - 16 = 128$

ดังนั้น $AE = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$ หน่วย

ให้รัศมีของวงกลมยาว x หน่วย และ $\overline{OF} \perp \overline{AC}$ ที่จุด F

เนื่องจาก Δ OFA เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

จะได้ $AO^2 = x^2 + 8^2 = x^2 + 64$

ดังนั้น $AO = \sqrt{x^2 + 64}$ หน่วย

เนื่องจาก $AE = AO + OE$

จะได้

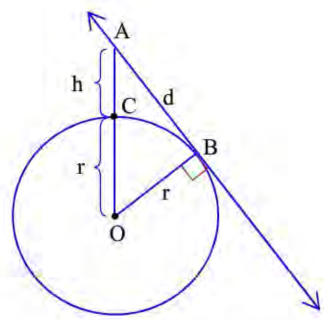
$$
\begin{aligned}
8\sqrt{2} &= \sqrt{x^2 + 64} + x \\
8\sqrt{2} - x &= \sqrt{x^2 + 64} \\
\left(8\sqrt{2} - x\right)^2 &= \left(\sqrt{x^2 + 64}\right)^2 \\
128 - 16\sqrt{2}x + x^2 &= x^2 + 64 \\
16\sqrt{2}x &= 64 \\
\sqrt{2}x &= 4 \\
\left(\sqrt{2}x\right)\left(\sqrt{2}\right) &= 4\left(\sqrt{2}\right) \\
2x &= 4\sqrt{2} \\
x &= 2\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

นั่นคือ รัศมีของวงกลมยาว $2\sqrt{2}$ หน่วย

เฉลยกิจกรรม “ไกลแค่ไหน” หน้า 149

1. ประมาณ 6,271.5 กิโลเมตร

แนวคิด



ให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของโลกที่มีรัศมียาว r กิโลเมตร

จุด A แทนตำแหน่งที่ชายคนนั้นยืนบนภูกระดึง ซึ่งสูงจากระดับน้ำทะเล (h) ประมาณ 1,000 เมตร หรือ 1 กิโลเมตร

AB เป็นระยะตามเส้นระดับสายตา (d) ประมาณ 112 กิโลเมตร

เนื่องจาก $r = \dfrac{d^2 - h^2}{2h}$

จะได้ $r \approx \dfrac{112^2 - 1^2}{2(1)}$

ดังนั้น $r \approx 6{,}271.5$ กิโลเมตร

นั่นคือ ความยาวของรัศมีของโลกประมาณ 6,271.5 กิโลเมตร

2. มากกว่า เพราะ ระยะ 112 กิโลเมตร เป็นระยะที่วัดในแนวส่วนของเส้นตรง แต่ส่วนโค้งของโลก ($\overset{\frown}{CB}$) ยาวกว่า 112 กิโลเมตร และจากโจทย์ $\overline{AB}$ ยาวกว่า $\overline{BC}$

3. 1) ประมาณ 35.78 กิโลเมตร

แนวคิด

เนื่องจาก $d^2 = 2rh + h^2$

จะได้ $d^2 = 2(6400)(0.1) + (0.1)^2$

ดังนั้น $d \approx 35.78$ กิโลเมตร

นั่นคือ ระยะทางจากบนหน้าผาถึงขอบฟ้าประมาณ 35.78 กิโลเมตร

2) ประมาณ 339.5 กิโลเมตร

แนวคิด

เนื่องจาก $d^2 = 2rh + h^2$

ดังนั้น $d^2 = 2(6400)(9) + 9^2$

จะได้ $d \approx 339.5$ กิโลเมตร

นั่นคือ ระยะทางจากหน้าต่างของเครื่องบินถึงขอบฟ้าประมาณ 339.5 กิโลเมตร

3)

มองได้ไกลมากขึ้น เพราะ $d^2 = 2rh + h^2$

เมื่อ h มากขึ้น จะทำให้ d^2 มากขึ้นด้วย

ดังนั้น จำนวนที่แทน d จะเป็นจำนวนที่มากขึ้น

เฉลยกิจกรรม "ระยะรอบโลก" หน้า 151

ประมาณ 21 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

แนวคิด

คำนวณจาก $\dfrac{40,076}{80 \times 24} \approx 21$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง

บทที่ 4
เศษส่วนของพหุนาม (13 ชั่วโมง)

บทเรียนนี้มี 3 หัวข้อ ดังนี้

4.1	การดำเนินการของเศษส่วนของพหุนาม	(4 ชั่วโมง)
4.2	การแก้สมการเศษส่วนของพหุนาม	(3 ชั่วโมง)
4.3	โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับเศษส่วนของพหุนาม	(6 ชั่วโมง)

สาระการเรียนรู้

สาระที่ 4 พีชคณิต

สาระที่ 6 ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

จุดประสงค์ประจำบท ให้นักเรียนสามารถ

1. บวก ลบ คูณและหารเศษส่วนของพหุนามที่กำหนดให้ได้
2. แก้สมการเศษส่วนของพหุนามได้
3. แก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับเศษส่วนของพหุนามได้
4. ตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้

สาระของบทนี้เป็นความรู้ต่อเนื่องเกี่ยวกับเศษส่วนของพหุนามที่นักเรียนเคยเรียนมาแล้วในหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ในบทนี้จะกล่าวถึงการบวก การลบ การคูณและการหารเศษส่วนของพหุนามที่ซับซ้อนขึ้นโดยอาศัยการแยกตัวประกอบของพหุนาม การนำความรู้ดังกล่าวไปใช้ในการแก้สมการเศษส่วนของพหุนามและแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับเศษส่วนของพหุนาม

การบวก การลบ การคูณและการหารเศษส่วนของพหุนามเป็นพื้นฐานของการแก้สมการเศษส่วนของพหุนามซึ่งจะมีประโยชน์ในการเรียนคณิตศาสตร์ขั้นสูงขึ้นต่อไป กิจกรรมการเรียนการสอนส่วนใหญ่จึงเน้นการทำแบบฝึกหัดเพื่อให้นักเรียนเกิดทักษะในการดำเนินการของเศษส่วนของพหุนามและการแก้สมการเศษส่วนของพหุนาม สำหรับการเขียนคำตอบของการดำเนินการของเศษส่วนของพหุนามอนุโลมให้นักเรียนเลือกตอบแบบใดแบบหนึ่งดังในตัวอย่างที่ 2 หน้า 158 ของหนังสือเรียน

เนื่องจากเศษส่วนของพหุนามมีเงื่อนไขว่าพหุนามที่เป็นตัวส่วนจะต้องไม่เป็นศูนย์ ดังนั้นในการแก้สมการเศษส่วนของพหุนาม ครูควรย้ำให้นักเรียนพิจารณาว่าคำตอบที่ได้นั้นจะต้องไม่ทำให้พหุนามที่เป็นตัวส่วนเป็นศูนย์

สำหรับเนื้อหาเกี่ยวกับกระแสน้ำและรถไฟ เสนอไว้เพื่อเสริมความรู้และฝึกทักษะในการแก้โจทย์ปัญหาของนักเรียน การจะนำเนื้อหาเหล่านี้ไปสอนหรือไม่ ให้ขึ้นอยู่กับดุลยพินิจของผู้สอน

แนวทางในการจัดการเรียนรู้

4.1 การดำเนินการของเศษส่วนของพหุนาม (4 ชั่วโมง)

จุดประสงค์ นักเรียนสามารถ

1. คูณและหารเศษส่วนของพหุนามและเขียนผลลัพธ์เป็นเศษส่วนของพหุนามในรูปผลสำเร็จได้
2. บวกและลบเศษส่วนของพหุนามและเขียนผลลัพธ์เป็นเศษส่วนของพหุนามในรูปผลสำเร็จได้

ข้อเสนอแนะในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน

1. ครูทบทวนเศษส่วนของพหุนามอย่างง่าย การคูณและการหารเศษส่วนเพื่อนำไปสู่ความเข้าใจหลักการคูณและการหารเศษส่วนของพหุนามอย่างง่าย นอกจากนี้ครูควรทบทวนการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองและดีกรีสามที่นักเรียนเคยเรียนมาแล้ว

2. ในตัวอย่างที่ 1 ถึง 6 ซึ่งเป็นตัวอย่างเกี่ยวกับการคูณและการหารเศษส่วนของพหุนามนำเสนอโดยเรียงลำดับจากง่ายไปยาก ครูควรชี้ให้นักเรียนสังเกตเห็นว่ามีการแยกตัวประกอบของพหุนามทั้งตัวเศษ และตัวส่วนก่อนเพื่อทำให้สามารถตัดทอนเป็นเศษส่วนของพหุนามที่อยู่ในรูปที่ง่ายขึ้นสะดวกในการคำนวณขั้นต่อไป ครูอาจเลือกเฉพาะบางตัวอย่างมาแสดงให้นักเรียนดูขั้นตอนการคำนวณ ตัวอย่างที่เหลือให้นักเรียนศึกษาเอง

3. ในการสอนการบวกและการลบเศษส่วนของพหุนาม ครูควรทบทวนการบวกและการลบเศษส่วนที่มีตัวเศษและตัวส่วนเป็นจำนวนเต็มก่อนเพื่อให้นักเรียนเห็นขั้นตอนซึ่งจะนำมาสู่การบวกและการลบเศษส่วนของพหุนาม ในกรณีพหุนามที่เป็นตัวส่วนไม่เท่ากัน ครูควรให้นักเรียนทำพหุนามที่เป็นตัวส่วนให้เท่ากันโดยหาพหุนามมาคูณทั้งพหุนามที่เป็นตัวเศษและพหุนามที่เป็นตัวส่วน ครูไม่ควรพูดเรื่อง ค.ร.น. ของพหุนามเพราะยังไม่มีความจำเป็นต้องกล่าวถึงในระดับนี้ และในบทเรียนที่ผ่านมาไม่เคยกล่าวถึงการหา ค.ร.น. ของพหุนาม

4. สำหรับตัวอย่างที่ 7 ถึง 11 เป็นตัวอย่างเกี่ยวกับการบวกและการลบเศษส่วนของพหุนามโดยเรียงลำดับจากง่ายไปยาก ครูควรชี้ให้นักเรียนสังเกตว่าพหุนามดีกรีสองและพหุนามดีกรีสาม ควรแยกตัวประกอบก่อน (ถ้าทำได้) เพราะอาจจะสามารถตัดทอนให้อยู่ในรูปเศษส่วนของพหุนามอย่างง่ายหรือเห็นตัวส่วนที่เหมือนกันได้ง่ายขึ้น

4.2 การแก้สมการเศษส่วนของพหุนาม (3 ชั่วโมง)

จุดประสงค์ นักเรียนสามารถ

1. แก้สมการที่เกี่ยวข้องกับเศษส่วนของพหุนามได้
2. ตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้

ข้อเสนอแนะในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน

1. ตัวอย่างที่ 1 และตัวอย่างที่ 2 เป็นการทบทวนความรู้เดิมของนักเรียนเกี่ยวกับการแก้สมการของนักเรียน ครูอาจเพิ่มตัวอย่างสมการเศษส่วนของพหุนามซึ่งทำในทำนองเดียวกัน โดยเริ่มตั้งแต่ตัวส่วนของพหุนามที่เป็นพจน์เดียว เช่น $6 + \frac{19}{x} = -\frac{19}{x^2}$

2. ครูควรย้ำกับนักเรียนว่าตัวส่วนของเศษส่วนของพหุนามแต่ละเศษส่วนของพหุนามจะต้องไม่เป็นศูนย์ ดังนั้นในการตรวจสอบคำตอบของสมการจึงควรนำเงื่อนไขนี้มาพิจารณาด้วย

3. สำหรับแบบฝึกหัด 4.2 ข้อ 6 ครูอาจแนะนำแนวคิดได้ดังนี้

วิธีที่ 1 $\frac{4}{n-5} = \frac{4}{-(n-5)}$

$$\frac{4}{n-5} = \frac{-4}{n-5}$$

จะได้ $4 = -4$ ซึ่งเป็นประโยคที่ไม่เป็นจริง

นั่นคือ สมการนี้ไม่มีคำตอบ

วิธีที่ 2 $4 \times (5 - n) = (n - 5) \times 4$

$$20 - 4n = 4n - 20$$

$$8n = 40$$

$$n = 5$$

แต่ n เท่ากับ 5 ไม่ได้ เพราะถ้า n เท่ากับ 5 จะทำให้เศษส่วนของพหุนามในสมการมีตัวส่วนเป็นศูนย์

นั่นคือ สมการนี้ไม่มีคำตอบ

สำหรับแบบฝึกหัด 4.2 ข้อ 8 ครูอาจนำมาอภิปรายในชั้นเรียนโดยให้นักเรียนออกมาทำหน้าชั้นจนกระทั่งได้ว่า 3 = 4 ซึ่งเป็นประโยคที่ไม่เป็นจริง นักเรียนก็จะได้ข้อสรุปว่าสมการนี้ไม่มีคำตอบ

4.3 โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับเศษส่วนของพหุนาม (6 ชั่วโมง)

จุดประสงค์ นักเรียนสามารถ

1. แก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการเศษส่วนของพหุนามได้
2. ตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้

ข้อเสนอแนะในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน

1. ครูทบทวนขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาโดยการสร้างสมการในรูปเศษส่วนของพหุนาม อาจใช้โจทย์ในตัวอย่างที่ 1 มาแสดงวิธีทำและชี้ให้เห็นขั้นตอนการแก้สมการเศษส่วนของพหุนามตามที่นักเรียนเคยเรียนมาแล้ว

ครูควรเน้นให้นักเรียนตรวจสอบคำตอบซึ่งจะต้องนำค่าของตัวแปรไปตรวจสอบกับเงื่อนไขในโจทย์

สำหรับตัวอย่างที่ 2 เป็นโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับอัตราเร็วซึ่งครูอาจจะทบทวนว่าอัตราเร็วในที่นี้เป็นอัตราเร็วเฉลี่ยและสามารถหาได้จากสูตร

$$\text{อัตราเร็ว} = \frac{\text{ระยะทาง}}{\text{เวลา}}$$

$$\text{หรือ เวลา} = \frac{\text{ระยะทาง}}{\text{อัตราเร็ว}}$$

2. สำหรับแบบฝึกหัด 4.3 เป็นการแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการเศษส่วนของพหุนาม โดยเฉพาะโจทย์ปัญหาเรื่องอัตราเร็ว ครูควรเน้นให้นักเรียนระมัดระวังการเปลี่ยนหน่วยให้เป็นหน่วยเดียวกันก่อนที่จะเขียนในรูปของสมการ เช่น หน่วยของเวลา และหน่วยของระยะทาง

โจทย์ในข้อ 9 ถึง 12 เป็นโจทย์ที่ใช้แนวคิดเกี่ยวกับแรงงานซึ่งโดยทั่วไปจะมีการเทียบหาปริมาณงานที่ทำได้ใน 1 หน่วยเวลา ก่อนจะนำมาเขียนสมการตามเงื่อนไขที่โจทย์กำหนด

3. การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องกระแสน้ำและรถไฟ ครูควรชี้ให้นักเรียนเห็นว่าสูตรที่ใช้เป็นพื้นฐานในการคำนวณยังคงเป็นสูตร $\text{อัตราเร็ว} = \frac{\text{ระยะทาง}}{\text{เวลา}}$

สิ่งที่อาจเปลี่ยนไปตามสถานการณ์ คืออัตราเร็วและระยะทาง ครูควรเขียนภาพหรือสร้างแบบจำลองแสดงการเคลื่อนที่ในแต่ละกรณีเพื่อให้นักเรียนเกิดความเข้าใจ มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับการเคลื่อนที่เหล่านี้ ซึ่งจะทำให้จำและนำสูตรในแต่ละกรณีไปใช้ได้อย่างถูกต้อง หลักการและสูตรเกี่ยวกับกระแสน้ำและรถไฟสามารถนำไปใช้แก้ปัญหาทั่วไปได้ แต่ในที่นี้เน้นเฉพาะส่วนที่เกี่ยวข้องกับเศษส่วนของพหุนาม

4. กิจกรรม “ลองคิดดู” ต้องการให้นักเรียนสังเกตแบบรูปเพื่อนำมาสรุปเป็นรูปทั่วไปที่อยู่ในรูปเศษส่วนของพหุนาม

5. กิจกรรม “คิดได้ไหม” เป็นการเชื่อมโยงเรื่องสมการเศษส่วนของพหุนามกับความคล้ายในการหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม

เฉลยแบบฝึกหัดและกิจกรรม

เฉลยแบบฝึกหัด 4.1 ก

1.

