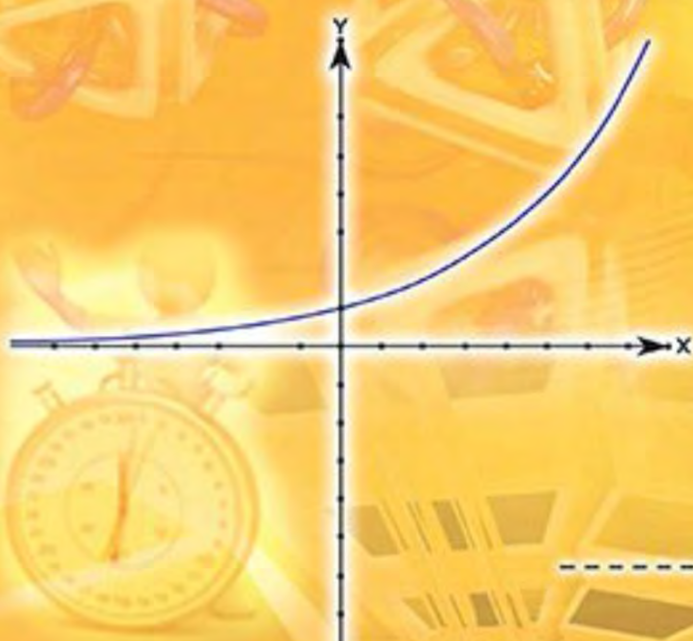
คู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติม

คณิตศาสตร์ เล่ม ๓

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔-๖

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑



กระทรวงศึกษาธิการ

สสวท

๑๖๙.-

คู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติม
คณิตศาสตร์ เล่ม ๓
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔ - ๖

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑

จัดทำโดย
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

ISBN 978-616-317-171-9
พิมพ์ครั้งที่สอง ๓,๐๐๐ เล่ม
พ.ศ. ๒๕๕๖

องค์การค้าของ สกสค. จัดพิมพ์จำหน่าย
พิมพ์ที่โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว
๒๒๔๙ ถนนลาดพร้าว วังทองหลาง กรุงเทพมหานคร

ประกาศสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน
เรื่อง อนุญาตให้ใช้สื่อการเรียนรู้ในสถานศึกษา

ด้วยสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน ได้มอบหมายให้สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีจัดทำโครงสร้างหลักสูตรรายวิชาเพิ่มเติม และจัดทำคู่มือครู รายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม ๓ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔-๖ สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐานได้พิจารณาแล้ว อนุญาตให้ใช้ในสถานศึกษาได้

ประกาศ ณ วันที่ ๑๕ ธันวาคม พ.ศ. ๒๕๕๓

(นายชินภัทร ภูมิรัตน)
เลขาธิการคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน

คำนำ

คู่มือครู รายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม ๓ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔-๖ นี้ สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีจัดทำขึ้น สำหรับให้ครูผู้สอนเลือกใช้ประกอบการเรียนการสอนควบคู่กับหนังสือเรียน ตามโครงสร้างหลักสูตรรายวิชาเพิ่มเติม โดยให้พิจารณาเทียบเคียงกับหลักสูตรของสถานศึกษา เพื่อเป็นแนวทางในการสอนคณิตศาสตร์ และการออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้ ให้ผู้เรียนสามารถนำความรู้ไปใช้แก้ปัญหา และพัฒนาทักษะการเรียนรู้นำไปสู่ทักษะการคิดวิเคราะห์ สังเคราะห์ตามความสามารถและความแตกต่างระหว่างบุคคลของผู้เรียนได้ ในการจัดทำคู่มือครูเล่มนี้ได้รับความร่วมมือจากคณาจารย์ ผู้ทรงคุณวุฒิ ผู้เชี่ยวชาญด้านคณิตศาสตร์จากสถาบันต่าง ๆ ทั้งภาครัฐและเอกชนเป็นอย่างดี

สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน หวังเป็นอย่างยิ่งว่าคู่มือครูเล่มนี้ จะเป็นประโยชน์ต่อการจัดการเรียนรู้ เพื่อประยุกต์ใช้พัฒนาการเรียนรู้ของผู้เรียนได้อย่างเหมาะสม ขอขอบคุณสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ตลอดจนบุคคลและหน่วยงานที่มีส่วนเกี่ยวข้องในการจัดทำหนังสือไว้ ณ โอกาสนี้

(นายชินภัทร ภูมิรัตน)
เลขาธิการคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน
๑๕ ธันวาคม ๒๕๕๓

คำชี้แจง

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้รับมอบหมายจากกระทรวงศึกษาธิการ ให้พัฒนาหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ ของกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ กลุ่มสาระการเรียนรู้วิทยาศาสตร์ รวมทั้งสาระการออกแบบและเทคโนโลยี และสาระเทคโนโลยีสารสนเทศและการสื่อสารในกลุ่มสาระการเรียนรู้การงานอาชีพและเทคโนโลยี ตลอดจนจัดทำสื่อการเรียนรู้ตามหลักสูตรดังกล่าว

คู่มือครูเล่มนี้จัดทำขึ้นสำหรับใช้ประกอบการสอนควบคู่กับหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔ – ๖ เล่ม ๓ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ เพื่อให้ครูผู้สอนใช้เป็นแนวทางในการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ให้ผู้เรียนบรรลุตามมาตรฐานการเรียนรู้ที่กำหนดไว้ ซึ่งในแต่ละบทประกอบด้วย ผลการเรียนรู้ที่กำหนดให้สอดคล้องกับมาตรฐานการเรียนรู้ สาระสำคัญของเนื้อหาพร้อมข้อเสนอแนะ และ กิจกรรมเสนอแนะเพิ่มเติมเกี่ยวกับการจัดการเรียนการสอน เพื่อเป็นประโยชน์ในการเตรียมการสอน และเพื่อให้การสอนบรรลุตามผลการเรียนรู้ที่กำหนดไว้ นอกจากนี้ยังมีตัวอย่างแบบทดสอบประจำบทและเฉลยตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท ซึ่งจะช่วยให้ผู้สอนได้แนวคิดในการออกแบบแบบทดสอบที่เหมาะสมต่อไป โดยในส่วนที่เป็นการเฉลยแบบฝึกหัดนั้นจะไม่เฉลยวิธีทำโดยละเอียดทุกข้อแต่จะเสนอแนะเพียงแนวคิดไว้ให้ ในข้อที่ไม่ซับซ้อนจะเฉลยเฉพาะคำตอบ อย่างไรก็ตามสำหรับแบบฝึกหัดที่ต้องการคำตอบ “ถูก” หรือ “ผิด” ครูผู้สอนควรให้ผู้เรียนแสดงความคิดเห็นหรือให้เหตุผลเพิ่มเติมในระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนด้วย

ในการจัดทำคู่มือครูเล่มนี้ สสวท. ได้รับความร่วมมืออย่างดียิ่งจากคณะอาจารย์จากโรงเรียนและมหาวิทยาลัย สสวท. จึงขอขอบคุณทุกท่านไว้ ณ ที่นี้ และหวังเป็นอย่างยิ่งว่าคู่มือครูเล่มนี้จะเป็นประโยชน์สำหรับครูผู้สอนคณิตศาสตร์ ให้สามารถนำไปใช้ หรือปรับใช้ให้เหมาะสมกับศักยภาพของผู้เรียน

หากมีข้อเสนอแนะใดที่จะทำให้คู่มือครูเล่มนี้สมบูรณ์ยิ่งขึ้นโปรดแจ้ง สสวท. ทราบด้วย จักขอบคุณยิ่ง

(นางพรพรรณ ไวทยางกูร)
ผู้อำนวยการ
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

เวลาเรียนโดยประมาณ

รายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔ – ๖ เล่ม ๓

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑

บทที่	สาระการเรียนรู้	จำนวนชั่วโมง
1	ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม	20
2	ฟังก์ชันตรีโกณมิติ	40
3	เวกเตอร์ในสามมิติ	20
		80

หมายเหตุ จำนวนชั่วโมงที่กำหนดไว้ในแต่ละบทได้รวมเวลาที่ใช้ในการทำกิจกรรมการเรียนการสอนที่เสริมสร้างทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ตลอดจนการวัดและการประเมินผลด้วย ซึ่งผู้สอนอาจลดหรือเพิ่มเวลาได้ตามความเหมาะสม

คำอธิบายรายวิชาเพิ่มเติม

คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ๓ **กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์**

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔ – ๖ **เวลา ๘๐ ชั่วโมง** **จำนวน ๒.๐ หน่วยกิต**

ศึกษา และฝึกทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์อันได้แก่ การแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ ในสาระต่อไปนี้

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม รากที่ n ในระบบจำนวนจริงและจำนวนจริงในรูปกรณฑ์ เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล ฟังก์ชันลอการิทึม การหาค่าลอการิทึม การเปลี่ยนฐานของลอการิทึม สมการเอกซ์โพเนนเชียลและสมการลอการิทึม การประยุกต์ของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม การใช้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ กฎของโคไซน์และไซน์ การหาระยะทางและความสูง

เวกเตอร์ในสามมิติ ระบบพิกัดฉากสามมิติ เวกเตอร์ เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก ผลคูณเชิงสเกลาร์ ผลคูณเชิงเวกเตอร์

ผลการเรียนรู้

๑. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล ฟังก์ชันลอการิทึม และเขียนกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้
๒. นำความรู้เรื่องฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึมไปใช้แก้ปัญหาได้
๓. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติและเขียนกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้
๔. นำความรู้เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติและการประยุกต์ไปใช้แก้ปัญหาได้
๕. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับเวกเตอร์ในสามมิติ
๖. หาผลบวกเวกเตอร์ ผลคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ ผลคูณเชิงสเกลาร์และผลคูณเชิงเวกเตอร์ได้
๗. หาขนาดและทิศทางของเวกเตอร์ที่กำหนดให้ได้

รวมทั้งหมด ๗ ผลการเรียนรู้

สารบัญ

หน้า

บทที่ 1

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

(20 ชั่วโมง)

สำหรับการศึกษาเรื่องฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึมเป็นการศึกษาฟังก์ชันที่อยู่ในรูปเลขยกกำลัง ซึ่งผู้เรียนได้ศึกษาเรื่องเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มมาแล้ว สำหรับบทนี้จะเริ่มด้วยการทบทวนความรู้ในเรื่องเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม โดยจะเพิ่มเติมเนื้อหาดังนี้ รากที่ n ในระบบจำนวนจริงและจำนวนจริงในรูปกรณฑ์ เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล ฟังก์ชันลอการิทึม การหาค่าลอการิทึม การเปลี่ยนฐานของลอการิทึม สมการเอกซ์โพเนนเชียลและสมการลอการิทึม รวมถึงการนำความรู้ไปประยุกต์ใช้ ซึ่งจะทำให้ผู้เรียนเห็นถึงประโยชน์ในการศึกษาเรื่องเหล่านี้ และสามารถเชื่อมโยงกับสถานการณ์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริง

สาระสำคัญ ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการสอน ตัวอย่างกิจกรรมการเรียนการสอน และการวัดและการประเมินผลที่นำเสนอ มีไว้เพื่อเป็นตัวอย่างในการจัดการเรียนการสอน การนำเข้าสู่บทเรียนการสอน หรือการฝึกทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ให้ผู้เรียนมีคุณธรรม จริยธรรม และค่านิยมที่ดีงามต่อคณิตศาสตร์ ซึ่งผู้สอนสามารถเลือกหรือปรับใช้ได้ตามความเหมาะสม ในบทเรียนนี้มุ่งให้ผู้เรียนบรรลุผลการเรียนรู้ดังนี้

ผลการเรียนรู้

1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล ฟังก์ชันลอการิทึม และเขียนกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้
2. นำความรู้เรื่องฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึมไปใช้แก้ปัญหาได้

สาระสำคัญ

ทบทวนความรู้เรื่องเลขยกกำลัง

1. เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มมีบทนิยาม ดังนี้

บทนิยาม ถ้า a เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ ตัว}}$

$a^0 = 1$ และ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ เมื่อ $a \neq 0$

2. **ทฤษฎีบท 1** ถ้า a, b เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็น 0 และ m, n เป็นจำนวนเต็มจะได้

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $(a^m)^n = a^{mn}$
3. $(ab)^n = a^n b^n$
4. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
5. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

จำนวนจริงในรูปเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ

1. บทนิยามของรากที่ n เป็นดังนี้

บทนิยาม ให้ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 x และ y เป็นจำนวนจริง
y เป็นรากที่ n ของ x ก็ต่อเมื่อ $y^n = x$

2. บทนิยามของค่าหลักของรากที่ n เป็นดังนี้

บทนิยาม ให้ x เป็นจำนวนจริงที่มีรากที่ n จะกล่าวว่า จำนวนจริง y เป็นค่าหลักของรากที่ n ของ x ก็ต่อเมื่อ

1. y เป็นรากที่ n ของ x
2. $yx \geq 0$

และแทนค่าหลักของรากที่ n ของ x ด้วย $\sqrt[n]{x}$

3. บทนิยามของเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะเป็นดังนี้

บทนิยาม ให้ a เป็นจำนวนจริง p, q เป็นจำนวนเต็มที่ $(p, q) = 1$, $q > 0$
และ $a^{\frac{1}{q}} \in R$ โดยเมื่อ $p < 0$ แล้ว a ต้องไม่เป็น 0 จะได้ $a^{\frac{p}{q}} = (a^{\frac{1}{q}})^p$

4. ทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับรากที่ n ของจำนวนจริงมีดังนี้ สำหรับจำนวนจริง x และ y และ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1

ทฤษฎีบท 1 ถ้า $x \geq 0$ และ $y \geq 0$ แล้ว $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{xy}$

ทฤษฎีบท 2 ถ้า $x \geq 0$ และ $y > 0$ แล้ว $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$

ทฤษฎีบท 3 ถ้า x และ y มีรากที่ n แล้ว $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$

ทฤษฎีบท 4 ถ้า x และ y มีรากที่ n และ $y \neq 0$ แล้ว $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$

5. ทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ

ทฤษฎีบท 1 ให้ m และ n เป็นจำนวนตรรกยะ และ a^m, a^n, b^n เป็นจำนวนจริง จะได้

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $(a^m)^n = a^{mn}$
3. $(ab)^n = a^n b^n$
4. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ เมื่อ $b \neq 0$
5. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ เมื่อ $a \neq 0$

6. การบวก ลบ คูณ และหารเลขยกกำลัง และการแก้สมการที่มีเครื่องหมายกรณฑ์อันดับสอง สามารถทำได้โดยอาศัยทฤษฎีบทเลขยกกำลัง

การเขียนเลขยกกำลังที่อยู่ในรูปเศษส่วนนิยมเขียนตัวส่วนในรูปไม่ติดกรณฑ์

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

1. **บทนิยาม** ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล (exponential function) คือ ฟังก์ชัน

$$f = \{(x, y) \in R \times R \mid y = a^x,\ a \in R,\ a > 0,\ a \neq 1\}$$

2. โดเมนของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล คือ เซตของจำนวนจริง

เรนจ์ ของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล คือ เซตของจำนวนจริงบวก

3. กราฟของฟังก์ชัน $y = a^x, a \in R$, $a > 0$ และ $a \neq 1$ ไม่ตัดแกน X และผ่านจุด (0, 1) เสมอ ทั้งนี้เนื่องจาก $a^0 = 1$

ถ้า $a > 1$ แล้ว $y = a^x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว $y = a^x$ เป็นฟังก์ชันลด

4. ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลเป็นฟังก์ชัน 1-1 จาก R ไปทั่วถึง R^+

โดยสมบัติของฟังก์ชัน 1-1 จะได้ว่า $a^x = a^y$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$

5. **บทนิยาม** ฟังก์ชันลอการิทึม (logarithmic function) คือ $\{(x, y) \in R^+ \times R \mid y = \log_a x,\ a \in R,\ a > 0,\ a \neq 1\}$ เป็นฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล $\{(x, y) \in R \times R^+ \mid y = a^x, a \in R,\ a > 0,\ a \neq 1\}$

6. โดเมนของฟังก์ชันลอการิทึม คือ เซตของจำนวนจริงบวก

เรนจ์ ของฟังก์ชันลอการิทึม คือ เซตของจำนวนจริง

7. กราฟของฟังก์ชัน $y = \log_a x, a \in R$, $a > 0$, $a \neq 1$ ไม่ตัดแกน Y และผ่านจุด (1, 0) เสมอ ทั้งนี้เนื่องจาก $\log_a 1 = 0$

ถ้า $a > 1$ แล้ว $y = \log_a x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว $y = \log_a x$ เป็นฟังก์ชันลด

8. ฟังก์ชันลอการิทึมเป็นฟังก์ชัน 1-1 จาก R^+ ไปทั่วถึง R

โดยสมบัติของฟังก์ชัน 1-1 จะได้ว่า $\log_a x = \log_a y$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$

9. สมบัติที่สำคัญของลอการิทึมมีดังต่อไปนี้

เมื่อ a, M, N เป็นจำนวนจริงบวกที่ $a \neq 1$ และ k เป็นจำนวนจริง

1. $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$
2. $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$
3. $\log_a M^k = k \log_a M$
4. $\log_a a = 1$
5. $\log_a 1 = 0$
6. $\log_{a^k} M = \frac{1}{k} \log_a M$
7. $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$, $b \neq 1$ และ $b > 0$

10. ลอการิทึมสามัญ (common logarithm) หมายถึงลอการิทึมที่มีฐานเป็นสิบ การเขียนลอการิทึมสามัญนิยมเขียนโดยไม่มีฐานกำกับ เช่น $\log_{10} 3$ เขียนแทนด้วย $\log 3$ และ $\log_{10} N$ เขียนแทนด้วย $\log N$

11. การหาค่าของ $\log N$ เมื่อกำหนดจำนวนจริงบวก N อาจหาได้โดยใช้เครื่องคำนวณหรือใช้ตารางค่าลอการิทึมของภาคผนวกในหนังสือเรียน และถ้ากำหนดค่า $\log N$ ให้ แล้วให้หาจำนวนจริงบวก N ก็ทำได้เช่นกัน ซึ่งจะเรียก N ว่า แอนติลอการิทึม (antilogarithm) ของ $\log N$

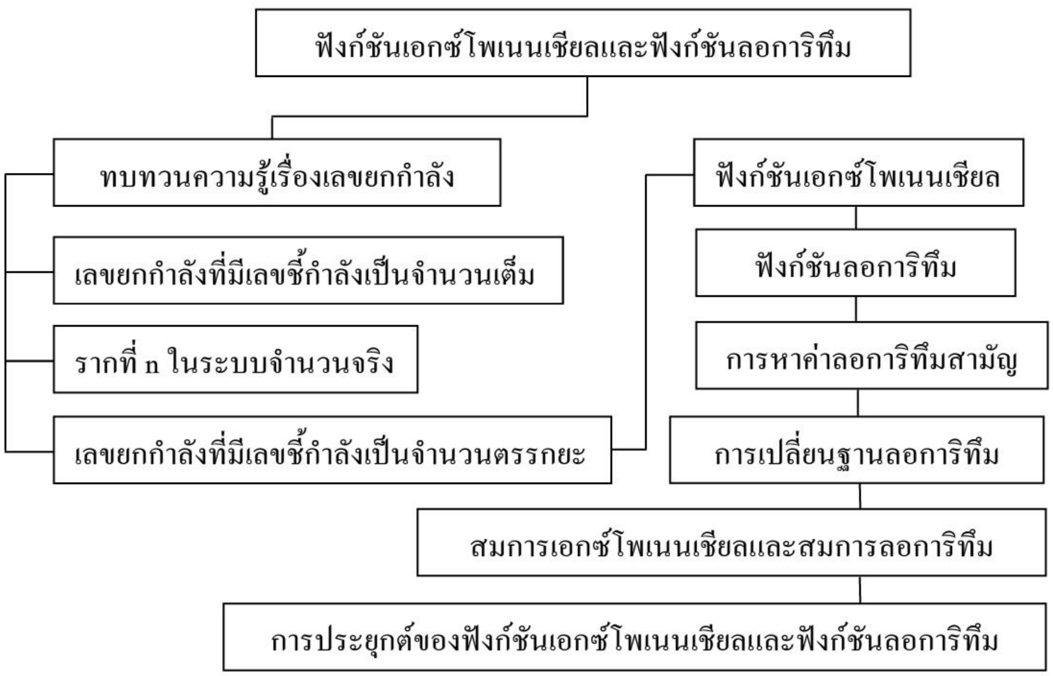
12. การเปลี่ยนฐานของลอการิทึมจาก $\log_b x$ ให้อยู่ในรูป $\log_a x$ สำหรับจำนวนจริง a, b และ x และ $a > 0$, $b > 0, a \neq 1$, $b \neq 1$ จะเปลี่ยนได้ดังนี้ $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$

13. ลอการิทึมฐาน e หรือ “ลอการิทึมธรรมชาติ” (natural logarithm) มีประโยชน์มากในการศึกษาคณิตศาสตร์ขั้นสูงและวิทยาการคอมพิวเตอร์

การเขียนลอการิทึมของ x ฐาน e นิยมเขียน $\ln x$ แทน $\log_e x$ และอาจหาค่าลอการิทึมฐาน e โดยอาศัยลอการิทึมฐานสิบเพราะ $\log_e x = \frac{\log x}{\log e}$ หรือ $\ln x = \frac{\log x}{\log e}$

14. สมการที่มีตัวแปรเป็นเลขชี้กำลัง เรียกว่า สมการเอกซ์โพเนนเชียล (exponential equation) สมการที่มีลอการิทึมของตัวแปร เรียกว่า สมการลอการิทึม (logarithmic equation) และเนื่องจากฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึมเป็นฟังก์ชัน 1-1 ทำให้ได้ว่า สำหรับจำนวนจริง a , x และ y ; $a^x = a^y$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$ จึงสามารถหาคำตอบของสมการเอกซ์โพเนนเชียลและสมการลอการิทึมได้

ผู้สอนอาจจัดลำดับเนื้อหาดังแผนผังต่อไปนี้



ความรู้เพิ่มเติมสำหรับผู้สอน

การยกกำลังจำนวนจริงบวกด้วยจำนวนตรรกยะ

1. ถ้า a เป็นจำนวนจริงบวก และ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ แล้ว จะต้องมีจำนวนจริง x เพียงจำนวนเดียวซึ่ง $x > 0$ และ $x^n = a$

2. **บทนิยาม** a และ x เป็นจำนวนจริงบวก และ m, n เป็นจำนวนเต็มบวก

ก. $x^n = a$ มีความหมายเช่นเดียวกับ $x = a^{\frac{1}{n}}$

ข. $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ (โดยทั่วไป เมื่อ $n = 2$ จะใช้ $\sqrt{a}$ แทน $\sqrt[2]{a}$ และ $n = 1$ จะใช้ a แทน $a^{\frac{1}{1}}$)

ค. $(a^{\frac{1}{n}})^m = a^{\frac{m}{n}}$

ง. $(a^{-1})^{\frac{m}{n}} = a^{-\frac{m}{n}}$

3. ทฤษฎีบทเกี่ยวกับการยกกำลังจำนวนจริงบวกด้วยจำนวนตรรกยะมีดังนี้

ทฤษฎีบท 1 ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงบวกและ m , n เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว

ก. $a^{\frac{m}{n}} > 0$ ง. $(a^{\frac{1}{m}})^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{mn}}$

ข. $1^{\frac{m}{n}} = 1$ จ. $(ab)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m}} \cdot b^{\frac{1}{m}}$

ค. $(a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$ ฉ. $(a^{\frac{m}{n}})^{-1} = (a^{-1})^{\frac{m}{n}}$

ทฤษฎีบท 2 ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงบวกและ r , s เป็นจำนวนตรรกยะบวกแล้ว

ก. $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ ค. $(ab)^r = a^r \cdot b^r$

ข. $(a^r)^s = a^{rs}$ ง. $(a^{-1})^r = a^{-r}$

ทฤษฎีบท 3 ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงบวกและ r , s เป็นจำนวนตรรกยะใด ๆ แล้ว

ก. $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ ง. $a^r > 0$

ข. $(a^r)^s = a^{rs}$ จ. $(a^{-1})^r = a^{-r} = (a^r)^{-1}$

ค. $(ab)^r = a^r \cdot b^r$ ฉ. $1^r = 1$

ทฤษฎีบท 4 ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงบวกและ m , n เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว

ก. $\sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^m}$ ค. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

ข. $(\sqrt[n]{a})(\sqrt[n]{b}) = \sqrt[n]{ab}$ ง. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

ทฤษฎีบท 5 ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก และ x เป็นจำนวนจริงซึ่ง $x^n = 0$ แล้ว $x = 0$

4. **บทนิยาม** ถ้า m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ x เป็นจำนวนจริงแล้ว

ก. $x^n = 0$ มีความหมายเช่นเดียวกับ $x = 0^{\frac{1}{n}}$

ข. $0^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{0}$

ค. $(0^{\frac{1}{n}})^m = 0^{\frac{m}{n}}$

5. ทฤษฎีบทเกี่ยวกับการยกกำลังจำนวนจริงบวกด้วยจำนวนตรรกยะมีดังนี้ (ต่อ)

ทฤษฎีบท 6 ถ้า r เป็นจำนวนตรรกยะบวก และ m, n เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว

ก. $0^r = 0$ ข. $0^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{0^m}$

ทฤษฎีบท 7 ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงบวกและ r เป็นจำนวนตรรกยะบวก แล้ว

ก. $a^r > b^r$ ก็ต่อเมื่อ $a > b$

ข. $a^r = b^r$ ก็ต่อเมื่อ $a = b$

ทฤษฎีบท 8 ถ้า a เป็นจำนวนจริงบวกและ r เป็นจำนวนตรรกยะบวก แล้ว

ก. $a > 1$ ก็ต่อเมื่อ $a^r > 1$

ข. $a < 1$ ก็ต่อเมื่อ $0 < a^r < 1$

ค. ถ้า $a > 1$ และ $r > 1$ แล้ว $a^r > a$

ง. ถ้า $a > 1$ และ $r < 1$ แล้ว $a^r < a$

จ. ถ้า $a < 1$ และ $r > 1$ แล้ว $a^r < a$

ฉ. ถ้า $a < 1$ และ $r < 1$ แล้ว $a^r > a$

ทฤษฎีบท 9 ถ้า r,s เป็นจำนวนตรรกยะบวกซึ่ง $r > s$ และ a เป็นจำนวนจริงบวก แล้ว

ก. $a > 1$ ก็ต่อเมื่อ $a^r > a^s > 1$

ข. $a > 1$ ก็ต่อเมื่อ $0 < a^{-r} < a^{-s} < 1$

ค. $a < 1$ ก็ต่อเมื่อ $0 < a^r < a^s < 1$

ง. $a < 1$ ก็ต่อเมื่อ $a^{-r} > a^{-s} > 1$

ทฤษฎีบท 10 ถ้า a เป็นจำนวนจริงซึ่ง $a > 1$ และ r,s เป็นจำนวนตรรกยะบวกซึ่งทำให้ $a^r < a^s$ แล้ว $r < s$

การยกกำลังจำนวนจริงด้วยจำนวนอตรรกยะ

1. การยกกำลังจำนวนจริงด้วย $\sqrt{2}$ จะอาศัยทฤษฎีบทดังนี้

ถ้า a เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a > 1$ และ A, B เป็นเซตซึ่ง $A = \{ a^r \mid r \in Q^+, r \le \sqrt{2} \}$ $B = \{ a^s \mid s \in Q^+, s > \sqrt{2} \}$ ดังนั้น

ก. จะต้องมีจำนวนจริง x ซึ่ง $a^r < x < a^s$ สำหรับทุก ๆ สมาชิก $a^r \in A$ และทุก ๆ สมาชิก $a^s \in B$ และ x เป็นขอบเขตบนน้อยที่สุดของ A ด้วย

ข. ถ้า y เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a^r < y < a^s$ สำหรับทุก ๆ สมาชิก $a^r \in A$ และทุก ๆ สมาชิก $a^s \in B$ และ y เป็นขอบเขตบนน้อยที่สุดของ A ด้วย

ค. จำนวนจริง z ซึ่ง $a^r < z < a^s$ สำหรับทุก ๆ สมาชิก $a^r \in A$ และทุก ๆ สมาชิก $a^s \in B$ จะมีเพียงตัวเดียวเท่านั้น

จากทฤษฎีบทข้างต้นจะได้ว่า การมีจำนวนจริง z ดังกล่าวนี้เพียงตัวเดียว และ z ก็เป็นขอบเขตบนน้อยที่สุดของ A ด้วยจึงสามารถให้ความหมายของ $a^{\sqrt{2}} = z$ ได้ ดังนั้นความหมายของ $a^{\sqrt{2}}$ ก็คือ $a^r < a^{\sqrt{2}} < a^s$ เมื่อ r และ s เป็นจำนวนตรรกยะบวกซึ่ง $r < \sqrt{2}$ และ $s > \sqrt{2}$ ซึ่งก็คือ $a^{\sqrt{2}}$ เป็นขอบเขตบนน้อยที่สุดของ $A = \{ a^r \mid r \in Q^+, r \le \sqrt{2} \}$

พิจารณาความหมายของ $\sqrt{2}$ โดยหาจำนวนตรรกยะบวก r และ s ซึ่ง $r < \sqrt{2}$ และ $s > \sqrt{2}$ ดังนี้ เนื่องจาก $1^2 = 2$, $(\sqrt{2})^2 = 2$ และ $2^2 = 4$ ดังนั้น $1 < \sqrt{2} < 2$

$(1.4)^2 = 1.96$ และ $(1.5)^2 = 2.25$ ดังนั้น $1.4 < \sqrt{2} < 1.5$

$(1.41)^2 = 1.9881$ และ $(1.42)^2 = 2.016$ ดังนั้น $1.41 < \sqrt{2} < 1.42$

$(1.414)^2 = 1.999396$ และ $(1.415)^2 = 2.002225$ ดังนั้น $1.414 < \sqrt{2} < 1.415$

$(1.4142)^2 = 1.99996164$ และ $(1.4143)^2 = 2.00024449$ ดังนั้น $1.4142 < \sqrt{2} < 1.4143$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

จะได้ $1 < \frac{196}{100} < \frac{19881}{10000} < \ldots < 2 < \ldots < \frac{20164}{10000} < \frac{225}{100} < 4$

ซึ่งก็คือ $1^1 < (\frac{14}{10})^2 < (\frac{141}{100})^2 < \ldots < (\sqrt{2})^2 < \ldots < (\frac{142}{100})^2 < (\frac{15}{10})^2 < 2^2$

ซึ่งก็คือ $1 < \frac{14}{10} < \frac{141}{100} < \ldots < \sqrt{2} < \ldots < \frac{142}{100} < \frac{15}{10} < 2$

จึงได้ $a < a^{\frac{14}{10}} < a^{\frac{141}{100}} < \ldots < a^{\sqrt{2}} < \ldots < a^{\frac{142}{100}} < a^{\frac{15}{10}} < a^2$

2. การยกกำลังจำนวนจริงด้วยจำนวนอตรรกยะ

เมื่อสามารถทราบความหมายของ $a^{\sqrt{2}}$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงซึ่ง $a > 1$ ในทำนองเดียวกัน ถ้า e เป็นจำนวนอตรรกยะซึ่ง $e > 0$ ความหมายของ a^e ก็คือ a^e เป็นขอบเขตบนน้อยที่สุดของ $A = \{ a^r \mid r \in Q^+, r < e \}$

3. จากบทนิยามของเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะในหนังสือเรียนคือ

บทนิยาม ให้ a เป็นจำนวนจริง p, q เป็นจำนวนเต็มที่ $(p, q) = 1$, $q > 0$ และ $a^{\frac{1}{q}} \in R$ โดยเมื่อ $p < 0$ แล้ว a ต้องไม่เป็น 0 $a^{\frac{p}{q}} = (a^{\frac{1}{q}})^p$

การเขียนเลขยกกำลังที่อยู่ในรูป $a^{\frac{p}{q}}$ ควรใช้บทนิยามอย่างเคร่งครัด เนื่องจากอาจเกิดข้อผิดพลาด

เช่น $(-1)^{\frac{2}{4}} = (-1^2)^{\frac{1}{4}} = 1^{\frac{1}{4}} = 1$

ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการสอน

ทบทวนความรู้เรื่องเลขยกกำลัง

เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม

1. ในหนังสือเรียนเล่มนี้ ถ้ากล่าวถึงเลขยกกำลังที่มีฐานเป็นตัวแปรและไม่ได้ระบุเอกภพสัมพัทธ์ไว้จะถือว่าเอกภพสัมพัทธ์ของตัวแปรเหล่านั้นคือสับเซตของเซตของจำนวนจริง

2. ผู้สอนให้ผู้เรียนหาค่าของจำนวนต่อไปนี้เพื่อเป็นการทบทวนความหมายและทฤษฎีบทเกี่ยวกับเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก เช่น $2^3 \cdot 2^5$, $(3^2)4$, $(2 \cdot 5)^3$, $(\frac{7}{8})^2$, $\frac{3^3}{3^7}$, $\frac{5^2}{25^3}$

3. ผู้สอนทบทวนบทนิยามของเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มลบและศูนย์ แล้วให้ผู้เรียนเขียนเลขยกกำลังต่อไปนี้ให้สอดคล้องกับบทนิยาม 4^{-5}, a^{-7}, $3^{-2} \cdot 3^{-3}$, $a^{-6} \cdot a^{-2}$, $(3 \cdot 2)^{-5}$, $(\frac{4}{3})^{-7}$, $\frac{5^{-4}}{5^{-7}}$ และ 2^m เมื่อ m เป็นจำนวนเต็มลบ

4. ผู้สอนและผู้เรียนช่วยกันสรุปทฤษฎีบทของเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มซึ่งควรสรุปได้ดังนี้

ถ้า a, b เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็น 0 และ m , n เป็นจำนวนเต็มแล้ว

1. $a^m \cdot a^n \quad = \quad a^{m+n}$
2. $(a^m)^n \quad = \quad a^{mn}$
3. $(ab)^n \quad = \quad a^n \cdot b^n$
4. $(\frac{a}{b})^n \quad = \quad \frac{a^n}{b^n}$
5. $\frac{a^m}{a^n} \quad = \quad a^{m-n}$

เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ

1. ผู้สอนทบทวนความหมายของรากที่ n ของ x เมื่อ x เป็นจำนวนจริงและ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยให้ผู้เรียนหา

รากที่สองของ $4 , 36 , \frac{1}{25} , \frac{49}{4}$

รากที่สามของ $27 , -8 , \frac{1}{64} , \frac{8}{125}$

แล้วให้หาจำนวนจริงที่เป็นรากที่ n ของ –16 และ –25 เมื่อ n เป็นจำนวนคู่บวก (ผู้เรียนควรตอบได้ว่า หาไม่ได้เพราะไม่มีจำนวนจริงใดยกกำลังด้วยจำนวนคู่บวกแล้วได้ –16 หรือ –25)

2. ผู้สอนให้ผู้เรียนเขียนแสดงจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปจำนวนจริงไม่ติดกรณฑ์ เพื่อเป็นการทบทวนความหมายของกรณฑ์ $-\sqrt{49}$, $\sqrt[3]{-27}$, $\sqrt[5]{-\frac{1}{32}}$ ผู้สอนและผู้เรียนช่วยกันสรุปว่า ถ้า n เป็นจำนวนเต็มคู่บวก x ต้องเป็นจำนวนจริงที่ไม่น้อยกว่าศูนย์ $\sqrt[n]{x}$ จึงจะเป็นสัญลักษณ์แสดงจำนวนจริง แต่ถ้า n เป็นจำนวนคี่บวกแล้ว x เป็นจำนวนจริงใด ๆ ก็ได้ $\sqrt[n]{x}$ จะเป็นจำนวนจริงเสมอ

3. ผู้สอนบอกบทนิยามของเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็น $\frac{1}{n}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า1 และบทนิยามของเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะแล้วให้ผู้เรียนเขียนจำนวนต่อไปนี้ในรูปไม่ติดกรณฑ์ $27^{\frac{1}{3}}$, $16^{\frac{3}{4}}$, $(\frac{8}{125})^{\frac{2}{3}}$

4. ผู้สอนยกตัวอย่างการเขียนเลขยกกำลังที่อยู่ในรูป $a^{\frac{p}{q}}$ และชี้ให้ผู้เรียนเห็นความสำคัญของบทนิยามในหนังสือเรียนที่ว่า ให้ a เป็นจำนวนจริง p, q เป็นจำนวนเต็มที่ (p, q) = 1, q > 0 และ $a^{\frac{1}{q}} \in R$ โดยเมื่อ $p < 0$ แล้ว a ต้องไม่เป็น 0 และ $a^{\frac{p}{q}} = (a^{\frac{1}{q}})^p$ มีข้อสังเกตดังนี้

1) ข้อควรระวังเกี่ยวกับเงื่อนไข a เป็นจำนวนจริง p, q เป็นจำนวนเต็มที่ (p, q) = 1

2) ข้อควรระวังเกี่ยวกับ $q > 0$ และ $a^{\frac{1}{q}} \in R$

5. ผู้สอนให้ผู้เรียนพิจารณาว่าเลขยกกำลังแต่ละคู่ที่กำหนดให้เท่ากันหรือไม่ เช่น $(27^2)^{\frac{1}{3}}$ และ $(27^{\frac{1}{3}})^2$, $[(\frac{16}{18})^3]^{\frac{1}{5}}$ และ $[(\frac{16}{18})^{\frac{1}{5}}]^3$ (ผู้เรียนควรสรุปได้ว่าเท่ากัน)

จากนั้นผู้สอนและผู้เรียนช่วยกันสรุปเป็นกรณีทั่วไปว่า $(a^{\frac{1}{q}})^p = (a^p)^{\frac{1}{q}}$ เมื่อ $a > 0$, p และ q เป็นจำนวนเต็มที่ $q > 0$ ผู้สอนให้ผู้เรียนพิจารณากรณี $a < 0$ ซึ่งผู้สอนอาจเน้นอีกครั้งเกี่ยวกับเงื่อนไขของบทนิยามในข้อ 4.2 กรณีที่ $a^{\frac{1}{q}}$ ต้องเป็นจำนวนจริง เนื่องจากถ้า $a^{\frac{1}{q}}$ ไม่เป็นจำนวนจริงอาจเกิดข้อผิดพลาดได้ เช่น ในการเขียน $\sqrt{(-3)^2}$ ให้อยู่ในรูปของจำนวนจริงไม่ติดกรณฑ์ ดังนี้

ก. $\sqrt{(-3)^2} = [(-3)^2]^{\frac{1}{2}} = (-3)^{2\times\frac{1}{2}} = -3$

แล้วสรุปว่า $\sqrt{(-3)^2} = -3$

ข. $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$

ผู้เรียนควรชี้แจงเหตุผลได้ว่า ก. เกิดข้อผิดพลาดขึ้น เนื่องจาก $(-3)^{(2\times\frac{1}{2})} = (-3)^{\frac{2}{2}} = ((-3)^{\frac{1}{2}})^2$ ซึ่ง $(-3)^{\frac{1}{2}}$ ไม่เป็นจำนวนจริง ซึ่งผิดกับบทนิยามในเงื่อนไขในข้อ 4 ข้อ 2)

รูปอย่างง่ายของ (-8)

6. ก่อนจะสอนการพิสูจน์ ผู้สอนควรให้ผู้เรียนฝึกหาค่าของเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะโดยอาศัยบทนิยาม และอาจสอนตามลำดับขั้นดังนี้

1) ผู้สอนกำหนดเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะแล้วให้ผู้เรียนเขียนเลขชี้กำลังให้มีตัวส่วนเป็นจำนวนเต็มบวกที่กำหนดให้ เช่น ผู้สอนให้ผู้เรียนเขียน $5^{\frac{2}{3}}$ ให้ตัวส่วนของเลขชี้กำลังเป็น 12 ซึ่งผู้เรียนควรทำได้ดังนี้

$$5^{\frac{2}{3}} = 5^{\frac{2}{3}\times\frac{4}{4}} = 5^{\frac{8}{12}}$$

จากนั้นผู้สอนอาจยกตัวอย่างในทำนองเดียวกันเพิ่มเติม เช่น ให้ผู้เรียนเขียน $4^{\frac{1}{5}}$ และ $(\frac{2}{3})^{\frac{6}{7}}$ ให้ตัวส่วนของเลขชี้กำลังเป็น 15 และ 28 ตามลำดับ

2) ผู้สอนทบทวนสมบัติของรากที่ n ที่ผู้เรียนเคยเรียนมาแล้วว่า ถ้า $x > 0$, $y > 0$ แล้ว

$$\sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy} \quad \text{และ} \quad \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$$

ดังนั้น จากบทนิยามของเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะจะได้ว่า

$$x^{\frac{1}{n}}\cdot y^{\frac{1}{n}} = (xy)^{\frac{1}{n}} \quad \text{และ} \quad \frac{x^{\frac{1}{n}}}{y^{\frac{1}{n}}} = (\frac{x}{y})^{\frac{1}{n}}$$

การบวก ลบ คูณ และหารเลขยกกำลังและการแก้สมการที่มีเครื่องหมายกรณฑ์อันดับสอง

การบวก ลบ คูณ และหารเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ ผู้สอนควรเน้นประเด็นเหล่านี้

1. การบวกและลบเลขยกกำลังสองจำนวนโดยใช้สมบัติหรือทฤษฎีบทของเลขยกกำลังจะทำได้เมื่อเลขยกกำลังทั้งสองมีฐานเท่ากันและเลขชี้กำลังเท่ากัน เช่น ถ้าจะหาผลบวกของ $18^{\frac{1}{2}}$ กับ $50^{\frac{1}{2}}$ จะต้องพิจารณาว่าสามารถเขียนจำนวนทั้งสองให้อยู่ในรูปเลขยกกำลังที่มีฐานเท่ากันและเลขชี้กำลังเท่ากันได้หรือไม่ ซึ่งจะพบว่า

$$18^{\frac{1}{2}} = (3^2 \times 2)^{\frac{1}{2}} = 3(2)^{\frac{1}{2}}$$

$$50^{\frac{1}{2}} = (5^2 \times 2)^{\frac{1}{2}} = 5(2)^{\frac{1}{2}}$$

ดังนั้น $18^{\frac{1}{2}} + 50^{\frac{1}{2}} = 3(2)^{\frac{1}{2}} + 5(2)^{\frac{1}{2}} = 8(2)^{\frac{1}{2}}$

ในการเปลี่ยนรูปของเลขยกกำลังที่จะนำมาบวกหรือลบกันให้อยู่ในรูปเลขยกกำลังที่มีฐานเท่ากันและเลขชี้กำลังเท่ากัน จำเป็นต้องเขียนจำนวนที่เป็นฐานของเลขยกกำลังให้อยู่ในรูปการคูณของตัวประกอบ แล้วจึงเปลี่ยนรูปใหม่ เช่น

$$\begin{aligned} 4(384)^{\frac{1}{3}} + 2304^{\frac{1}{6}} &= 4(64 \times 6)^{\frac{1}{3}} + (64 \times 36)^{\frac{1}{6}} \\ &= 4(4^3 \times 6)^{\frac{1}{3}} + (2^6 \times 6^2)^{\frac{1}{6}} \\ &= 16(6)^{\frac{1}{3}} + 2(6)^{\frac{1}{3}} \\ &= 18(6)^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

ผู้สอนควรชี้แจงให้ผู้เรียนทราบว่า การเขียนจำนวนที่เป็นฐานในรูปการคูณของตัวประกอบไม่จำเป็นต้องแยกตัวประกอบของจำนวนที่เป็นฐานเสมอไป เช่น 12 อาจเขียนในรูปการคูณของตัวประกอบเป็น 2×6 หรือ 3×4 หรือ 12×1 แต่การแยกตัวประกอบจะช่วยให้มองเห็นง่ายขึ้นว่าเลขยกกำลังสองจำนวนนั้นสามารถเขียนให้อยู่ในรูปเลขยกกำลังที่มีฐานเท่ากันและเลขชี้กำลังเท่ากันได้หรือไม่ ผู้สอนอาจจัดการสอนดังนี้

1) ผู้สอนให้ผู้เรียนเขียน $24^{\frac{1}{3}}$ และ $576^{\frac{1}{6}}$ ให้อยู่ในรูปเลขยกกำลังที่มีฐานเป็น 3 และเลขชี้กำลังเป็น $\frac{1}{3}$ พร้อมทั้งหาผลบวกของ $24^{\frac{1}{3}}$ และ $576^{\frac{1}{6}}$ ซึ่งผู้เรียนควรทำได้ดังนี้

$$24^{\frac{1}{3}} = (8 \times 3)^{\frac{1}{3}} = (2^3 \times 3)^{\frac{1}{3}} = 2(3)^{\frac{1}{3}}$$

$$576^{\frac{1}{6}} = (64 \times 9)^{\frac{1}{6}} = (2^6 \times 3^2)^{\frac{1}{6}} = 2(3)^{\frac{1}{3}}$$

ดังนั้น $24^{\frac{1}{3}} + 576^{\frac{1}{6}} = 2(3)^{\frac{1}{3}} + 2(3)^{\frac{1}{3}} = 4(3)^{\frac{1}{3}}$

2) ผู้สอนให้ผู้เรียนหาผลบวกของ $20^{\frac{1}{3}}$ และ $24^{\frac{1}{3}}$ โดยให้ผลลัพธ์เป็นเลขยกกำลังจำนวนเดียว ซึ่งผู้เรียนควรบอกได้ว่าหาไม่ได้เพราะเลขยกกำลังทั้งสองจำนวนเขียนให้อยู่ในรูปเลขยกกำลังที่มีฐานเท่ากันและเลขชี้กำลังเท่ากันไม่ได้

3) ผู้สอนและผู้เรียนช่วยกันสรุปว่าเลขยกกำลังทั้งสองจำนวนจะบวกหรือลบกันให้ได้ผลลัพธ์เป็นเลขยกกำลังจำนวนเดียวเมื่อสามารถเขียนเลขยกกำลังทั้งสองจำนวนให้อยู่ในรูปจำนวนจริง คูณด้วยเลขยกกำลังที่มีฐานเท่ากันและเลขชี้กำลังเท่ากันได้

2. การคูณและการหารเลขยกกำลังสองจำนวนอาจทำได้โดยทำให้ฐานหรือเลขชี้กำลังของเลขยกกำลังเท่ากันอย่างใดอย่างหนึ่งแล้วจึงคูณหรือหารกันโดยอาศัยทฤษฎีบทของเลขยกกำลัง เช่น

(1) $$(5)^{\frac{1}{2}}(3)^{\frac{1}{3}} = (5)^{\frac{3}{6}}(3)^{\frac{2}{6}} = (5^3)^{\frac{1}{6}}(3^2)^{\frac{1}{6}} = (125)^{\frac{1}{6}}(9)^{\frac{1}{6}} = (1125)^{\frac{1}{6}}$$

(2) $$4(3)^{\frac{1}{3}}(6)^{\frac{1}{2}} = 2(3)^{\frac{1}{3}}2(6)^{\frac{1}{2}} = (2^3 \times 3)^{\frac{1}{3}}(2^2 \times 6)^{\frac{1}{2}} = (24)^{\frac{1}{3}}(24)^{\frac{1}{2}} = (24)^{\frac{5}{6}}$$

(3) $$\frac{5^{\frac{1}{5}}}{2^{\frac{1}{3}}} = \frac{5^{\frac{3}{15}}}{2^{\frac{5}{15}}} = \frac{(5^3)^{\frac{1}{15}}}{(2^5)^{\frac{1}{15}}} = (\frac{125}{32})^{\frac{1}{15}}$$

ผู้สอนอาจจัดการสอนดังนี้

1) ผู้สอนให้ผู้เรียนเขียน $27^{\frac{1}{2}}$ และ $24^{\frac{1}{3}}$ ให้อยู่ในรูปจำนวนจริงคูณด้วยเลขยกกำลังที่มีฐานเท่ากัน พร้อมทั้งหาค่า $27^{\frac{1}{2}} \cdot 24^{\frac{1}{3}}$ และ $\frac{27^{\frac{1}{2}}}{24^{\frac{1}{3}}}$ ซึ่งผู้เรียนควรทำได้ดังนี้

$$27^{\frac{1}{2}} = (3^2 \times 3)^{\frac{1}{2}} = 3(3)^{\frac{1}{2}}$$

$$24^{\frac{1}{3}} = (2^3 \times 3)^{\frac{1}{3}} = 2(3)^{\frac{1}{3}}$$

ดังนั้น $27^{\frac{1}{2}} \cdot 24^{\frac{1}{3}} = 3(3)^{\frac{1}{2}} \cdot 2(3)^{\frac{1}{3}} = 6(3)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 6(3)^{\frac{5}{6}}$

และ $\dfrac{27^{\frac{1}{2}}}{24^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{3(3)^{\frac{1}{2}}}{2(3)^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{3}{2}(3)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{2}(3)^{\frac{1}{6}}$

2) ผู้สอนให้ผู้เรียนเขียน $4^{\frac{1}{3}}$ และ $5^{\frac{1}{4}}$ ให้อยู่ในรูปเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเท่ากันพร้อมทั้งหาค่า $4^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{4}}$ และ $\dfrac{4^{\frac{1}{3}}}{5^{\frac{1}{4}}}$ ซึ่งผู้เรียนควรทำได้ดังนี้

$$4^{\frac{1}{3}} = 4^{\frac{1}{3}\times\frac{4}{4}} = (4^4)^{\frac{1}{12}} = 256^{\frac{1}{12}}$$

$$5^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{1}{4}\times\frac{3}{3}} = (5^3)^{\frac{1}{12}} = 125^{\frac{1}{12}}$$

ดังนั้น $4^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} = 256^{\frac{1}{12}} \cdot 125^{\frac{1}{12}} = (256 \times 125)^{\frac{1}{12}} = 32000^{\frac{1}{12}}$

และ $\dfrac{4^{\frac{1}{3}}}{5^{\frac{1}{4}}} = \dfrac{256^{\frac{1}{12}}}{125^{\frac{1}{12}}} = \left(\dfrac{256}{125}\right)^{\frac{1}{12}}$

3) ผู้สอนและผู้เรียนช่วยกันสรุปว่าเลขยกกำลังสองจำนวนคูณกันหรือหารกันจะได้ผลลัพธ์เป็นเลขยกกำลังจำนวนเดียว เมื่อเลขยกกำลังทั้งสองจำนวนเขียนให้อยู่ในรูปจำนวนจริงคูณด้วยเลขยกกำลังที่มีฐานเท่ากันหรือเลขชี้กำลังเท่ากันได้

3. การคิดคำนวณเกี่ยวกับจำนวนที่มีกรณฑ์ปรากฏอยู่ ผลลัพธ์สุดท้ายอาจจะเป็นเศษส่วนที่มีตัวส่วนเป็นจำนวนที่มีกรณฑ์อยู่ด้วย เช่น

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{5}-2}{2+\sqrt{3}} &= \frac{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{3}-1)(2+\sqrt{3})} \\ &= \frac{5-4}{2\sqrt{3}+3-2-\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}+1} \end{aligned}$$

ผู้สอนควรชี้แจงกับผู้เรียนว่าโดยทั่วไปนิยมเขียนผลลัพธ์ขั้นสุดท้ายให้อยู่ในรูปที่มีตัวส่วนเป็นจำนวนที่ไม่มีกรณฑ์ปรากฏอยู่ ซึ่งทำได้โดยหาจำนวนมาคูณทั้งตัวเศษและตัวส่วน เช่น จากตัวอย่างข้างต้นอาจทำได้ดังนี้

$$\frac{1}{\sqrt{3}+1} = \frac{1}{\sqrt{3}+1} \times \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}$$
$$= \frac{\sqrt{3}-1}{3-1}$$
$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