1) $\frac{2}{5}(x+7)$

แนวคิด $\frac{4x}{10x^2+30x} \times (x^2+10x+21) = \frac{4x}{10x(x+3)} \times (x+3)(x+7)$

$= \frac{2}{5}(x+7)$

2) $\frac{1}{(2x+3)(3x+2)}$ หรือ $\frac{1}{6x^2+13x+6}$

แนวคิด $\frac{2x-1}{2x^2-x-6} \times \frac{x-2}{6x^2+x-2} = \frac{(2x-1)}{(2x+3)(x-2)} \times \frac{(x-2)}{(2x-1)(3x+2)}$

$= \frac{1}{(2x+3)(3x+2)}$ หรือ $\frac{1}{6x^2+13x+6}$

3) $\frac{x-1}{x+2}$

แนวคิด $\frac{x^2-2x+1}{x^2+2x-3} \times \frac{x^2+3x}{x^2+2x} = \frac{(x-1)(x-1)}{(x+3)(x-1)} \times \frac{x(x+3)}{x(x+2)}$

$= \frac{x-1}{x+2}$

4) $\frac{3y(2y+3)}{(y-1)(1-2y)}$ หรือ $\frac{6y^2+9y}{-2y^2+3y-1}$

แนวคิด $\frac{4y^2+8y+3}{2y^2-5y+3} \times \frac{6y^2-9y}{1-4y^2} = \frac{(2y+3)(2y+1)}{(2y-3)(y-1)} \times \frac{3y(2y-3)}{(1-2y)(1+2y)}$

$= \frac{3y(2y+3)}{(y-1)(1-2y)}$ หรือ $\frac{6y^2+9y}{-2y^2+3y-1}$

5) $\frac{y+1}{y-5}$

แนวคิด $\frac{y^2-1}{3y^2-4y+1} \times \frac{6y^2+7y-3}{2y^2-7y-15} = \frac{(y+1)(y-1)}{(3y-1)(y-1)} \times \frac{(2y+3)(3y-1)}{(2y+3)(y-5)}$

$= \frac{y+1}{y-5}$

6) $\frac{2}{3}(x+1)(x+5)$ หรือ $\frac{2x^2+12x+10}{3}$

แนวคิด $\frac{x^3-25x}{6x} \times \frac{4x^2-12x-16}{x^2-9x+20}$

$$= \frac{x(x^2-25)}{6x} \times \frac{4(x^2-3x-4)}{x^2-9x+20}$$

$$= \frac{x(x+5)(x-5)}{6x} \times \frac{4(x-4)(x+1)}{(x-5)(x-4)}$$

$$= \frac{2}{3}(x+1)(x+5) \text{ หรือ } \frac{2x^2+12x+10}{3}$$

7) $\frac{2(2z-7)}{-z(3z+8)}$ หรือ $\frac{4z-14}{-3z^2-8z}$

แนวคิด $\frac{3z^2+7z-40}{-2z^3-10z^2} \times \frac{8z^2-28z}{9z^2-64}$

$$= \frac{(3z-8)(z+5)}{-2z^2(z+5)} \times \frac{4z(2z-7)}{(3z+8)(3z-8)}$$

$$= \frac{2(2z-7)}{-z(3z+8)} \text{ หรือ } \frac{4z-14}{-3z^2-8z}$$

8) $\frac{2(x-2)(x-1)}{(x+2)}$ หรือ $\frac{2x^2-6x+4}{x+2}$

แนวคิด $\frac{x^3-8}{x^2-4x-12} \times \frac{2x^2-14x+12}{x^2+2x+4}$

$$= \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-6)(x+2)} \times \frac{2(x-6)(x-1)}{(x^2+2x+4)}$$

$$= \frac{2(x-2)(x-1)}{(x+2)} \text{ หรือ } \frac{2x^2-6x+4}{x+2}$$

9) $\frac{-(3z-4)(z+5)}{3}$ หรือ $\frac{-3z^2-11z+20}{3}$

แนวคิด $(3z^2+2z-8) \times \frac{(-z^2-3z+10)}{3z^2-12}$

$$= (3z-4)(z+2) \times \frac{[-(z^2+3z-10)]}{3(z^2-4)}$$

$$= (3z-4)(z+2) \times \frac{[-(z+5)(z-2)]}{3(z+2)(z-2)}$$

$$= \frac{-(3z-4)(z+5)}{3} \text{ หรือ } \frac{-3z^2-11z+20}{3}$$

10) $\frac{y-1}{y-3}$

แนวคิด $\frac{y^2-y}{y^2-2y-3} \times \frac{y^2+2y+1}{y^2+4y} \times \frac{y^2-16}{y^2-3y-4}$

$$= \frac{y(y-1)}{(y-3)(y+1)} \times \frac{(y+1)(y+1)}{y(y+4)} \times \frac{(y+4)(y-4)}{(y-4)(y+1)}$$

$$= \frac{y-1}{y-3}$$

2.

1) $\dfrac{(x-3)}{(x+7)}$

แนวคิด $\dfrac{x^2-9}{x^2+8x+7} \div \dfrac{x+3}{x+1} = \dfrac{x^2-9}{x^2+8x+7} \times \dfrac{x+1}{x+3}$

$= \dfrac{(x+3)(x-3)}{(x+1)(x+7)} \times \dfrac{(x+1)}{(x+3)}$

$= \dfrac{(x-3)}{(x+7)}$

2) $2z^2(z-1)$ หรือ $2z^3-2z^2$

แนวคิด $(z^2-2z+1) \div \dfrac{6z-6}{12z^2} = (z^2-2z+1) \times \dfrac{12z^2}{6z-6}$

$= (z-1)(z-1) \times \dfrac{12z^2}{6(z-1)}$

$= 2z^2(z-1)$ หรือ $2z^3-2z^2$

3) $(5a-4)(a-1)$ หรือ $5a^2-9a+4$

แนวคิด $\dfrac{25a^2-16}{a+4} \div \dfrac{5a+4}{a^2+3a-4} = \dfrac{25a^2-16}{a+4} \times \dfrac{a^2+3a-4}{5a+4}$

$= \dfrac{(5a+4)(5a-4)}{(a+4)} \times \dfrac{(a+4)(a-1)}{(5a+4)}$

$= (5a-4)(a-1)$ หรือ $5a^2-9a+4$

4) $\dfrac{1}{2(5y-4)}$ หรือ $\dfrac{1}{10y-8}$

แนวคิด $\dfrac{3y^2+5y-2}{-2+6y} \div (5y^2+6y-8) = \dfrac{3y^2+5y-2}{6y-2} \times \dfrac{1}{5y^2+6y-8}$

$= \dfrac{(3y-1)(y+2)}{2(3y-1)} \times \dfrac{1}{(5y-4)(y+2)}$

$= \dfrac{1}{2(5y-4)}$ หรือ $\dfrac{1}{10y-8}$

5) $\dfrac{3y-1}{y-2}$

แนวคิด $\dfrac{10y^2-13y-3}{2y^2-y-3} \div \dfrac{5y^2-9y-2}{3y^2+2y-1} = \dfrac{10y^2-13y-3}{2y^2-y-3} \times \dfrac{3y^2+2y-1}{5y^2-9y-2}$

$= \dfrac{(5y+1)(2y-3)}{(2y-3)(y+1)} \times \dfrac{(3y-1)(y+1)}{(5y+1)(y-2)}$

$= \dfrac{3y-1}{y-2}$

6) $\dfrac{x-5}{x-4}$

แนวคิด $\dfrac{x^2-25}{x^2-16} \div \dfrac{x^2+2x-15}{x^2+x-12}$

$$= \frac{x^2-25}{x^2-16} \times \frac{x^2+x-12}{x^2+2x-15}$$
$$= \frac{(x+5)(x-5)}{(x+4)(x-4)} \times \frac{(x+4)(x-3)}{(x+5)(x-3)}$$
$$= \frac{x-5}{x-4}$$

7) $\dfrac{4z}{z^2-4z+16}$

แนวคิด $\dfrac{7z^2+25z-12}{21z^2-44z+15} \div \dfrac{z^3+64}{12z^2-20z}$

$$= \frac{7z^2+25z-12}{21z^2-44z+15} \times \frac{12z^2-20z}{z^3+64}$$
$$= \frac{(7z-3)(z+4)}{(7z-3)(3z-5)} \times \frac{4z(3z-5)}{(z+4)(z^2-4z+16)}$$
$$= \frac{4z}{z^2-4z+16}$$

8) $\dfrac{24}{(x-3)(2x-9)}$ หรือ $\dfrac{24}{2x^2-15x+27}$

แนวคิด $\dfrac{4x^2+20x+24}{x^4-81} \div \dfrac{2x^2-5x-18}{6x^2+54}$

$$= \frac{4x^2+20x+24}{x^4-81} \times \frac{6x^2+54}{2x^2-5x-18}$$
$$= \frac{4(x+2)(x+3)}{(x^2+9)(x+3)(x-3)} \times \frac{6(x^2+9)}{(2x-9)(x+2)}$$
$$= \frac{24}{(x-3)(2x-9)} \text{ หรือ } \frac{24}{2x^2-15x+27}$$

3.

1) $\dfrac{2x+1}{3x-1}$

แนวคิด $\left(\dfrac{2x^2+3x-2}{x^2-x-6} \times \dfrac{2x^2+7x+3}{3x^2+17x-6}\right) \div \left(\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+3x-18}\right)$

$$= \left(\frac{2x^2+3x-2}{x^2-x-6} \times \frac{2x^2+7x+3}{3x^2+17x-6}\right) \times \left(\frac{x^2+3x-18}{2x^2+5x-3}\right)$$
$$= \frac{(2x-1)(x+2)}{(x-3)(x+2)} \times \frac{(2x+1)(x+3)}{(3x-1)(x+6)} \times \frac{(x+6)(x-3)}{(2x-1)(x+3)}$$
$$= \frac{2x+1}{3x-1}$$

2) 1

แนวคิด $\left(\dfrac{a^2-25}{2a^2-5a-3} \div \dfrac{a^2+4a-45}{a^2+a-12}\right) \times \left(\dfrac{2a^2+19a+9}{a^2+9a+20}\right)$

$$= \left(\frac{a^2-25}{2a^2-5a-3} \times \frac{a^2+a-12}{a^2+4a-45}\right) \times \left(\frac{2a^2+19a+9}{a^2+9a+20}\right)$$
$$= \frac{(a+5)(a-5)}{(2a+1)(a-3)} \times \frac{(a+4)(a-3)}{(a+9)(a-5)} \times \frac{(2a+1)(a+9)}{(a+5)(a+4)}$$
$$= 1$$

เฉลยแบบฝึกหัด 4.1 ข

1. $\frac{x+11}{2x-2}$

แนวคิด $\frac{x+5}{2x-2}+\frac{3x+6}{x^2+x-2}$

$$= \frac{x+5}{2(x-1)}+\frac{3(x+2)}{(x-1)(x+2)}$$
$$= \frac{x+5}{2(x-1)}+\frac{3}{(x-1)}$$
$$= \frac{x+5}{2(x-1)}+\frac{2(3)}{2(x-1)}$$
$$= \frac{x+5+6}{2(x-1)}$$
$$= \frac{x+11}{2x-2}$$

2. $\frac{3x^2+8x+6}{(x-3)(x+2)(x+3)}$ หรือ $\frac{3x^2+8x+6}{x^3+2x^2-9x-18}$

แนวคิด $\frac{2}{x^2-x-6}+\frac{3x}{x^2-9}$

$$= \frac{2}{(x-3)(x+2)}+\frac{3x}{(x-3)(x+3)}$$
$$= \frac{2(x+3)}{(x-3)(x+2)(x+3)}+\frac{3x(x+2)}{(x-3)(x+2)(x+3)}$$
$$= \frac{(2x+6)+(3x^2+6x)}{(x-3)(x+2)(x+3)}$$
$$= \frac{3x^2+8x+6}{(x-3)(x+2)(x+3)} \text{ หรือ }$$
$$\frac{3x^2+8x+6}{x^3+2x^2-9x-18}$$

3. $\frac{2y^2+6y-36}{2y+9}$

แนวคิด $\frac{15y^2-10y}{6y^2+23y-18}+\frac{y^3-16y}{y^2+4y}$

$$= \frac{5y(3y-2)}{(3y-2)(2y+9)}+\frac{y(y+4)(y-4)}{y(y+4)}$$
$$= \frac{5y}{2y+9}+\frac{y-4}{1}$$
$$= \frac{5y}{2y+9}+\frac{(y-4)(2y+9)}{2y+9}$$
$$= \frac{5y+(2y^2+y-36)}{2y+9}$$
$$= \frac{2y^2+6y-36}{2y+9}$$

4. $\frac{-12}{(x+6)(x-6)}$ หรือ $\frac{-12}{x^2-36}$

แนวคิด $\frac{x-6}{x^2-36}-\frac{1}{x-6}$

$$= \frac{x-6}{(x+6)(x-6)}-\frac{1}{x-6}$$
$$= \frac{1}{x+6}-\frac{1}{x-6}$$
$$= \frac{(x-6)}{(x+6)(x-6)}-\frac{(x+6)}{(x+6)(x-6)}$$

$$= \frac{(x-6)-(x+6)}{(x+6)(x-6)}$$

$$= \frac{-12}{(x+6)(x-6)} \text{ หรือ } \frac{-12}{x^2-36}$$

5. $\frac{7y}{(y-5)(2y-3)(y+2)}$ หรือ $\frac{7y}{2y^3-9y^2-11y+30}$

แนวคิด $\frac{y}{y^2-3y-10} - \frac{2y}{2y^2+y-6} = \frac{y}{(y-5)(y+2)} - \frac{2y}{(2y-3)(y+2)}$

$$= \frac{y(2y-3)}{(y-5)(2y-3)(y+2)} - \frac{2y(y-5)}{(y-5)(2y-3)(y+2)}$$

$$= \frac{(2y^2-3y)-(2y^2-10y)}{(y-5)(2y-3)(y+2)}$$

$$= \frac{7y}{(y-5)(2y-3)(y+2)} \text{ หรือ } \frac{7y}{2y^3-9y^2-11y+30}$$

6. $\frac{-8y^2+41y+14}{y-5}$

แนวคิด $\frac{4y^2+19y-5}{y^2-25} - (8y+3) = \frac{(4y-1)(y+5)}{(y-5)(y+5)} - \frac{(8y+3)}{1}$

$$= \frac{(4y-1)}{y-5} - \frac{(8y+3)}{1}$$

$$= \frac{4y-1}{y-5} - \frac{(8y+3)(y-5)}{y-5}$$

$$= \frac{(4y-1)-(8y^2-37y-15)}{y-5}$$

$$= \frac{-8y^2+41y+14}{y-5}$$

7. $\frac{6x^2-4x}{(2x+1)(2x-1)(x-1)}$ หรือ $\frac{6x^2-4x}{4x^3-4x^2-x+1}$

แนวคิด $\left(\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{4x^2-1}\right) + \frac{2x}{2x^2-x-1}$

$$= \left[\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{(2x+1)(2x-1)}\right] + \frac{2x}{(2x+1)(x-1)}$$

$$= \left[\frac{2x+1}{(2x-1)(2x+1)} - \frac{1}{(2x+1)(2x-1)}\right] + \frac{2x}{(2x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{2x}{(2x+1)(2x-1)} + \frac{2x}{(2x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{2x(x-1)}{(2x+1)(2x-1)(x-1)} + \frac{2x(2x-1)}{(2x+1)(2x-1)(x-1)}$$

$$= \frac{(2x^2-2x)+(4x^2-2x)}{(2x+1)(2x-1)(x-1)}$$

$$= \frac{6x^2-4x}{(2x+1)(2x-1)(x-1)} \text{ หรือ } \frac{6x^2-4x}{4x^3-4x^2-x+1}$$

8. $\dfrac{-6x^2+37x+10}{(x+2)(x-2)}$ หรือ $\dfrac{-6x^2+37x+10}{x^2-4}$

แนวคิด $\dfrac{18x+4}{x^2-4}-\left(\dfrac{5x^2+6x-8}{x^2+4x+4}+\dfrac{x^2-9x+14}{x^2-4x+4}\right)$

$$= \frac{18x+4}{(x+2)(x-2)}-\left[\frac{(5x-4)(x+2)}{(x+2)(x+2)}+\frac{(x-7)(x-2)}{(x-2)(x-2)}\right]$$

$$= \frac{18x+4}{(x+2)(x-2)}-\left(\frac{5x-4}{x+2}+\frac{x-7}{x-2}\right)$$

$$= \frac{18x+4}{(x+2)(x-2)}-\left[\frac{(5x-4)(x-2)}{(x+2)(x-2)}+\frac{(x+2)(x-7)}{(x+2)(x-2)}\right]$$

$$= \frac{18x+4}{(x+2)(x-2)}-\left[\frac{(5x^2-14x+8)+(x^2-5x-14)}{(x+2)(x-2)}\right]$$

$$= \frac{18x+4}{(x+2)(x-2)}-\frac{6x^2-19x-6}{(x+2)(x-2)}$$

$$= \frac{(18x+4)-(6x^2-19x-6)}{(x+2)(x-2)}$$

$$= \frac{-6x^2+37x+10}{(x+2)(x-2)} \text{ หรือ } \frac{-6x^2+37x+10}{x^2-4}$$

9. $\dfrac{53(x+5)}{4(x+1)(5x-9)}$ หรือ $\dfrac{53x+265}{20x^2-16x-36}$

แนวคิด $\dfrac{x^2+8x+15}{x^2-1}\times\left(\dfrac{2x+7}{5x^2+6x-27}+\dfrac{9}{4x+12}\right)$

$$= \frac{x^2+8x+15}{x^2-1}\times\left[\frac{2x+7}{(5x-9)(x+3)}+\frac{9}{4(x+3)}\right]$$

$$= \frac{x^2+8x+15}{x^2-1}\times\left[\frac{4(2x+7)+9(5x-9)}{4(5x-9)(x+3)}\right]$$

$$= \frac{x^2+8x+15}{x^2-1}\times\frac{53x-53}{4(5x-9)(x+3)}$$

$$= \frac{(x+3)(x+5)}{(x+1)(x-1)}\times\frac{53(x-1)}{4(5x-9)(x+3)}$$

$$= \frac{53(x+5)}{4(x+1)(5x-9)} \text{ หรือ } \frac{53x+265}{20x^2-16x-36}$$

10. $\dfrac{3(x+2)}{x+3}$ หรือ $\dfrac{3x+6}{x+3}$

แนวคิด $\left(\dfrac{9x}{x^2-9}-\dfrac{3}{x-3}\right)\div\dfrac{2x-3}{x^2-x-6}$

$$= \left[\frac{9x}{(x-3)(x+3)}-\frac{3(x+3)}{(x-3)(x+3)}\right]\times\frac{(x-3)(x+2)}{(2x-3)}$$

$$= \frac{6x-9}{(x-3)(x+3)}\times\frac{(x-3)(x+2)}{(2x-3)}$$

$$= \frac{3(2x-3)}{(x-3)(x+3)}\times\frac{(x-3)(x+2)}{(2x-3)}$$

$$= \frac{3(x+2)}{x+3} \text{ หรือ } \frac{3x+6}{x+3}$$

เฉลยแบบฝึกหัด 4.2

1. -1

แนวคิด $\frac{3}{3n^2} + \frac{5}{2n} = \frac{3}{2n}$

นำ $6n^2$ มาคูณทั้งสองข้างของสมการ โดยที่ $n \neq 0$ จะได้

$$6n^2\left(\frac{3}{3n^2}\right) + 6n^2\left(\frac{5}{2n}\right) = 6n^2\left(\frac{3}{2n}\right)$$

$$6 + 15n = 9n$$

$$6n = -6$$

ดังนั้น $n = -1$

ตรวจสอบ แทน n ด้วย -1 ในสมการ $\frac{3}{3n^2} + \frac{5}{2n} = \frac{3}{2n}$

จะได้ $\frac{3}{3(-1)^2} + \frac{5}{2(-1)} = \frac{3}{2(-1)}$

$$1 + \left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

$-\frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$ เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น -1 เป็นคำตอบของสมการ $\frac{3}{3n^2} + \frac{5}{2n} = \frac{3}{2n}$

2. 2

แนวคิด $\frac{x-4}{x+1} = -\frac{2}{3}$

นำ $3(x+1)$ มาคูณทั้งสองข้างของสมการ โดยที่ $x + 1 \neq 0$ จะได้

$$3(x+1)\left(\frac{x-4}{x+1}\right) = 3(x+1)\left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$3x - 12 = -2x - 2$$

$$5x = 10$$

ดังนั้น $x = 2$

ตรวจสอบ แทน x ด้วย 2 ในสมการ $\frac{x-4}{x+1} = -\frac{2}{3}$

จะได้ $\frac{2-4}{2+1} = -\frac{2}{3}$

$-\frac{2}{3} = -\frac{2}{3}$ เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น 2 เป็นคำตอบของสมการ $\frac{x-4}{x+1} = -\frac{2}{3}$

3. -5 และ 5

แนวคิด $\frac{x}{5} = \frac{5}{x}$

นำ 5x มาคูณทั้งสองข้างของสมการ โดยที่ $x \neq 0$ จะได้

$$5x\left(\frac{x}{5}\right) = 5x\left(\frac{5}{x}\right)$$

$$x^2 = 25$$

$$x^2 - 25 = 0$$

$$(x+5)(x-5) = 0$$

ดังนั้น $x + 5 = 0$ หรือ $x - 5 = 0$

จะได้ $x = -5$ หรือ $x = 5$

ตรวจสอบ 1) แทน x ด้วย -5 ในสมการ $\frac{x}{5} = \frac{5}{x}$

จะได้ $\frac{-5}{5} = \frac{5}{-5}$

$-1 = -1$ เป็นสมการที่เป็นจริง

2) แทน x ด้วย 5 ในสมการ $\frac{x}{5} = \frac{5}{x}$

จะได้ $\frac{5}{5} = \frac{5}{5}$

$1 = 1$ เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น -5 และ 5 เป็นคำตอบของสมการ $\frac{x}{5} = \frac{5}{x}$

4. 1 และ 4

แนวคิด $\frac{10}{x+4} - \frac{1}{x} = 1$

นำ $x(x+4)$ มาคูณทั้งสองข้างของสมการ โดยที่ $x \neq 0$ และ $x + 4 \neq 0$

จะได้ $x(x+4)\left(\frac{10}{x+4}\right) - x(x+4)\left(\frac{1}{x}\right) = x(x+4)(1)$

$$x(10) - (x+4) = x(x+4)$$

$$10x - x - 4 = x^2 + 4x$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x-1)(x-4) = 0$$

ดังนั้น $x - 1 = 0$ หรือ $x - 4 = 0$

จะได้ $x = 1$ หรือ $x = 4$

ตรวจสอบ 1) แทน x ด้วย 1 ในสมการ $\frac{10}{x+4} - \frac{1}{x} = 1$

จะได้ $\frac{10}{1+4} - \frac{1}{1} = 1$

$2 - 1 = 1$

$1 = 1$ เป็นสมการที่เป็นจริง

2) แทน x ด้วย 4 ในสมการ $\frac{10}{x+4} - \frac{1}{x} = 1$

จะได้ $\frac{10}{4+4} - \frac{1}{4} = 1$

$\frac{5}{4} - \frac{1}{4} = 1$

$1 = 1$ เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น 1 และ 4 เป็นคำตอบของสมการ $\frac{10}{x+4} - \frac{1}{x} = 1$

5. -4

แนวคิด $\frac{2a-3}{2a-3} = \frac{a-1}{2a+3}$

$1 = \frac{a-1}{2a+3}$

นำ $2a+3$ มาคูณทั้งสองข้างของสมการ โดยที่ $2a+3 \neq 0$

จะได้ $2a+3 = a-1$

ดังนั้น $a = -4$

ตรวจสอบ แทน a ด้วย -4 ในสมการ $\frac{2a-3}{2a-3} = \frac{a-1}{2a+3}$

จะได้ $\frac{2(-4)-3}{2(-4)-3} = \frac{-4-1}{2(-4)+3}$

$\frac{-11}{-11} = \frac{-5}{-5}$

$1 = 1$ เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น -4 เป็นคำตอบของสมการ $\frac{2a-3}{2a-3} = \frac{a-1}{2a+3}$

6. ไม่มีคำตอบ

แนวคิด (เพิ่มเติมจากที่กล่าวแล้วในหน้า 141)

$\frac{4}{n-5} = \frac{4}{5-n}$

$\frac{4}{n-5} = \frac{-4}{n-5}$

นำ $n-5$ มาคูณทั้งสองข้างของสมการ โดยที่ $n-5 \neq 0$

จะได้ $(n-5)\left(\frac{4}{n-5}\right) = (n-5)\left(\frac{-4}{n-5}\right)$

$4 = -4$ เป็นสมการที่ไม่เป็นจริง

ดังนั้น สมการนี้ไม่มีคำตอบ

7. 3

แนวคิด $\frac{4x-3}{x-4} - \frac{2x}{3} = \frac{2x+5}{x-4}$

นำ $3(x-4)$ มาคูณทั้งสองข้างของสมการ โดยที่ $x-4 \neq 0$

จะได้ $3(x-4)\left(\frac{4x-3}{x-4}\right) - 3(x-4)\left(\frac{2x}{3}\right) = 3(x-4)\left(\frac{2x+5}{x-4}\right)$

$3(4x-3) - (x-4)(2x) = 3(2x+5)$

$$\begin{aligned}
12x - 9 - 2x^2 + 8x &= 6x + 15 \\
-2x^2 + 20x - 9 &= 6x + 15 \\
2x^2 - 14x + 24 &= 0 \\
x^2 - 7x + 12 &= 0 \\
(x - 3)(x - 4) &= 0
\end{aligned}$$

ดังนั้น $x - 3 = 0$ หรือ $x - 4 = 0$

จะได้ $x = 3$ หรือ $x = 4$

ตรวจสอบ 1) แทน x ด้วย 3 ในสมการ $\frac{4x - 3}{x - 4} - \frac{2x}{3} = \frac{2x + 5}{x - 4}$

จะได้ $$\begin{aligned}
\frac{4(3) - 3}{3 - 4} - \frac{2(3)}{3} &= \frac{2(3) + 5}{3 - 4} \\
\frac{12 - 3}{-1} - 2 &= \frac{6 + 5}{-1} \\
-9 - 2 &= -11 \\
-11 &= -11
\end{aligned}$$ เป็นสมการที่เป็นจริง

2) เนื่องจาก ถ้าแทน x ด้วย 4 ทำให้ $x - 4 = 0$ แต่ไม่นิยามการหารด้วย 0

นั่นคือ 4 ไม่ใช่คำตอบของสมการ

ดังนั้น 3 เป็นคำตอบของสมการ $\frac{4x - 3}{x - 4} - \frac{2x}{3} = \frac{2x + 5}{x - 4}$

8. ไม่มีคำตอบ

แนวคิด $\frac{3}{x - 6} = \frac{x - 2}{x - 6} - 1$

นำ $x - 6$ มาคูณทั้งสองข้างของสมการ โดยที่ $x - 6 \neq 0$

จะได้ $$\begin{aligned}
(x - 6)\left(\frac{3}{x - 6}\right) &= (x - 6)\left(\frac{x - 2}{x - 6}\right) - (x - 6)(1) \\
3 &= x - 2 - x + 6 \\
3 &= 4
\end{aligned}$$ เป็นสมการที่ไม่เป็นจริง

ดังนั้น สมการนี้ไม่มีคำตอบ

9. -6

แนวคิด $\frac{3n - 7}{n - 5} + \frac{n}{2} = \frac{8}{n - 5}$

นำ $2(n - 5)$ มาคูณทั้งสองข้างของสมการ โดยที่ $n - 5 \neq 0$

จะได้ $$\begin{aligned}
2(n - 5)\left(\frac{3n - 7}{n - 5}\right) + 2(n - 5)\left(\frac{n}{2}\right) &= 2(n - 5)\left(\frac{8}{n - 5}\right) \\
2(3n - 7) + (n - 5)(n) &= 2(8) \\
6n - 14 + n^2 - 5n &= 16 \\
n^2 + n - 30 &= 0 \\
(n + 6)(n - 5) &= 0
\end{aligned}$$

ดังนั้น $n + 6 = 0$ หรือ $n - 5 = 0$

จะได้ $n = -6$ หรือ $n = 5$

ตรวจสอบ 1) แทน n ด้วย -6 ในสมการ $\frac{3n - 7}{n - 5} + \frac{n}{2} = \frac{8}{n - 5}$

จะได้ $\frac{3(-6) - 7}{-6 - 5} + \frac{(-6)}{2} = \frac{8}{-6 - 5}$

$\frac{-18 - 7}{-11} - 3 = \frac{8}{-11}$

$\frac{-25 + 33}{-11} = \frac{8}{-11}$

$-\frac{8}{11} = -\frac{8}{11}$

2) เนื่องจาก ถ้าแทน n ด้วย 5 ทำให้ $n - 5 = 0$ แต่ไม่นิยามการหารด้วย 0

นั่นคือ 5 ไม่ใช่คำตอบของสมการ

ดังนั้น -6 เป็นคำตอบของสมการ $\frac{3n - 7}{n - 5} + \frac{n}{2} = \frac{8}{n - 5}$

10. 2 และ 5

แนวคิด $\frac{x - 3}{2} = \frac{1}{x - 4}$

นำ $2(x - 4)$ มาคูณทั้งสองข้างของสมการ โดยที่ $x - 4 \neq 0$

จะได้ $2(x - 4)\left(\frac{x - 3}{2}\right) = 2(x - 4)\left(\frac{1}{x - 4}\right)$

$(x - 4)(x - 3) = 2$

$x^2 - 7x + 10 = 0$

$(x - 2)(x - 5) = 0$

ดังนั้น $x - 2 = 0$ หรือ $x - 5 = 0$

จะได้ $x = 2$ หรือ $x = 5$

ตรวจสอบ 1) แทน x ด้วย 2 ในสมการ $\frac{x - 3}{2} = \frac{1}{x - 4}$

จะได้ $\frac{2 - 3}{2} = \frac{1}{2 - 4}$

$-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ เป็นสมการที่เป็นจริง

2) แทน x ด้วย 5 ในสมการ $\frac{x - 3}{2} = \frac{1}{x - 4}$

จะได้ $\frac{5 - 3}{2} = \frac{1}{5 - 4}$

$1 = 1$ เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น 2 และ 5 เป็นคำตอบของสมการ $\frac{x - 3}{2} = \frac{1}{x - 4}$

11. 4

แนวคิด

$$\frac{3}{x-2} + \frac{2x}{4-x^2} = \frac{5}{x+2}$$

$$\frac{3}{x-2} - \frac{2x}{x^2-4} = \frac{5}{x+2}$$

$$\frac{3}{x-2} - \frac{2x}{(x+2)(x-2)} = \frac{5}{x+2}$$

นำ $(x-2)(x+2)$ มาคูณทั้งสองข้างของสมการ โดยที่ $x+2 \neq 0$ และ $x-2 \neq 0$

จะได้ $(x-2)(x+2)\left(\frac{3}{x-2}\right) - (x-2)(x+2)\left[\frac{2x}{(x+2)(x-2)}\right] = (x-2)(x+2)\left(\frac{5}{x+2}\right)$

$$3(x+2) - 2x = 5(x-2)$$

$$3x + 6 - 2x = 5x - 10$$

$$-4x = -16$$

ดังนั้น $x = 4$

ตรวจสอบ แทน x ด้วย 4 ในสมการ $\frac{3}{x-2} + \frac{2x}{4-x^2} = \frac{5}{x+2}$

จะได้ $\frac{3}{4-2} + \frac{2(4)}{4-4^2} = \frac{5}{4+2}$

$$\frac{3}{2} + \frac{8}{(-12)} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$$

$\frac{5}{6} = \frac{5}{6}$ เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น 4 เป็นคำตอบของสมการ $\frac{3}{x-2} + \frac{2x}{4-x^2} = \frac{5}{x+2}$

12. $\frac{1}{5}$

แนวคิด

$$\frac{2n-3}{3n+2} = \frac{2n+1}{3n-2}$$

นำ $(3n+2)(3n-2)$ มาคูณทั้งสองข้างของสมการ โดยที่ $3n+2 \neq 0$ และ $3n-2 \neq 0$

จะได้ $(3n+2)(3n-2)\left(\frac{2n-3}{3n+2}\right) = (3n+2)(3n-2)\left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)$

$$(3n-2)(2n-3) = (3n+2)(2n+1)$$

$$6n^2 - 13n + 6 = 6n^2 + 7n + 2$$

$$20n = 4$$

ดังนั้น $n = \frac{1}{5}$

ตรวจสอบ แทน n ด้วย $\frac{1}{5}$ ในสมการ $\frac{2n-3}{3n+2} = \frac{2n+1}{3n-2}$

จะได้ $\frac{2\left(\frac{1}{5}\right)-3}{3\left(\frac{1}{5}\right)+2} = \frac{2\left(\frac{1}{5}\right)+1}{3\left(\frac{1}{5}\right)-2}$

$$\frac{\frac{2}{5}-3}{\frac{3}{5}+2} = \frac{\frac{2}{5}+1}{\frac{3}{5}-2}$$

$-1 = -1$ เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น $\frac{1}{5}$ เป็นคำตอบของสมการ $\frac{2n-3}{3n+2} = \frac{2n+1}{3n-2}$

13. 3

แนวคิด

$$\frac{2}{a+4} + \frac{2a-1}{a^2+2a-8} = \frac{1}{a-2}$$

$$\frac{2}{a+4} + \frac{2a-1}{(a+4)(a-2)} = \frac{1}{a-2}$$

นำ $(a+4)(a-2)$ มาคูณทั้งสองข้างของสมการ โดยที่ $a+4 \neq 0$ และ $a-2 \neq 0$

จะได้ $(a+4)(a-2)\left(\frac{2}{a+4}\right) + (a+4)(a-2)\left[\frac{2a-1}{(a+4)(a-2)}\right] = (a+4)(a-2)\left(\frac{1}{a-2}\right)$

$$2(a-2)+(2a-1) = a+4$$

$$2a-4+2a-1 = a+4$$

$$3a = 9$$

$$a = 3$$

ตรวจสอบ แทน a ด้วย 3 ในสมการ $\frac{2}{a+4} + \frac{2a-1}{a^2+2a-8} = \frac{1}{a-2}$

จะได้ $\frac{2}{3+4} + \frac{2(3)-1}{3^2+2(3)-8} = \frac{1}{3-2}$

$$\frac{2}{7} + \frac{5}{7} = 1$$

$1 = 1$ เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น 3 เป็นคำตอบของสมการ $\frac{2}{a+4} + \frac{2a-1}{a^2+2a-8} = \frac{1}{a-2}$

14. -3 และ 4

แนวคิด

$$\frac{1}{2a} - \frac{9}{a^2+6a} = \frac{2-a}{2a+12}$$

$$\frac{1}{2a} - \frac{9}{a(a+6)} = \frac{2-a}{2(a+6)}$$

นำ $2a(a+6)$ มาคูณทั้งสองข้างของสมการ โดยที่ $a \neq 0$ และ $a+6 \neq 0$

จะได้ $2a(a+6)\left(\frac{1}{2a}\right) - 2a(a+6)\left[\frac{9}{a(a+6)}\right] = 2a(a+6)\left[\frac{2-a}{2(a+6)}\right]$

$$(a+6)-2(9) = a(2-a)$$

$$a+6-18 = 2a-a^2$$

$$a^2-a-12 = 0$$

$$(a-4)(a+3) = 0$$

ดังนั้น $a-4 = 0$ หรือ $a+3 = 0$

จะได้ $a = 4$ หรือ $a = -3$

ตรวจสอบ 1) แทน a ด้วย -3 ในสมการ $\frac{1}{2a} - \frac{9}{a^2+6a} = \frac{2-a}{2a+12}$

จะได้ $\frac{1}{2(-3)} - \frac{9}{(-3)^2+6(-3)} = \frac{2-(-3)}{2(-3)+12}$

$-\frac{1}{6} - (-1) = \frac{5}{6}$

$\frac{5}{6} = \frac{5}{6}$ เป็นสมการที่เป็นจริง

2) แทน a ด้วย 4 ในสมการ $\frac{1}{2a} - \frac{9}{a^2+6a} = \frac{2-a}{2a+12}$

จะได้ $\frac{1}{2(4)} - \frac{9}{4^2+6(4)} = \frac{2-4}{2(4)+12}$

$\frac{1}{8} - \frac{9}{40} = -\frac{2}{20}$

$-\frac{1}{10} = -\frac{1}{10}$ เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น -3 และ 4 เป็นคำตอบของสมการ $\frac{1}{2a} - \frac{9}{a^2+6a} = \frac{2-a}{2a+12}$

15. ไม่มีคำตอบ

แนวคิด

$$\frac{4}{r-4} + \frac{2r}{r^2-16} = \frac{1}{r+4}$$

$$\frac{4}{r-4} + \frac{2r}{(r+4)(r-4)} = \frac{1}{r+4}$$

นำ $(r-4)(r+4)$ มาคูณทั้งสองข้างของสมการ โดยที่ $r+4 \neq 0$ และ $r-4 \neq 0$

จะได้ $(r-4)(r+4)\left(\frac{4}{r-4}\right) + (r-4)(r+4)\left[\frac{2r}{(r+4)(r-4)}\right] = (r-4)(r+4)\left(\frac{1}{r+4}\right)$

$$4(r+4)+2r = r-4$$

$$5r = -20$$

ดังนั้น $r = -4$

ตรวจสอบ เนื่องจาก เมื่อ $r = -4$ ทำให้ $r+4 = 0$ แต่ไม่นิยามการหารด้วย 0

นั่นคือ -4 ไม่ใช่คำตอบของสมการ

ดังนั้น สมการนี้ไม่มีคำตอบ

16. -4 และ 3

แนวคิด $1 + \frac{12}{y+1} = \frac{12}{y}$

นำ $y(y+1)$ มาคูณทั้งสองข้างของสมการ โดยที่ $y \neq 0$ และ $y+1 \neq 0$

จะได้ $y(y+1)(1) + y(y+1)\left(\frac{12}{y+1}\right) = y(y+1)\left(\frac{12}{y}\right)$

$$y^2 + y + 12y = 12y + 12$$

$$y^2 + y - 12 = 0$$
$$(y + 4)(y - 3) = 0$$

ดังนั้น $y + 4 = 0$ หรือ $y - 3 = 0$

จะได้ $y = -4$ หรือ $y = 3$

ตรวจสอบ 1) แทน y ด้วย -4 ในสมการ $1 + \frac{12}{y+1} = \frac{12}{y}$

จะได้ $1 + \frac{12}{(-4)+1} = \frac{12}{-4}$

$$1 + (-4) = -3$$
$$-3 = -3$$ เป็นสมการที่เป็นจริง

2) แทน y ด้วย 3 ในสมการ $1 + \frac{12}{y+1} = \frac{12}{y}$

จะได้ $1 + \frac{12}{3+1} = \frac{12}{3}$

$$1 + 3 = 4$$
$$4 = 4$$ เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น -4 และ 3 เป็นคำตอบของสมการ $1 + \frac{12}{y+1} = \frac{12}{y}$