ผู้สอนอาจทำได้ดังนี้

1) ผู้สอนบอกผู้เรียนว่าในการคิดคำนวณเกี่ยวกับเลขยกกำลังนิยมเขียนผลลัพธ์สุดท้ายให้อยู่ในรูปจำนวนที่ตัวส่วนไม่มีกรณฑ์ เช่น $\frac{1}{\sqrt{2}}$ นิยมเขียนเป็น $\frac{\sqrt{2}}{2}$ และผู้สอนควรชี้ให้เห็นว่าการกระทำเช่นนี้จะมีส่วนช่วยในกรณีที่ต้องการหาค่าประมาณของจำนวนเช่น หาค่าประมาณของ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ถ้าต้องการหาร 1 ด้วย 1.414 เทียบกับการหาร 1.414 ด้วย 2 จะใช้เวลาต่างกันมาก

2) ผู้สอนฝึกให้ผู้เรียนหาจำนวนซึ่งเมื่อนำไปคูณกับจำนวน เช่น $\sqrt{2}$, $3^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt{x}$, $(\sqrt{3}-2)$, $(\sqrt{x}-\sqrt{y})$ และ $(\sqrt{x-2}+5)$ แล้วได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนที่ไม่มีกรณฑ์ปรากฏอยู่ ซึ่งผู้เรียนควรทำได้ดังนี้

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2$$
$$3^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{2}{3}} = 3$$
$$\sqrt{x}\cdot\sqrt{x} = x$$
$$(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2) = 3-4 = -1$$
$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y}) = x-y$$
$$(\sqrt{x-2}+5)(\sqrt{x-2}-5) = x-2-25 = x-27$$

4. ในการหาค่าประมาณถึงทศนิยมตำแหน่งที่กำหนดให้ ใช้วิธีประมาณตามที่นิยมกันทั่วไป คือ ถ้าให้หาทศนิยมตำแหน่งที่ n เวลาคำนวณให้หาถึงตำแหน่งที่ $n+1$ ถ้าตำแหน่งที่ $n+1$ มากกว่าหรือเท่ากับ 5 ก็ปัดขึ้นไปรวมกับตำแหน่งที่ n อีก 1 ถ้าน้อยกว่า 5 ก็ตัดทิ้งไป เช่น ต้องการค่าประมาณถึงทศนิยมตำแหน่งที่ 3 เวลาคำนวณให้หาถึงทศนิยมตำแหน่งที่ 4 แล้วจึงปัดหรือตัดทศนิยมตามที่ต้องการ เช่น ถ้าคำนวณถึงทศนิยมตำแหน่งที่ 4 ได้ 3.4547 ก็ตอบว่าค่าประมาณคือ 3.455 แต่ถ้าคำนวณได้ 3.4564 ก็ใช้ 3.456 เป็นต้น

5. การสอนการแก้สมการที่ตัวแปรอยู่ในรูปเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะอาจทำได้ดังนี้

1) ผู้สอนยกตัวอย่างที่ 8 หน้า 16 ในหนังสือเรียนแล้วให้ผู้เรียนแสดงวิธีหาเซตคำตอบของสมการ $\sqrt{2x+3} = x$

2) ผู้สอนชี้ให้ผู้เรียนเห็นว่าการแก้สมการโดยใช้วิธียกกำลังสองของจำนวนที่เท่ากันแล้วหาคำตอบของสมการใหม่จะต้องตรวจสอบว่าคำตอบของสมการใหม่เป็นคำตอบของสมการที่กำหนดให้หรือไม่ เพราะการยกกำลังสองทำให้สมการที่ได้ไม่สมมูลกับสมการเดิม เช่น

ตัวอย่าง จงหาเซตคำตอบของสมการ $\sqrt{2x+3} = x$

วิธีทำ จาก $\sqrt{2x+3} = x$

กำลังสองของจำนวนที่เท่ากันย่อมเท่ากัน

ดังนั้น $2x + 3 = x^2$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x-3)(x+1) = 0$$

$$x = 3 \quad \text{หรือ} \quad x = -1$$

ตรวจสอบค่า x ที่ได้ว่าค่าใดสอดคล้องกับสมการที่กำหนดให้

กรณี $x = 3$

จะได้ $\sqrt{2x+3} = \sqrt{(2\times 3)+3}$

$$= \sqrt{9}$$

$$= 3 = x$$

แสดงว่า 3 สอดคล้องสมการที่กำหนดให้

กรณี $x = -1$

จะได้ $\sqrt{2x+3} = \sqrt{2(-1)+3}$

$$= \sqrt{1}$$

$$= 1 \neq x$$

แสดงว่า -1 ไม่สอดคล้องสมการที่กำหนดให้

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการที่กำหนดให้คือ $\{3\}$

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

1. ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลเป็นเนื้อหาที่จะต้องอาศัยความรู้พื้นฐานในเรื่องเลขยกกำลังในการนิยามฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลซึ่งผู้เรียนได้เรียนมาแล้ว จากนั้นจึงนิยามฟังก์ชันลอการิทึมในรูปของตัวผกผันของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลซึ่งผู้เรียนและผู้สอนอาจพบการให้นิยามฟังก์ชันทั้งสองในหนังสือเล่มอื่นๆ ที่แตกต่างไปจากหนังสือเรียนเล่มนี้ เช่น วิชาแคลคูลัสในระดับอุดมศึกษาได้นิยามฟังก์ชัน

ลอการิทึมก่อนแล้วจึงนิยามฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลโดยนิยามฟังก์ชันลอการิทึมในรูปปฏิยานุพันธ์ ดังนี้คือ

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \ , x > 0$$

และให้บทนิยามของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลในรูปตัวผกผันของ $\ln x$ กล่าวคือ

ให้ $y = \exp(x)$ ก็ต่อเมื่อ $x = \ln y$ จากนั้นจึงนิยาม a^x ในรูป $a^x = \exp(x \ln a)$ และ $\log_a x$ เป็นตัวผกผันของฟังก์ชัน $f(x) = a^x$ ซึ่งผลจากบทนิยามนี้จะได้

$e^x = \exp(x \ln e) = \exp(x)$

และเรียกฟังก์ชัน $\ln x$ และ $\exp(x)$ ว่าเป็นฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลตามลำดับ สำหรับการประยุกต์ใช้ในสาขาวิชาสถิติ และวิทยาศาสตร์แขนงต่าง ๆ จะใช้ฟังก์ชันในรูป $f(x) = ka^x$ เมื่อ $a > 0$, $a \neq 1$ และ $k \neq 0$

ดังนั้นผู้สอนและผู้เรียนจึงอาจพบบทนิยามของฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลที่มีรูปแบบต่างไปจากที่นิยามไว้ในหนังสือเรียน ทั้งนี้การนิยามนั้นขึ้นอยู่กับความรู้พื้นฐานของผู้เรียนและการนำฟังก์ชันดังกล่าวไปใช้ ผู้สอนจึงไม่ควรเจาะจงรูปแบบของฟังก์ชันให้เป็นรูปแบบใดรูปแบบหนึ่งโดยเฉพาะ แต่ควรมุ่งเน้นการนำความรู้ไปใช้ตามผลการเรียนรู้ของบทนี้

2. ในหนังสือเรียนได้ให้บทนิยามของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลไว้ว่าคือฟังก์ชัน $y = a^x, a \in R$ $a > 0$, $a \neq 1$ ผู้สอนไม่ควรถามผู้เรียนว่าฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลหรือไม่

$$y = 5(2)^x$$
$$y = 3^{2x+4}$$
$$y = 5^x + 2$$
$$y = -(\frac{1}{5})^x + 4$$

เพราะเมื่อตอบตามบทนิยามในหนังสือเรียนคำตอบคือไม่ใช่ แต่ถ้าไปศึกษาจากตำราอื่น ๆ ที่ให้นิยามแตกต่างไปอาจเรียกฟังก์ชันเหล่านี้ว่าฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและเรื่องเป็นหรือไม่เป็นฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลก็ไม่ใช่สาระสำคัญอะไร

3. ผู้สอนอาจจัดการสอนโดยให้ผู้เรียนเขียนกราฟของความสัมพันธ์

$$y = (\frac{1}{2})^x$$
$$y = 5^x$$
$$y = 2^x$$

1) ผู้สอนให้ผู้เรียนช่วยกันพิจารณาว่าความสัมพันธ์ $y = a^x, a \in R, a > 0, a \neq 1$ จะเป็นฟังก์ชันหรือไม่ ซึ่งผู้เรียนควรสรุปได้ว่าเป็นฟังก์ชัน โดยอาศัยการพิจารณากราฟที่ได้ในข้อ 1

2) ผู้สอนบอกผู้เรียนว่าฟังก์ชัน $y = a^x, a \in R, a > 0, a \neq 1$ เรียกว่า ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

   ผู้สอนและผู้เรียนช่วยกันสรุปบทนิยามของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

3) ผู้สอนให้ผู้เรียนเขียนกราฟของฟังก์ชัน $y = a^x, a \in R, a > 0, a \neq 1$ โดยกำหนดให้ a เป็น $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, 3 , 4 และ 10 ลงในระบบแกนมุมฉากเดียวกัน ผู้สอนและผู้เรียนพิจารณากราฟแล้วช่วยกันสรุปข้อสังเกตที่สำคัญเกี่ยวกับฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลซึ่งผู้เรียนควรสรุปได้ดังนี้

1. กราฟของฟังก์ชัน $y = a^x, a \in R, a > 0, a \neq 1$ จะผ่านจุด (0, 1) เสมอ ทั้งนี้เพราะ $a^0 = 1$
2. ถ้า $a > 1$ แล้ว $y = a^x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม และ ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว $y = a^x$ เป็นฟังก์ชันลด
3. ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลเป็นฟังก์ชัน 1 – 1 จาก R ไปทั่วถึง R^+
4. โดยสมบัติของฟังก์ชัน 1 – 1 จะได้ว่า $a^x = a^y$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$

ฟังก์ชันลอการิทึม

1. พิจารณาฟังก์ชันลอการิทึม $\{(x, y) \mid y = \log_a x, a \in R, a > 0, a \neq 1\}$ จะเห็นว่าถ้า a มีค่าแตกต่างกันจะได้ฟังก์ชันลอการิทึมที่แตกต่างกันด้วย เช่น $\{(x, y) \mid y = \log_3 x\}$ กับ $\{(x, y) \mid y = \log_5 x\}$ เป็นฟังก์ชันลอการิทึมที่แตกต่างกันหนังสือบางเล่มจึงเรียก $\{(x, y) \mid y = \log_a x, a \in R, a > 0, a \neq 1\}$ ว่าฟังก์ชันลอการิทึมฐาน a เช่น เรียก $\{(x, y) \mid y = \log_2 x\}$ ว่าฟังก์ชันลอการิทึมฐาน 2

ผู้สอนอาจจัดการสอนดังนี้

1) ผู้สอนให้ผู้เรียนพิจารณาฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล $\{(x, y) \mid y = a^x, a \in R, a > 0, a \neq 1\}$ แล้วให้ตอบคำถามต่อไปนี้

   (1) ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลเป็นฟังก์ชัน 1 – 1 หรือไม่ (เป็น)

   (2) โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลคือเซตใด (เซตของจำนวนจริงและเซตของจำนวนจริงบวกตามลำดับ)

   (3) ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลมีฟังก์ชันผกผันหรือไม่เพราะเหตุใด(มี เพราะเป็นฟังก์ชัน1–1)

   (4) ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลคือเซตใด ($\{(x, y) \mid x = a^y, a \in R, a > 0, a \neq 1\}$)

   จากคำตอบข้อนี้ ผู้สอนบอกผู้เรียนว่าฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล เรียกว่า ฟังก์ชันลอการิทึม

2) ผู้สอนอธิบายว่า เนื่องจากฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล $\{(x, y) \in R \times R \mid y = a^x, a \in R, a > 0, a \neq 1\}$ เป็นฟังก์ชัน 1 – 1 จาก R ไปทั่วถึง R^+ ดังนั้นตัวผกผันของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลจึงเป็นฟังก์ชันจาก R^+ ไป R และฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล คือ $\{(x, y) \in R \times R \mid x = a^y, a \in R, a > 0, a \neq 1\}$
จาก $x = a^y$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูป $y = f(x)$ ได้โดยกำหนดให้ $y = \log_a x$ ซึ่ง $\log_a x$ อ่านว่า "ลอการิทึมเอกซ์ฐานเอ" หรือ "ล็อกเอกซ์ฐานเอ" ดังนั้นฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลจึงเขียนใหม่ได้เป็น $\{(x, y) \in R^+ \times R \mid y = \log_a x, a \in R, a > 0, a \neq 1\}$

3) ผู้สอนถามผู้เรียนว่า จากข้อสรุป $\{(x, y) \mid x = a^y, a \in R, a > 0, a \neq 1\}$ และ $\{(x, y) \mid \log_a x = y, a \in R, a > 0, a \neq 1\}$ เป็นฟังก์ชันเดียวกันผู้เรียนสรุปได้หรือไม่ว่า $x = a^y$ มีความหมายเดียวกับ $y = \log_a x$ ผู้สอนให้ผู้เรียนเขียนสมการที่เขียนในรูปเลขยกกำลัง เช่น $81 = 3^4$, $\frac{1}{32} = (\frac{1}{2})^5$, $1000 = 10^3$, $0.001 = 10^{-3}$ ให้อยู่ในรูปลอการิทึม และเขียนสมการ เช่น $\log_{10}0.001 = -3$, $\log_{10}100 = 2$, $\log_5 125 = 3$ ให้อยู่ในรูปเลขยกกำลัง

4) ผู้สอนให้ผู้เรียนเขียนกราฟของฟังก์ชัน $y = \log_a x$ เมื่อ $a \in R$ และ $a > 0, a \neq 1$ โดยกำหนดค่า a ให้แตกต่างกัน เช่น $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{3}$, 3, 4 และ 10 ลงในระบบแกนมุมฉากเดียวกัน ผู้สอนและผู้เรียนพิจารณากราฟแล้วช่วยกันสรุปข้อสังเกตที่สำคัญเกี่ยวกับฟังก์ชันลอการิทึม ซึ่งควรสรุปได้ดังนี้

(1) กราฟของฟังก์ชัน $y = \log_a x$ จะผ่านจุด (1, 0) เสมอ ทั้งนี้เพราะว่า $\log_a 1 = 0$

(2) ถ้า $a > 0$ แล้ว $y = \log_a x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม
ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว $y = \log_a x$ เป็นฟังก์ชันลด

กราฟของฟังก์ชันลอการิทึม

(3) ฟังก์ชันลอการิทึมเป็นฟังก์ชัน 1 – 1 จาก R^+ ไปทั่วถึง R

(4) โดยอาศัยสมบัติของฟังก์ชัน 1 – 1 จะได้ว่า $\log_a x = \log_a y$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$

5) ผู้สอนและผู้เรียนช่วยกันพิสูจน์สมบัติของลอการิทึม โดยอาศัยทฤษฎีบทของเลขยกกำลังและการเปลี่ยนรูปลอการิทึมให้อยู่ในรูปเลขยกกำลัง

2. การหาค่าลอการิทึมอาจหาได้หลายวิธี โดยอาศัยการเปลี่ยนรูปลอการิทึมให้อยู่ในรูปเลขยกกำลังหรือใช้สมบัติของลอการิทึม เช่น การหาค่าของ $\log_{\frac{1}{3}} 9$ ทำได้ดังนี้

วิธีที่ 1 ให้ $\log_{\frac{1}{3}} 9 = x$

จะได้ $(\frac{1}{3})^x = 9$

ความสัมพันธ์ระหว่างเอกซ์โพเนนเชียลกับลอการิทึม

$$(3^{-1})^x = 3^2$$

$$3^{-x} = 3^2$$

$$x = -2$$

ดังนั้น $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$

วิธีที่ 2

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{3}} 9 &= \log_{\frac{1}{3}} 3^2 \\ &= 2\ \log_{\frac{1}{3}} 3 \\ &= 2\ \log_{\frac{1}{3}} (\frac{1}{3})^{-1} \\ &= -2\ \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} \\ &= -2 \end{aligned}$$

วิธีที่ 3

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{3}} 9 &= \frac{\log_3 9}{\log_3 \frac{1}{3}} \\ &= \frac{\log_3 3^2}{\log_3 3^{-1}} \\ &= \frac{2\log_3 3}{(-1)\log_3 3} \\ &= -2 \end{aligned}$$

ผู้สอนควรแนะนำให้ผู้เรียนได้ฝึกหาค่าลอการิทึมหลาย ๆ วิธี ซึ่งจะทำให้ผู้เรียนเข้าใจเรื่องนี้ได้ดียิ่งขึ้น

ลอการิทึมสามัญ

1. การหาค่าลอการิทึมสามัญในหนังสือเรียนหัวข้อ 1.6 ผู้สอนควรให้ผู้เรียนสังเกตว่า ถ้า $1 \le N_0 < 10$ จะได้ว่า $\log 1 \le \log N_0 < \log 10$ เนื่องจากฟังก์ชันที่กล่าวถึงเป็นฟังก์ชันที่มีฐานเป็นสิบ ซึ่งเป็นฟังก์ชันเพิ่มแต่ถ้าเป็นฟังก์ชันลอการิทึมที่มีฐานน้อยกว่าหนึ่งจะสรุปเช่นนี้ไม่ได้ เพราะว่าฟังก์ชันลอการิทึมที่ฐานน้อยกว่าหนึ่งเป็นฟังก์ชันลด เช่น

$$\log_{\frac{1}{2}} 1 = 0$$

$$\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$$

$$\log_{\frac{1}{2}} 10 \approx -3.322$$

จะเห็นว่า $1 < 4 < 10$ แต่ $\log_{\frac{1}{2}} 1 > \log_{\frac{1}{2}} 4 > \log_{\frac{1}{2}} 10$

ผู้สอนอาจจัดการสอนดังนี้

1) ผู้สอนบอกผู้เรียนว่าลอการิทึมที่ใช้มากในการคำนวณเกี่ยวกับการคูณ หาร เลขยกกำลัง คือลอการิทึมฐานสิบ ซึ่งเรียกว่าลอการิทึมสามัญ การเขียนลอการิทึมสามัญนิยมเขียนโดยไม่มีฐานกำกับ เช่น $\log_{10}5$ เขียนแทนด้วย $\log 5$

   $\log_{10}N$ เขียนแทนด้วย $\log N$

2) ผู้สอนทบทวนการเปลี่ยนรูปลอการิทึมให้อยู่ในรูปเลขยกกำลังและสมบัติของลอการิทึม แล้วให้ผู้เรียนหาค่าลอการิทึมของจำนวนที่เขียนได้ในรูป 10^n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม เช่น $\log 10$, $\log 100$, $\log 1000$, $\log 1$, $\log 0.1$, $\log 0.01$, $\log 0.001$
   จากนั้นผู้สอนและผู้เรียนช่วยกันสรุปการหาค่า $\log 10^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม ซึ่งควรสรุปได้ว่า $\log 10^n = n$

3) ผู้สอนให้ผู้เรียนเขียนจำนวนเช่น 15600 , 1240 , 154 , 5.74 , 0.024 , 0.0036 ให้อยู่ในรูป $N_0 \times 10^n$ เมื่อ $1 \le N_0 < 10$ และ n เป็นจำนวนเต็ม แล้วช่วยกันสรุปว่าสำหรับจำนวนจริงบวก N ใด ๆ จะเขียน N ให้อยู่ในรูป $N_0 \times 10^n$ เมื่อ $1 \le N_0 < 10$ และ n เป็นจำนวนเต็มได้เสมอ

4) ผู้สอนแสดงการหาค่า $\log 5700$ เมื่อกำหนด $\log 5.7 = 0.7559$ ดังนี้

   จาก $5700 = 5.7 \times 10^3$

   จะได้
   $$\begin{aligned} \log 5700 &= \log(5.7 \times 10^3) \\ &= \log 5.7 + \log 10^3 \\ &= 0.7559 + 3 \\ &= 3.7559 \end{aligned}$$

   ในทางกลับกันถ้ากำหนดให้ $\log N = 3.7559$ และ $\log 5.7 = 0.7559$ จะหาค่า N ได้อย่างไร

ผู้สอนและผู้เรียนช่วยกันสรุปวิธีหาค่า N เมื่อทราบค่า $\log N$ โดยอาศัยตัวอย่างข้างต้น
ผู้สอนบอกผู้เรียนว่าค่าที่หาได้เรียกว่าแอนติลอการิทึมของ $\log N$

2. สำหรับการหาค่าลอการิทึมของจำนวนที่ไม่อาจหาค่าได้โดยตรงจากตารางในภาคผนวกของหนังสือเรียน ผู้สอนไม่ควรเน้นให้ผู้เรียนมีทักษะหรือวัดผลการเรียนรู้ในส่วนนี้ ตัวอย่างที่แสดงไว้ในหนังสือเรียนเพียงเพื่อให้ผู้เรียนสามารถหาค่า $\log N$ ได้จากตารางเท่านั้น สำหรับในทางปฏิบัติปัจจุบัน การประยุกต์ใช้ในสาขาวิชาอื่น การคำนวณหาค่าลอการิทึมมักนิยมใช้เครื่องคิดเลขหรือเครื่องช่วยคำนวณที่สามารถหาค่าฟังก์ชันลอการิทึมได้โดยตรง ซึ่งทำให้สะดวกขึ้นมาก ผู้สอนอาจสอนดังนี้

1) ผู้สอนบอกผู้เรียนว่าตารางลอการิทึมสามัญในภาคผนวกของหนังสือเรียนเป็นตารางที่แสดงค่าลอการิทึมสามัญของจำนวนตั้งแต่ 1.00 – 9.99 ซึ่งเป็นทศนิยม 4 ตำแหน่งและเป็นค่าโดยประมาณ
   ผู้สอนบอกวิธีใช้ตารางเพื่อหาค่า log 2.59 ซึ่งจะได้ log 2.59 = 0.4133 พร้อมทั้งฝึกให้ผู้เรียนหาลอการิทึม เช่น log 1.12 , log 2.64 , log 3.04 , log 8.76 และ log 9.47
2) ผู้สอนให้ผู้เรียนหาค่า log348 , log5670 , log0.597 และlog0.00978 โดยอาศัยวิธีการเขียนจำนวนจริง N ให้อยู่ในรูป $N_0 \times 10^n$ เมื่อ $1 \le N_0 < 10$ และ n เป็นจำนวนเต็มซึ่งจะได้ $\log N = \log N_0 + n$ แล้วให้หาค่า $\log N_0$ จากตารางตามวิธีในข้อ 1)
3) ผู้สอนถามผู้เรียนว่าจะหาค่า log 76.54 ตามวิธีการที่กล่าวมาแล้วในข้อ 2) ได้หรือไม่ซึ่งผู้เรียนควรตอบว่าหาค่า log76.54 โดยตรงจากตารางไม่ได้ ผู้สอนแนะนำวิธีหาค่า log76.54 ตามวิธีดังตัวอย่างในหนังสือเรียน

3. ในการหาแอนติลอการิทึมนั้นในหนังสือเรียนไม่ได้ให้ตารางแอนติลอการิทึมไว้เพราะต้องการให้หาค่าแอนติลอการิทึมของจำนวนจริงใด ๆ โดยอาศัยตารางลอการิทึมและวิธีการกลับกันกับการหาค่าลอการิทึม กล่าวคือถ้าให้ $\log N = A$ จะหาค่า N หรือแอนติลอการิทึมของ A ได้โดยการจัดรูป A ให้อยู่ในรูป $x + n$ เมื่อ $0 \le x < 1$ และ n เป็นจำนวนเต็มแล้วอาศัยสมบัติของลอการิทึมหาค่า N ได้ เช่น

ถ้า
$$\begin{aligned}
\log N &= -5.3344 \\
&= 0.6656 + (-6) \\
&= \log 4.63 + \log 10^{-6} \\
&= \log (4.63 \times 10^{-6})
\end{aligned}$$
จะได้
$$\begin{aligned}
N &= 4.63 \times 10^{-6} \\
&= 0.00000463
\end{aligned}$$

4. ในหนังสือเรียนหัวข้อ 1.7 ได้กล่าวถึงลอการิทึมฐาน e ซึ่งเรียกว่า ลอการิทึมธรรมชาติหรือลอการิทึมแบบเนเปียร์ ผู้สอนอาจจะเล่าให้ผู้เรียนฟังว่าเหตุที่เรียกลอการิทึมฐาน e ว่าลอการิทึมแบบเนเปียร์ เพราะว่าผู้ที่คิดลอการิทึมฐาน e คือ จอห์น เนเปียร์ (John Napier) นักคณิตศาสตร์ชาวสก็อต ซึ่งมีชีวิตอยู่ระหว่างปี ค.ศ. 1550 – 1617

5. เมื่อผู้เรียนสามารถคำนวณค่าประมาณโดยใช้ลอการิทึมได้แล้ว ผู้สอนควรยกตัวอย่างข้อมูลทางสถิติให้ผู้เรียนคำนวณหาค่าเฉลี่ยเรขาคณิต การยกตัวอย่างดังกล่าวนอกจากเป็นการฝึกทักษะในการคิดคำนวณแล้ว ยังทำให้ผู้เรียนได้เห็นประโยชน์ในการนำฟังก์ชันลอการิทึมไปใช้ เช่น

จงหาค่าเฉลี่ยเรขาคณิตของ 8.105 , 12.83 , 15.3 , 35.34

จาก ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต (G.M) = $\sqrt[N]{X_1 X_2 X_3 \ldots X_n}$

หรือ log G.M. $= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \log x_i$

ดังนั้น log G.M. $= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{4} \log x_i$

$$= \frac{1}{4} (\log 8.105 + \log 12.83 + \log 15.3 + \log 35.34)$$

$$= \frac{1}{4} (0.9088 + 1.1082 + 1.1847 + 1.5483)$$

$$= \frac{1}{4} (4.75)$$

$$= 1.1875$$

$$= 1 + 0.1875$$

$$= \log 10 + \log 1.54$$

$$= \log (1.54 \times 10)$$

เพราะฉะนั้น G.M. $= 1.54 \times 10$

$$= 15.4$$

การเปลี่ยนฐานลอการิทึม

1. ผู้สอนให้ผู้เรียนหาค่า $\log_5 25$, $\log_2 64$, $\log_3 81$ ซึ่งผู้เรียนควรหาได้ดังนี้

$$\log_5 25 = \log_5 5^2 = 2 \log_5 5 = 2$$

$$\log_2 64 = \log_2 2^6 = 6 \log_2 2 = 6$$

$$\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4 \log_3 3 = 4$$

แล้วถามผู้เรียนว่าจะหาค่า $\log_5 45$ โดยวิธีเดียวกับวิธีข้างต้นได้หรือไม่ ซึ่งผู้เรียนควรตอบว่าหาไม่ได้ เพราะเราไม่ทราบว่า 5 ยกกำลังอะไรจึงจะเท่ากับ 45

ผู้สอนบอกผู้เรียนว่า เนื่องจากเราสามารถหาค่าลอการิทึมสามัญของจำนวนจริงได้โดยอาศัยตาราง ดังนั้นเราอาจจะหาค่า $\log_5 45$ โดยอาศัยตารางลอการิทึมสามัญดังนี้

ให้ $y = \log_5 45$

จะได้ $5^y = 45$

$$\log 5^y = \log 45$$

$$y \log 5 = \log 45$$

$$y = \frac{\log 45}{\log 5} = \frac{1.6532}{0.6990}$$

$$\approx 2.3651$$

ดังนั้น $\log_5 45 \approx 2.3651$

จะเห็นว่า $\log_5 25$, $\log_2 64$, $\log_3 81$ หาค่าได้โดยตรง กล่าวคือไม่ต้องอาศัยตารางลอการิทึมสามัญ ส่วน $\log_5 45$ ไม่อาจจะหาค่าได้โดยตรง แต่อาจจะหาค่าได้โดยวิธีการข้างต้นซึ่งต้องเปลี่ยนฐานลอการิทึมให้เป็นฐานสิบก่อน เพราะต้องอาศัยตารางลอการิทึมสามัญ

จากวิธีการเปลี่ยน $\log_5 45$ ให้เป็นลอการิทึมฐานสิบข้างต้น จะเห็นว่าอาจจะเปลี่ยนฐานของ $\log_5 45$ ให้เป็นลอการิทึมฐาน b ใด ๆ ก็ได้

2. ผู้สอนให้ผู้เรียนเปลี่ยน $\log_a x$ ให้อยู่ในรูปลอการิทึมฐาน b เมื่อ $a \in R$ และ $a > 0$, $a \neq 1$ โดยวิธีการทำนองเดียวกันกับการเปลี่ยน $\log_5 45$ ให้อยู่ในรูปลอการิทึมสามัญในข้อ 1 ข้างต้นซึ่งผู้เรียนควรสรุปได้ว่า

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

การประยุกต์ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

สมการเอกซ์โพเนนเชียลและสมการลอการิทึมและการประยุกต์

1. ในการแก้สมการลอการิทึมจากโจทย์ที่กำหนดให้ เมื่อแก้สมการจนได้ค่าของตัวแปรในสมการแล้ว ค่าที่หาได้บางค่าอาจไม่ใช่คำตอบของสมการลอการิทึม ตัวอย่างเช่น

ในการแก้สมการ $\log x = 1 - \log(x-9)$

จาก $\log x = 1 - \log(x-9)$

จะได้ $\log x = \log 10 - \log(x-9)$

$$\log x = \log\left(\frac{10}{x-9}\right)$$

$$x = \frac{10}{x-9}$$

$$x(x-9) = 10$$

$$x^2 - 9x - 10 = 0$$

$$(x-10)(x+1) = 0$$

$x = 10$ หรือ $x = -1$

โดยบทนิยามของฟังก์ชันลอการิทึม สมการนี้จะมีความหมายก็ต่อเมื่อ $x > 0$ และ $x - 9 > 0$ นั่นคือ $x > 9$ จะเป็นเงื่อนไขหนึ่งของสมการด้วย ซึ่ง -1 ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขดังกล่าว ดังนั้น -1 จึงไม่เป็นคำตอบของสมการ แต่ถ้าแทน x ด้วย 10 ในสมการจะได้สมการเป็นจริง ดังนั้น 10 จึงเป็นคำตอบของสมการ

ดังนั้นในการสอนเรื่องการแก้สมการลอการิทึม ผู้สอนควรชี้ให้ผู้เรียนเห็นว่าจำนวนที่อยู่หลังคำว่า log จะต้องมากกว่าศูนย์เสมอ ซึ่งจะนำไปพิจารณาค่าของตัวแปรที่หาได้ว่าค่าใดควรเป็นคำตอบของสมการ และให้ผู้เรียนตรวจสอบค่าเหล่านี้ว่าค่าใดเป็นคำตอบของสมการ

2. ในการเรียนการสอนผู้สอนอาจยกตัวอย่างการนำลอการิทึมไปใช้ในเรื่องต่าง ๆ โดยเฉพาะในวิชาวิทยาศาสตร์ เช่น การวัดระดับความเข้มเสียง อัตราขยายกำลัง (power gain) ในวงจรขยาย ดังรายละเอียดต่อไปนี้

1) การวัดระดับความเข้มเสียงเป็นการเปรียบเทียบความเข้มเสียงที่มาจากแหล่งกำเนิดเสียง 2 แหล่ง ซึ่งจุดที่เปรียบเทียบจะต้องอยู่ห่างจากแหล่งกำเนิดเสียงทั้งสองแหล่งเท่ากัน โดยปกติใช้ความเข้มเสียงที่หูปกติเริ่มได้ยินเป็นเกณฑ์อ้างอิง คือ $10^{-12}\ w/m^2$ ระดับความเข้มเสียงโดยทั่วไปจะบอกในหน่วยของเบล * ใช้ B แทนคำว่า “เบล” โดยนิยามว่า

$$N = \log \frac{I}{I_0} \quad (B)$$

เมื่อ N แทนระดับความเข้มเสียงมีหน่วยเป็นเบล

I แทนความเข้มเสียงที่ต้องการวัดหรือเปรียบเทียบ

I_0 แทนความเข้มเสียงที่หูคนปกติเริ่มได้ยิน ซึ่งเท่ากับ $10^{-12}\ w/m^2$

เนื่องจากเบลเป็นหน่วยที่ใหญ่มาก จึงนิยมใช้เดซิเบล (1 เบล = 10 เดซิเบล) โดยทั่วไปจะใช้ dB แทนคำว่าเดซิเบล

ดังนั้น
$$n = 10 \log \frac{I}{I_0} \quad (dB)$$

เมื่อ n แทนระดับความเข้มเสียงมีหน่วยเป็นเดซิเบล

หมายเหตุ * เบล (Bel) คือหน่วยซึ่งไม่มีมิติ ใช้สำหรับแสดงอัตราส่วนของกำลัง (Power) สองค่า จำนวนเบลเป็นค่าลอการิทึมฐานสิบของอัตราส่วนของกำลัง เมื่อกำหนดให้ P_1และ P_2 แทนกำลังสองค่า และ N แทนจำนวนเบลที่สอดคล้องกับอัตราส่วน $P_1 : P_2$ จะได้ $N = \log \frac{P_1}{P_2}$

2) ในวิชาอิเล็กทรอนิกส์การออกแบบวงจรขยายสัญญาณไฟฟ้า จะมีการเปรียบเทียบกำลังของสัญญาณเข้ากับกำลังของสัญญาณออก ซึ่งเรียกว่า อัตราขยายกำลัง

ซึ่ง
$$G = \frac{P_2}{P_1}$$

เมื่อ G แทนอัตราขยายกำลัง

P_1 แทนกำลังของสัญญาณเข้า

P_2 แทนกำลังของสัญญาณออก

อัตราขยายกำลังของสัญญาณโดยทั่วไปจะนิยามในหน่วยของเดซิเบล

$$G' = 10 \log G = 10 \log \frac{P_2}{P_1}$$

เมื่อ G' แทนอัตราขยายกำลังในหน่วยของเดซิเบล

ตัวอย่างเช่น ถ้าวงจรมีอัตราขยายกำลัง 100 อัตราขยายกำลังในหน่วยเดซิเบล คือ

$$G' = 10 \log 100 = 20$$

บางครั้งอาจเป็นการเปรียบเทียบในรูปของอัตราขยายกระแสไฟฟ้าหรือแรงดันไฟฟ้า

$$G' = 10 \log \frac{P_2}{P_1} = 10 \log \frac{I_2^2 R}{I_1^2 R} = 20 \log \frac{I_2}{I_1}$$

$$G' = 10 \log \frac{P_2}{P_1} = 10 \log \frac{\frac{V_2^2}{R}}{\frac{V_1^2}{R}} = 20 \log \frac{V_2}{V_1}$$

เมื่อ I_1 แทนกระแสไฟฟ้าของสัญญาณเข้า

I_2 แทนกระแสไฟฟ้าของสัญญาณออก

V_1 แทนแรงดันไฟฟ้าของสัญญาณเข้า

V_2 แทนแรงดันไฟฟ้าของสัญญาณออก

ตัวอย่างกิจกรรมที่ส่งเสริมทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

การสอนเรื่องฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึมในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔–๖ เล่ม ๓ ของ สสวท. นั้น ผู้สอนอาจพบว่าการเขียนกราฟของฟังก์ชันบนกระดานเพื่อประกอบการจัดการเรียนการสอนเป็นเรื่องยุ่งยากและใช้เวลามาก กิจกรรมต่อไปนี้จะช่วยให้ผู้สอนจัดการเรียนการสอนเรื่องนี้ได้ง่ายขึ้น แต่เนื่องจากสื่อเหล่านี้สร้างจากโปรแกรม The Geometer's Sketchpad ดังนั้นผู้สอนหรือผู้เรียนจะใช้งานสื่อเหล่านี้ได้เมื่อมีเครื่องคอมพิวเตอร์ที่ติดตั้งโปรแกรม The Geometer's Sketchpad แล้วทั้งนี้ผู้ที่จะใช้สื่อนี้ต้องมีความรู้เกี่ยวกับการใช้โปรแกรมThe Geometer's Sketchpad บ้างพอสมควร

แฟ้มที่ใช้ประกอบการจัดกิจกรรมนี้ บรรจุอยู่ในซีดีรอมซึ่งแนบมากับหนังสือคู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔ – ๖ เล่ม ๓ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ ในโฟลเดอร์ชื่อ บทที่ 1 ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

หลังจากผู้สอนได้แนะนำบทนิยามของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลแล้ว ผู้สอนควรให้ผู้เรียนมีส่วนร่วมในการสรุปลักษณะของกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล โดยการสำรวจกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลในกิจกรรมนี้

วัตถุประสงค์

เพื่อให้ผู้เรียนสำรวจกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล รวมทั้งโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน

แนวทางการจัดกิจกรรม

ตอนที่ 1

1. เปิดโฟลเดอร์ **บทที่ 1 ฟังก์ชันเอกซ์เนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม** แฟ้มชื่อ **ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล.gsp** แบบร่างหน้า **1** ในแบบร่างหน้านี้จะมีระบบพิกัด XY ให้ผู้เรียนเขียนกราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้ โดยใช้คำสั่ง *เขียนกราฟของฟังก์ชันใหม่* จากเมนูกราฟ

$y = 2^x$, $y = 3^x$, $y = 8^x$, $y = (\frac{1}{2})^x$ และ $y = (\frac{1}{10})^x$ หรือผู้สอนอาจให้ผู้เรียนเขียนกราฟอื่นที่มีค่าคงตัวต่างจากนี้ก็ได้ จากนั้นให้ผู้เรียนสังเกตและเปรียบเทียบกราฟแต่ละฟังก์ชัน

2. เปิดแบบร่างหน้า **2. กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = a^x$** ในแบบร่างหน้านี้จะมีกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = a^x$ และมีตัวเลื่อน a ซึ่งค่าปัจจุบันอยู่ที่ 4

3. ให้เปลี่ยนแปลงค่าของ a โดยลากตัวเลื่อน a ไปทางซ้ายหรือทางขวาและสังเกตการเปลี่ยนแปลงของกราฟ

คำถาม 1) ลากตัวเลื่อน a ไปทางซ้ายช้า ๆ แต่ให้ a มีค่ามากกว่า 1 จากกราฟของฟังก์ชัน เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นค่าของฟังก์ชันจะเป็นอย่างไร และกราฟตัดแกน Y ที่ใดบ้าง เพราะเหตุใด

2) ลากตัวเลื่อน a ไปทางซ้ายช้า ๆ แต่ให้ a มีค่าอยู่ระหว่าง 0 กับ 1 จากกราฟของฟังก์ชัน เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นค่าของฟังก์ชันจะเป็นอย่างไร และกราฟตัดแกน Y ที่ใดบ้าง เพราะเหตุใด

3) เกิดอะไรขึ้นเมื่อ $a = 1$, $a = 0$, $a < 0$ และ $0 < a < 1$ ให้อธิบาย

4) จากการทำกิจกรรมในตอนที่ 1 โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลคือเซตใด

ตอนที่ 2

1. เปิดแบบร่างหน้า **3.กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = a^x$ และ$g(x) = ba^x$** ในแบบร่างหน้านี้จะมีกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = a^x$ และ $g(x) = ba^x$ มีตัวเลื่อน a, b, c และ d ซึ่งค่าปัจจุบันของตัวเลื่อน a เท่ากับ 4 ตัวเลื่อน b เท่ากับ 1 และตัวเลื่อน c และd เท่ากับ 0

2. เปลี่ยนค่าของ b โดยลากตัวเลื่อน b ช้า ๆ แล้วสังเกตการเปลี่ยนแปลงของกราฟของ g(x) เมื่อเทียบกับกราฟของ f(x)

คำถาม 5) ผู้เรียนคิดว่า b มีผลอย่างไรต่อกราฟของฟังก์ชัน g ให้เขียนข้อความคาดการณ์นั้น

3. ลากตัวเลื่อน a ให้ a มีค่าประมาณ 3 แล้วทำซ้ำข้อ 2 อีกครั้ง

4. ลากตัวเลื่อน a ให้ a มีค่าอยู่ระหว่าง 0 กับ 1 แล้วทำซ้ำข้อ 2 อีกครั้ง

คำถาม 6) การเปลี่ยนแปลงของกราฟของ g(x) ที่เกิดขึ้นในข้อ 3 และ4 สอดคล้องกับข้อความคาดการณ์หรือไม่ ให้ผู้เรียนเขียนสรุปว่า a มีผลอย่างไรต่อกราฟของฟังก์ชัน $g(x) = ba^x$

5. คลิกที่ปุ่มแสดงการทำงาน *เริ่มต้น* เพื่อให้กราฟของฟังก์ชันกลับสู่ตำแหน่งเริ่มต้น

6. แก้ไขฟังก์ชัน g เป็น $g(x) = ba^x + c$

7. ลากตัวเลื่อน c ช้า ๆ เพื่อเปลี่ยนแปลงค่า c แล้วสังเกตการเปลี่ยนแปลงกราฟของ g(x) เมื่อเทียบกับกราฟของ f(x)

คำถาม 7) ผู้เรียนคิดว่า c มีผลอย่างไรต่อกราฟของฟังก์ชัน g และเขียนข้อความคาดการณ์นั้น

8. ลากตัวเลื่อน a ให้ a มีค่าประมาณ 3 แล้วทำซ้ำข้อ 7 อีกครั้ง

9. ลากตัวเลื่อน a ให้ a มีค่าอยู่ระหว่าง 0 กับ 1 แล้วทำซ้ำข้อ 7 อีกครั้ง

คำถาม 8) การเปลี่ยนแปลงของกราฟของ g(x) ที่เกิดขึ้นในข้อ 8 และ 9 สอดคล้องกับข้อความคาดการณ์หรือไม่ ให้ผู้เรียนเขียนข้อสรุปว่า c มีผลอย่างไรต่อกราฟของฟังก์ชันในรูป $g(x) = ba^x + c$

10. คลิกปุ่มแสดงการทำงาน*เริ่มต้น* เพื่อให้กราฟของฟังก์ชันกลับไปสู่ตำแหน่งเริ่มต้น

11. แก้ไขฟังก์ชัน g เป็น $g(x) = ba^{(x-d)} + c$

12. ลากตัวเลื่อน d ช้า ๆ เพื่อเปลี่ยนแปลงค่า d แล้วสังเกตการเปลี่ยนแปลงของกราฟของ g(x) เมื่อเทียบกับกราฟของ f(x)

13. เปลี่ยน c ให้มีค่าประมาณ 2 แล้วทำซ้ำข้อ 12

คำถาม 9) ผู้เรียนคิดว่า d มีผลอย่างไรต่อกราฟของฟังก์ชัน g และเขียนข้อความคาดการณ์นั้น

อินเวอร์สของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

เมื่อผู้เรียนมีความเข้าใจเกี่ยวกับฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลที่อยู่ในรูป $f(x) = a^x$ แล้วให้ผู้เรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้ โดยกิจกรรมนี้ใช้เมื่อผู้สอนได้สอนเรื่องอินเวอร์สของฟังก์ชันมาแล้ว

วัตถุประสงค์

เพื่อให้ผู้เรียนสำรวจกราฟของอินเวอร์สของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

แนวทางการจัดกิจกรรม

1. เปิดโฟลเดอร์ **บทที่ 1 ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม** แฟ้มชื่อ **อินเวอร์สของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล.gsp** แบบร่างนี้จะมีระบบพิกัดฉาก ตัวเลื่อน a และจุด P ซึ่งอยู่บนแกน X
2. ใช้ค่า a ที่วัดไว้ในแบบร่าง สร้างฟังก์ชัน $f(x) = a^x$
3. วัดพิกัดที่หนึ่ง (x) ของจุด P
4. ใช้ค่า x_P ที่วัดไว้ คำนวณค่า $f(x_P)$
5. ลงจุดแบบ (x, y) โดยใช้ค่า x_P ที่วัดไว้ เป็นพิกัดที่หนึ่ง (x) และค่า $f(x_P)$ ที่คำนวณไว้ เป็นพิกัดที่สอง (y)

คำถาม 1) ให้ลากจุด P ไป- มา แล้วสังเกตทางเดินของจุด D ทางเดินของจุด D กับกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = a^x$ มีความสัมพันธ์กันอย่างไร

6. เขียนกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = a^x$

เมื่อลากจุด P จะพบว่าจุด D เคลื่อนที่ไปตามกราฟของฟังก์ชัน

คำถาม 2) ถ้าลงจุด E ที่มีคู่อันดับเป็น $(f(x_P),\ x_P)$ แล้วลากจุด P ไป-มา จุด E นี้จะมีทางเดินเป็นอย่างไร ให้ผู้เรียนคาดการณ์ทางเดินของจุด E แล้วร่างลงในกระดาษ

7. ลงจุดแบบ (x, y) โดยใช้ค่า $f(x_P)$ ที่คำนวณไว้เป็นพิกัดที่หนึ่ง (x) และค่า x_P ที่วัดไว้เป็นพิกัดที่สอง (y)

คำถาม 3) สร้างรอยของจุด E จากนั้นลากจุด P ไป-มา แล้วสังเกตทางเดินของจุด E ว่าเป็นไปตามที่คาดการณ์หรือไม่ ให้อธิบายทางเดินของจุด E

8. ยกเลิกการสร้างรอยของจุด E

9. สร้างโลคัสของจุด E เป็นเส้นประสีเขียวสด หรือสีฟ้า

10. ลากตัวเลื่อน a ให้ $a > 1$ และ $0 < a < 1$ แล้วสังเกตโลคัสของจุด E เพื่อยืนยันข้อความคาดการณ์และคำอธิบายในคำถาม 2) และ 3)

11. สร้างส่วนของเส้นตรง DE แล้วสร้างจุดกึ่งกลาง F

12. สร้างเส้นตรง OF

คำถาม 4) ลากจุด P แล้วสังเกตว่าจุด D และจุด E สัมพันธ์กันอย่างไร

5) โลคัสของจุด E มีความสัมพันธ์อย่างไรกับกราฟของ f(x) เพราะเหตุใด

ในกรณีนี้เรากล่าวว่าโลคัสของจุด E เป็นกราฟของอินเวอร์สของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล ซึ่งเรียกว่า กราฟของฟังก์ชันลอการิทึม เขียนแทนด้วย $y = \log_a x$

ฟังก์ชันลอการิทึม

เมื่อผู้เรียนมีความเข้าใจเกี่ยวกับบทนิยามของฟังก์ชันลอการิทึมแล้วให้ผู้เรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้

วัตถุประสงค์

เพื่อให้ผู้เรียนสำรวจลักษณะของกราฟของฟังก์ชันลอการิทึมที่อยู่ในรูป $y = \log_a x$ รวมทั้งโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันลอการิทึม

แนวทางการจัดกิจกรรม

ตอนที่ 1

1. เปิดโฟลเดอร์ **บทที่ 1 ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม** แฟ้มชื่อ **ฟังก์ชันลอการิทึม.gsp** แบบร่างหน้า **1** แบบร่างหน้านี้จะมีฟังก์ชัน $f(x) = \log_a x$ ตัวเลื่อน a ซึ่งค่าปัจจุบันอยู่ที่ $a = 2.00$ กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \log_{2.00} x$

2. ให้ลากตัวเลื่อน a ไป - มา และสังเกตการเปลี่ยนแปลงของกราฟ

คำถาม 1) ขณะที่ลากตัวเลื่อน a ไปทางซ้ายช้า ๆ โดยที่ a ยังมีค่ามากกว่า 1 จากกราฟของฟังก์ชัน เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นค่าของฟังก์ชันเป็นอย่างไร และกราฟตัดแกน X ที่ใดบ้าง

2) ลากตัวเลื่อน a ไปทางซ้ายช้า ๆ แต่ให้ a มีค่าอยู่ระหว่าง 0 กับ 1 จากกราฟของฟังก์ชัน เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นค่าของฟังก์ชันเป็นอย่างไร และกราฟตัดแกน X ที่ใดบ้าง

3) เกิดอะไรขึ้นเมื่อ $a = 0$, $a = 1$ และ $a < 0$ ให้อธิบาย

4) จากการทำกิจกรรมตอนที่ 1 โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันลอการิทึมคืออะไร

ตอนที่ 2

1. เปิดโฟลเดอร์ **บทที่ 1 ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม** แฟ้มชื่อ **ฟังก์ชันลอการิทึม.gsp** แบบร่างหน้า 2 ในแบบร่างหน้านี้จะมีกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \log_a x$ และ $g(x) = n\log_a(x-b) + c$ ตัวเลื่อน n, a, b และ c ซึ่งค่าปัจจุบันของตัวเลื่อน n เท่ากับ 1, ตัวเลื่อนa เท่ากับ 2 และตัวเลื่อน b และ c เท่ากับ 0

2. เปลี่ยนค่าของ n โดยลากตัวเลื่อน n ช้า ๆ แล้วสังเกตการเปลี่ยนแปลงกราฟของ g(x) เมื่อเทียบกับกราฟของ f(x)

คำถาม 5) ผู้เรียนคิดว่า n มีผลอย่างไรต่อกราฟของ g(x) ให้เขียนข้อความคาดการณ์นั้น

3. ลากตัวเลื่อน a ให้ a มีค่าประมาณ 3 แล้วทำซ้ำข้อ 2 อีกครั้ง

4. ลากตัวเลื่อน a ให้ a มีค่าอยู่ระหว่าง 0 กับ 1 แล้วทำซ้ำข้อ 2 อีกครั้ง

คำถาม 6) การเปลี่ยนแปลงของกราฟของ g(x) ที่เกิดขึ้นในข้อ 3 และ 4 สอดคล้องกับข้อความคาดการณ์หรือไม่ ให้ผู้เรียนเขียนข้อสรุปเกี่ยวกับ n ว่ามีผลอย่างไรต่อกราฟของฟังก์ชันในรูป g(x)

5. คลิกปุ่มแสดงการทำงาน *เริ่มต้น* เพื่อให้กราฟของฟังก์ชันกลับสู่ตำแหน่งเริ่มต้น

6. คลิกปุ่มแสดงการทำงาน $b = 1$

คำถาม 7) กราฟของฟังก์ชัน g ต่างจากกราฟของฟังก์ชัน f อย่างไร

7. ลากตัวเลื่อน b ไป-มา ช้า ๆ เพื่อเปลี่ยนแปลงค่า b แล้วสังเกตการเปลี่ยนแปลงของกราฟของ g(x) เมื่อเทียบกับกราฟของ f(x)

คำถาม 8) ผู้เรียนคิดว่า b มีผลอย่างไรต่อกราฟของฟังก์ชัน g ให้เขียนข้อความคาดการณ์นั้น

8. ลากตัวเลื่อน a ให้ a มีค่าประมาณ 3 แล้วทำซ้ำข้อ 7 อีกครั้ง

9. ลากตัวเลื่อน a ให้ a มีค่าอยู่ระหว่าง 0 กับ 1 แล้วทำซ้ำข้อ 7 อีกครั้ง

คำถาม 9) การเปลี่ยนแปลงของกราฟของ g(x)ที่เกิดขึ้นในข้อ 8 และ 9 สอดคล้องกับข้อความคาดการณ์หรือไม่ ให้ผู้เรียนเขียนข้อสรุปเกี่ยวกับ bว่ามีผลอย่างไรต่อกราฟของฟังก์ชันในรูป $g(x) = n\log_a(x-b)$

10. คลิกปุ่มแสดงการทำงาน*เริ่มต้น* เพื่อให้กราฟของฟังก์ชันกลับไปสู่ตำแหน่งเริ่มต้น