17. 2

แนวคิด

$$\frac{y+2}{2y-6} + \frac{3}{3-y} = \frac{y}{2}$$
$$\frac{y+2}{2(y-3)} - \frac{3}{y-3} = \frac{y}{2}$$

นำ $2(y-3)$ มาคูณทั้งสองข้างของสมการ โดยที่ $y - 3 \neq 0$

จะได้ $2(y-3)\left[\frac{y+2}{2(y-3)}\right] - 2(y-3)\left(\frac{3}{y-3}\right) = 2(y-3)\left(\frac{y}{2}\right)$

$$y + 2 - 6 = y^2 - 3y$$
$$y^2 - 4y + 4 = 0$$
$$(y-2)^2 = 0$$

ดังนั้น $y - 2 = 0$

$$y = 2$$

ตรวจสอบ แทน y ด้วย 2 ในสมการ $\frac{y+2}{2y-6} + \frac{3}{3-y} = \frac{y}{2}$

จะได้ $\frac{2+2}{2(2)-6} + \frac{3}{3-2} = \frac{2}{2}$

$$\frac{4}{(-2)} + 3 = 1$$
$$1 = 1$$ เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น 2 เป็นคำตอบของสมการ $\frac{y+2}{2y-6} + \frac{3}{3-y} = \frac{y}{2}$

18. 2 และ 5

แนวคิด

$$\frac{x}{x-1} - \frac{2}{1-x^2} = \frac{8}{x+1}$$

$$\frac{x}{x-1} + \frac{2}{x^2-1} = \frac{8}{x+1}$$

$$\frac{x}{x-1} + \frac{2}{(x+1)(x-1)} = \frac{8}{x+1}$$

นำ $(x-1)(x+1)$ มาคูณทั้งสองข้างของสมการ โดยที่ $x-1 \neq 0$ และ $x+1 \neq 0$

จะได้ $(x-1)(x+1)\left(\frac{x}{x-1}\right) + (x-1)(x+1)\left[\frac{2}{(x+1)(x-1)}\right] = (x-1)(x+1)\left(\frac{8}{x+1}\right)$

$$x(x+1)+2 = 8(x-1)$$

$$x^2+x+2 = 8x-8$$

$$x^2-7x+10 = 0$$

$$(x-5)(x-2) = 0$$

ดังนั้น $x-5 = 0$ หรือ $x-2 = 0$

จะได้ $x = 5$ หรือ $x = 2$

ตรวจสอบ 1) แทน x ด้วย 2 ในสมการ $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{1-x^2} = \frac{8}{x+1}$

จะได้ $\frac{2}{2-1} - \frac{2}{1-2^2} = \frac{8}{2+1}$

$2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$

$\frac{8}{3} = \frac{8}{3}$ เป็นสมการที่เป็นจริง

2) แทน x ด้วย 5 ในสมการ $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{1-x^2} = \frac{8}{x+1}$

จะได้ $\frac{5}{5-1} - \frac{2}{1-5^2} = \frac{8}{5+1}$

$\frac{5}{4} + \frac{2}{24} = \frac{8}{6}$

$\frac{4}{3} = \frac{4}{3}$ เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น 2 และ 5 เป็นคำตอบของสมการ $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{1-x^2} = \frac{8}{x+1}$

เฉลยแบบฝึกหัด 4.3

1. 20 บาท

แนวคิด 1 ให้เดิมหนังสือราคาเล่มละ x บาท

ซื้อหนังสือเป็นเงิน 200 บาท จะซื้อหนังสือได้ $\frac{200}{x}$ เล่ม

ถ้าหนังสือขึ้นราคาเล่มละ 5 บาท เป็นราคาเล่มละ $x+5$ บาท

จะซื้อหนังสือได้ $\frac{200}{x+5}$ เล่ม

เนื่องจาก จำนวนหนังสือที่ซื้อได้น้อยลงกว่าเดิม 2 เล่ม

จะได้สมการเป็น $\frac{200}{x} - \frac{200}{x+5} = 2$

นำ $x(x+5)$ มาคูณทั้งสองข้างของสมการ โดยที่ $x \neq 0$ และ $x+5 \neq 0$

จะได้

$$\begin{aligned} 200(x+5) - 200x &= 2(x)(x+5) \\ 200x + 1{,}000 - 200x &= 2x^2 + 10x \\ 2x^2 + 10x - 1{,}000 &= 0 \\ x^2 + 5x - 500 &= 0 \\ (x+25)(x-20) &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x + 25 = 0$ หรือ $x - 20 = 0$

จะได้ $x = -25$ หรือ $x = 20$

แนวคิด 2 ให้เดิมหนังสือราคาเล่มละ x บาท

เมื่อซื้อหนังสือเป็นเงิน 200 บาท จะซื้อหนังสือได้ $\frac{200}{x}$ เล่ม

ถ้าหนังสือขึ้นราคาเล่มละ 5 บาท เป็นราคาเล่มละ $x+5$ บาท

และจำนวนหนังสือที่ซื้อได้น้อยลงกว่าเดิม 2 เล่ม

ดังนั้น จะซื้อหนังสือได้ $\frac{200}{x} - 2 = \frac{200-2x}{x}$ เล่ม

เนื่องจาก จำนวนเงินที่ใช้ซื้อหนังสือเท่าเดิมคือ 200 บาท

จะได้สมการเป็น $\left(\frac{200-2x}{x}\right)(x+5) = 200$

นำ x มาคูณทั้งสองข้างของสมการ โดยที่ $x \neq 0$ จะได้

$$\begin{aligned} (200-2x)(x+5) &= 200x \\ 200x + 1{,}000 - 2x^2 - 10x &= 200x \\ 2x^2 + 10x - 1{,}000 &= 0 \\ x^2 + 5x - 500 &= 0 \\ (x+25)(x-20) &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x + 25 = 0$ หรือ $x - 20 = 0$

จะได้ $x = -25$ หรือ $x = 20$

ตรวจสอบ เนื่องจาก x แทนราคาหนังสือซึ่งจะต้องเป็นจำนวนบวก

ดังนั้น -25 จึงไม่ใช่ราคาหนังสือ

ถ้าให้ เดิมหนังสือราคาเล่มละ 20 บาท จะซื้อหนังสือได้ $200 \div 20 = 10$ เล่ม

เมื่อหนังสือขึ้นราคาเล่มละ 5 บาท เป็นราคาเล่มละ 25 บาท

จะซื้อหนังสือได้ $200 \div 25 = 8$ เล่ม

ดังนั้น จำนวนหนังสือที่ซื้อได้น้อยลงกว่าเดิม $10 - 8 = 2$ เล่ม
ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์
นั่นคือ เดิมหนังสือราคาเล่มละ 20 บาท

2. 60 กิโลกรัม

แนวคิด 1 ให้เดิมพ่อค้าซื้อส้มมา x กิโลกรัม ในราคา 540 บาท
พ่อค้าจะซื้อส้มมาราคากิโลกรัมละ $\frac{540}{x}$ บาท
เมื่อขายปลีกราคากิโลกรัมละ 12 บาท จะได้เงิน 12x บาท
และได้กำไร $12x - 540$ บาท
เนื่องจาก กำไรจากการขายสามารถนำมาซื้อส้มราคากิโลกรัมละ $\frac{540}{x}$ บาท เพิ่มได้อีก 20 กิโลกรัม
จะได้สมการเป็น

$$\begin{aligned} 12x - 540 &= 20\left(\frac{540}{x}\right) \\ 12x^2 - 540x &= 10,800 \\ x^2 - 45x - 900 &= 0 \\ (x - 60)(x + 15) &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x - 60 = 0$ หรือ $x + 15 = 0$
จะได้ $x = 60$ หรือ $x = -15$

แนวคิด 2 ให้เดิมพ่อค้าซื้อส้มมา x กิโลกรัม ในราคา 540 บาท
พ่อค้าจะซื้อส้มมาราคากิโลกรัมละ $\frac{540}{x}$ บาท
เมื่อขายปลีกราคากิโลกรัมละ 12 บาท จะได้เงิน 12x บาท
กำไรจากการขายสามารถนำมาซื้อส้มเพิ่มได้อีก 20 กิโลกรัม
ดังนั้น พ่อค้าสามารถนำเงินที่ขายส้มได้ 12x บาท ไปซื้อส้มราคากิโลกรัมละ $\frac{540}{x}$ บาท ได้ $x + 20$ กิโลกรัม
จะได้สมการเป็น

$$\begin{aligned} (x + 20)\left(\frac{540}{x}\right) &= 12x \\ (x + 20)(540) &= 12x^2 \\ 45(x + 20) &= x^2 \\ 45x + 900 &= x^2 \\ x^2 - 45x - 900 &= 0 \\ (x - 60)(x + 15) &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x - 60 = 0$ หรือ $x + 15 = 0$
จะได้ $x = 60$ หรือ $x = -15$

ตรวจสอบ เนื่องจาก x แทนจำนวนส้มเป็นกิโลกรัม ซึ่งจะต้องเป็นจำนวนบวก

ดังนั้น -15 จึงไม่ใช่จำนวนส้ม

ถ้าให้พ่อค้าซื้อส้มมา 60 กิโลกรัม ในราคา 540 บาท

พ่อค้าจะซื้อส้มได้ในราคากิโลกรัมละ $540 \div 60 = 9$ บาท

เมื่อนำไปขายปลีกในราคากิโลกรัมละ 12 บาท ได้เงิน $60 \times 12 = 720$ บาท

ขายได้กำไร $720 - 540 = 180$ บาท

กำไรที่ได้นำไปซื้อส้มได้ $180 \div 9 = 20$ กิโลกรัม ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

นั่นคือ เดิมพ่อค้าซื้อส้มมา 60 กิโลกรัม

3. กระดาษที่เย็บเป็นเล่มชุดแรกมีเล่มละ 20 แผ่น

กระดาษที่เย็บเป็นเล่มชุดหลังมีเล่มละ 25 แผ่น

แนวคิด ให้กระดาษชุดแรกจำนวน 200 แผ่น นำมาเย็บเป็นเล่ม ๆ

แต่ละเล่มมีกระดาษจำนวน x แผ่น

ดังนั้น ชุดแรกจะเย็บเล่มได้ทั้งหมด $\frac{200}{x}$ เล่ม

กระดาษชุดหลังจำนวน 200 แผ่น นำมาเย็บเป็นเล่ม ๆ

แต่ละเล่มมีจำนวนแผ่นมากกว่าชุดแรก 5 แผ่น เป็น $x + 5$ แผ่น

ดังนั้น ชุดหลังจะเย็บเล่มได้ $\frac{200}{x+5}$ เล่ม

เนื่องจาก เมื่อเย็บเสร็จนับเป็นเล่มได้ทั้งหมด 18 เล่ม

จะได้สมการเป็น $\frac{200}{x} + \frac{200}{x+5} = 18$

นำ $x(x+5)$ มาคูณทั้งสองข้างของสมการ โดยที่ $x \neq 0$ และ $x + 5 \neq 0$

จะได้
$$\begin{aligned} 200(x+5) + 200x &= 18x(x+5) \\ 200x + 1{,}000 + 200x &= 18x^2 + 90x \\ 18x^2 - 310x - 1{,}000 &= 0 \\ 9x^2 - 155x - 500 &= 0 \\ (9x+25)(x-20) &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $9x + 25 = 0$ หรือ $x - 20 = 0$

จะได้ $x = -\frac{25}{9}$ หรือ $x = 20$

ตรวจสอบ เนื่องจาก x แทนจำนวนแผ่นกระดาษ ซึ่งจะต้องเป็นจำนวนบวก

ดังนั้น $-\frac{25}{9}$ จึงไม่ใช่จำนวนแผ่นกระดาษ

ถ้าชุดแรกเย็บกระดาษ เล่มละ 20 แผ่น จะเย็บเล่มได้ $200 \div 20 = 10$ เล่ม

ชุดหลังแต่ละเล่มเย็บกระดาษมากกว่าชุดแรก 5 แผ่น เป็นเล่มละ $20 + 5 = 25$ แผ่น

ซึ่งจะเย็บได้ $200 \div 25 = 8$ เล่ม

รวมทั้งสองชุดจะเย็บเล่มได้ $10 + 8 = 18$ เล่ม

ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

นั่นคือ กระดาษที่เย็บเป็นเล่มชุดแรกมีเล่มละ 20 แผ่น

กระดาษที่เย็บเป็นเล่มชุดหลังมีเล่มละ 25 แผ่น

4. 3 กิโลเมตร

แนวคิด ให้เดิมศจีเดินได้ชั่วโมงละ x กิโลเมตร

ดังนั้น ระยะทาง 9 กิโลเมตร ศจีจะใช้เวลาในการเดิน $\frac{9}{x}$ ชั่วโมง

ถ้าศจีเดินเร็วขึ้นอีกชั่วโมงละ 1 กิโลเมตร เป็นชั่วโมงละ $x + 1$ กิโลเมตร

จะได้ว่า ระยะทาง 9 กิโลเมตร ศจีจะใช้เวลาในการเดิน $\frac{9}{x+1}$ ชั่วโมง

เนื่องจากเวลาที่ใช้ในการเดินน้อยกว่าเดิม 45 นาทีหรือ $\frac{3}{4}$ ชั่วโมง

จะได้สมการเป็น $\frac{9}{x} - \frac{9}{x+1} = \frac{3}{4}$

นำ $4x(x + 1)$ มาคูณทั้งสองข้างของสมการ โดยที่ $x \neq 0$ และ $x + 1 \neq 0$

จะได้

$$\begin{aligned} 36(x + 1) - 36x &= 3x(x + 1) \\ 36x + 36 - 36x &= 3x^2 + 3x \\ 3x^2 + 3x - 36 &= 0 \\ x^2 + x - 12 &= 0 \\ (x + 4)(x - 3) &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x + 4 = 0$ หรือ $x - 3 = 0$

จะได้ $x = -4$ หรือ $x = 3$

ตรวจสอบ เนื่องจาก x แทนระยะทางที่ศจีเดินได้ในเวลา 1 ชั่วโมง ซึ่งจะต้องเป็นจำนวนบวก ดังนั้น -4 จึงไม่ใช่ระยะทางที่ศจีเดินได้

ถ้าเดิมศจีเดินได้ชั่วโมงละ 3 กิโลเมตร

ระยะทาง 9 กิโลเมตร จะใช้เวลาเดิน $9 \div 3 = 3$ ชั่วโมง

ถ้าศจีเดินเร็วขึ้นอีกชั่วโมงละ 1 กิโลเมตร เป็นชั่วโมงละ 4 กิโลเมตร

ระยะทาง 9 กิโลเมตร ศจีจะใช้เวลาในการเดิน $9 \div 4 = \frac{9}{4}$ ชั่วโมง

นั่นคือ ศจีใช้เวลาเดินน้อยลงกว่าเดิม $3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$ ชั่วโมง หรือ 45 นาที

ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

นั่นคือ เดิมศจีเดินได้ชั่วโมงละ 3 กิโลเมตร

5. พงษ์พิมพ์ได้นาทีละ 65 คำ

พันธ์พิมพ์ได้นาทีละ 30 คำ

แนวคิด ให้พงษ์พิมพ์ดีดได้นาทีละ x คำ

ดังนั้น พงษ์พิมพ์ดีด 325 คำ ใช้เวลา $\frac{325}{x}$ นาที

พงษ์พิมพ์ดีดได้เร็วกว่าพันธ์ นาทีละ 35 คำ

พันธ์จะพิมพ์ดีดได้นาทีละ $x - 35$ คำ

ดังนั้น พันธ์พิมพ์ดีด 150 คำ ใช้เวลา $\frac{150}{x-35}$ นาที

เนื่องจาก พงษ์พิมพ์ดีด 325 คำ ใช้เวลาเท่ากับพันธ์พิมพ์ดีด 150 คำ

จะได้สมการเป็น $\frac{325}{x} = \frac{150}{x-35}$

นำ $x(x-35)$ มาคูณทั้งสองข้างของสมการ โดยที่ $x \neq 0$ และ $x - 35 \neq 0$

จะได้

$$\begin{aligned} 325(x-35) &= 150x \\ 13(x-35) &= 6x \\ 13x - 455 &= 6x \\ 7x &= 455 \\ x &= 65 \end{aligned}$$

ตรวจสอบ ถ้าพงษ์พิมพ์ดีดได้นาทีละ 65 คำ พันธ์พิมพ์ดีดได้นาทีละ $65 - 35 = 30$ คำ

พงษ์พิมพ์ดีด 325 คำ ใช้เวลา $325 \div 65 = 5$ นาที

พันธ์พิมพ์ดีด 150 คำ ใช้เวลา $150 \div 30 = 5$ นาที

จะได้ว่า พงษ์และพันธ์ใช้เวลาในการพิมพ์เท่ากัน ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

นั่นคือ พงษ์พิมพ์ได้นาทีละ 65 คำ

พันธ์พิมพ์ได้นาทีละ 30 คำ

6. ศักดิ์เดินด้วยอัตราเร็ว 4 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

สรรค์เดินด้วยอัตราเร็ว $2\frac{1}{2}$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง

แนวคิด ให้ศักดิ์เดินด้วยอัตราเร็ว x กิโลเมตรต่อชั่วโมง

ศักดิ์เดินเร็วกว่าสรรค์ชั่วโมงละ $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ กิโลเมตร

ดังนั้น สรรค์เดินด้วยอัตราเร็ว $x - \frac{3}{2}$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง

ในการเดินทาง 10 กิโลเมตร ศักดิ์ใช้เวลาในการเดินทาง $\frac{10}{x}$ ชั่วโมง

สรรค์ใช้เวลาในการเดินทาง $\frac{10}{x - \frac{3}{2}} = \frac{20}{2x-3}$ ชั่วโมง

เนื่องจาก ศักดิ์ถึงปลายทางก่อนสรรค์ $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ชั่วโมง

จะได้สมการเป็น $\frac{20}{2x-3} - \frac{10}{x} = \frac{3}{2}$

นำ $2x(2x-3)$ มาคูณทั้งสองข้างของสมการ โดยที่ $x \neq 0$ และ $2x-3 \neq 0$

จะได้ $40x - 20(2x-3) = 3x(2x-3)$

$$40x - 40x + 60 = 6x^2 - 9x$$

$$6x^2 - 9x - 60 = 0$$

$$2x^2 - 3x - 20 = 0$$

$$(2x+5)(x-4) = 0$$

ดังนั้น $2x + 5 = 0$ หรือ $x - 4 = 0$

จะได้ $x = -\frac{5}{2}$ หรือ $x = 4$

ตรวจสอบ เนื่องจาก x แทนอัตราเร็วในการเดินของศักดิ์ ซึ่งจะต้องเป็นจำนวนบวก

ดังนั้น $-\frac{5}{2}$ จึงไม่ใช่อัตราเร็ว

ถ้า ศักดิ์เดินด้วยอัตราเร็ว 4 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

สรรค์เดินด้วยอัตราเร็ว $4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง

ศักดิ์เดินทาง 10 กิโลเมตร ใช้เวลา $10 \div 4 = \frac{5}{2}$ ชั่วโมง

สรรค์เดินทาง 10 กิโลเมตร ใช้เวลา $10 \div \frac{5}{2} = 4$ ชั่วโมง

จะได้ว่า ศักดิ์เดินทางถึงปลายทางก่อนสรรค์ $4 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ ชั่วโมง

ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

นั่นคือ ศักดิ์เดินด้วยอัตราเร็ว 4 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

สรรค์เดินด้วยอัตราเร็ว $2\frac{1}{2}$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง

7. 40 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

แนวคิด ให้เดิมรถไฟแล่นด้วยอัตราเร็ว x กิโลเมตรต่อชั่วโมง

นั่นคือ ในเวลาปกติรถไฟแล่นในระยะทาง 120 กิโลเมตร

จะใช้เวลา $\frac{120}{x}$ ชั่วโมง

ถ้ารถไฟแล่นระยะทาง 60 กิโลเมตรแรกด้วยความเร็ว x กิโลเมตรต่อชั่วโมง

จะใช้เวลา $\frac{60}{x}$ ชั่วโมง

เนื่องจากระยะทางอีก 60 กิโลเมตรที่เหลือรถไฟแล่นโดยลดความเร็วลง 8 กิโลเมตรต่อชั่วโมง เป็น $x - 8$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง

จะใช้เวลา $\frac{60}{x-8}$ ชั่วโมง

ดังนั้น รถไฟใช้เวลาในการเดินทางทั้งหมด $\frac{60}{x} + \frac{60}{x-8}$ ชั่วโมง

แต่รถไฟแล่นถึงปลายทางช้าไป $22\frac{1}{2} = \frac{45}{2}$ นาที หรือ $\frac{3}{8}$ ชั่วโมง

จะได้สมการเป็น $\left(\frac{60}{x} + \frac{60}{x-8}\right) - \frac{120}{x} = \frac{3}{8}$

$$\frac{60}{x-8} - \frac{60}{x} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{20}{x-8} - \frac{20}{x} = \frac{1}{8}$$

นำ $8x(x-8)$ มาคูณทั้งสองข้างของสมการ โดยที่ $x \neq 0$ และ $x-8 \neq 0$

จะได้ $20(8x) - 20(8)(x-8) = x(x-8)$

$$160x - 160x + 1{,}280 = x^2 - 8x$$

$$x^2 - 8x - 1{,}280 = 0$$

$$(x-40)(x+32) = 0$$

ดังนั้น $x - 40 = 0$ หรือ $x + 32 = 0$

จะได้ $x = 40$ หรือ $x = -32$

ตรวจสอบ เนื่องจาก x แทนอัตราเร็วที่รถไฟแล่น ซึ่งจะต้องเป็นจำนวนบวก

ดังนั้น -32 จึงไม่ใช่อัตราเร็วที่รถไฟแล่น

ถ้าเดิมรถไฟแล่นด้วยอัตราเร็ว 40 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

ระยะทาง 120 กิโลเมตร รถไฟจะใช้เวลาในการแล่น $\frac{120}{40} = 3$ ชั่วโมง

และระยะทาง 60 กิโลเมตรแรก รถไฟแล่นด้วยอัตราเร็ว 40 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

จะใช้เวลา $\frac{60}{40} = \frac{3}{2}$ ชั่วโมง

เมื่อลดความเร็วลง 8 กิโลเมตรต่อชั่วโมง รถไฟจะแล่นด้วยอัตราเร็ว 32 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

ดังนั้น ระยะทาง 60 กิโลเมตรที่เหลือจะใช้เวลา $\frac{60}{32} = \frac{15}{8}$ ชั่วโมง

รวมเวลารถไฟแล่นทั้งหมด $\frac{3}{2} + \frac{15}{8} = \frac{27}{8}$ ชั่วโมง

เวลาที่ใช้ในการแล่นช้ากว่าเวลาปกติ $\frac{27}{8} - 3 = \frac{3}{8}$ ชั่วโมง หรือ $22\frac{1}{2}$ นาที

ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

นั่นคือ เดิมรถไฟแล่นได้ในอัตราเร็ว 40 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

8. 60 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

แนวคิด ให้อัตราเร็วของรถในระยะแรกเป็น x กิโลเมตรต่อชั่วโมง

ระยะทาง 120 กิโลเมตรแรก แดงใช้เวลาในการขับรถ $\frac{120}{x}$ ชั่วโมง

ระยะทาง 200 กิโลเมตรหลัง แดงเพิ่มอัตราเร็วของรถอีก 40 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

เป็น $x + 40$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง จะใช้เวลาในการขับรถ $\frac{200}{x+40}$ ชั่วโมง

เนื่องจากแดงใช้เวลาในการขับรถทั้งหมด 4 ชั่วโมง

จะได้สมการเป็น $\frac{120}{x} + \frac{200}{x+40} = 4$

$$\frac{30}{x} + \frac{50}{x+40} = 1$$

นำ $x(x+40)$ มาคูณทั้งสองข้างของสมการ โดยที่ $x \neq 0$ และ $x + 40 \neq 0$

จะได้ $30(x + 40) + 50x = x(x + 40)$

$$30x + 1,200 + 50x = x^2 + 40x$$

$$x^2 - 40x - 1,200 = 0$$

$$(x - 60)(x + 20) = 0$$

ดังนั้น $x - 60 = 0$ หรือ $x + 20 = 0$

จะได้ $x = 60$ หรือ $x = -20$

ตรวจสอบ เนื่องจาก x แทนอัตราเร็วของรถในระยะแรก ซึ่งจะต้องเป็นจำนวนบวก

ดังนั้น -20 จึงไม่ใช่อัตราเร็วของรถในระยะแรก

ถ้าระยะทาง 120 กิโลเมตรแรกแดงขับรถด้วยอัตราเร็ว 60 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

จะใช้เวลา $\frac{120}{60} = 2$ ชั่วโมง

ระยะทาง 200 กิโลเมตรหลัง แดงเพิ่มความเร็วอีก 40 กิโลเมตรต่อชั่วโมง เป็น 100 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

จะใช้เวลา $\frac{200}{100} = 2$ ชั่วโมง

นั่นคือ ตลอดระยะทาง 320 กิโลเมตร แดงใช้เวลาในการขับรถ $2 + 2 = 4$ ชั่วโมง

ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

นั่นคือ อัตราเร็วของรถในระยะแรกเป็น 60 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

9. 60 นาที

แนวคิด 1 ให้โอ่งที่สามได้น้ำจากก๊อกที่สองเพียงก๊อกเดียว และได้น้ำเต็มโอ่งในเวลา x นาที

ดังนั้น ในเวลา 1 นาที โอ่งที่สามได้น้ำจากก๊อกที่สอง $\frac{1}{x}$ ของโอ่ง

เนื่องจาก โอ่งแรกไขน้ำจากก๊อกที่หนึ่ง น้ำจะเต็มโอ่งในเวลา 30 นาที

ดังนั้น ในเวลา 1 นาที โอ่งแรกได้น้ำจากก๊อกที่หนึ่ง $\frac{1}{30}$ ของโอ่ง

เนื่องจาก โอ่งที่สองไขน้ำจากทั้งสองก๊อก น้ำจะเต็มโอ่งในเวลา 20 นาที

ดังนั้น ในเวลา 1 นาที โอ่งที่สองได้น้ำจากทั้งสองก๊อก $\frac{1}{20}$ ของโอ่ง

จะได้สมการเป็น $\frac{1}{x} + \frac{1}{30} = \frac{1}{20}$

นำ 60x มาคูณทั้งสองข้างของสมการ โดยที่ $x \neq 0$

จะได้ $60 + 2x = 3x$

$$x = 60$$

แนวคิด 2 ให้โอ่งที่สามได้น้ำจากก๊อกที่สองเพียงก๊อกเดียว จะได้น้ำเต็มโอ่งในเวลา x นาที จากเงื่อนไขต่าง ๆ ในโจทย์ นำมาเขียนตารางแสดงความสัมพันธ์ได้ดังนี้

เวลา	ก๊อกน้ำที่เปิด	ปริมาณน้ำในโอ่ง
x นาที	ก๊อกที่สอง	1 โอ่ง
1 นาที	ก๊อกที่สอง	$\frac{1}{x}$ โอ่ง
30 นาที	ก๊อกที่หนึ่ง	1 โอ่ง
1 นาที	ก๊อกที่หนึ่ง	$\frac{1}{30}$ โอ่ง
1 นาที	ก๊อกที่หนึ่ง และก๊อกที่สอง	$\frac{1}{x}+\frac{1}{30}$ โอ่ง
20 นาที	ก๊อกที่หนึ่ง และก๊อกที่สอง	$20\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{30}\right)$ โอ่ง

เนื่องจาก ถนอมใช้น้ำทั้งสองก๊อก ทำให้น้ำเต็มโอ่งในเวลา 20 นาที

จะได้สมการเป็น $20\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{30}\right) = 1$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{30} = \frac{1}{20}$$

นำ 60x มาคูณทั้งสองข้างของสมการ โดยที่ $x \neq 0$

จะได้ $60 + 2x = 3x$

$$x = 60$$

ตรวจสอบ ถ้าโอ่งที่สามได้น้ำจากก๊อกที่สองเพียงก๊อกเดียว และน้ำเต็มโอ่งในเวลา 60 นาที ในเวลา 1 นาที โอ่งใบที่สามจะได้น้ำจากก๊อกที่สอง $\frac{1}{60}$ ของโอ่ง

และ ในเวลา 1 นาที โอ่งแรกได้น้ำจากก๊อกที่หนึ่ง $\frac{1}{30}$ ของโอ่ง

ดังนั้น ในเวลา 1 นาที โอ่งที่สองได้น้ำจากทั้งสองก๊อก $\frac{1}{60}+\frac{1}{30}=\frac{1}{20}$ ของโอ่ง

และ ในเวลา 20 นาที โอ่งที่สองจะได้น้ำจากทั้งสองก๊อก $20\left(\frac{1}{20}\right) = 1$ โอ่ง

จะเห็นว่าน้ำจะเต็มโอ่งที่สองในเวลา 20 นาที ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

นั่นคือ โอ่งที่สามจะได้น้ำเต็มโอ่งในเวลา 60 นาที

10. 24 นาที

แนวคิด 1 ให้เปิดท่อใหญ่ท่อเดียวใช้เวลา x นาที น้ำจึงจะเต็มสระ

ดังนั้น ในเวลา 1 นาที เปิดน้ำท่อใหญ่จะได้น้ำ $\frac{1}{x}$ ของสระ

เนื่องจาก ท่อใหญ่จ่ายน้ำได้เต็มสระเร็วกว่าท่อเล็ก 16 นาที

ดังนั้น เมื่อเปิดท่อเล็กท่อเดียว จะใช้เวลา $x + 16$ นาที น้ำจึงจะเต็มสระ

นั่นคือ ในเวลา 1 นาที เปิดน้ำท่อเล็กจะได้น้ำ $\frac{1}{x+16}$ ของสระ

แต่เมื่อเปิดทั้งสองท่อพร้อมกัน น้ำจะเต็มสระในเวลา 15 นาที

นั่นคือ ในเวลา 1 นาที เปิดน้ำท่อใหญ่และท่อเล็กพร้อมกัน จะได้น้ำ $\frac{1}{15}$ ของสระ

จะได้สมการเป็น $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+16} = \frac{1}{15}$

นำ $15x(x+16)$ มาคูณทั้งสองข้างของสมการ โดยที่ $x \neq 0$ และ $x+16 \neq 0$

จะได้
$$\begin{aligned} 15(x+16)+15x &= x(x+16) \\ 15x+240+15x &= x^2+16x \\ x^2-14x-240 &= 0 \\ (x-24)(x+10) &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x-24 = 0$ หรือ $x+10 = 0$

จะได้ $x = 24$ หรือ $x = -10$

แนวคิด 2 ให้เปิดท่อใหญ่ท่อเดียว น้ำจะเต็มสระ ในเวลา x นาที

จากเงื่อนไขต่าง ๆ ในโจทย์ นำมาเขียนตารางแสดงความสัมพันธ์ได้ดังนี้

เวลา	**ท่อน้ำที่เปิด**	**ปริมาณน้ำในสระ**
x นาที	ท่อใหญ่	1 สระ
1 นาที	ท่อใหญ่	$\frac{1}{x}$ สระ
x + 16 นาที	ท่อเล็ก	1 สระ
1 นาที	ท่อเล็ก	$\frac{1}{x+16}$ สระ
1 นาที	ท่อใหญ่ และ ท่อเล็ก	$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+16}$ สระ
15 นาที	ท่อใหญ่ และ ท่อเล็ก	$15\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+16}\right)$ สระ

เนื่องจาก เมื่อเปิดน้ำทั้งสองท่อพร้อมกัน น้ำจะเต็มสระในเวลา 15 นาที

จะได้สมการเป็น
$$\begin{aligned} 15\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+16}\right) &= 1 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{x+16} &= \frac{1}{15} \end{aligned}$$

นำ $15x(x+16)$ มาคูณทั้งสองข้างของสมการ โดยที่ $x \neq 0$ และ $x+16 \neq 0$

จะได้
$$\begin{aligned} 15(x+16)+15x &= x(x+16) \\ 15x+240+15x &= x^2+16x \\ x^2-14x-240 &= 0 \\ (x-24)(x+10) &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x - 24 = 0$ หรือ $x + 10 = 0$

จะได้ $x = 24$ หรือ $x = -10$

ตรวจสอบ เนื่องจาก x แทนเวลาในการเปิดน้ำท่อใหญ่ให้เต็มสระ ซึ่งจะต้องเป็นจำนวนบวก

ดังนั้น -20 จึงไม่ใช่เวลาในการเปิดน้ำให้เต็มสระ

ถ้าเปิดน้ำท่อใหญ่ท่อเดียวใช้เวลา 24 นาที น้ำจึงจะเต็มสระ

ดังนั้น ในเวลา 1 นาที เปิดน้ำท่อใหญ่ได้ $\frac{1}{24}$ ของสระ

เนื่องจาก ท่อใหญ่จ่ายน้ำได้เต็มสระเร็วกว่าท่อเล็ก 16 นาที

เมื่อเปิดน้ำท่อเล็กท่อเดียวจะใช้เวลา $24 + 16 = 40$ นาที น้ำจึงจะเต็มสระ

ดังนั้น ในเวลา 1 นาที เปิดน้ำท่อเล็กได้ $\frac{1}{40}$ ของสระ

จะได้ว่า ในเวลา 1 นาที เปิดน้ำทั้งสองท่อพร้อมกันจะได้น้ำ

$\frac{1}{24} + \frac{1}{40} = \frac{1}{15}$ ของสระ

และ ในเวลา 15 นาที เปิดน้ำทั้งสองท่อพร้อมกัน จะได้น้ำ $15\left(\frac{1}{15}\right) = 1$ สระ

จะเห็นว่า เปิดน้ำทั้งสองท่อพร้อมกันน้ำจะเต็มสระในเวลา 15 นาที

ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

นั่นคือ เปิดน้ำท่อใหญ่ท่อเดียวจะใช้เวลา 24 นาที น้ำจึงจะเต็มสระ

11. 20 วัน

แนวคิด 1 ให้ ข ทำงานคนเดียวเสร็จในเวลา x วัน

ในเวลา 1 วัน ข ทำงานได้ $\frac{1}{x}$ ของงาน

เนื่องจาก ก ทำงานได้งานเป็น $\frac{2}{3}$ ของงานที่ ข ทำได้

ดังนั้น ในเวลา 1 วัน ก ทำงานได้ $\frac{2}{3} \times \frac{1}{x} = \frac{2}{3x}$ ของงาน

ถ้า ก และ ข ช่วยกันทำงานจะแล้วเสร็จในเวลา 12 วัน

ดังนั้น ในเวลา 1 วัน ก และ ข ช่วยกันทำงานได้ $\frac{1}{12}$ ของงาน

จะได้สมการเป็น $\frac{2}{3x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{12}$

นำ 12x มาคูณทั้งสองข้างของสมการ โดยที่ $x \neq 0$

จะได้ $8 + 12 = x$

ดังนั้น $x = 20$

แนวคิด 2 ให้ ข ทำงานคนเดียวเสร็จในเวลา x วัน

จากเงื่อนไขต่าง ๆ ในโจทย์ นำมาเขียนตารางแสดงความสัมพันธ์ได้ดังนี้

เวลา	คนที่ทำงาน	ปริมาณงานที่ทำได้
x วัน	ข คนเดียว	1 งาน
1 วัน	ข คนเดียว	$\frac{1}{x}$ งาน
x วัน	ก คนเดียว	$\frac{2}{3}$ งาน
1 วัน	ก คนเดียว	$\frac{2}{3x}$ งาน
1 วัน	ก และ ข ทำงานพร้อมกัน	$\frac{1}{x}+\frac{2}{3x}$ งาน
12 วัน	ก และ ข ทำงานพร้อมกัน	$12\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{3x}\right)$ งาน

เนื่องจาก ก และ ข ช่วยกันทำงาน จะเสร็จในเวลา 12 วัน

จะได้สมการเป็น $12\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{3x}\right) = 1$