11. คลิกปุ่มแสดงการทำงาน $c = 1$ สังเกตกราฟของ g(x)

12. ลากตัวเลื่อน c ไป-มา ช้า ๆ เพื่อเปลี่ยนแปลงค่า c พร้อมกับสังเกตการเปลี่ยนแปลงของกราฟของ g(x) เทียบกับกราฟของ f(x)

คำถาม 10) ผู้เรียนคิดว่า c มีผลอย่างไรต่อกราฟของฟังก์ชัน g ให้เขียนข้อความคาดการณ์นั้น

13. ลากตัวเลื่อน a ให้ a มีค่าประมาณ 3 แล้วทำซ้ำข้อ 12 อีกครั้ง

14. ลากตัวเลื่อน a ให้ a มีค่าอยู่ระหว่าง 0 กับ 1 แล้วทำซ้ำข้อ 12 อีกครั้ง

คำถาม 11) การเปลี่ยนแปลงของกราฟของ g(x) ที่เกิดขึ้นในข้อ13และ14 สอดคล้องกับข้อความคาดการณ์ไว้หรือไม่ ให้ผู้เรียนเขียนข้อสรุปเกี่ยวกับ c ว่ามีผลอย่างไรต่อกราฟของฟังก์ชันในรูป $g(x) = n \log_a x + c$

ถึงแม้ว่าสื่อเหล่านี้จะมีประโยชน์ในการใช้ประกอบการจัดการเรียนการสอนและการฝึกทักษะเกี่ยวกับการเขียนกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึมได้เป็นอย่างดี แต่สิ่งสำคัญ คือ ต้องแน่ใจว่าผู้เรียนได้เขียนข้อความคาดการณ์ก่อนการสำรวจและหลังจากมีการอภิปรายคำตอบของผู้เรียนที่ได้จากการทำกิจกรรมแล้วผู้สอนต้องสรุปแนวคำตอบที่ถูกต้องให้แก่ผู้เรียน

ตัวอย่างคำตอบกิจกรรมที่ส่งเสริมทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

ผู้สอนควรเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้ค้นหาคำตอบอย่างเต็มความสามารถ และบางคำถามอาจมีคำตอบได้หลากหลาย ดังนั้นผู้เรียนไม่จำเป็นต้องได้คำตอบเหมือนกัน

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

1) กราฟของฟังก์ชันจะเข้าใกล้แกน X มากขึ้น เมื่อ x เพิ่มขึ้น y ก็เพิ่มขึ้นด้วยและกราฟตัดแกน Y ที่จุด (0, 1) เพราะว่า $a^0 = 1$
2) เมื่อลากตัวเลื่อน a เข้าใกล้ 0 มาก ๆ ปลายของเส้นกราฟจะเบนเข้าหาแกน Y มากขึ้นและเมื่อx มีค่าเพิ่มขึ้นจะได้ y มีค่าลดลง และกราฟตัดแกน Y ที่จุด (0, 1) เพราะว่า $a^0 = 1$
3) จากกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = a^x$ จะได้ว่า เมื่อ $a = 1$ จะได้กราฟเป็นเส้นตรง ในแนวนอนผ่านจุด (0, 1) เพราะ $1^x = 1$ เป็นสมการเชิงเส้น (ไม่ใช่กราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล) เมื่อ $a = 0$ จะได้กราฟทับแกนX ทางบวก (ไม่รวมจุด (0, 0) และไม่ใช่กราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล)

เมื่อ a < 0 ไม่เกิดกราฟ และ เมื่อ $0 < a < 1$ ค่าของฟังก์ชันจะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ x ลดลง

4) โดเมน คือ เซตของจำนวนจริง เรนจ์ คือ $(0, \infty)$

5) ขึ้นอยู่กับคำตอบของผู้เรียน

6) จากกราฟของฟังก์ชันในรูป $g(x) = ba^x$ และ $f(x) = a^x$ จะได้ว่า

ถ้า $b = 0$ จะได้กราฟทับแกน X ทางบวกซึ่งไม่รวมจุด (0, 0)

ถ้า $b > 1$ กราฟจะเป็นกราฟของฟังก์ชันเพิ่ม โดยค่าของฟังก์ชัน g มากกว่าค่าของฟังก์ชัน f ที่จำนวนจริง x ใด ๆ

ถ้า $0 < b < 1$ กราฟจะเป็นกราฟของฟังก์ชันเพิ่มโดยค่าของฟังก์ชัน f มากกว่าค่าของฟังก์ชัน g ที่จำนวนจริง x ใด ๆ

ถ้า $b < 0$ กราฟของ $g(x)$ จะเป็นกราฟของฟังก์ชันลด

7) ขึ้นอยู่กับคำตอบของผู้เรียน

8) จากกราฟของฟังก์ชันในรูป $g(x) = ba^x + c$ กราฟจะเลื่อนขนานตามแกน Y เป็นระยะ $|c|$ หน่วย ถ้า $c > 0$ กราฟเลื่อนขึ้นโดยกราฟของ $g(x)$ อยู่เหนือกราฟของ $f(x)$ ถ้า $c < 0$ กราฟเลื่อนลง โดยกราฟของ $g(x)$ อยู่ใต้กราฟของ $f(x)$

9) ขึ้นอยู่กับคำตอบของผู้เรียน แต่ตอนท้ายกิจกรรมผู้สอนต้องช่วยให้ผู้เรียนสรุปให้ได้ว่า กราฟของฟังก์ชันในรูป $g(x) = ba^{(x-d)} + c$ กราฟจะเลื่อนขนานตามแกน X เป็นระยะ $|d|$ หน่วย และเลื่อนขนานตามแกน Y เป็นระยะ $|c|$

อินเวอร์สของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

1) ทางเดินของจุด D เป็นเส้นเดียวกับกราฟของ $f(x) = a^x$

2) ขึ้นอยู่กับคำตอบของผู้เรียน

3) ขึ้นอยู่กับคำตอบของผู้เรียน

4) คำตอบมีได้หลากหลาย เช่น ไม่ว่าจะเลื่อนจุด P ไปตำแหน่งใด จะได้ว่าจุด E กับจุด D เป็นจุดที่สมมาตรกันโดยมีเส้นตรง OF เป็นแกนสมมาตร หรือพิกัดที่หนึ่งของจุด E เป็นพิกัดที่สองของจุด D และพิกัดที่สองของจุด E เป็นพิกัดที่หนึ่งของจุด D

5) โลคัสของจุด E เป็นอินเวอร์สของกราฟของ $f(x)$

ฟังก์ชันลอการิทึม

1) เมื่อลากตัวเลื่อน a ไปทางซ้ายช้า ๆ โดยที่ a ยังมีค่ามากกว่า 1 ค่าของฟังก์ชันจะเพิ่มขึ้นและเมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นกราฟยังตัดแกน X ที่จุด (1, 0)

2) เมื่อลากตัวเลื่อน a ไปทางซ้ายช้า ๆ โดยที่ a มีค่าอยู่ระหว่าง 0 กับ1 ค่าของฟังก์ชันจะลดลง และเมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นกราฟยังตัดแกน X ที่จุด (1, 0)

3) เมื่อ $a = 0$ จะได้กราฟทับแกน X ทางบวก(ไม่รวมจุด (0, 0) และไม่ใช่กราฟของฟังก์ชันลอการิทึม) เมื่อ $a = 1$ กราฟของฟังก์ชันลอการิทึมไม่มีความหมายเนื่องจาก $a \neq 1$ และ เมื่อ $a < 0$ ไม่เกิดกราฟของฟังก์ชัน
4) โดเมน คือ เซตของจำนวนจริงบวก เรนจ์ คือ เซตของจำนวนจริง
5) ขึ้นอยู่กับคำตอบของผู้เรียน
6) จากกราฟของฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $g(x) = n \log_a x$ จะได้ว่า

   เมื่อ $x > 1$ กราฟจะเป็นกราฟของฟังก์ชันเพิ่ม โดยค่าของฟังก์ชัน g มากกว่าค่าของฟังก์ชัน f ที่จำนวนจริง x ใด ๆ

   เมื่อ $0 < x < 1$ กราฟจะเป็นกราฟของฟังก์ชันลด โดยค่าของฟังก์ชัน g น้อยกว่าค่าของฟังก์ชัน f ที่จำนวนจริง x ใด ๆ
7) กราฟของ g(x) คือการเลื่อนขนานกราฟของ f(x) ขึ้นไปตามแกน Y เป็นระยะทาง $|b|$ หน่วย (คิดทิศทาง)
8) ขึ้นอยู่กับคำตอบของผู้เรียน
9) ถ้า $b > 0$ กราฟของ g(x) เลื่อนขึ้นตามแกน Y เป็นระยะทาง b หน่วย

   ถ้า $b < 0$ กราฟของ g(x) เลื่อนลงตามแกน Y เป็นระยะทาง $|b|$ หน่วย (คิดทิศทาง)
10) ขึ้นอยู่กับคำตอบของผู้เรียน
11) ถ้า $c > 0$ กราฟของ g(x) เลื่อนไปทางขวามือตามแกน X เป็นระยะทาง c หน่วย

    ถ้า $c < 0$ กราฟของ g(x) เลื่อนไปทางซ้ายมือตามแกน X เป็นระยะทาง $|c|$ หน่วย (คิดทิศทาง)

การวัดและการประเมินผลระหว่างเรียน

การประเมินผลระหว่างเรียนเป็นการวัดผลการเรียนรู้เพื่อปรับปรุงและพัฒนาการเรียนการสอนและตรวจสอบว่าผู้เรียนแต่ละคนมีความรู้ความเข้าใจในเรื่องที่ผู้สอนสอนมากน้อยเพียงใด ซึ่งในที่นี้จะกล่าวถึงตัวอย่างการประเมินผลด้านความรู้โดยผู้สอนอาจใช้วิธีการประเมินดังนี้

1. สังเกตจากการตอบคำถามและการเข้าร่วมกิจกรรม
2. ทำแบบฝึกหัด
3. ทดสอบ

จากผลการประเมินหากพบว่ามีผู้เรียนไม่ผ่านเกณฑ์ที่ผู้สอนกำหนดไว้ ผู้สอนอาจสอนเสริมหรือให้ผู้เรียนศึกษาจากหนังสือเรียนหรืออาจให้ผู้เรียนที่มีผลการเรียนรู้ผ่านเกณฑ์แล้วช่วยสอน หลังจากนั้นจึงให้ทำข้อที่ทำผิดอีกครั้งจนกว่าจะผ่านเกณฑ์

ตัวอย่างแบบทดสอบ

1. ให้ $2^{x+1} + 2^{x} = 3^{y+2} - 3^{y}$ โดยที่ x และ y เป็นจำนวนเต็ม จงหาค่า x และ y

2. ถ้า $\log_b a = c$ และ $\log_x b = c$ แล้ว $\log_a x$ เท่ากับเท่าไร

3. จงหาค่าของ x จากสมการ $\log_3(\log_2 x) = 2$

4. จงหาค่า x ทั้งหมดที่ทำให้ $\log_5(x-2) + \log_5(x-6) = 1$

5. ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ และ $a^2 + b^2 = 7ab$ จงพิสูจน์ว่า $\log(\frac{a+b}{3}) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$

6. กำหนดให้จุด $A(x_1, y_1)$ และจุด $B(x_2, y_2)$ เป็นจุดสองจุดบนกราฟ $y = \log x$ ให้จุด D เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง AB ซึ่งเมื่อลากเส้นตรงขนานกับแกน X ผ่านจุด D เส้นตรงเส้นนี้จะไปตัดกราฟ $y = \log x$ ที่จุด $C(x_3, y_3)$ จงพิสูจน์ว่า $x_3^2 = x_1x_2$

7. กำหนดค่าของ 3^0 ถึง 3^{16} ดังนี้

$3^0 = 0$	$3^4 = 81$	$3^8 = 6561$	$3^{12} = 531441$	$3^{16} = 43046721$
$3^1 = 1$	$3^5 = 243$	$3^9 = 19683$	$3^{13} = 1594323$	
$3^2 = 9$	$3^6 = 729$	$3^{10} = 59049$	$3^{14} = 4782969$	
$3^3 = 27$	$3^7 = 2187$	$3^{11} = 177147$	$3^{15} = 14348907$	

จงหาช่วงของค่า $\log 3$ จากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้

8. จงหาค่าของ x จากสมการ $\log_x(19x - 30) = 3$

9. โรงงานคอมพิวเตอร์แห่งหนึ่งพบว่า เมื่อจ่ายเงิน x ล้านดอลลาร์ ในการทำวิจัยจะได้กำไร P(x) ล้านดอลลาร์ ซึ่ง $P(x) = 20 + 5\log_3(x + 3)$ อยากทราบว่าบริษัทควรจะลงทุนในการทำวิจัยเท่าไร จึงจะได้กำไร 40 ล้านบาท

เฉลยตัวอย่างแบบทดสอบ

1. $2^{x+1} + 2^x = 3^{y+2} - 3^y$

$$2^x \cdot 2^1 + 2^x = 3^y \cdot 3^2 - 3^y$$

$$2^x(2+1) = 3^y(3^2 - 1)$$

$$\frac{2^x}{8} = \frac{3^y}{3}$$

$$2^{x-3} = 3^{y-1}$$

เนื่องจากฐานต่างกัน กำลังต้องเท่ากับ 0 จึงจะทำให้สมการเป็นจริง

ดังนั้น $x - 3 = 0$ และ $y - 1 = 0$

$x = 3$ และ $y = 1$

2. เนื่องจาก $\log_b a = c$ และ $\log_x b = c$ จะได้ $a = b^c$ และ $b = x^c$

นั่นคือ $a = b^c$ หรือ $a = x^{c^2}$

ดังนั้น $\log_a a = \log_a x^{c^2}$

$1 = c^2 \log_a x$

นั่นคือ $\log_a x = \frac{1}{c^2}$

3. ให้ $\log_2 x = y$

จะได้ $\log_3 y = 2$

ดังนั้น $y = 3^2$

$= 9$

นั่นคือ $\log_2 x = 9$

$x = 2^9$

ดังนั้น $x = 512$

หรือ $\log_3(\log_2 x) = 2$

จะได้ $\log_2 x = 3^2$

$= 9$

ดังนั้น $x = 2^9$

$= 512$

4. $\log_5(x-2) + \log_5(x-6) = 1$

$$\log_5(x-2)(x-6) = 1$$

$$(x-2)(x-6) = 5^1$$

$$x^2 - 8x + 7 = 0$$

$$(x-1)(x-7) = 0$$

ถ้าแทน x ด้วย 1 แล้วได้ $\log_5(x-2)$ ซึ่งไม่นิยาม

ดังนั้น $x = 7$

5. $a^2 + b^2 = 7ab$

$a^2 + 2ab + b^2 = 9ab$

$(a + b)^2 = 9ab$

$(\frac{a+b}{3})^2 = ab$

$\log(\frac{a+b}{3})^2 = \log ab$

$2\log(\frac{a+b}{3}) = \log a + \log b$

$\log(\frac{a+b}{3}) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$

6. **วิธีที่ 1** เนื่องจาก A, B และ C เป็นจุดบนกราฟ $y = \log x$

ดังนั้น $y_1 = \log x_1$, $y_2 = \log x_2$, $y_3 = \log x_3$

และจุด D เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง AB

พิกัดของจุด D คือ $(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}) = (\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{\log x_1 + \log x_2}{2})$

เนื่องจาก เส้นตรง CD ขนานกับแกน X

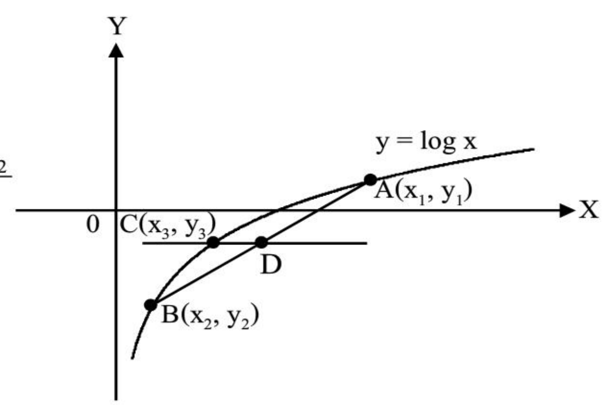
จะได้ $y_3 = \frac{y_1+y_2}{2}$

นั่นคือ $\log x_3 = \frac{\log x_1 + \log x_2}{2}$

$2\log x_3 = \log x_1 x_2$

$\log x_3^2 = \log x_1 x_2$

ดังนั้น $x_3^2 = x_1 x_2$



วิธีที่ 2 ให้ลอการิทึมที่กำหนดในโจทย์เป็นลอการิทึมฐาน a

จากวิธีที่ 1 จะได้ $y_1 = \log_a x_1$ นั่นคือ $x_1 = a^{y_1}$

ในทำนองเดียวกันจะได้ $x_2 = a^{y_2}$ และ $x_3 = a^{y_3}$

ดังนั้น
$$
\begin{aligned}
x_3^2 &= (a^{y_3})^2 \\
&= a^{2y_3} \\
&= a^{y_1+y_2} \quad (\text{เนื่องจาก } y_3 = \frac{y_1+y_2}{2}) \\
&= a^{y_1}a^{y_2} \\
&= x_1x_2
\end{aligned}
$$

7. $3^0 = 1$ $3^4 = 81$ $3^8 = 6561$ $3^{12} = 531441$

$3^1 = 3$ $3^5 = 243$ $3^9 = 19683$ $3^{13} = 1594323$

$3^2 = 9$ $3^6 = 729$ $3^{10} = 59049$ $3^{14} = 4782969$

$3^3 = 27$ $3^7 = 2187$ $3^{11} = 177147$ $3^{15} = 14348907$ และ $3^{16} = 43046721$

หาขอบเขตล่าง ของ log3 จากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้

จะพบว่า $3^{15} > 10^7$

นั่นคือ $15 \log 3 > 7$

$$\log 3 > \frac{7}{15}$$

$$\log 3 > 0.467$$

หาขอบเขตบนของ log3 จากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้

จะพบว่า $3^{16} < 10^8$

นั่นคือ $16 \log 3 < 8$

$$\log 3 < 0.500$$

ดังนั้น จะได้ช่วงของค่า log3 คือ $0.467 < \log 3 < 0.500$

8. $\log_x(19x - 30) = 3$

จะได้ $19x - 30 = x^3$

$$x^3 - 19x + 30 = 0$$

โดยทฤษฎีบทตัวประกอบ $x - 2$ เป็นตัวประกอบของ $x^3 - 19x + 30$

ดังนั้น $(x-2)(x-3)(x+5) = 0$

$$x = 2 \text{ หรือ } x = 3 \text{ หรือ } x = -5$$

เนื่องจาก $\log_x(19x - 30)$ ไม่นิยามเมื่อ $x < \frac{30}{19}$ ดังนั้น $x \neq -5$

ดังนั้น $x = 2$ หรือ $x = 3$

9. โจทย์ต้องการหาค่า x ซึ่งทำให้ $P(x) = 40$

จะได้ว่า $20 + 5\log_3(x+3) = 40$

$$5\log_3(x+3) = 20$$

$$\log_3(x+3) = 4$$

ดังนั้น $x + 3 = 3^4$

$$x = 78$$

ดังนั้น บริษัทควรลงทุนในการทำวิจัยเป็นเงิน 78 ล้านดอลลาร์

เฉลยแบบฝึกหัด

แบบฝึกหัด 1.1

1. 1) $\frac{1}{2^3}$ 2) $6x^7y^5$

3) $16x^{10}$ 4) $\frac{4}{b^2}$

5) $\frac{1}{a^7}$ 6) $\frac{2}{ab^5}$

7) $\frac{16x^{12}}{y^8}$ 8) $\frac{9a^4}{b^6}$

9) $\frac{1}{x^3y^{10}}$ 10) $\frac{z^3}{x^7y^6}$

2. 1) เท็จ เพราะ $\frac{1}{x^m}\cdot\frac{1}{x^n} = x^{-m}\cdot x^{-n} = x^{(-m)+(-n)} = x^{-(m+n)}$

2) เท็จ เพราะ $\frac{x^m}{x^{-n}} = \frac{x^m}{\frac{1}{x^n}} = x^m\cdot x^n = x^{m+n}$

3) จริง เนื่องจาก $x > 0$, $x \neq 1$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก
ดังนั้น $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ จะได้ $\frac{1}{x^{-n}} = \frac{1}{\frac{1}{x^n}} = x^n$

4) เท็จ เช่น ถ้า $x = 2$, $m = 1$ และ $n = 2$ จะได้ $x^m + x^n = 2^1 + 2^2 = 6$
แต่ $x^{m+n} = 2^{1+2} = 8$ ดังนั้น $x^m + x^n = x^{m+n}$ จึงเป็นเท็จ

5) จริง เนื่องจาก $x > 0$, $x \neq 1$ และ m เป็นจำนวนเต็มบวก
กรณีที่ 1 ถ้า $x > 1$ แล้ว $x^m > 1^m$ ดังนั้น $x^m > 1$
กรณีที่ 2 ถ้า $x^m > 1$ แล้ว $x^m - 1 > 0$
ดังนั้น $(x-1)(x^{m-1} + x^{m-2} + x^{m-3} + \ldots + 1) > 0$
เนื่องจาก $x^{m-1} + x^{m-2} + x^{m-3} + \ldots + 1$ เป็นจำนวนบวก
ดังนั้น $x - 1 > 0$
$x > 1$
จากกรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 จึงสรุปได้ว่า $x^m > 1$ ก็ต่อเมื่อ $x > 1$

แบบฝึกหัด 1.2

1. 1) $2\sqrt{2}|x|$ 2) -1
   3) 4 4) 4
   5) $\frac{1}{2}$

2. 1) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ 2) $\frac{\sqrt{35}}{5}$
   3) $\frac{\sqrt{15}}{10}$ 4) $\sqrt{2}$
   5) $\frac{\sqrt{6}}{4}$

3. 1) 30 2) $2\sqrt{6}$
   3) 6 4) 27

4. 1) $15\sqrt{2}+30$ 2) 1
   3) $7+4\sqrt{3}$ 4) $12-5\sqrt{5}$
   5) 5

แบบฝึกหัด 1.3

1. 1) 9 2) $\frac{1}{2}$
   3) 0.125 4) 0.09
   5) $\frac{1}{25}$ 6) $-\frac{1}{5}$
   7) 9 8) $\frac{27}{64}$
   9) 4 10) $\frac{1}{4}$

2. 1) $\dfrac{1}{2x^2y^3}$ 2) $\dfrac{9x^2}{y^4}$

3) $x^{\frac{13}{2}}$ 4) $x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}$

5) $\dfrac{5}{3}x^3y$

3. 1) $6\sqrt{2}$ 2) $6\sqrt[3]{4}$

3) $5\sqrt{2}$ 4) $4\sqrt[3]{3}$

5) $(2x - 4x^2 + x^4)\sqrt{x}$

4. 1) $\dfrac{2\sqrt{2} - \sqrt{3}}{5}$ 2) $\dfrac{2\sqrt{2} + \sqrt{3}}{5}$

3) $8 - \sqrt{42}$ 4) $\dfrac{153 + 5\sqrt{30}}{91}$

5) $\dfrac{36\sqrt{5} + 20\sqrt{7}}{23}$

5. 1) 4 2) $6(5\sqrt{3} - \sqrt{2})$ 3) 1

6. 1) $2(p + \sqrt{p^2 - q^2})$ 2) $13a^2 + 5b^2 - 12\sqrt{a^4 - b^4}$ 3) $6x + 11 + 4\sqrt{2x^2 + 5x - 3}$

7. 1) 0.5620 2) 4.2367 3) 117.8844

8. 1)
$$\begin{aligned} \sqrt{m} - 8 &= 0 \\ \sqrt{m} &= 8 \\ m &= 64 \end{aligned}$$

ตรวจสอบคำตอบโดยแทน m ในสมการ $\sqrt{m} - 8 = 0$ ด้วย 64 แล้วได้สมการที่เป็นจริง ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้คือ {64}

2)
$$\begin{aligned} \sqrt{5x+1} + 6 &= 10 \\ \sqrt{5x+1} &= 4 \\ 5x + 1 &= 16 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

ตรวจสอบคำตอบโดยแทน x ในสมการ $\sqrt{5x+1} + 6 = 10$ ด้วย 3 แล้วได้สมการที่เป็นจริง ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้คือ {3}

3) $\sqrt{r^2+5} = r$

$r^2 + 5 = r^2$

ไม่มีจำนวนจริงใดเป็นคำตอบของสมการ ดังนั้น เซตคำตอบคือ { }

4) $\sqrt{x+7} = x-5$

$x + 7 = (x-5)^2$

$x + 7 = x^2 - 10x + 25$

$x^2 - 11x + 18 = 0$

$(x-2)(x-9) = 0$

$x = 2$ หรือ $x = 9$

เนื่องจากเมื่อแทน x ในสมการ $\sqrt{x+7} = x-5$ ด้วย 2 จะได้

$\sqrt{2+7} = 2-3$

หรือ $3 = -1$

ซึ่งไม่ถูกต้อง

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้คือ {9}

5) $\sqrt{x+7} = \sqrt{3x+1}$

$x + 7 = 3x + 1$

$2x = 6$

$x = 3$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้คือ {3}

6) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = 2$

$\sqrt{x+1} = 2 + \sqrt{x}$

$x + 1 = 4 + 4\sqrt{x} + x$

$-3 = 4\sqrt{x}$

$-\frac{3}{4} = \sqrt{x}$ ยกกำลังสองจะได้

$\frac{9}{16} = x$

ตรวจสอบคำตอบโดยแทน x ในสมการ $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = 2$ ด้วย $\frac{9}{16}$ จะได้