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{3x} = \frac{1}{12}$$

นำ 12x มาคูณทั้งสองข้างของสมการ โดยที่ $x \neq 0$

จะได้ $12+8 = x$

$$x = 20$$

ตรวจสอบ ถ้า ข ทำงานคนเดียวเสร็จใน 20 วัน

ในเวลา 1 วัน ข จะทำงานได้ $\frac{1}{20}$ ของงาน

ในเวลา 1 วัน ก จะทำงานได้ $\frac{2}{3}\times\frac{1}{20} = \frac{1}{30}$ ของงาน

ดังนั้น ในเวลา 1 วัน ก และ ข ช่วยกันทำงานได้ $\frac{1}{20}+\frac{1}{30}=\frac{1}{12}$ ของงาน

และ ในเวลา 12 วัน ก และ ข ช่วยกันทำงานได้ $12\left(\frac{1}{12}\right) = 1$ งาน

จะเห็นว่า ก และ ข ช่วยกันทำงานจะแล้วเสร็จในเวลา 12 วัน

ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

นั่นคือ ข ทำงานคนเดียวจะเสร็จในเวลา 20 วัน

12. 22 ชั่วโมง

แนวคิด ให้ผู้ใหญ่ 1 คน ทำงานเสร็จในเวลา x ชั่วโมง

ผู้ใหญ่ 1 คน ทำงาน 1 ชั่วโมง ได้งาน $\frac{1}{x}$ ของงาน

ผู้ใหญ่ 9 คน ทำงาน 2 ชั่วโมง ได้งาน $9(2)\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{18}{x}$ ของงาน

ผู้ใหญ่ 9 คน เด็ก 6 คน ทำงานเสร็จใน 2 ชั่วโมง

ดังนั้น เด็ก 6 คน ทำงาน 2 ชั่วโมง ได้งาน $1 - \frac{18}{x} = \frac{x-18}{x}$ ของงาน

เด็ก 6 คน ทำงาน 1 ชั่วโมง ได้งาน $\frac{1}{2}\left(\frac{x-18}{x}\right) = \frac{x-18}{2x}$ ของงาน

เด็ก 1 คน ทำงาน 1 ชั่วโมง ได้งาน $\frac{1}{6}\left(\frac{x-18}{2x}\right) = \frac{x-18}{12x}$ ของงาน

เด็ก 7 คน ทำงาน 3 ชั่วโมง ได้งาน $7(3)\left(\frac{x-18}{12x}\right) = \frac{7(x-18)}{4x}$ ของงาน

ผู้ใหญ่ 5 คน ทำงาน 3 ชั่วโมง ได้งาน $5(3)\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{15}{x}$ ของงาน

ตามเงื่อนไขในโจทย์ ผู้ใหญ่ 5 คน เด็ก 7 คน ทำงาน 3 ชั่วโมง ได้งาน 1 งาน

จะได้สมการเป็น $\frac{15}{x} + \frac{7(x-18)}{4x} = 1$

นำ 4x มาคูณทั้งสองข้างของสมการ โดยที่ $x \neq 0$

จะได้
$$\begin{aligned} 4(15) + 7(x-18) &= 4x \\ 60 + 7x - 126 &= 4x \\ 3x &= 66 \\ x &= 22 \end{aligned}$$

ตรวจสอบ ถ้าผู้ใหญ่ 1 คน ทำงานเสร็จในเวลา 22 ชั่วโมง

ผู้ใหญ่ 1 คน ทำงาน 1 ชั่วโมง จะทำงานได้ $\frac{1}{22}$ ของงาน

ผู้ใหญ่ 9 คน ทำงาน 2 ชั่วโมง ได้งาน $9(2) \times \frac{1}{22} = \frac{9}{11}$ ของงาน

แต่ผู้ใหญ่ 9 คน เด็ก 6 คน ทำงานเสร็จใน 2 ชั่วโมง

จะได้ว่า เด็ก 6 คน ทำงาน 2 ชั่วโมง ได้งาน $1 - \frac{9}{11} = \frac{2}{11}$ ของงาน

นั่นคือ เด็ก 1 คน ทำงาน 1 ชั่วโมง ได้งาน $\frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{11} = \frac{1}{66}$ ของงาน

ดังนั้น ผู้ใหญ่ 5 คน เด็ก 7 คน ทำงาน 1 ชั่วโมง

จะได้งาน $5\left(\frac{1}{22}\right) + 7\left(\frac{1}{66}\right) = \frac{1}{3}$ ของงาน

และผู้ใหญ่ 5 คน เด็ก 7 คน ช่วยกันทำงาน 3 ชั่วโมง จะได้งาน $3 \times \frac{1}{3} = 1$ งาน

จะเห็นว่า ผู้ใหญ่ 5 คน เด็ก 7 คน ช่วยกันทำงานทั้งหมดจะเสร็จในเวลา 3 ชั่วโมง ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

นั่นคือ ผู้ใหญ่คนเดียวจะทำงานนั้นเสร็จในเวลา 22 ชั่วโมง

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายกิจกรรม “กระแสน้ำ” หน้า 180

1. 8 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

แนวคิด 1 ให้อัตราเร็วของการพายเรือทวนน้ำเป็น x กิโลเมตรต่อชั่วโมง

พายเรือทวนน้ำระยะทาง 4 กิโลเมตร ใช้เวลา $\frac{4}{x}$ ชั่วโมง

เนื่องจาก อัตราเร็วของกระแสน้ำเป็น 4 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

จะได้ อัตราเร็วของการพายเรือในน้ำนิ่งเป็น $x + 4$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง

ดังนั้น อัตราเร็วของการพายเรือตามน้ำเป็น $(x + 4) + 4 = x + 8$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง

พายเรือตามน้ำระยะทาง 4 กิโลเมตร ใช้เวลา $\frac{4}{x+8}$ ชั่วโมง

เนื่องจาก การพายเรือทวนน้ำใช้เวลามากกว่าการพายเรือตามน้ำ 15 นาที

หรือ $\frac{15}{60} = \frac{1}{4}$ ชั่วโมง

จะได้สมการเป็น $\frac{4}{x} - \frac{4}{x+8} = \frac{1}{4}$

นำ $4x(x + 8)$ มาคูณทั้งสองข้างของสมการ

จะได้
$$\begin{aligned}
4(4)(x + 8) - 4(4x) &= x(x + 8) \\
16x + 128 - 16x &= x^2 + 8x \\
x^2 + 8x - 128 &= 0 \\
(x + 16)(x - 8) &= 0
\end{aligned}$$

ดังนั้น $x + 16 = 0$ หรือ $x - 8 = 0$

จะได้ $x = -16$ หรือ $x = 8$

ตรวจสอบ เนื่องจาก x แทนอัตราเร็วของการพายเรือทวนน้ำ ซึ่งจะต้องเป็นจำนวนบวก

ดังนั้น -16 จึงไม่ใช่อัตราเร็วของการพายเรือทวนน้ำ

ถ้าให้อัตราเร็วของการพายเรือทวนน้ำเป็น 8 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

แสดงว่า ระยะทาง 8 กิโลเมตร จะใช้เวลาในการพายทวนน้ำ 1 ชั่วโมง

ดังนั้น ระยะทาง 4 กิโลเมตร จะใช้เวลาในการพายทวนน้ำ $\frac{1}{2}$ ชั่วโมง

และ อัตราเร็วของการพายเรือในน้ำนิ่งจะเป็น $8 + 4 = 12$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง

ดังนั้น อัตราเร็วของการพายเรือตามน้ำเป็น $12 + 4 = 16$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง

ระยะทาง 4 กิโลเมตร จะใช้เวลาในการพายเรือตามน้ำ $4 \div 16 = \frac{1}{4}$ ชั่วโมง

การพายเรือทวนน้ำจะใช้เวลามากกว่าการพายเรือตามน้ำ $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ ชั่วโมง

หรือ 15 นาที ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

นั่นคือ อัตราเร็วของการพายเรือทวนน้ำเป็น 8 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

แนวคิด 2

ให้อัตราเร็วของการพายเรือในน้ำนิ่ง เป็น x กิโลเมตรต่อชั่วโมง

เนื่องจาก อัตราเร็วของกระแสน้ำ เป็น 4 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

ดังนั้น อัตราเร็วของการพายเรือตามน้ำเป็น $x + 4$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง

และอัตราเร็วของการพายเรือทวนน้ำเป็น $x - 4$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง

จากเงื่อนไขต่าง ๆ ในโจทย์ นำมาเขียนแผนภาพได้ดังนี้

อัตราเร็วของการพายเรือตามน้ำ $x + 4$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง

ใช้เวลา $\frac{4}{x+4}$ ชั่วโมง

ขาไปพายเรือตามน้ำ

ระยะทาง 4 กิโลเมตร

อัตราเร็วของการพายเรือทวนน้ำ $x - 4$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง

ใช้เวลา $\frac{4}{x-4}$ ชั่วโมง

ขากลับพายเรือทวนน้ำ

จากเงื่อนไขต่าง ๆ ในโจทย์ นำมาเขียนตารางแสดงความสัมพันธ์ได้ดังนี้

สถานการณ์	**อัตราเร็ว (กิโลเมตร / ชั่วโมง)**	**เวลาที่ใช้ในการพายเรือให้ได้ระยะทาง 4 กิโลเมตร (ชั่วโมง)**
พายเรือตามน้ำ	$x + 4$	$\frac{4}{x+4}$
พายเรือทวนน้ำ	$x - 4$	$\frac{4}{x-4}$

เนื่องจาก โจทย์กำหนดให้ใช้เวลาพายเรือขากลับมากกว่าขาไป 15 นาที

หรือ $\frac{15}{60} = \frac{1}{4}$ ชั่วโมง

จะได้สมการเป็น $\frac{4}{x-4} - \frac{4}{x+4} = \frac{1}{4}$

นำ $4(x - 4)(x + 4)$ มาคูณทั้งสองข้างของสมการ

จะได้

$$4(4)(x + 4) - 4(4)(x - 4) = (x - 4)(x + 4)$$

$$16x + 64 - 16x + 64 = x^2 - 16$$

$$x^2 - 144 = 0$$

$$(x - 12)(x + 12) = 0$$

ดังนั้น $x - 12 = 0$ หรือ $x + 12 = 0$

จะได้ $x = 12$ หรือ $x = -12$

ตรวจสอบ เนื่องจาก x แทนอัตราเร็วของการพายเรือในน้ำนิ่ง ซึ่งจะต้องเป็นจำนวนบวก

ดังนั้น -12 จึงไม่ใช่อัตราเร็วของการพายเรือในน้ำนิ่ง

ถ้า อัตราเร็วของการพายเรือในน้ำนิ่งเป็น 12 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

จะได้ อัตราเร็วของการพายเรือทวนน้ำเป็น $12 - 4 = 8$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง

และ อัตราเร็วของการพายเรือตามน้ำเป็น $12 + 4 = 16$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง

ดังนั้น ระยะทาง 4 กิโลเมตร จะใช้เวลาในการพายเรือทวนน้ำ $4 \div 8 = \frac{1}{2}$ ชั่วโมง

และ ระยะทาง 4 กิโลเมตร จะใช้เวลาในการพายเรือตามน้ำ $4 \div 16 = \frac{1}{4}$ ชั่วโมง

ดังนั้น การพายเรือทวนน้ำจะใช้เวลามากกว่าการพายเรือตามน้ำ

$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ ชั่วโมง หรือ $\frac{1}{4} \times 60 = 15$ นาที

ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

ดังนั้น อัตราเร็วของการพายเรือในน้ำนิ่งเป็น 12 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

นั่นคือ อัตราเร็วของการพายเรือทวนน้ำเป็น $12 - 4 = 8$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง

2. 5 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

แนวคิด ให้ กระแสน้ำมีอัตราเร็ว x กิโลเมตรต่อชั่วโมง

เนื่องจาก ในเวลา 12 นาที กรรเชียงเรือตามน้ำได้ระยะทาง 5 กิโลเมตร

ดังนั้น ในเวลา 60 นาที จะกรรเชียงเรือตามน้ำได้ระยะทาง $\frac{5}{12} \times 60 = 25$ กิโลเมตร

จะได้ อัตราเร็วของการกรรเชียงเรือตามน้ำเป็น 25 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

ดังนั้น อัตราเร็วของการกรรเชียงเรือในน้ำนิ่งเป็น $25 - x$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง

นั่นคือ อัตราเร็วของการกรรเชียงเรือทวนน้ำเป็น $(25 - x) - x = 25 - 2x$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง

ระยะทาง 5 กิโลเมตร จะใช้เวลากรรเชียงเรือทวนน้ำ $\frac{5}{25 - 2x}$ ชั่วโมง

เนื่องจาก ขากลับกรรเชียงเรือทวนน้ำใช้เวลา 20 นาที หรือ $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$ ชั่วโมง

จะได้สมการเป็น $\frac{5}{25 - 2x} = \frac{1}{3}$

นำ $3(25 - 2x)$ มาคูณทั้งสองข้างของสมการ

จะได้ $15 = 25 - 2x$

$2x = 25 - 15$

ดังนั้น $x = 5$

ตรวจสอบ ให้ กระแสน้ำมีอัตราเร็ว 5 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

อัตราเร็วของการกรรเชียงเรือตามน้ำเป็น 25 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

ดังนั้น อัตราเร็วของการกรรเชียงเรือในน้ำนิ่งเป็น $25 - 5 = 20$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง

จะได้ อัตราเร็วของการกรรเชียงเรือทวนน้ำเป็น $20 - 5 = 15$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง

แสดงว่า ระยะทาง 15 กิโลเมตร ใช้เวลากรรเชียงเรือทวนน้ำ 1 ชั่วโมง

ดังนั้น ระยะทาง 5 กิโลเมตร จะใช้เวลากรรเชียงเรือทวนน้ำ $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ ชั่วโมง

หรือ $\frac{1}{3} \times 60 = 20$ นาที ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

นั่นคือ กระแสน้ำมีอัตราเร็ว 5 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

3. 19 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

แนวคิด 1 ให้ อัตราเร็วของเรือในน้ำนิ่งเป็น x กิโลเมตรต่อชั่วโมง

เนื่องจาก กระแสน้ำมีอัตราเร็ว 5 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

ดังนั้น อัตราเร็วของเรือในการแล่นตามน้ำเป็น $x + 5$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง

และ อัตราเร็วของเรือในการแล่นทวนน้ำเป็น $x - 5$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง

ระยะทาง 48 กิโลเมตร เรือใช้เวลาในการแล่นตามน้ำ $\frac{48}{x + 5}$ ชั่วโมง

ระยะทาง 28 กิโลเมตร เรือใช้เวลาในการแล่นทวนน้ำ $\frac{28}{x - 5}$ ชั่วโมง

เนื่องจาก เรือใช้เวลาในการเดินทางทั้งหมด 4 ชั่วโมง

จะได้สมการเป็น
$$\frac{48}{x + 5} + \frac{28}{x - 5} = 4$$
$$\frac{12}{x + 5} + \frac{7}{x - 5} = 1$$

นำ $(x + 5)(x - 5)$ มาคูณทั้งสองข้างของสมการ โดยที่ $x + 5 \neq 0$ และ $x - 5 \neq 0$

จะได้
$$\begin{aligned} 12(x - 5) + 7(x + 5) &= (x + 5)(x - 5) \\ 12x - 60 + 7x + 35 &= x^2 - 25 \\ x^2 - 19x &= 0 \\ x(x - 19) &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x = 0$ หรือ $x - 19 = 0$

จะได้ $x = 0$ หรือ $x = 19$

แนวคิด 2 ให้ อัตราเร็วของเรือในน้ำนิ่งเป็น x กิโลเมตรต่อชั่วโมง

กระแสน้ำมีอัตราเร็ว 5 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

จากเงื่อนไขต่าง ๆ ในโจทย์ นำมาเขียนตารางแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอัตราเร็ว ระยะทาง และเวลา ได้ดังนี้

สถานการณ์	อัตราเร็ว (กิโลเมตร/ชั่วโมง)	ระยะทาง (กิโลเมตร)	เวลา (ชั่วโมง)
เรือแล่นตามน้ำ	$x+5$	48	$\frac{48}{x+5}$
เรือแล่นทวนน้ำ	$x-5$	28	$\frac{28}{x-5}$
		รวม	4

เนื่องจากโจทย์กำหนดให้ เรือยนต์ใช้เวลาในการเดินทาง 4 ชั่วโมง

จะได้สมการเป็น $\frac{48}{x+5}+\frac{28}{x-5} = 4$

$$\frac{12}{x+5}+\frac{7}{x-5} = 1$$

นำ $(x+5)(x-5)$ มาคูณทั้งสองข้างของสมการ โดยที่ $x+5 \neq 0$ และ $x-5 \neq 0$

จะได้
$$12(x-5)+7(x+5) = (x+5)(x-5)$$
$$12x-60+7x+35 = x^2-25$$
$$x^2-19x = 0$$
$$x(x-19) = 0$$

ดังนั้น $x = 0$ หรือ $x-19 = 0$

จะได้ $x = 0$ หรือ $x = 19$

ตรวจสอบ เนื่องจาก x แทนอัตราเร็วของเรือในน้ำนิ่ง ซึ่งจะต้องเป็นจำนวนบวก

ดังนั้น 0 จึงไม่ใช่อัตราเร็วของเรือในน้ำนิ่ง

ถ้าให้ อัตราเร็วของเรือในน้ำนิ่งเป็น 19 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

และกระแสน้ำมีอัตราเร็ว 5 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

ดังนั้น อัตราเร็วของเรือในการแล่นตามน้ำเป็น $19+5 = 24$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง

ระยะทาง 48 กิโลเมตร เรือจะใช้เวลาในการแล่นตามน้ำ $\frac{48}{24} = 2$ ชั่วโมง

และ อัตราเร็วของเรือในการแล่นทวนน้ำเป็น $19-5 = 14$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง

ระยะทาง 28 กิโลเมตร เรือจะใช้เวลาในการแล่นทวนน้ำ $\frac{28}{14} = 2$ ชั่วโมง

ดังนั้น เรือใช้เวลาในการเดินทางทั้งหมด $2+2 = 4$ ชั่วโมง

ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

นั่นคือ อัตราเร็วของเรือในน้ำนิ่งเป็น 19 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

4. 10 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

แนวคิด 1

ให้กระแสน้ำมีอัตราเร็ว x กิโลเมตรต่อชั่วโมง

เนื่องจาก เรือแล่นในน้ำนิ่งด้วยอัตราเร็ว 30 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

ดังนั้น อัตราเร็วของเรือในการแล่นตามน้ำเป็น $30 + x$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง

และ อัตราเร็วของเรือในการแล่นทวนน้ำเป็น $30 - x$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง

ระยะทาง 10 กิโลเมตร เรือใช้เวลาในการแล่นตามน้ำ $\frac{10}{30+x}$ ชั่วโมง

ระยะทาง 10 กิโลเมตร เรือใช้เวลาในการแล่นทวนน้ำ $\frac{10}{30-x}$ ชั่วโมง

เนื่องจากเรือใช้เวลาในการเดินทางทั้งไปและกลับ 45 นาที หรือ $\frac{45}{60} = \frac{3}{4}$ ชั่วโมง

จะได้สมการเป็น $\frac{10}{30+x} + \frac{10}{30-x} = \frac{3}{4}$

นำ $4(30 + x)(30 - x)$ มาคูณทั้งสองข้างของสมการ โดยที่ $30 + x \neq 0$ และ $30 - x \neq 0$

จะได้
$$
\begin{aligned}
(10)(4)(30 - x) + (10)(4)(30 + x) &= 3(30 + x)(30 - x) \\
1,200 - 40x + 1,200 + 40x &= 2,700 - 3x^2 \\
3x^2 - 300 &= 0 \\
x^2 - 100 &= 0 \\
(x + 10)(x - 10) &= 0
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $x + 10 = 0$ หรือ $x - 10 = 0$

จะได้ $x = -10$ หรือ $x = 10$

แนวคิด 2 ให้ กระแสน้ำมีอัตราเร็วเป็น x กิโลเมตรต่อชั่วโมง

เนื่องจาก เรือแล่นในน้ำนิ่งด้วยอัตราเร็ว 30 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

จากเงื่อนไขต่าง ๆ ในโจทย์ นำมาเขียนตารางแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอัตราเร็ว ระยะทาง และเวลา ได้ดังนี้

สถานการณ์	**อัตราเร็ว (กิโลเมตร/ชั่วโมง)**	**ระยะทาง (กิโลเมตร)**	**เวลา (ชั่วโมง)**
เรือแล่นตามน้ำ	$30 + x$	10	$\frac{10}{30+x}$
เรือแล่นทวนน้ำ	$30 - x$	10	$\frac{10}{30-x}$
		รวม	$\frac{45}{60}$ หรือ $\frac{3}{4}$

จะได้สมการเป็น $\frac{10}{30+x} + \frac{10}{30-x} = \frac{3}{4}$

นำ $4(30+x)(30-x)$ มาคูณทั้งสองข้างของสมการ โดยที่ $30+x \neq 0$ และ $30-x \neq 0$

จะได้ $(10)(4)(30-x)+(10)(4)(30+x) = 3(30+x)(30-x)$

$$1,200-40x+1,200+40x = 2,700-3x^2$$

$$3x^2 = 300$$

$$x^2 = 100$$

ดังนั้น $x = \pm 10$

ตรวจสอบ เนื่องจาก x แทนอัตราเร็วของกระแสน้ำ ซึ่งจะต้องเป็นจำนวนบวก

ดังนั้น -10 จึงไม่ใช่อัตราเร็วของกระแสน้ำ

ถ้าให้ อัตราเร็วของกระแสน้ำเป็น 10 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

และ เรือแล่นในน้ำนิ่งด้วยอัตราเร็ว 30 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

ดังนั้น อัตราเร็วของเรือในการแล่นตามน้ำเป็น $30+10 = 40$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง

ระยะทาง 10 กิโลเมตร เรือจะใช้เวลาในการแล่นตามน้ำ $\frac{10}{40} = \frac{1}{4}$ ชั่วโมง

และ อัตราเร็วของเรือในการแล่นทวนน้ำเป็น $30-10 = 20$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง

ระยะทาง 10 กิโลเมตร เรือจะใช้เวลาในการแล่นทวนน้ำ $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ ชั่วโมง

ดังนั้น เรือใช้เวลาในการเดินทางทั้งไปและกลับ $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ ชั่วโมง

หรือ $\frac{3}{4} \times 60 = 45$ นาที ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

นั่นคือ อัตราเร็วของกระแสน้ำเป็น 10 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

5. อัตราเร็วของกระแสน้ำเป็น 6 กิโลเมตรต่อชั่วโมง
   อัตราเร็วของเรือในน้ำนิ่งเป็น 20 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

แนวคิด 1 ให้ อัตราเร็วของกระแสน้ำเป็น x กิโลเมตรต่อชั่วโมง

เนื่องจาก อัตราเร็วของเรือที่แล่นในน้ำนิ่งมากกว่าสามเท่าของอัตราเร็วของกระแสน้ำ อยู่ชั่วโมงละ 2 กิโลเมตร

จะได้ อัตราเร็วของเรือที่แล่นในน้ำนิ่งเป็น $3x+2$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง

ดังนั้น อัตราเร็วของเรือในการแล่นทวนน้ำเป็น $(3x+2)-x = 2x+2$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง

และ อัตราเร็วของเรือในการแล่นตามน้ำเป็น $(3x+2)+x = 4x+2$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง

ระยะทาง 28 กิโลเมตร เรือใช้เวลาในการแล่นทวนน้ำ $\frac{28}{2x+2} = \frac{14}{x+1}$ ชั่วโมง

ระยะทาง 26 กิโลเมตร เรือใช้เวลาในการแล่นตามน้ำ $\frac{26}{4x+2} = \frac{13}{2x+1}$ ชั่วโมง

เนื่องจากเวลาที่ใช้แล่นทวนน้ำมากกว่าเวลาที่ใช้แล่นตามน้ำ 1 ชั่วโมง

จะได้สมการเป็น $\frac{14}{x+1} - \frac{13}{2x+1} = 1$

นำ $(x+1)(2x+1)$ มาคูณทั้งสองข้างของสมการ โดยที่ $x+1 \neq 0$ และ $2x+1 \neq 0$

จะได้
$$\begin{aligned} 14(2x+1) - 13(x+1) &= (x+1)(2x+1) \\ 28x + 14 - 13x - 13 &= 2x^2 + 3x + 1 \\ 2x^2 - 12x &= 0 \\ x^2 - 6x &= 0 \\ x(x-6) &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x = 0$ หรือ $x - 6 = 0$

จะได้ $x = 0$ หรือ $x = 6$

แนวคิด 2 ให้ อัตราเร็วของกระแสน้ำเป็น x กิโลเมตรต่อชั่วโมง

เนื่องจาก อัตราเร็วของเรือลำหนึ่งที่แล่นในน้ำนิ่งมากกว่าสามเท่าของอัตราเร็วของกระแสน้ำอยู่ชั่วโมงละ 2 กิโลเมตร

ดังนั้น อัตราเร็วของเรือในน้ำนิ่ง เป็น $3x + 2$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง

จากเงื่อนไขต่างๆ ในโจทย์ นำมาเขียนตารางแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอัตราเร็ว ระยะทาง และเวลา ได้ดังนี้

สถานการณ์	**อัตราเร็ว (กิโลเมตร / ชั่วโมง)**	**ระยะทาง (กิโลเมตร)**	**เวลา (ชั่วโมง)**
เรือแล่นตามน้ำ	$(3x+2)+x$ หรือ $4x+2$	26	$\frac{26}{4x+2}$ หรือ $\frac{13}{2x+1}$
เรือแล่นทวนน้ำ	$(3x+2)-x$ หรือ $2x+2$	28	$\frac{28}{2x+2}$ หรือ $\frac{14}{x+1}$

เนื่องจาก โจทย์กำหนดให้ เรือแล่นทวนน้ำในระยะทาง 28 กิโลเมตร

จะใช้เวลามากกว่าแล่นตามน้ำในระยะทาง 26 กิโลเมตร อยู่ 1 ชั่วโมง

จะได้สมการเป็น $\frac{14}{x+1} - \frac{13}{2x+1} = 1$

นำ $(x+1)(2x+1)$ มาคูณทั้งสองข้างของสมการ โดยที่ $x+1 \neq 0$ และ $2x+1 \neq 0$

จะได้
$$\begin{aligned} 14(2x+1) - 13(x+1) &= (x+1)(2x+1) \\ 28x + 14 - 13x - 13 &= 2x^2 + 3x + 1 \\ 2x^2 - 12x &= 0 \\ x^2 - 6x &= 0 \\ x(x-6) &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x = 0$ หรือ $x - 6 = 0$

จะได้ $x = 0$ หรือ $x = 6$

ตรวจสอบ เนื่องจาก x แทนอัตราเร็วของกระแสน้ำ ซึ่งจะต้องเป็นจำนวนบวก

ดังนั้น 0 จึงไม่ใช่อัตราเร็วของกระแสน้ำ

ถ้าให้ อัตราเร็วของกระแสน้ำเป็น 6 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

จะได้ อัตราเร็วของเรือในน้ำนิ่งเป็น $3(6)+2 = 20$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง

ดังนั้น อัตราเร็วของเรือในการแล่นตามน้ำเป็น $20+6 = 26$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง

ระยะทาง 26 กิโลเมตร เรือจะใช้เวลาในการแล่นตามน้ำ $\frac{26}{26} = 1$ ชั่วโมง

และ อัตราเร็วของเรือในการแล่นทวนน้ำเป็น $20-6 = 14$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง

ระยะทาง 28 กิโลเมตร เรือจะใช้เวลาในการแล่นทวนน้ำ $\frac{28}{14} = 2$ ชั่วโมง

ดังนั้น เรือใช้เวลาในการแล่นทวนน้ำมากกว่าแล่นตามน้ำ เท่ากับ $2-1 = 1$ ชั่วโมง

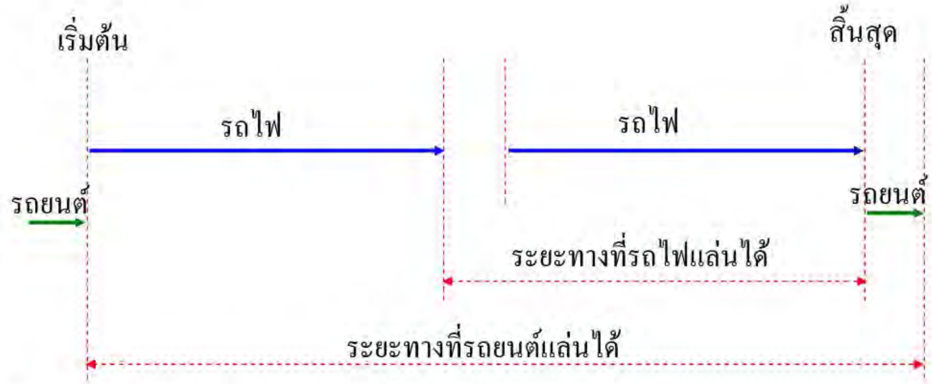
ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

นั่นคือ อัตราเร็วของกระแสน้ำเป็น 6 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

และ อัตราเร็วของเรือในน้ำนิ่งเป็น 20 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายกิจกรรม “รถไฟ” หน้า 183

1. 89 กิโลเมตรต่อชั่วโมง



แนวคิด 1 ให้ อัตราเร็วของรถยนต์เป็น x กิโลเมตรต่อชั่วโมง

เนื่องจาก อัตราเร็วของรถไฟเป็น 60 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

ดังนั้น ในเวลา 1 ชั่วโมง รถยนต์แล่นได้ระยะทางมากกว่ารถไฟ $x-60$ กิโลเมตร

และเนื่องจาก รถยนต์ยาว 3 เมตร และรถไฟยาว 200 เมตร

ดังนั้น ความยาวของรถยนต์และความยาวของรถไฟรวมกันเป็น $3+200 = 203$ เมตร

หรือ $\frac{203}{1,000}$ กิโลเมตร

เมื่อรถยนต์แล่นผ่านพ้นรถไฟ จะได้ว่า เวลาที่รถยนต์แล่นตามและผ่านพ้นรถไฟ

เท่ากับ $\dfrac{\text{ผลบวกของความยาวของรถยนต์และความยาวของรถไฟ}}{\text{ผลต่างของอัตราเร็วของรถยนต์และรถไฟ}}$

$$= \frac{\frac{203}{1,000}}{x - 60}$$

$$= \frac{203}{1,000(x-60)} \text{ ชั่วโมง}$$

แต่ รถยนต์แล่นผ่านพ้นรถไฟใช้เวลา 25.2 วินาที หรือ $\frac{25.2}{3,600} = \frac{7}{1,000}$ ชั่วโมง

จะได้สมการเป็น $\frac{203}{1,000(x-60)} = \frac{7}{1,000}$

$$\frac{29}{x-60} = 1$$

นำ $(x-60)$ มาคูณทั้งสองข้างของสมการ โดยที่ $x-60 \neq 0$

จะได้ $29 = x - 60$

ดังนั้น $x = 89$

แนวคิด 2 ให้ อัตราเร็วของรถยนต์เป็น x กิโลเมตรต่อชั่วโมง

เนื่องจาก อัตราเร็วของรถไฟเป็น 60 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

ดังนั้น ในเวลา 1 ชั่วโมง รถยนต์แล่นได้ระยะทางมากกว่ารถไฟ $x-60$ กิโลเมตร

หรือ ในเวลา 3,600 วินาที รถยนต์แล่นได้ระยะทางมากกว่ารถไฟ $x-60$ กิโลเมตร

ดังนั้น ในเวลา 25.2 วินาที รถยนต์แล่นได้ระยะทางมากกว่ารถไฟ

$\frac{x-60}{3,600} \times 25.2$ กิโลเมตร

แต่ ระยะทางที่รถยนต์แล่นผ่านพ้นรถไฟ เท่ากับผลบวกของความยาวของรถยนต์และความยาวของรถไฟ เท่ากับ $3 + 200 = 203$ เมตร หรือ $\frac{203}{1,000}$ กิโลเมตร

จะได้สมการเป็น $\frac{x-60}{3,600} \times 25.2 = \frac{203}{1,000}$

$$\frac{x-60}{3,600} \times \frac{252}{10} = \frac{203}{1,000}$$

$$\frac{x-60}{100} \times \frac{7}{10} = \frac{203}{1,000}$$

$$7(x-60) = 203$$

$$x-60 = 29$$

ดังนั้น $x = 89$

ตรวจสอบ ให้ อัตราเร็วของรถยนต์เป็น 89 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

ในเวลา 25.2 วินาที รถยนต์แล่นได้ระยะทาง $\frac{25.2}{3,600} \times 89 = \frac{623}{1,000}$ กิโลเมตร

$= 623$ เมตร

เนื่องจาก อัตราเร็วของรถไฟเป็น 60 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

ในเวลา 25.2 วินาที รถไฟแล่นได้ระยะทาง $\frac{25.2}{3,600} \times 60 = \frac{420}{1,000}$ กิโลเมตร

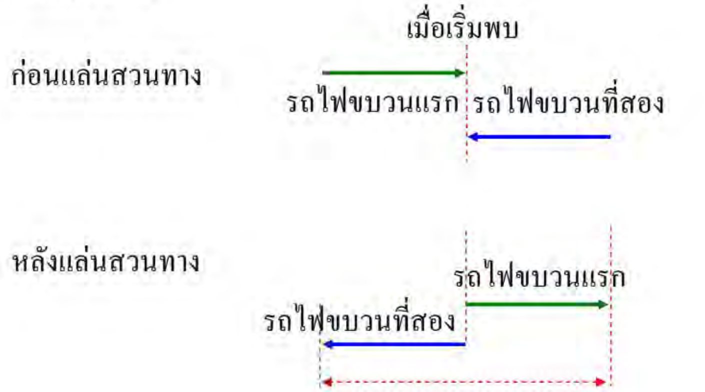
$= 420$ เมตร

ดังนั้น รถยนต์แล่นได้ระยะทางมากกว่ารถไฟ $623 - 420 = 203$ เมตร

ซึ่งเท่ากับ ผลบวกของความยาวของรถยนต์และความยาวของรถไฟ ตามเงื่อนไขในโจทย์

นั่นคือ อัตราเร็วของรถยนต์เป็น 89 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

2. 75 กิโลเมตรต่อชั่วโมง



ระยะทางที่รถไฟทั้งสองขบวนแล่นผ่านพ้น

แนวคิด 1 ให้ อัตราเร็วของรถไฟแต่ละขบวนเป็น x กิโลเมตรต่อชั่วโมง

ดังนั้น อัตราเร็วของรถไฟทั้งสองขบวนเมื่อแล่นสวนกันเป็น $x + x = 2x$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง

เนื่องจาก รถไฟขบวนแรกยาว 350 เมตร และรถไฟขบวนที่สองยาว 400 เมตร

ดังนั้น รถไฟทั้งสองขบวนยาวรวมกัน เท่ากับ $350 + 400 = 750$ เมตร

หรือ $\frac{750}{1,000}$ กิโลเมตร

เมื่อรถไฟแล่นสวนกัน จะได้ว่า เวลาที่รถไฟทั้งสองขบวนแล่นสวนทางและผ่านพ้นกัน

เท่ากับ $\dfrac{\text{ผลบวกของความยาวของรถไฟทั้งสองขบวน}}{\text{ผลบวกของอัตราเร็วของรถไฟทั้งสองขบวน}}$

$$= \frac{\frac{750}{1,000}}{2x}$$

$$= \frac{75}{200x} \text{ ชั่วโมง}$$

แต่ รถไฟทั้งสองขบวนแล่นสวนทางกันและผ่านพ้นกันในเวลา 18 วินาที

หรือ $\frac{18}{3,600} = \frac{1}{200}$ ชั่วโมง

จะได้สมการเป็น $\frac{75}{200x} = \frac{1}{200}$

นำ 200x มาคูณทั้งสองข้างของสมการ โดยที่ $x \neq 0$

จะได้ $75 = x$

แนวคิด 2 ให้ อัตราเร็วของรถไฟแต่ละขบวนเป็น x กิโลเมตรต่อชั่วโมง

จะได้ ในเวลา 1 ชั่วโมง รถไฟขบวนที่หนึ่งแล่นได้ทาง x กิโลเมตร

และ ในเวลา 1 ชั่วโมง รถไฟขบวนที่สองแล่นได้ทาง x กิโลเมตร

ดังนั้น ในเวลา 1 ชั่วโมง รถไฟทั้งสองขบวนแล่นได้ทาง 2x กิโลเมตร

หรือ ในเวลา 3,600 วินาที รถไฟทั้งสองขบวนแล่นได้ทาง 2x กิโลเมตร

จะได้ ในเวลา 18 วินาที รถไฟทั้งสองขบวนแล่นได้ทาง $\frac{2x}{3,600} \times 18 = \frac{x}{100}$ กิโลเมตร