$\sqrt{\frac{9}{16}+1} - \sqrt{\frac{9}{16}} = 2$

$\frac{5}{4} - \frac{3}{4} = 2$

หรือ $\frac{1}{2} = 2$ ซึ่งไม่ถูกต้อง

แสดงว่า x ไม่สอดคล้องกับสมการที่กำหนดให้

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้คือ { }

7) $\sqrt{x-3} = \sqrt{x}-3$

$x-3 = x-6\sqrt{x}+9$

$-12 = -6\sqrt{x}$

$2 = \sqrt{x}$

$4 = x$

ตรวจสอบคำตอบ โดยแทน x ในสมการ $\sqrt{x-3} = \sqrt{x}-3$ ด้วย 4 จะได้

$\sqrt{4-3} = \sqrt{4}-3$

$\sqrt{1} = 2-3$

หรือ $1 = -1$ ซึ่งไม่ถูกต้อง

แสดงว่า x ที่ได้ไม่สอดคล้องกับสมการที่กำหนดให้

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้คือ { }

8) $\sqrt{x+12}+\sqrt{x} = 2$

$\sqrt{x+12} = 2-\sqrt{x}$

$x+12 = 4-4\sqrt{x}+x$

$8 = -4\sqrt{x}$

$-2 = \sqrt{x}$

$4 = x$

ตรวจสอบคำตอบโดยแทน x ในสมการ $\sqrt{x+12}+\sqrt{x} = 2$ ด้วย 4 จะได้

$\sqrt{4+12}+\sqrt{4} = 2$

$\sqrt{16}+\sqrt{4} = 2$

$4 + 2 = 2$

หรือ $6 = 2$ ซึ่งไม่ถูกต้อง

แสดงว่า x ที่ได้ไม่สอดคล้องกับสมการที่กำหนดให้

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้คือ { }

9) $-\sqrt{x^2+21} \quad = \quad x+3$ ยกกำลังสองจะได้

$$x^2+21 = x^2+6x+9$$
$$6x = 12$$
$$x = 2$$

ตรวจสอบคำตอบโดยแทน x ในสมการ $-\sqrt{x^2+21} = x+3$ ด้วย 2 จะได้

$$-\sqrt{2^2+21} = 2+3$$
$$-\sqrt{25} = 5$$

หรือ $-5 = 5$ ซึ่งไม่ถูกต้อง

แสดงว่า x ที่ได้ไม่สอดคล้องกับสมการที่กำหนดให้

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้คือ { }

10) $\sqrt{3x+4} + \sqrt{3x-5} = 9$

$$\sqrt{3x+4} = 9-\sqrt{3x-5}$$
$$3x+4 = 81-18\sqrt{3x-5}+3x-5$$
$$4-81+5 = -18\sqrt{3x-5}$$
$$-72 = -18\sqrt{3x-5}$$
$$4 = \sqrt{3x-5}$$
$$16 = 3x-5$$
$$3x = 21$$
$$x = 7$$

ตรวจสอบคำตอบโดยแทน x ในสมการ $\sqrt{3x+4} = 9-\sqrt{3x-5}$ ด้วย 7 แล้วได้สมการที่เป็นจริง

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้คือ {7}

11) $\sqrt{4x+1}-\sqrt{x-2} = \sqrt{x+3}$

$$\sqrt{4x+1} = \sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}$$
$$4x+1 = x+3+2\sqrt{x+3}\sqrt{x-2}+x-2$$
$$2x = 2\sqrt{x+3}\sqrt{x-2}$$
$$x = \sqrt{x+3}\sqrt{x-2}$$
$$x^2 = (x+3)(x-2)$$
$$0 = x-6$$
$$x = 6$$

ตรวจสอบคำตอบโดยแทน x ในสมการ $\sqrt{4x+1}-\sqrt{x-2} = \sqrt{x+3}$ ด้วย 6 แล้วได้สมการที่เป็นจริง

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้คือ {6}

12) $\sqrt{x+7}+\sqrt{x+2} = \sqrt{6x+13}$

$$x+7+2\sqrt{x+7}\sqrt{x+2}+x+2 = 6x+13$$

$$2\sqrt{x+7}\sqrt{x+2} = 4x+4$$

$$\sqrt{x+7}\sqrt{x+2} = 2x+2$$

$$(x+7)(x+2) = 4x^2+8x+4$$

$$x^2+9x+14 = 4x^2+8x+4$$

$$3x^2-x-10 = 0$$

$$(3x+5)(x-2) = 0$$

$x = -\frac{5}{3}$ หรือ $x = 2$

ตรวจสอบคำตอบโดยแทน x ในสมการ $\sqrt{x+7}+\sqrt{x+2} = \sqrt{6x+13}$ ด้วย $-\frac{5}{3}$ จะได้

$$\sqrt{-\frac{5}{3}+7}+\sqrt{-\frac{5}{3}+2} = \sqrt{6(-\frac{5}{3})+13}$$

$$\sqrt{\frac{16}{3}}+\sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{3}$$

หรือ $\frac{5}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ ซึ่งไม่ถูกต้อง

ดังนั้น $-\frac{5}{3}$ ไม่สอดคล้องกับสมการที่กำหนดให้

ตรวจสอบคำตอบโดยแทน x ในสมการ $\sqrt{x+7}+\sqrt{x+2} = \sqrt{6x+13}$ ด้วย 2 จะได้

$$\sqrt{9}+\sqrt{4} = \sqrt{6(2)+13}$$

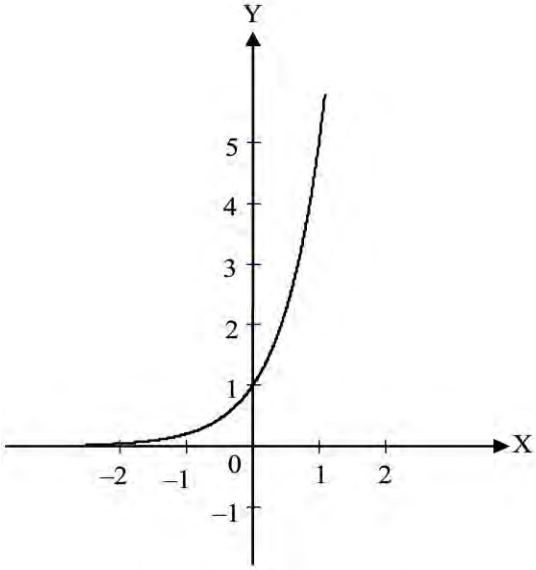
$$3+2 = \sqrt{25}$$

$$5 = 5$$

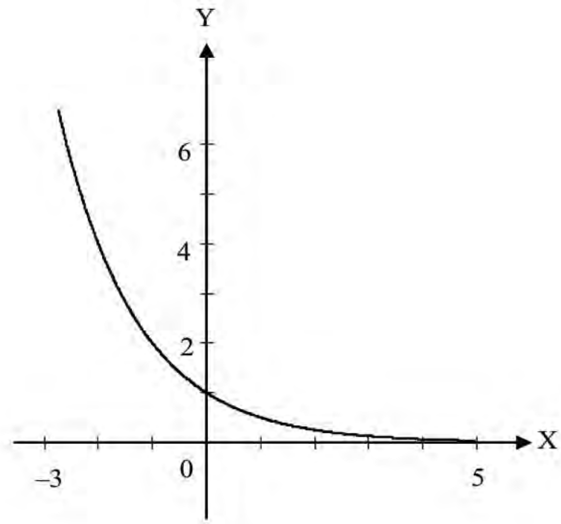
ดังนั้น เซตคำตอบของสมการคือ $\{2\}$

แบบฝึกหัด 1.4

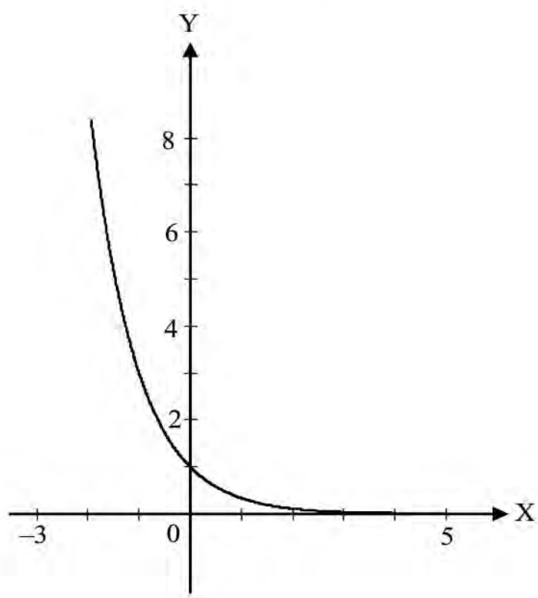
1. 1) $y = 5^x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม



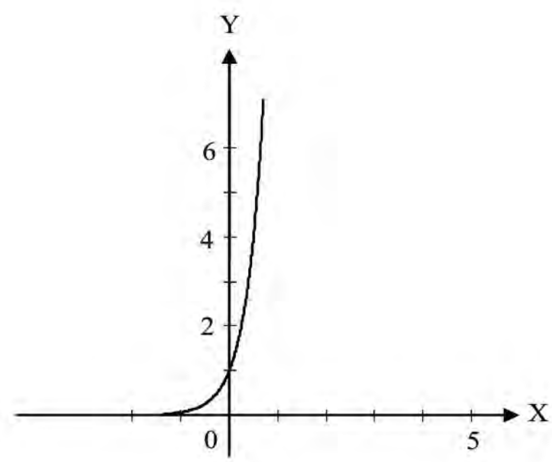
2) $y = (\frac{1}{2})^x$ เป็นฟังก์ชันลด



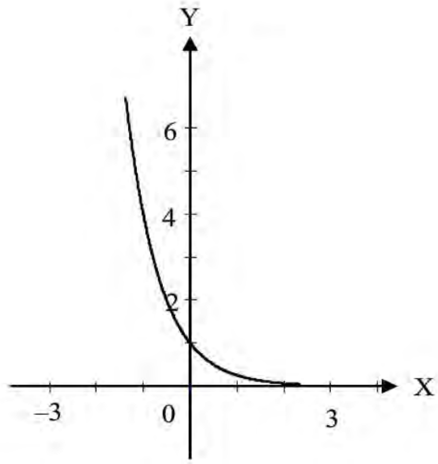
3) $y = 3^{-x} = \frac{1}{3^x} = (\frac{1}{3})^x$ เป็นฟังก์ชันลด



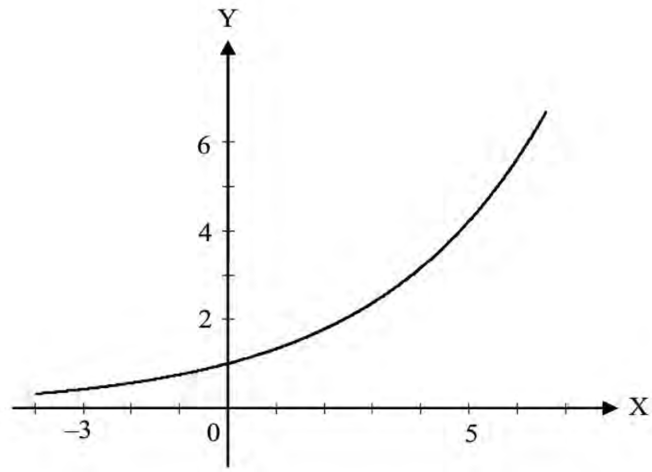
4) $y = 4^{2x} = 16^x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม



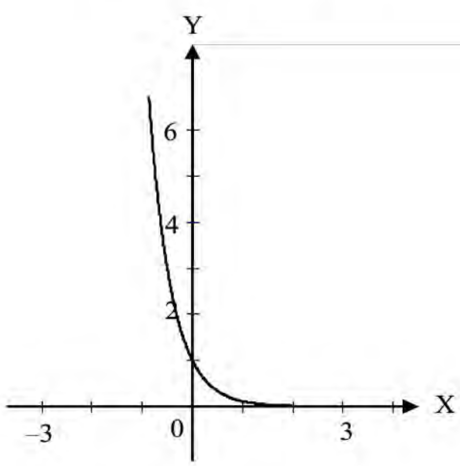
5) $y = (\frac{1}{4})^x$ เป็นฟังก์ชันลด



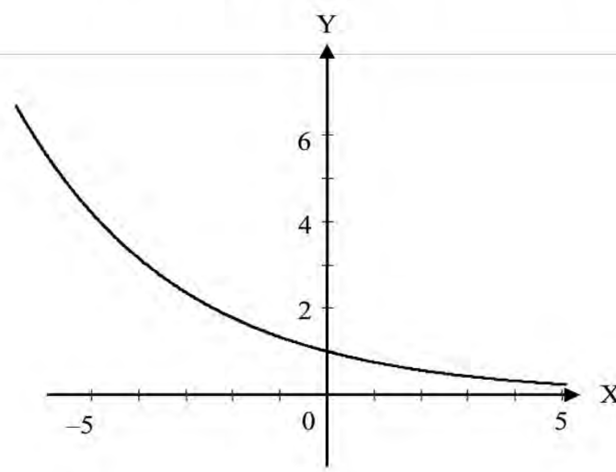
6) $y = (\frac{4}{3})^x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม



7) $y = (\frac{1}{3})^{2x} = (\frac{1}{9})^x$ เป็นฟังก์ชันลด



8) $y = (\frac{3}{4})^x$ เป็นฟังก์ชันลด



2. 1) $\{2\}$ 2) $\{-3\}$

3) $\{\frac{1}{2}\}$ 4) $\{-4\}$

5) $\{3\}$ 6) $\{-3\}$

7) $\{x \mid x \leq 3\}$ 8) $\{x \mid x \leq -4\}$

3. 1) $\frac{1}{4}$ 2) 27

3) 2 4) $\frac{1295}{16}$ หรือ $80\frac{15}{16}$

5) $\frac{3}{2}$ หรือ $1\frac{1}{2}$ 6) $\frac{1}{8}$

7) $\sqrt{3}$ 8) $\frac{1}{72}$

4. ธาตุเรเดียมมีครึ่งชีวิต (half – life) 1,600 ปี หมายความว่า เมื่อเวลาผ่านไป 1,600 ปี ธาตุเรเดียมซึ่งหนัก q_0 มิลลิกรัม จะมีน้ำหนักเหลือ $\frac{q_0}{2}$ มิลลิกรัม

จากสมการ $q = q_0\, 2^{kt}$

เมื่อ $t = 1,600$ จะได้ $\frac{q_0}{2} = q_0 2^{1600k}$

$(2)^{-1} = 2^{1600k}$

ดังนั้น $1600\,k = -1$

จะได้ $k = -\frac{1}{1600}$

5. 1) จาก $y = a^x$

แทน x และ y ในสมการด้วย 2 และ 9 ตามลำดับจะได้

$9 = a^2$

$a = 3$

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลของกราฟในข้อนี้คือ $y = 3^x$

2) จาก $y = a^x$

แทน x และ y ในสมการด้วย –1 และ $\frac{1}{5}$ ตามลำดับจะได้

$\frac{1}{5} = a^{-1}$

$a = 5$

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลของกราฟในข้อนี้คือ $y = 5^x$

3) จาก $y = a^x$

แทน x และ y ในสมการด้วย 2 และ $\frac{1}{16}$ ตามลำดับจะได้

$$\frac{1}{16} = a^2$$

$$a = \frac{1}{4}$$

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลของกราฟในข้อนี้คือ $y = (\frac{1}{4})^x$

4) จาก $y = a^x$

แทน x และ y ในสมการด้วย –3 และ 8 ตามลำดับจะได้

$$8 = a^{-3}$$

$$a = \frac{1}{2}$$

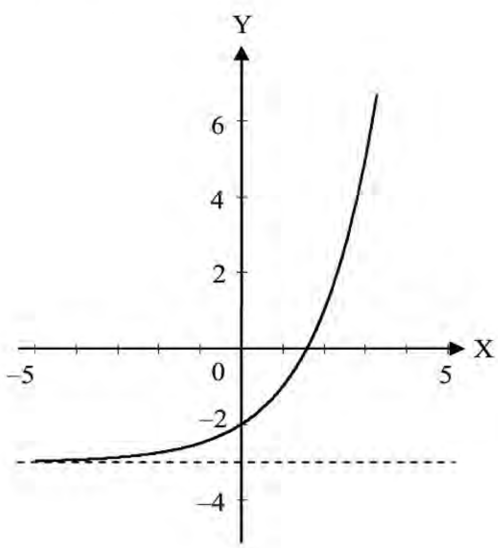
ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลของกราฟในข้อนี้คือ $y = (\frac{1}{2})^x$

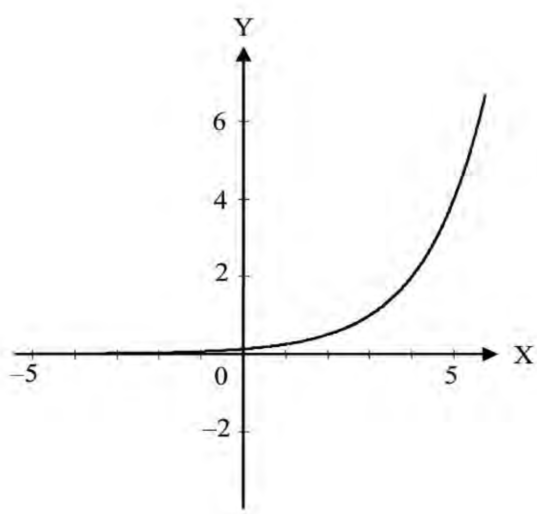
6. 1) ค　　2) ก

3) จ　　4) ข

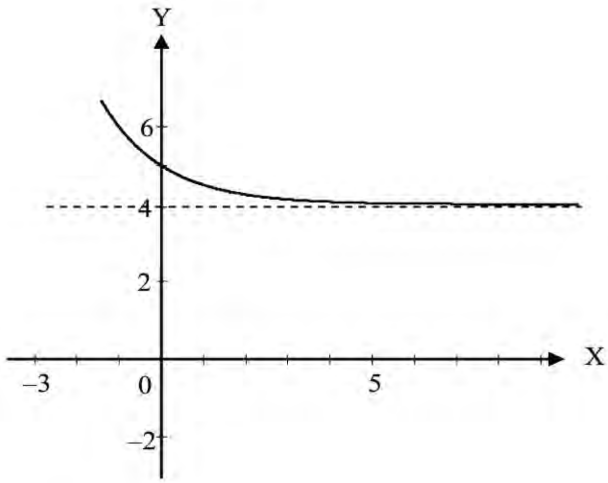
5) ง

7. 1) $y = 2^x - 3$　　2) $y = 2^{x-3}$

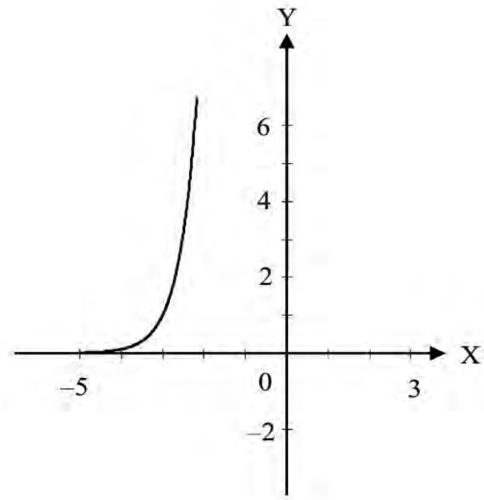




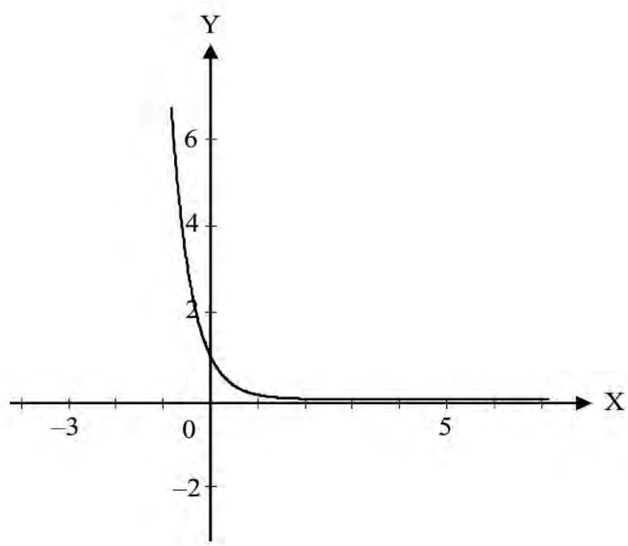
3) $y = 4 + (\frac{1}{2})^x$



4) $y = 10^{x+3}$



5) $y = 10^{-x}$



แบบฝึกหัด 1.5

1. 1) $\log_4 16 = 2$ 2) $\log_{27} 9 = \frac{2}{3}$

3) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = 2$ 4) $\log 0.0001 = -4$

5) $\log_{\frac{1}{2}} 16 = -4$ 6) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{27}{8} = -3$

7) $\log_{\frac{1}{100}} 10000 = -2$ 8) $\log_4 0.125 = -\frac{3}{2}$

2\. 1) $10^2 = 100$ 2) $2^5 = 32$ 3) $5^0 = 1$

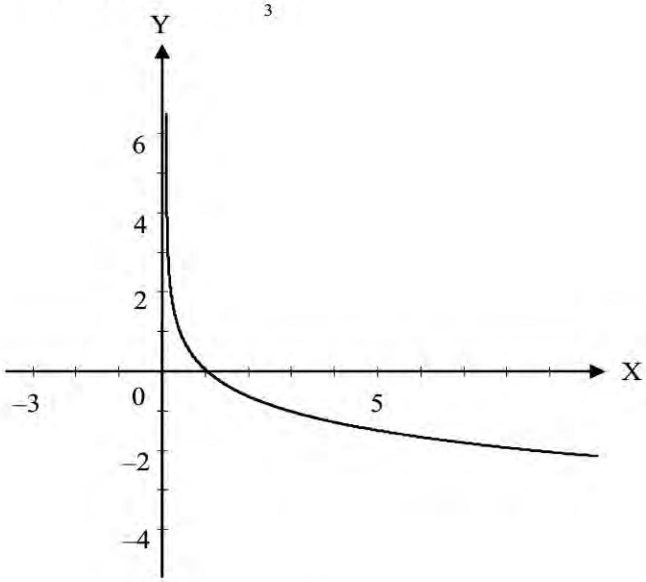
4) $4^{-3} = \frac{1}{64}$ 5) $10^{-3} = 0.001$ 6) $3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{9}$

3\. 1) $\frac{1}{3}$ 2) -2 3) 2

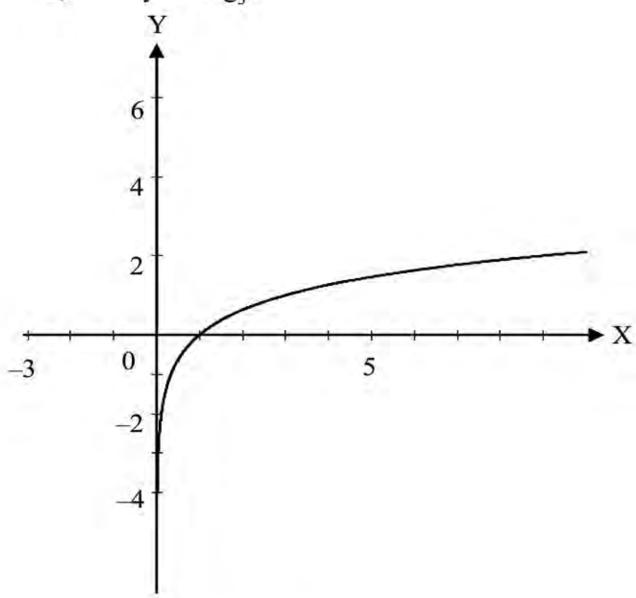
4) -1 5) 24 6) -2

7) 4 8) 2

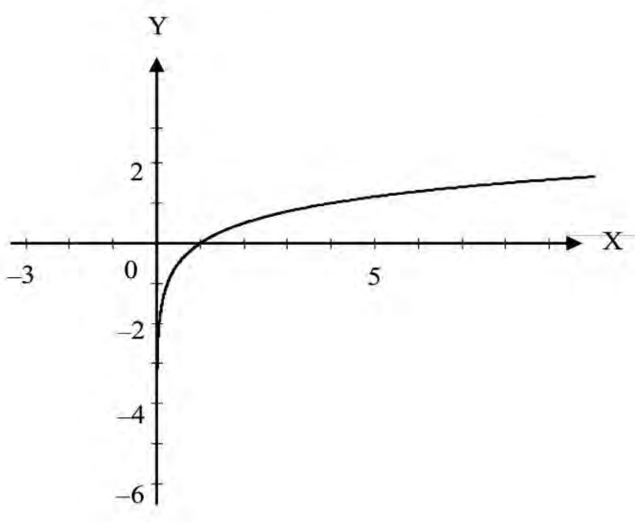
4\. 1) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$



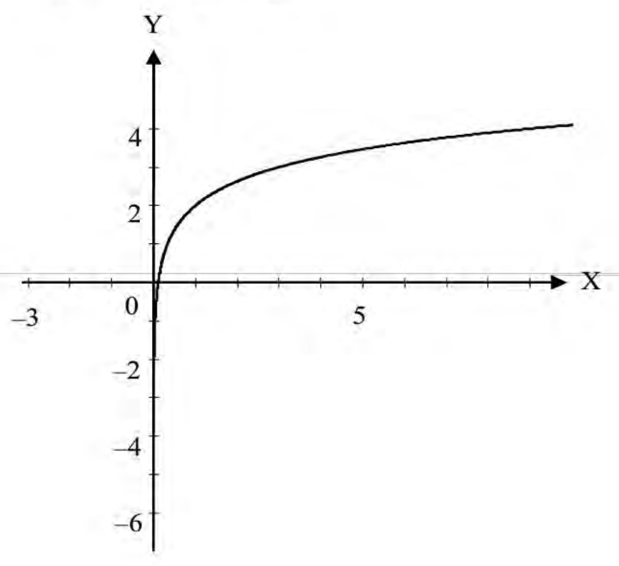
2) $y = \log_3 x$



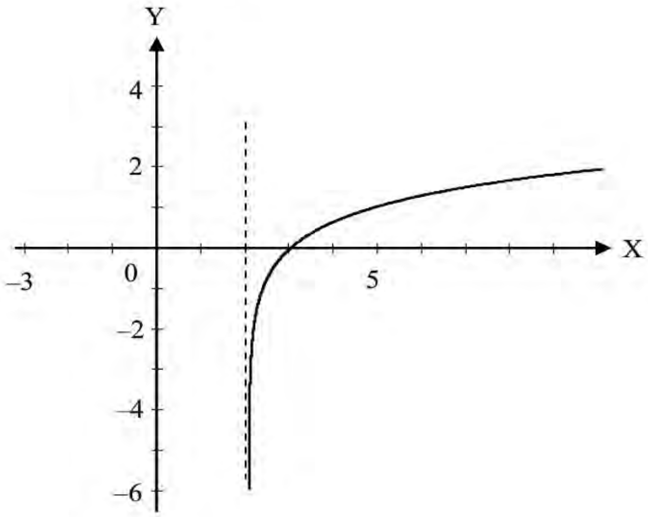
3) $y = \log_4 x$



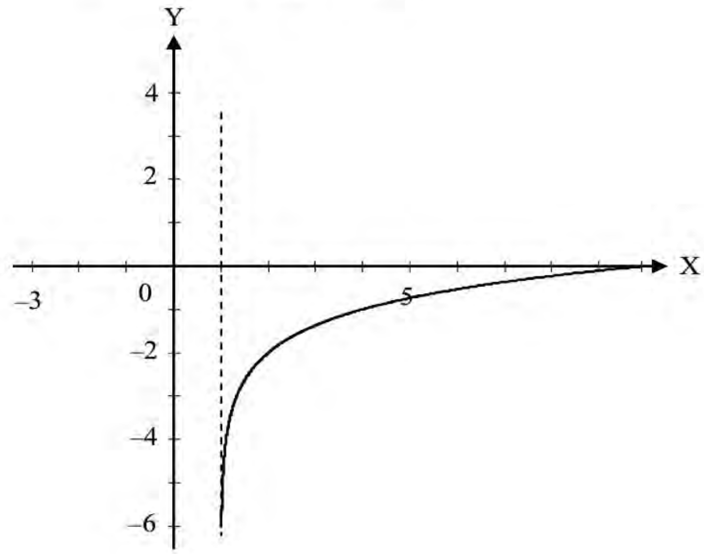
4) $y = 2 + \log_3 x$



5) $y = \log_3(x-2)$



6) $y = \log_3(x-1) - 2$



5. 1) 32 2) 100 3) 10

4) 2 5) 36

แบบฝึกหัด 1.6

1. 1) 4.5694 2) –2.4306 3) 2.9201 4) –1.0799

2. 1) 2.56 2) 2,560 3) 0.256

3. 1) ถ้า t = 0 ชั่วโมง, $q = 2(3^0) = 2$ พันตัว
ดังนั้น เดิมมีแบคทีเรีย 2,000 ตัว

2) ถ้า $t = \frac{10}{60}$ ชั่วโมง, $q = 2(3^{\frac{1}{6}})$

$\log q = \frac{1}{6}\log 3 + \log 2 \approx (\frac{1}{6} \times 0.4771) + 0.3010 = 0.38051$

จากตารางจะได้ $\log 2.4 = 0.3802$

$\log 2.41 = 0.3820$

ค่าลอการิทึมต่างกัน 0.0018 จำนวนจริงต่างกัน 0.01

ค่าลอการิทึมต่างกัน 0.00031 จำนวนจริงต่างกัน $\frac{0.01 \times 0.00031}{0.0018} = 0.00172$

$$\log 2.40172 = 0.38051$$
$$\log q = \log 2.40172$$
$$q = 2.4017 \text{ พันตัว}$$

ดังนั้น เมื่อเวลาผ่านไป 10 นาที จะมีแบคทีเรียประมาณ 2,402 ตัว

3) **วิธีที่ 1** ถ้า $t = \frac{1}{2}$ ชั่วโมง, $q = 2(3^{\frac{1}{2}})$

$$\log q = \frac{1}{2}\log 3 + \log 2 \approx (\frac{1}{2} \times 0.4771) + 0.3010 = 0.53955$$

จากตารางจะได้ $\log 3.46 = 0.5391$

$\log 3.47 = 0.5403$

ค่าลอการิทึมต่างกัน 0.0012 จำนวนจริงต่างกัน 0.01

ค่าลอการิทึมต่างกัน 0.00045 จำนวนจริงต่างกัน $\frac{0.01 \times 0.00045}{0.0012} = 0.00375$

ดังนั้น $\log 3.46375 = 0.53955$

$\log q = \log 3.46375$

$q = 3.46375$

ดังนั้น เมื่อเวลาผ่านไป 30 นาที จะมีแบคทีเรียประมาณ 3,464 ตัว

วิธีที่ 2 จาก $q = 2(3^t)$

$t = \frac{1}{2}$ ชั่วโมง

แทน t ในสมการ $q = 2(3^t)$ ด้วย $\frac{1}{2}$

จะได้ $q = 2(3^{\frac{1}{2}})$

$= 2\sqrt{3}$

≈ 3.464

ดังนั้น เมื่อเวลาผ่านไป 30 นาที จะมีแบคทีเรียประมาณ 3,464 ตัว

4) ถ้า $t = 1$ ชั่วโมง, $q = 2(3)$

$= 6$

ดังนั้น เมื่อเวลาผ่านไป 1 ชั่วโมง จะมีแบคทีเรียประมาณ 6,000 ตัว

4. **วิธีที่ 1** ถ้า $L = 0.83$ เมตร, จะได้ $T = 2 \times 3.14\sqrt{\frac{0.83}{9.78}}$

$$\log T = (\log 2 + \log 3.14) + \frac{1}{2}\log 0.83 - \frac{1}{2}\log 9.78$$
$$= 0.3010 + 0.4969 + \frac{1}{2}(-1 + 0.9191 - 0.9903)$$
$$= 0.2623$$

จากตาราง $\log 1.82 = 0.2601$

$\log 1.83 = 0.2625$

ค่าลอการิทึมต่างกัน 0.0024 จำนวนจริงต่างกัน 0.01

ค่าลอการิทึมต่างกัน 0.0002 จำนวนจริงต่างกัน $\frac{0.01 \times 0.0002}{0.0024} = 0.00083$

ดังนั้น $\log 1.82917 = 0.2623$

$\log T = \log 1.82917$

$T = 1.829$

ดังนั้น ถ้าลูกตุ้มนาฬิกายาว 83 เซนติเมตร จะมีคาบของการแกว่งประมาณ 1.829 วินาที

วิธีที่ 2 $L = 0.83$ เมตร

จากสูตร $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{9.78}}$

$\approx 2(3.14)\sqrt{\frac{0.83}{9.78}}$

≈ 1.829

ดังนั้น ถ้าลูกตุ้มนาฬิกายาว 83 เซนติเมตร จะมีคาบของการแกว่งประมาณ 1.829 วินาที

แบบฝึกหัด 1.7

1. 1) 2.3223 2) 2.5238 3) 3.4826

4) 0.4930 5) 6.5901 6) 6.0472

7) 4.7361 8) 4.5950 9) 4.6728

10) –1.8140

2. 0.4491

3. 0.9206

แบบฝึกหัด 1.8

1\. 1) $2^x = 32$

วิธีที่ 1

$$2^x = 32 = 2^5$$

ดังนั้น $x = 5$

วิธีที่ 2

จาก $2^x = 32$

จะได้ $\log 2^x = \log 32$

$$x \log 2 = 5 \log 2$$

$$x = \frac{5\log 2}{\log 2}$$

ดังนั้น $x = 5$

2) $3^x = 36$

จาก $3^x = 36$

จะได้ $\log 3^x = \log 36$

$$x \log 3 = \log 36$$

$$x = \frac{\log 36}{\log 3} = \frac{1.5563}{0.4771} \approx 3.2620$$

3) จาก $9^x = 3^{2x}$

จะได้ $3^{2x} = 3^{2x}$

ดังนั้น x คือ จำนวนจริงใด ๆ

4) $2^{3x+1} = 3^{x-2}$

$$\log 2^{3x+1} = \log 3^{x-2}$$

$$(3x+1)\log 2 = (x-2)\log 3$$

$$3x \log 2 + \log 2 = x \log 3 - 2 \log 3$$

$$x \log 3 - 3x \log 2 = \log 2 + 2 \log 3$$

$$x = \frac{\log 2 + 2\log 3}{\log 3 - 3\log 2}$$

$$= \frac{0.3010 + 2(0.4771)}{0.4771 - 3(0.3010)}$$

$$= \frac{1.2552}{-0.4259}$$

$$\approx -2.9472$$

5) $5^x = 4^{x+1}$

$x \log 5 = (x+1)\log 4$

$x \log 5 = x \log 4 + \log 4$

$x(\log 5 - \log 4) = \log 4$

$$x = \frac{\log 4}{\log 5 - \log 4}$$

$$= \frac{0.6021}{0.6990 - 0.6021}$$

$$\approx 6.2136$$

2. 1) $x^2 2^x - 2^x = 0$

$2^x(x^2 - 1) = 0$

ดังนั้น $x^2 = 1$ หรือ $2^x = 0$ ซึ่งไม่มีคำตอบ

$x = 1$ หรือ $x = -1$

ดังนั้นเซตคำตอบของสมการนี้คือ $\{-1, 1\}$

2) $4x^3e^{-3x} - 3x^4e^{-3x} = 0$

$x^3e^{-3x}(4 - 3x) = 0$

ดังนั้น $x^3e^{-3x} = 0$ หรือ $4 - 3x = 0$

ถ้า $4 - 3x = 0$

$$x = \frac{4}{3}$$

ถ้า $x^3e^{-3x} = 0$

$x = 0$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้คือ $\{0, \frac{4}{3}\}$

3) $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$

$(e^x - 1)(e^x - 2) = 0$

ดังนั้น $e^x = 1$ หรือ $e^x = 2$

ถ้า $e^x = 1$	หรือ $e^x = 2$
$\ln e^x = \ln 1$	$\ln e^x = \ln 2$
$x \ln e = \ln 1$	$x = \ln 2$
$x = 0$	$= \frac{0.3010}{0.4343}$
	≈ 0.6931

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้คือ $\{0, 0.6931\}$

4) $e^{4x} + 4e^{2x} - 21 = 0$

$(e^{2x} - 3)(e^{2x} + 7) = 0$

ดังนั้น $e^{2x} = 3$ หรือ $e^{2x} = -7$ ซึ่งไม่มีคำตอบ

ถ้า $e^{2x} = 3$

$$2x \log e = \log 3$$

$$x = \frac{\log 3}{2 \log e}$$

$$= \frac{0.4771}{2(0.4343)}$$

$$\approx 0.5493$$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้คือ { 0.5493 }

5) $2^{2x+2} - 9(2^x) + 2 = 0$

$(2^x - 2)(2^2 \cdot 2^x - 1) = 0$

ดังนั้น $2^x = 2$ หรือ $2^x = \frac{1}{4}$

ถ้า $2^x = 2$, $x = 1$ | หรือ $2^x = \frac{1}{4}$, $2^x = 2^{-2}$, $x = -2$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้คือ { 1, –2}

6) $3^{2x+1} + 9 = 28(3^x)$

$3^{2x+1} - 28(3^x) + 9 = 0$

$(3^x - 9)(3 \cdot 3^x - 1) = 0$

ดังนั้น $3^x = 9$ หรือ $3 \cdot 3^x = 1$

ถ้า $3^x = 9$, $x = 2$ | หรือ $3 \cdot 3^x = 1$, $3^x = 3^{-1}$, $x = -1$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้คือ { –1, 2}

3. 1) e^{10} 2) $\frac{1}{100}$

3) 500 4) 10^5

5) $31\frac{2}{3}$

4. 1) $12^{2-5x} \cdot 8^{x+3} = 16$

$3^{2-5x} \cdot 2^{2(2-5x)} \cdot 2^{3(x+3)} = 2^4$

$(2-5x)\log 3 + 2(2-5x)\log 2 + 3(x+3)\log 2 = 4\log 2$

$2\log 3 - 5x\log 3 + 4\log 2 - 10x\log 2 + 3x\log 2 + 9\log 2 - 4\log 2 = 0$

$2\log 3 - 5x\log 3 - 7x\log 2 + 9\log 2 = 0$

$-5x\log 3 - 7x\log 2 = -9\log 2 - 2\log 3$

$x(5\log 3 + 7\log 2) = 9\log 2 + 2\log 3$

$$x = \frac{9\log 2 + 2\log 3}{5\log 3 + 7\log 2}$$

$$\approx 0.8154$$

2) $2^{2x+1} \cdot 3^{2x+2} = 5^{4x}$

$(2x+1)\log 2 + (2x+2)\log 3 = 4x\log 5$

$2x\log 2 + \log 2 + 2x\log 3 + 2\log 3 = 4x(1-\log 2)$

$4x - 4x\log 2 - 2x\log 2 - 2x\log 3 = \log 2 + 2\log 3$

$x(4 - 6\log 2 - 2\log 3) = \log 2 + 2\log 3$

$$x = \frac{\log 2 + 2\log 3}{4 - 6\log 2 - 2\log 3}$$

$$\approx 1.0124$$

3) $\dfrac{5^{2x}}{2^{x-4}} = 3^{3x-7}$

$2x\log 5 - (x-4)\log 2 = (3x-7)\log 3$

$2x(1-\log 2) - x\log 2 + 4\log 2 = 3x\log 3 - 7\log 3$

$2x - 2x\log 2 - x\log 2 - 3x\log 3 = -7\log 3 - 4\log 2$

$x(2 - 3\log 2 - 3\log 3) = -7\log 3 - 4\log 2$

$$x = \frac{-7\log 3 - 4\log 2}{2 - 3\log 2 - 3\log 3}$$

$$\approx 13.5917$$

5. 1) $\log(3x+5) + 3 = \log(2x+1)$

$\log(2x+1) - \log(3x+5) = 3$

$\log\dfrac{(2x+1)}{3x+5} = 3$

$\dfrac{2x+1}{3x+5} = 10^3$

$$
\begin{aligned}
2x + 1 &= 3000x + 5000 \\
-4999 &= 2998x \\
x &= -1.6674
\end{aligned}
$$

เนื่องจาก แทน x ในสมการด้วย –1.6674 จะได้ $\log(3x + 5)$ และ $\log(2x + 1)$ ไม่นิยาม

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ {}

2) $\log(x + 2) - \log(x + 1) = 3$

$$
\begin{aligned}
\log\frac{(x+2)}{(x+1)} &= 3 \\
\frac{x+2}{x+1} &= 1000 \\
x + 2 &= 1000x + 1000 \\
-998 &= 999x \\
x &= -0.999
\end{aligned}
$$

เมื่อแทน x ในสมการแล้วได้สมการเป็นจริง

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ { –0.999}

3) $\log(2x - 1) + \log(x - 3) = 2$

$$
\begin{aligned}
\log(2x - 1)(x - 3) &= 2 \\
(2x - 1)(x - 3) &= 100 \\
2x^2 - 7x + 3 - 100 &= 0 \\
2x^2 - 7x - 97 &= 0 \\
x &= 8.93 \quad \text{หรือ} \quad x = -5.43
\end{aligned}
$$

เนื่องจาก แทน x ในสมการด้วย –5.43 จะได้ $\log(x - 3)$ ไม่นิยาม

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ { 8.93}

4) $\log(x - 1) + \log(x + 1) = \log(2x + 1)$

$$
\begin{aligned}
\log(x - 1)(x + 1) &= \log(2x + 1) \\
\log(x^2 - 1) &= \log(2x + 1) \\
x^2 - 1 &= 2x + 1 \\
x^2 - 2x - 2 &= 0 \\
x &= 2.73 \quad \text{หรือ} \quad x = -0.73
\end{aligned}
$$

เนื่องจาก แทน x ในสมการด้วย –0.73 จะได้ $\log(x - 1)$ ไม่นิยาม

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ { 2.73}

5) $\log x = 1 - \log (x-9)$

$\log x + \log (x-9) = 1$

$\log x (x-9) = 1$

$x(x-9) = 10$

$x^2 - 9x - 10 = 0$

$(x-10)(x+1) = 0$

$x = 10$ หรือ $x = -1$

เนื่องจาก แทน x ในสมการด้วย –1 จะได้ $\log x$ ไม่นิยาม

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ {10}

6) $\log_2 3 + \log_2 x = \log_2 5 + \log_2 (x-2)$

$\log_2 3x = \log_2 (5x-10)$

$3x = 5x - 10$

$2x = 10$

$x = 5$

เมื่อแทน x ในสมการด้วย 5 แล้วได้สมการเป็นจริง

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ {5}

7) $\log_5 (x+1) - \log_5 (x-1) = 2$

$\log_5 \frac{x+1}{x-1} = 2$

$\frac{x+1}{x-1} = 25$

$x + 1 = 25x - 25$

$24x = 26$

$x = \frac{26}{24}$

เมื่อแทน x ในสมการด้วย $\frac{26}{24}$ แล้วได้สมการเป็นจริง

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{\frac{26}{24}\}$

8) $\log_9 (x-5) + \log_9 (x+3) = 1$

$\log_9 (x-5)(x+3) = 1$

$(x-5)(x+3) = 9$

$x^2 - 2x - 15 = 9$

$x^2 - 2x - 24 = 0$

$(x-6)(x+4) = 0$

$x = -4$ หรือ $x = 6$

เนื่องจาก แทน x ในสมการด้วย –4 จะได้ $\log(x-5)$ ไม่นิยาม

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ { 6}

9) $2^{\frac{2}{\log_5 x}} = \frac{1}{16}$

เนื่องจาก $\log_5 x \neq 0$ และ $x > 0$ นั่นคือ $x \neq 1$ และ $x > 0$

$2^{\frac{2}{\log_5 x}} = 2^{-4}$

$\frac{2}{\log_5 x} = -4$

$-4\log_5 x = 2$

$\log_5 x = -\frac{1}{2}$

$x = 5^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

เมื่อแทน x ในสมการด้วย $\frac{\sqrt{5}}{5}$ แล้วได้สมการเป็นจริง

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ { $\frac{\sqrt{5}}{5}$ }

10) $\log_2(\log_3 x) = 4$

เนื่องจาก $\log_3 x > 0$ ดังนั้น $\log_3 x > \log_3 1$ จะได้ $x > 1$

จาก $\log_2(\log_3 x) = 4$

จะได้ $\log_3 x = 16$

$x = 3^{16}$

เมื่อแทน x ในสมการด้วย 3^{16} แล้วได้สมการเป็นจริง

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ { 3^{16}}

แบบฝึกหัด 1.9

1. 1) $n(3) = 500e^{0.45(3)}$

$= 500 \times e^{1.35}$

≈ 1928.7128

เมื่อเวลาผ่านไป 3 ชั่วโมง จำนวนแบคทีเรียจะมีประมาณ 1,929 ตัว

2) ให้เวลานาน x ชั่วโมง จึงจะมีแบคทีเรีย 10,000 ตัว

จะได้ $500 \times e^{0.45(x)} = 10{,}000$

$$e^{0.45x} = 20$$

$$0.45x \log e = \log 20$$

$$x = \frac{\log 20}{0.45 \log e}$$

$$\approx \frac{1.3010}{0.1954}$$

$$\approx 7$$

เป็นเวลานานประมาณ 7 ชั่วโมง จึงจะมีแบคทีเรีย 10,000 ตัว

2. 1) จากนิยามการเติบโตของจำนวนประชากร

$$n(t) = n_0 e^{rt}$$

$$n_0 = 112{,}000$$

$$r = \frac{4}{100} = 0.04$$

ดังนั้น $n(t) = 112{,}000e^{0.04t}$

เมื่อเวลาผ่านไป t ปี จำนวนประชากรของจังหวัดนี้จะมีประมาณ $112{,}000e^{0.04t}$ คน

2) $n(3) = 112{,}000e^{0.04(3)}$

$$= 112{,}000e^{0.12}$$

≈ 126279.6474 (แทนค่า $e \approx 2.718$)

หลังจากเวลาผ่านไป 3 ปี จะมีจำนวนประชากรประมาณ 126,280 คน

3) ให้เมื่อเวลาผ่านไป x ปี มีจำนวนประชากร 200,000 คน

จะได้ $200{,}000 = 112{,}000e^{0.04x}$

$$\frac{200{,}000}{112{,}000} = e^{0.04x}$$

$$1.7857 = e^{0.04x}$$

$$0.04x \log e = \log 1.7857$$

$$x = \frac{\log 1.7857}{0.04 \log e}$$

$$\approx 15$$

จังหวัดนี้จะมีจำนวนประชากร 200,000 คน เมื่อผ่านไป 15 ปี

3. 1) จากสมการ $m(t) = m_0e^{-rt}$

ในปีนี้ $m_0 = 10$

$$r = \frac{\ln 2}{30} \approx 0.0231$$

ดังนั้น จำนวนซีเซียมที่เหลือเมื่อเวลาผ่านไป t ปี คือ $10e^{-0.0231t}$

2) จากสมการ $m(t) = 10e^{-0.0231t}$

$$m(80) = 10e^{-0.0231(80)} = 1.5753$$

ดังนั้น จำนวนซีเซียมที่เหลือเมื่อเวลาผ่านไป 80 ปี คือ 1.5753 กรัม

3) ให้เวลานาน x ปี จึงมีซีเซียมเหลืออยู่ 2 กรัม

จะได้ $10e^{-0.0231x} = 2$

$$e^{-0.0231x} = \frac{1}{5}$$

$$-0.0231x \log e = \log\frac{1}{5}$$

$$x = \frac{-0.6990}{-0.0231(0.4343)} \approx 70$$

ดังนั้นจำนวนซีเซียมจะเหลืออยู่ 2 กรัม เมื่อเวลาผ่านไป 70 ปี

4. จากสมการ $m(t) = m_0e^{-rt}$

ในที่นี้ $m_0 = 250$

$t = 48$

$m(t) = 200$

จะได้ $200 = 250\, e^{-48r}$

$$e^{-48r} = \frac{200}{250}$$

$$-48r \log e = \log 0.8$$

$$r = \frac{-0.0969}{-20.8464} = 0.0046$$

จากความสัมพันธ์ $r = \dfrac{\ln 2}{h}$

จะได้ $h = \dfrac{\ln 2}{r}$

$$= \frac{0.6930}{0.0046}$$

$$\approx 151$$

ครึ่งชีวิตของสารนี้คือ 151 ชั่วโมง

5. จากสมการ

$$pH = -\log [H^+]$$

$$6.5 = -\log (H^+)$$

$$-6.5 = \log (H^+)$$

$$H^+ = 10^{-6.5}$$

6. จากสมการ

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

$$98 = 10 \log \frac{I}{10^{-12}}$$

$$9.8 = \log I - \log 10^{-12}$$

$$\log I = \log 10^{-12} + 9.8$$

$$\log I = -12 + 9.8$$

$$= -2.2$$

$$I = 10^{-2.2}$$

ดังนั้น รถไฟฟ้ามีความเข้มเสียง $10^{-2.2}$ วัตต์ / ตารางเมตร

บทที่ 2

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

(40 ชั่วโมง)

เดิมตรีโกณมิติไม่ได้นิยาม ไซน์ โคไซน์ แทนเจนต์ ในรูปของฟังก์ชัน แต่นิยามในรูปของอัตราส่วนของความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก และเมื่อนำไปประยุกต์ส่วนมากก็จะเป็น การประยุกต์ในเรื่องระยะทางและความสูง โดยอาศัยรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ด้วยเหตุนี้อาจทำให้ผู้เรียนบางคนคิดว่าตรีโกณมิติเป็นวิชาที่เกี่ยวกับด้านและมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเท่านั้น และเมื่อเขียน $\sin x$ ก็เข้าใจว่า x เป็นขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเพียงอย่างเดียว แต่ในปัจจุบันมีการใช้ตรีโกณมิติกว้างขวางมากขึ้น เช่น ใช้ในการศึกษาเกี่ยวกับแสง เสียง ในวิชาแคลคูลัส การอินทิเกรตฟังก์ชันบางชนิดจะต้องใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติช่วยในการอินทิเกรต ดังนั้นการศึกษาวิชาตรีโกณมิติจึงมีความสำคัญมากและเพื่อให้ผู้เรียนมีความเข้าใจวิชาตรีโกณมิติมากขึ้นจึงได้จัดสาระการเรียนรู้ตามลำดับดังนี้ ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม การใช้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ กฎของโคไซน์และไซน์ และการหาระยะทางและความสูง

สาระสำคัญ ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการสอน ตัวอย่างกิจกรรมการเรียนการสอน และการวัดและการประเมินผลที่นำเสนอ มีไว้เพื่อเป็นตัวอย่างในการจัดการเรียนการสอน การนำเข้าสู่บทเรียนการสอน หรือการฝึกทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ให้ผู้เรียนมีคุณธรรม จริยธรรม และค่านิยมที่ดีงามต่อคณิตศาสตร์ ซึ่งผู้สอนสามารถเลือกหรือปรับใช้ได้ตามความเหมาะสม ในบทเรียนนี้มุ่งให้ผู้เรียนบรรลุผลการเรียนรู้ดังนี้

ผลการเรียนรู้

1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติและเขียนกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้
2. นำความรู้เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติและการประยุกต์ไปใช้แก้ปัญหาได้

สาระสำคัญ

จุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย

1. กำหนดฟังก์ชัน $f: R \to R$ และ $g: R \to R$ โดยที่สำหรับแต่ละจำนวนจริง θ ใด ๆ $f(\theta) = x$ และ $g(\theta) = y$ เมื่อ (x, y) เป็นจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด $(1, 0)$ ยาว $|\theta|$ หน่วย เมื่อ $\theta > 0$ วัดทวนเข็มนาฬิกา และเมื่อ $\theta < 0$ วัดตามเข็มนาฬิกา