เนื่องจาก รถไฟสองขบวนนี้ยาว 350 เมตร และ 400 เมตร

เมื่อรถไฟทั้งสองขบวนแล่นสวนทางกัน จะผ่านพ้นกันในเวลา 18 วินาที

แสดงว่า ในเวลา 18 วินาที รถไฟทั้งสองขบวนแล่นได้ทาง $350 + 400 = 750$ เมตร

หรือ $\frac{750}{1,000} = \frac{75}{100}$ กิโลเมตร

จะได้สมการเป็น $\frac{x}{100} = \frac{75}{100}$

นำ 100 มาคูณทั้งสองข้างของสมการ

จะได้ $x = 75$

ตรวจสอบ ให้ อัตราเร็วของรถไฟแต่ละขบวนเป็น 75 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

ผลบวกของอัตราเร็วของรถไฟสองขบวนเมื่อแล่นสวนกัน เป็น $75 + 75$

$= 150$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง

ในเวลา 1 ชั่วโมง รถไฟทั้งสองขบวนแล่นได้ระยะทาง 150 กิโลเมตร

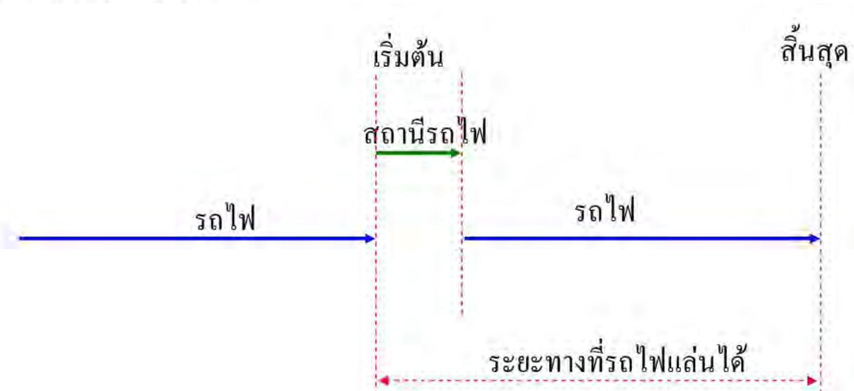
ในเวลา 18 วินาที รถไฟทั้งสองขบวนแล่นได้ระยะทาง $\frac{18}{3,600} \times 150 = \frac{750}{1,000}$ กิโลเมตร

$= 750$ เมตร

ซึ่งเท่ากับ ความยาวของรถไฟทั้งสองขบวนรวมกัน ตามเงื่อนไขในโจทย์

นั่นคือ อัตราเร็วของรถไฟแต่ละขบวนเป็น 75 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

3. 60 กิโลเมตรต่อชั่วโมง



แนวคิด เนื่องจาก ระยะทางที่รถไฟวิ่งผ่านพ้นสมศักดิ์ เท่ากับความยาวของรถไฟ 80 เมตร และระยะทางที่รถไฟวิ่งผ่านพ้นสถานีรถไฟเท่ากับผลบวกของความยาวของรถไฟกับความยาวของสถานีเป็น $80 + 20 = 100$ เมตร

ให้ รถไฟวิ่งด้วยอัตราเร็ว x กิโลเมตรต่อชั่วโมง

จะได้ รถไฟวิ่งได้ระยะทาง x กิโลเมตร หรือ 1,000x เมตร ใช้เวลา 1 ชั่วโมง หรือ $60 \times 60 = 3{,}600$ วินาที

รถไฟวิ่งได้ระยะทาง 80 เมตร จะใช้เวลา $\frac{3{,}600}{1{,}000x} \times 80 = \frac{288}{x}$ วินาที

และ รถไฟวิ่งได้ระยะทาง 100 เมตร จะใช้เวลา $\frac{3{,}600}{1{,}000x} \times 100 = \frac{360}{x}$ วินาที

ดังนั้น รถไฟวิ่งผ่านพ้นสมศักดิ์และวิ่งผ่านพ้นสถานีรถไฟใช้เวลาต่างกันอยู่

$\frac{360}{x} - \frac{288}{x} = \frac{72}{x}$ วินาที

เนื่องจาก รถไฟวิ่งผ่านพ้นสมศักดิ์และวิ่งผ่านพ้นสถานีรถไฟใช้เวลาต่างกัน 1.2 วินาที

จะได้สมการเป็น
$$\frac{72}{x} = 1.2$$
$$\frac{72}{x} = \frac{12}{10}$$
$$\frac{6}{x} = \frac{1}{10}$$

ดังนั้น $x = 60$

ตรวจสอบ ให้รถไฟแล่นด้วยอัตราเร็ว 60 กิโลเมตรต่อชั่วโมง หรือ $\frac{60 \times 1{,}000}{60 \times 60} = \frac{50}{3}$ เมตรต่อวินาที

เนื่องจาก รถไฟวิ่งผ่านพ้นสมศักดิ์จะวิ่งได้ระยะทาง 80 เมตร ในเวลา $\frac{80}{\frac{50}{3}} = 4.8$ วินาที

และรถไฟวิ่งผ่านพ้นสถานีรถไฟจะวิ่งได้ระยะทาง 100 เมตร ในเวลา $\frac{100}{\frac{50}{3}} = 6$ วินาที

ดังนั้น รถไฟวิ่งผ่านพ้นสมศักดิ์และวิ่งผ่านพ้นสถานีรถไฟใช้เวลาต่างกัน $6 - 4.8 = 1.2$ วินาที ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

นั่นคือ รถไฟแล่นด้วยอัตราเร็ว 60 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

4. 100 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

แนวคิด 1 ให้ อัตราเร็วของรถไฟขบวน ก เป็น x กิโลเมตรต่อชั่วโมง

รถไฟขบวน ข แล่นด้วยอัตราเร็วน้อยกว่าอัตราเร็วของขบวน ก 20 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

จะได้ อัตราเร็วของรถไฟขบวน ข เป็น $x - 20$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง

ผลบวกของอัตราเร็วของรถไฟทั้งสองขบวนเมื่อแล่นสวนกันเป็น $x + (x - 20)$

$= 2x - 20$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง

เนื่องจาก รถไฟขบวน ก ยาว 80 เมตร และรถไฟขบวน ข ยาว 65 เมตร

รถไฟทั้งสองขบวนยาวรวมกัน เท่ากับ $80 + 65 = 145$ เมตร หรือ $\frac{145}{1{,}000}$ กิโลเมตร

เวลาที่รถไฟขบวน ก วิ่งผ่านสมศรีเท่ากับ $\dfrac{\frac{80}{1,000}}{x} = \dfrac{80}{1,000x}$ ชั่วโมง

เมื่อรถไฟแล่นสวนกันจะได้ว่า เวลาที่รถไฟทั้งสองขบวนแล่นสวนทางและผ่านพ้นกัน

เท่ากับ $\dfrac{\text{ผลบวกของความยาวของรถไฟทั้งสองขบวน}}{\text{ผลบวกของอัตราเร็วของรถไฟทั้งสองขบวน}}$

ดังนั้น รถไฟทั้งสองขบวนแล่นสวนทางกันและผ่านพ้นกันในเวลา

$$\dfrac{\frac{145}{1,000}}{2x-20} = \dfrac{145}{1,000(2x-20)} \text{ ชั่วโมง}$$

เนื่องจากรถไฟขบวน ก วิ่งผ่านสมศรีใช้เวลาน้อยกว่าวิ่งสวนกับขบวน ข

เท่ากับ 0.02 วินาที หรือ $\dfrac{2}{100 \times 3,600} = \dfrac{2}{360,000}$ ชั่วโมง

จะได้สมการเป็น $\dfrac{145}{1,000(2x-20)} - \dfrac{80}{1,000x} = \dfrac{2}{360,000}$

$$\dfrac{145}{2(x-10)} - \dfrac{80}{x} = \dfrac{2}{360}$$

นำ $360x(x-10)$ มาคูณทั้งสองข้างของสมการ โดยที่ $x \neq 0$ และ $x-10 \neq 0$

จะได้
$$\begin{aligned}
145(180x) - 80(360)(x-10) &= 2(x)(x-10) \\
26,100x - 28,800x + 288,000 &= 2x^2 - 20x \\
2x^2 + 2,680x - 288,000 &= 0 \\
x^2 + 1,340x - 144,000 &= 0 \\
(x+1,440)(x-100) &= 0
\end{aligned}$$

ดังนั้น $x + 1,440 = 0$ หรือ $x - 100 = 0$

จะได้ $x = -1,440$ หรือ $x = 100$

แนวคิด 2 รถไฟขบวน ก แล่นผ่านสมศรี ซึ่งอยู่กับที่และถือว่าไม่มีความยาวได้ทาง 80 เมตร

$$= \frac{80}{1,000} \text{ กิโลเมตร}$$

รถไฟขบวน ก แล่นสวนทางกับรถไฟขบวน ข ได้ทาง $80 + 65 = 145$ เมตร

$$= \frac{145}{1,000} \text{ กิโลเมตร}$$

ให้อัตราเร็วของรถไฟขบวน ก เป็น x กิโลเมตรต่อชั่วโมง

ดังนั้น เวลาที่รถไฟขบวน ก แล่นผ่านสมศรี เท่ากับ $\dfrac{\frac{80}{1,000}}{x} = \dfrac{80}{1,000x}$ ชั่วโมง

รถไฟขบวน ข แล่นด้วยอัตราเร็วน้อยกว่ารถไฟขบวน ก 20 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

ดังนั้น รถไฟขบวน ข แล่นด้วยอัตราเร็ว $x - 20$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง

เวลาที่รถไฟขบวน ก แล่นสวนทางกับรถไฟขบวน ข เท่ากับ $\dfrac{\frac{145}{1,000}}{x + x - 20}$

$$= \frac{145}{1,000(2x-20)} \text{ ชั่วโมง}$$

สมศรีสังเกตว่ารถไฟขบวน ก วิ่งผ่านสมศรีใช้เวลาน้อยกว่าวิ่งสวนกับขบวน ข 0.02 วินาที หรือ $\frac{0.02}{3,600} = \frac{2}{360,000}$ ชั่วโมง

จะได้สมการเป็น $\frac{145}{1,000(2x-20)} - \frac{80}{1,000x} = \frac{2}{360,000}$

$$\frac{145}{2x-20} - \frac{80}{x} = \frac{2}{360}$$

$$\frac{145}{2(x-10)} - \frac{80}{x} = \frac{1}{180}$$

นำ $180x(x-10)$ มาคูณทั้งสองข้างของสมการ โดยที่ $x \neq 0$ และ $x - 10 \neq 0$

จะได้ $145(90x) - 80(180)(x-10) = x(x-10)$

$$13,050x - 14,400x + 144,000 = x^2 - 10x$$

$$x^2 + 1,340x - 144,000 = 0$$

$$(x + 1,440)(x - 100) = 0$$

ดังนั้น $x + 1,440 = 0$ หรือ $x - 100 = 0$

จะได้ $x = -1,440$ หรือ $x = 100$

ตรวจสอบ เนื่องจาก x แทนอัตราเร็วของรถไฟขบวน ก ซึ่งจะต้องเป็นจำนวนบวก

ดังนั้น -1,440 จึงไม่ใช่อัตราเร็วของรถไฟขบวน ก

ถ้าให้ อัตราเร็วของรถไฟขบวน ก เป็น 100 กิโลเมตรต่อชั่วโมง หรือ

$$\frac{100 \times 1,000}{3,600} = \frac{250}{9} \text{ เมตรต่อวินาที}$$

อัตราเร็วของรถไฟขบวน ข จะเป็น $100 - 20 = 80$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง หรือ

$$\frac{80 \times 1,000}{3,600} = \frac{200}{9} \text{ เมตรต่อวินาที}$$

เวลาที่รถไฟขบวน ก วิ่งผ่านสมศรี เท่ากับ $\dfrac{80}{\frac{250}{9}} = \frac{72}{25} = 2.88$ วินาที

ผลบวกของอัตราเร็วของรถไฟทั้งสองขบวนเมื่อแล่นสวนทางกันและผ่านพ้นกัน

เท่ากับ $\frac{250}{9} + \frac{200}{9} = \frac{450}{9}$ เมตรต่อวินาที หรือ 50 เมตรต่อวินาที

รถไฟทั้งสองขบวนแล่นสวนทางกันและผ่านพ้นกันในเวลา $\frac{145}{50} = 2.9$ วินาที

ดังนั้น รถไฟขบวน ก วิ่งผ่านสมศรีใช้เวลาน้อยกว่าวิ่งสวนกับขบวน ข เท่ากับ

$2.9 - 2.88 = 0.02$ วินาที ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

นั่นคือ อัตราเร็วของรถไฟขบวน ก เป็น 100 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

เฉลยกิจกรรม "ลองคิดดู" หน้า 191

เพราะ ถ้าพิจารณาในกรณีทั่วไปจะได้ว่า

$$\frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{n \times n}{(n+1)n} - \frac{(n-1)(n+1)}{n(n+1)}$$

$$= \frac{n^2}{(n+1)n} - \frac{n^2 - 1}{(n+1)n}$$

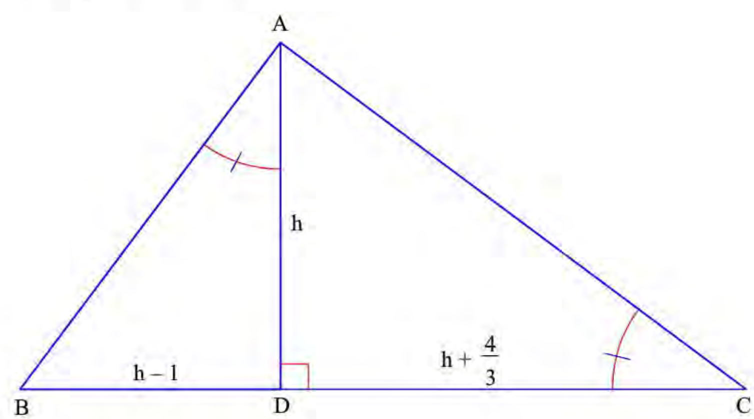
$$= \frac{n^2 - n^2 + 1}{(n+1)n}$$

$$= \frac{1}{(n+1)n}$$

เมื่อ n แทนจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับ -1 และ 0

คำตอบกิจกรรม "คิดได้ไหม" หน้า 192

$\frac{50}{3}$ หรือ $16\frac{2}{3}$ ตารางหน่วย



แนวคิด

ให้ AD เท่ากับ h หน่วย

จะได้ BD = $h - 1$ หน่วย

และ CD = $h + \frac{4}{3}$ หน่วย

เนื่องจาก $B\hat{A}D = A\hat{C}D$ และ $A\hat{D}B = C\hat{D}A = 90^\circ$

ดังนั้น $\Delta ABD \sim \Delta CAD$

จะได้ $\dfrac{BD}{AD} = \dfrac{AD}{CD}$

นั่นคือ $\dfrac{h-1}{h} = \dfrac{h}{h+\frac{4}{3}}$

$$(h-1)\left(h+\frac{4}{3}\right) = h^2$$

$$h^2+\frac{1}{3}h-\frac{4}{3} = h^2$$

$$\frac{1}{3}h = \frac{4}{3}$$

$$h = 4$$

ดังนั้น $AD = 4$ หน่วย

$BD = 4-1 = 3$ หน่วย

$CD = 4+\dfrac{4}{3} = \dfrac{16}{3}$ หน่วย

$BC = BD+CD = 3+\dfrac{16}{3} = \dfrac{25}{3}$ หน่วย

นั่นคือ พื้นที่ของ $\Delta ABC = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{25}{3}\times 4$

$= \dfrac{50}{3}$ หรือ $16\dfrac{2}{3}$ ตารางหน่วย

คณะกรรมการจัดทำคู่มือครูสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

นางสาวลัดดาวัลย์ เพ็ญสุภา	มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์
นายปรีชา เนาว์เย็นผล	มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช
นางสาวอัมพร ม้าคนอง	จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
นางสาวรุ่งฟ้า จันท์จารุภรณ์	มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร
นางสุปราณี พ่วงพี	โรงเรียนสามัคคีวิทยาคม
นางนงนุช ผลทวี	โรงเรียนทับปุดวิทยา
นางมยุรี สาลีวงศ์	โรงเรียนสตรีสิริเกศ
นางวัลลภา บุญวิเศษ	โรงเรียนเบ็ญจะมะมหาราช
นายถนอมเกียรติ งานสกุล	โรงเรียนเมืองถลาง
นางรัตนา ตั้งศิริชัยพงษ์	โรงเรียนท่าบ่อ
นางสาวพานทิพย์ อัมพันธ์จันทร์	โรงเรียนสตรีราชินูทิศ
นางสาวกัลยาณี แคนยุกต์	โรงเรียนบดินทรเดชา (สิงห์ สิงหเสนี)
นางจารุนี สูตะบุตร	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นายสมพล เล็กสกุล	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางปิยรัตน์ จาตุรันตบุตร	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางอารียา สุวรรณคำ	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางเจริญศรี จันไพบูลย์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวจารุวรรณ แสงทอง	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางชุลีพร สุภธีระ	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวรจนา รัตนานิคม	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นายสุรัชน์ อินทสังข์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาววันดี ตีระสหกุล	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นายรณชัย ปานะโปย	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวดนิตา ชื่นอารมณ์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวพิลาลักษณ์ ทองทิพย์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นายทมะ ดวงนามล	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

คณะบรรณาธิการ

นายสมพล เล็กสกุล	นางสาวจารุวรรณ แสงทอง
นางปิยรัตน์ จาตุรันตบุตร	นางชุลีพร สุภธีระ

คณะบรรณาธิการดำเนินงานปรับปรุงคู่มือครู สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

นายดนัย ยังคง	นางชมัยพร ตั้งตน
นางสุวรรณา คล้ายกระแส	นางชุลีพร สุภธีระ
นางสาวอรุณี นาคทัต	

ผู้จัดพิมพ์ต้นฉบับ

นางสาวเสาวนีย์ ประมูลทรัพย์

คำสำคัญในการสืบค้น

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

ศึกษาภัณฑ์พาณิชย์
พิมพ์ที่โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว
นายสันติภาพ อินทรพัฒน์ ผู้พิมพ์โฆษณา
๕๕๐๐๐๖๓
www.suksapan.or.th