เรียกฟังก์ชัน g และ f นี้ว่า ฟังก์ชันไซน์ (sine function) และฟังก์ชันโคไซน์ (cosine function) ตามลำดับ และจะเขียนแทน g ด้วย sin และเขียนแทน f ด้วย cos ซึ่ง $y = \sin\theta$ และ $x = \cos\theta$ ดังนั้นโดเมนของฟังก์ชันทั้งสองคือเซตของจำนวนจริง และเรนจ์ของฟังก์ชันทั้งสอง คือ เซตของจำนวนจริงตั้งแต่ -1 ถึง 1

2. ถ้า $\theta = 0$ จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว 0 หน่วย คือ (1, 0) จะได้ $\sin 0 = 0$ และ $\cos 0 = 1$ เส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยยาว 2π หน่วย และจุด (1, 0), (0, 1), (–1, 0) และ (0, –1) เป็นจุดที่แบ่งเส้นรอบวงของวงกลมออกเป็นสี่ส่วนเท่า ๆ กัน โดยแต่ละส่วนยาว $\frac{\pi}{2}$ หน่วย ค่าของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ เมื่อ $\theta = \frac{n\pi}{2}$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มนั้น หาได้จากพิกัดของจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\left|\frac{n\pi}{2}\right|$ หน่วย โดยวัดในทิศทางที่สอดคล้องกับ θ

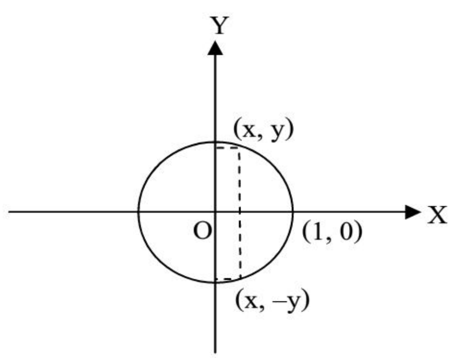
3. การหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงลบ สามารถหาโดยอาศัยค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบวกดังนี้

สมมุติ $\theta > 0$ และ (x, y) เป็นจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด (1, 0) ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกายาว θ หน่วย และ (x, –y) ซึ่งเป็นภาพสะท้อนของ (x, y) โดยมีแกน X เป็นเส้นสะท้อน จะเป็นจุดปลายของส่วนโค้งวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด (1, 0) ในทิศทางตามเข็มนาฬิกายาว θ หน่วย แสดงว่า (x, –y) เป็นจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมที่เกิดจากจำนวนจริง $-\theta$

ดังนั้น $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$ และ $x = \cos(-\theta)$, $-y = \sin(-\theta)$

จึงสรุปได้ว่า $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ และ $\cos(-\theta) = \cos\theta$

จากข้อสรุปข้างต้นจะเห็นได้ว่าสามารถกำหนดค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงลบในรูปค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบวก



พิจารณาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบวกที่มากกว่า $2n\pi$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะพบว่าสามารถหาโดยอาศัยค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง 2π เพราะ $2n\pi$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก แสดงการวัดส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยจากจุด (1, 0) ไป n รอบ ทำให้จุดปลายส่วนโค้งที่ได้คือ (1, 0) จากนั้นวัดส่วนโค้งวงกลมหนึ่งหน่วยต่อไปตาม

ส่วนที่จำนวนจริงที่กำหนดมากกว่า $2n\pi$ ก็จะได้ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ซึ่งจะแสดงเป็นสูตรดังนี้

$$\sin\theta = \sin(\theta - 2n\pi)$$

$$\cos\theta = \cos(\theta - 2n\pi)$$

เมื่อ n คือจำนวนเต็มบวก และ $\theta \geq 2n\pi$

เช่น
$$\sin 5\pi = \sin(5\pi - 2(2\pi))$$
$$= \sin \pi$$
$$\cos 7 = \cos(7 - 2\pi)$$
$$\approx \cos(0.7168)$$

สูตร $\sin\theta = \sin(\theta - 2n\pi)$ และ $\cos\theta = \cos(\theta - 2n\pi)$ สามารถเขียนในอีกรูปหนึ่ง โดยให้ $\theta = 2n\pi + \alpha$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $0 \leq \alpha < 2\pi$ ทำให้ได้ว่า

$$\sin(2n\pi + \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(2n\pi + \alpha) = \cos\alpha$$

sin(2nπ + α) และ cos(2nπ + α)

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $0 \leq \alpha < 2\pi$

วงกลมหนึ่งหน่วย มีแกน X และแกน Y เป็นแกนสมมาตร การหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง 2π จึงหาได้จากค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง $\frac{\pi}{2}$ ซึ่งวิธีการสรุปจะเหมือนกับที่นำเสนอข้างต้นโดยข้อสรุปจะเป็นดังนี้

1) เมื่อจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย อยู่ในจตุภาคที่ 2 $(\frac{\pi}{2} < \theta < \pi)$ ทำให้สามารถหา α ซึ่ง $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ที่ $\theta = \pi - \alpha$

ทำให้ได้ว่า $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ เมื่อ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ เมื่อ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

sin(π-α) และ cos(π-α)

2) เมื่อจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย อยู่ในจตุภาคที่ 3 $(\pi < \theta < \frac{3\pi}{2})$ ทำให้สามารถหา α ซึ่ง $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ที่ $\theta = \pi + \alpha$

ทำให้ได้ว่า $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$ เมื่อ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$ เมื่อ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

sin(π+α) และ cos(π+α)

3) เมื่อจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย อยู่ในจตุภาคที่ 4 $(\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi)$ ทำให้สามารถหา α ซึ่ง $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ที่ $\theta = 2\pi - \alpha$

ทำให้ได้ว่า $\sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha$ เมื่อ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$ เมื่อ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

sin(2π-α) และ cos(2π-α)

4. ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ นิยามโดยอาศัยฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ ดังนี้

บทนิยาม สำหรับจำนวนจริง θ ใด ๆ

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ เมื่อ $\cos\theta \neq 0$

$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$, $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ เมื่อ $\sin\theta \neq 0$

5. โดเมนของฟังก์ชันแทนเจนต์ และซีแคนต์ คือ $R - \{x \in R \mid x = \frac{(2n-1)\pi}{2}, n \in I\}$

เรนจ์ของฟังก์ชันแทนเจนต์และโคแทนเจนต์ คือ R

โดเมนของฟังก์ชันโคแทนเจนต์และโคซีแคนต์ คือ $R - \{x \in R \mid x = n\pi, n \in I\}$

เรนจ์ของฟังก์ชันซีแคนต์และโคซีแคนต์ คือ $R - \{x \in R \mid -1 < x < 1\}$

6. ตารางแสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงบางจำนวนเมื่อ $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

θ	**sin** θ	**cos** θ	**tan** θ	**cosec** θ	**sec** θ	**cot** θ
0	0	1	0	**ไม่นิยาม**	1	**ไม่นิยาม**
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	**ไม่นิยาม**	1	**ไม่นิยาม**	0

7. ฟังก์ชันตรีโกณมิติเป็น**ฟังก์ชันที่เป็นคาบ** (periodic function) สามารถแบ่งแกน X ออกเป็น**ช่วงย่อย** (subinterval) โดยแต่ละช่วงย่อยมีความยาวเท่ากันและกราฟมีลักษณะเหมือนกัน ความยาวของช่วงย่อยที่สั้นที่สุดเรียกว่า**คาบ** (period) ของฟังก์ชัน สำหรับฟังก์ชันที่เป็นคาบซึ่งมีค่าต่ำสุดและค่าสูงสุด เรียกค่าที่เท่ากับครึ่งหนึ่งของค่าสูงสุดลบด้วยค่าต่ำสุดของฟังก์ชันนั้นว่า **แอมพลิจูด** (amplitude)

8. กราฟของฟังก์ชันที่เกี่ยวเนื่องกับกราฟของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ จะมีลักษณะเหมือนกราฟของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ คือเป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบและมีแอมพลิจูด สรุปลักษณะรวมได้ดังนี้

$f: R \to R$, $\mathbf{f(x) = \sin(nx), n > 0}$ คาบคือ $\frac{2\pi}{n}$ แอมพลิจูดคือ 1 เรนจ์คือ $[-1, 1]$	$f: R \to R$, $\mathbf{f(x) = \cos(nx), n > 0}$ คาบคือ $\frac{2\pi}{n}$ แอมพลิจูดคือ 1 เรนจ์คือ $[-1, 1]$
$f: R \to R$, $\mathbf{f(x) = a\sin(nx), n > 0}$ คาบคือ $\frac{2\pi}{n}$ แอมพลิจูดคือ $\lvert a \rvert$ เรนจ์คือ $[-\lvert a \rvert, \lvert a \rvert]$	$f: R \to R$, $\mathbf{f(x) = a\cos(nx), n > 0}$ คาบคือ $\frac{2\pi}{n}$ แอมพลิจูดคือ $\lvert a \rvert$ เรนจ์คือ $[-\lvert a \rvert, \lvert a \rvert]$

9. ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม มีสูตรต่าง ๆ ดังนี้

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ $\qquad$ $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ $\qquad$ $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$ $\qquad$ $\sin(\frac{\pi}{2} - \beta) = \cos\beta$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

10. ผลบวกของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์จากข้อ 9 เป็นดังนี้

$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$ $\qquad$ $2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$

$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$ $\qquad$ $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha + \beta}{2}\cos\dfrac{\alpha - \beta}{2}$ $\qquad$ $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha + \beta}{2}\sin\dfrac{\alpha - \beta}{2}$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha + \beta}{2}\cos\dfrac{\alpha - \beta}{2}$ $\qquad$ $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha + \beta}{2}\sin\dfrac{\alpha - \beta}{2}$

11. ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมสองเท่ามีสูตรดังนี้

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ $\qquad$ $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ $\qquad$ $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$

12. ตัวผกผันของฟังก์ชันไซน์ มีบทนิยามดังนี้

บทนิยาม ฟังก์ชัน arcsine คือ เซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ $x = \sin y$ และ $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

ตัวผกผันของฟังก์ชันโคไซน์ มีบทนิยามดังนี้

บทนิยาม ฟังก์ชัน arccosine คือเซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ $x = \cos y$ และ $0 \leq y \leq \pi$

ตัวผกผันของฟังก์ชันแทนเจนต์ มีบทนิยามดังนี้

บทนิยาม ฟังก์ชัน arctangent คือเซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ $x = \tan y$ และ $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

และฟังก์ชัน arcsine, arccosine และ arctangent มีโดเมนและเรนจ์ดังนี้

ฟังก์ชัน	**โดเมน**	**เรนจ์**
$y = \arcsin x$	$\{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$	$\{y \mid -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$
$y = \arccos x$	$\{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$	$\{y \mid 0 \leq y \leq \pi\}$
$y = \arctan x$	R	$\{y \mid -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\}$

13. สมการที่มีฟังก์ชันตรีโกณมิติปรากฏอยู่ เรียกว่า **สมการตรีโกณมิติ** สมการตรีโกณมิติบางสมการ เช่น $\cot A = \frac{1}{\tan A}$ จะเป็นจริงสำหรับทุกค่าของ A ที่อยู่ในโดเมนของฟังก์ชันทั้งสอง สมการเช่นนี้มีชื่อเรียกเฉพาะว่าเอกลักษณ์ (identities) สมการตรีโกณมิติบางสมการเช่น $\sin A = \cos A$ จะเป็นจริงสำหรับบางค่าของ A ที่อยู่ในโดเมนของฟังก์ชันทั้งสอง

14. ตัวอย่างเอกลักษณ์ที่สำคัญ

1) เอกลักษณ์พื้นฐาน (basic identities)

$$\sin\theta = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta}, \quad \operatorname{cosec}\theta \neq 0$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}, \quad \sec\theta \neq 0$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\cot\theta}, \cos\theta \neq 0 \text{ หรือ } \cot\theta \neq 0$$

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta$$

2) เอกลักษณ์แบบพีทาโกรัส (Pythagorean identities)

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad 1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$$

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

3) เอกลักษณ์แบบฟังก์ชันร่วม (Cofunction identities)

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

4) เอกลักษณ์แบบผลบวกและผลต่าง

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\ \tan\beta}$$

5) เอกลักษณ์แบบจำนวนทวีคูณ

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \qquad \tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

6) เอกลักษณ์แบบครึ่งมุม

$$\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \qquad \tan\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

$$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

7) เอกลักษณ์อื่น ๆ

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \qquad \cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \qquad \cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

15. **กฎของโคไซน์** ในรูปสามเหลี่ยม ABC ใด ๆ ถ้า a, b และ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ตามลำดับ จะได้

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

กฎของไซน์ ในรูปสามเหลี่ยม ABC ใด ๆ ถ้า a, b และ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ตามลำดับ จะได้ $\dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin C}{c}$

ผู้สอนอาจจัดลำดับเนื้อหาดังแผนผังต่อไปนี้

- ฟังก์ชันตรีโกณมิติ
- ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์
- ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์
- ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ
- ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม
- การใช้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ
- กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
- ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม
- ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
- เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ
- กฎของโคไซน์และไซน์
- การหาระยะทางและความสูง

ความรู้เพิ่มเติมสำหรับครู

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ สามารถนิยามจากวงกลมหนึ่งหน่วยได้โดยใช้วงกลมหนึ่งหน่วยที่จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด O ดังรูป ซึ่งคล้ายกับการนิยามเชิงเรขาคณิตที่ใช้กันมาในสมัยก่อน ให้ส่วนของเส้นตรง AB เป็นคอร์ดของวงกลม ซึ่ง θ เป็นครึ่งหนึ่งของมุมที่รองรับคอร์ดนั้น จะได้

$\sin \theta$ คือ ความยาวของครึ่งหนึ่งของคอร์ด หรือความยาวของส่วนของเส้นตรง AC นิยามนี้เริ่มใช้โดยชาวอินเดีย

$\cos \theta$ คือ ระยะทางตามแนวนอน OC

$\text{versin } \theta = 1 - \cos \theta$ คือ ความยาวของส่วนของเส้นตรง CD tan θ คือ ความยาวของส่วนของเส้นตรง AE ของเส้นสัมผัสที่ลากผ่านจุด A จึงเป็นที่มาของคำว่าแทนเจนต์นั่นเอง (tangent หมายถึง สัมผัส)

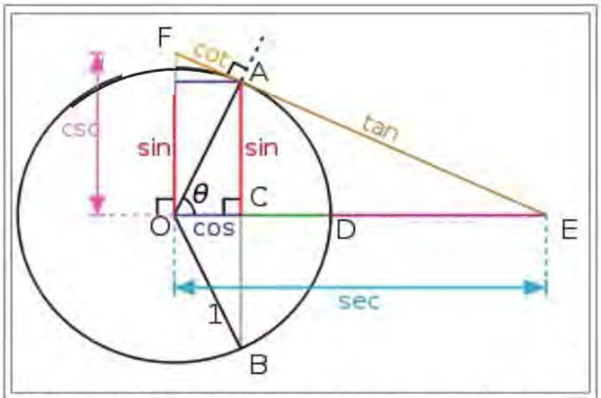
cot θ คือ ส่วนของเส้นสัมผัสที่เหลือ คือความยาว AF

sec θ คือความยาวของส่วนของเส้นตรง OE

cosec θ คือ ความยาวของส่วนของเส้นตรง OF เป็นส่วนของเส้นซีแคนต์ (ตัดวงกลมที่จุดสองจุด) ซึ่งสามารถมองว่าเป็นภาพฉายของส่วนของเส้นตรง OA ตามแนวเส้นสัมผัสที่จุด A ไปยังแกนนอนและแกนตั้งตามลำดับ

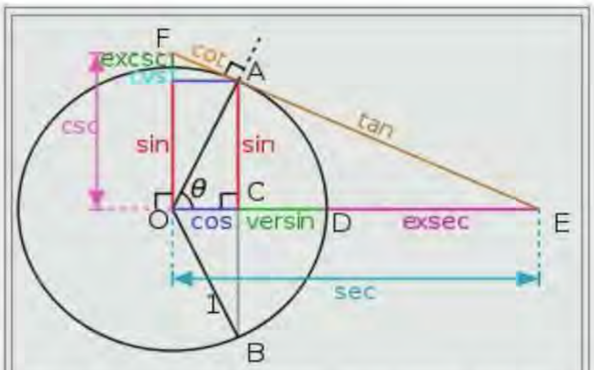
exsec θ คือ ความยาวของส่วนของเส้นตรง DE หรือ exsec θ = secθ –1 (ส่วนของซีแคนต์ด้านนอก)

ด้วยวิธีสร้างนี้ ทำให้เห็นภาพฟังก์ชันซีแคนต์และแทนเจนต์ลู่ออก เมื่อ θ เข้าใกล้ $\frac{\pi}{2}$ (90 องศา) และโคซีแคนต์และโคแทนเจนต์ลู่ออก เมื่อ θ เข้าใกล้ศูนย์ ซึ่งสามารถแสดงเอกลักษณ์ตรีโกณมิติด้วยรูปภาพได้



ฟังก์ชันตรีโกณมิติพื้นฐาน *ทั้งหมด* สามารถนิยามจากวงกลมหนึ่งหน่วย ได้โดยใช้วงกลมหนึ่งหน่วย ที่จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด *O*

รูปที่ 1



ฟังก์ชันตรีโกณมิติพื้นฐาน *ทั้งหมด* สามารถนิยามจากวงกลมหนึ่งหน่วย ได้โดยใช้วงกลมหนึ่งหน่วย ที่จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด *O*

รูปที่ 2

http://th.wikipedia.org/wiki

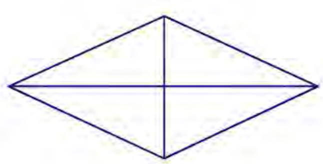
ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการสอน

ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

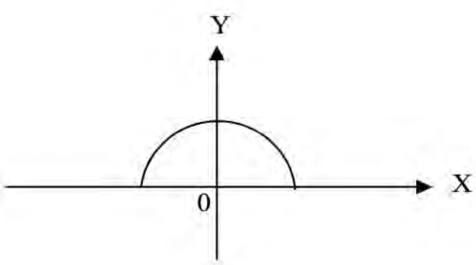
1. ในการเริ่มต้นสอนบทนี้ ผู้สอนควรเริ่มต้นสอนโดยถือเสมือนว่าผู้เรียนไม่เคยเรียนตรีโกณมิติมาเลย เพื่อให้ผู้เรียนเข้าใจว่าฟังก์ชันตรีโกณมิติเป็นฟังก์ชันของจำนวนจริงก่อนแล้วจึงค่อยกล่าวถึงฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม ดังลำดับหัวข้อที่ให้ไว้ในหนังสือเรียน มิฉะนั้นจะเป็นการยากที่จะให้ผู้เรียนเข้าใจบทนิยามของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง เนื่องจากผู้เรียนมักจะนึกถึงฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

2. ความรู้พื้นฐานในการเรียนบทนี้ได้แก่ความรู้ในเรื่องวงกลมหนึ่งหน่วย การสมมาตรและความยาวของส่วนโค้งของวงกลม

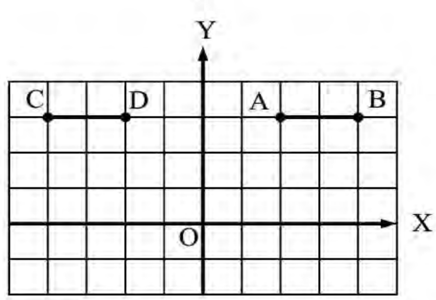
1) ผู้สอนอาจทบทวน ความรู้เรื่องสมมาตร เช่น



รูปสี่เหลี่ยมนี้มีเส้นทแยงมุมเป็นแกนสมมาตร



ส่วนโค้งครึ่งวงกลมนี้มีแกน Y เป็นแกนสมมาตร

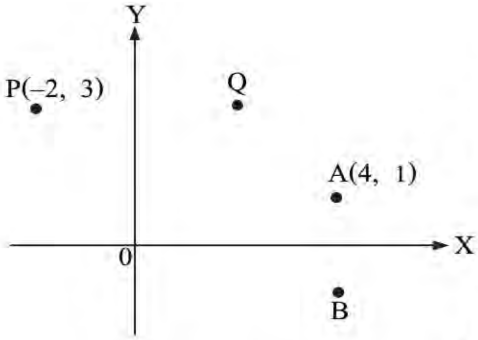


ส่วนของเส้นตรง AB สมมาตรกับส่วนของเส้นตรง CD โดยมีแกน Y เป็นแกนสมมาตร

จุด A สมมาตรกับจุด D โดยมีแกน Y เป็นแกนสมมาตร

จากความรู้เรื่องสมมาตรนี้จะนำไปใช้ในการหาพิกัดของจุดต่าง ๆ

ผู้สอนกำหนดจุดสองจุดใด ๆ ซึ่งสมมาตรกันโดยมีแกน X หรือแกน Y เป็นแกนสมมาตร และกำหนดพิกัดของจุดหนึ่งให้ ให้ผู้เรียนบอกพิกัดของอีกจุดหนึ่ง เช่น จากรูป



ให้จุด A (4, 1) สมมาตรกับจุด B โดยมีแกน X เป็นแกนสมมาตร

ให้จุด P(–2, 3) สมมาตรกับจุด Q โดยมีแกน Y เป็นแกนสมมาตร

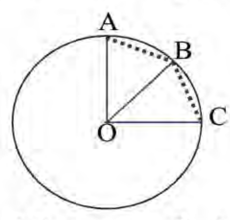
ผู้เรียนควรบอกได้ว่าพิกัดของจุด B และ Q คือ (4, –1) และ (2, 3) ตามลำดับ

2) ผู้สอนควรทบทวนความรู้เรื่องวงกลม ดังนี้

"ในวงกลมเดียวกันหรือวงกลมที่เท่ากัน คอร์ดที่ตัดส่วนโค้งออกได้ยาวเท่ากันย่อมยาวเท่ากัน"

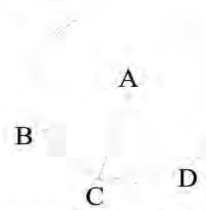
ผู้สอนอาจช่วยให้ผู้เรียนเข้าใจทฤษฎีบทดังกล่าวได้ดังนี้

(1) การใช้ความรู้เกี่ยวกับสมมาตรซึ่งใช้วิธีพับรูปให้ทับกันสนิท



เช่นจากรูป ให้ส่วนโค้ง AB เท่ากับส่วนโค้ง BC จะเห็นว่า OB เป็นแกนสมมาตรของรูปสามเหลี่ยมฐานโค้ง OAB กับรูปสามเหลี่ยมฐานโค้ง OBC และ $\overline{AB}$ ทับกับ $\overline{BC}$ สนิท นั่นคือ คอร์ด AB เท่ากับคอร์ด BC

(2) การพิสูจน์ ซึ่งต้องใช้ความรู้ที่ว่า ในวงกลมเดียวกัน หรือวงกลมที่เท่ากัน มุมที่จุดศูนย์กลางซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งที่เท่ากันย่อมเท่ากัน ดังนี้



ให้ A เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมและให้ส่วนโค้ง BC เท่ากับส่วนโค้ง CD

ดังนั้น $B\hat{A}C = C\hat{A}D$

จะได้ $\Delta ABC \cong \Delta ACD$ (ด.ม.ด.)

ดังนั้น คอร์ด BC ยาวเท่ากับคอร์ด CD

หมายเหตุ สำหรับความรู้ที่ว่า "ในวงกลมเดียวกันมุมที่จุดศูนย์กลางซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งที่เท่ากันย่อมเท่ากัน" นั้น ผู้เรียนได้เรียนมาแล้วในช่วงชั้นที่ 3 ซึ่งผู้สอนอาจทบทวนความรู้ดังกล่าวโดยใช้วิธีการดังต่อไปนี้

มุมที่จุดศูนย์กลางซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งที่ยาว $2\pi r$ หน่วย มีขนาดกี่องศา (360 องศา)

มุมที่จุดศูนย์กลางซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งที่ยาว 1 หน่วย มีขนาดกี่องศา ($\frac{180}{\pi r}$ องศา)

มุมที่จุดศูนย์กลางซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งที่ยาว a หน่วย มีขนาดกี่องศา ($\frac{180a}{\pi r}$ องศา)

ดังนั้นถ้ามีส่วนโค้งยาว a หน่วยเท่ากันและ r เป็นความยาวของรัศมีของวงกลมมุมที่จุดศูนย์กลางจึงเท่ากันคือ $\frac{180a}{\pi r}$ องศา

3. กราฟของความสัมพันธ์ $\{(x, y) \mid (x-h)^2 + (y-k)^2 = 1\}$ จะเป็นวงกลมที่มีรัศมียาว 1 หน่วย (unit circle) ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) ในหนังสือเรียนนี้เมื่อกล่าวถึงวงกลมหนึ่งหน่วย (The unit circle) จะหมายถึงวงกลมที่มีรัศมียาว 1 หน่วยที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดซึ่งเป็นกราฟของความสัมพันธ์ $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ เท่านั้น ผู้สอนอาจทบทวนเรื่องวงกลมซึ่งผู้เรียนควรจะบอกสิ่งต่อไปนี้ได้

1) ความสัมพันธ์ $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ มีกราฟเป็นวงกลม จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0, 0) รัศมียาว 1 หน่วย ซึ่งผู้สอนแนะนำผู้เรียนว่าจะเรียกวงกลมนี้ว่า "วงกลมหนึ่งหน่วย"
2) เส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยยาว 2π หน่วย
3) วงกลมหนึ่งหน่วยตัดแกน X ที่จุด (1, 0) และ (–1, 0) ตัดแกน Y ที่จุด (0, 1) และ (0, –1)
4) ความยาวของส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด (1, 0) ในทิศทวนเข็มนาฬิกาไปยังจุด (0, 1) , (–1, 0) , (0, –1) , (1, 0) ยาวเท่ากับ $\frac{\pi}{2}$, π , $\frac{3\pi}{2}$ และ 2π หน่วย ตามลำดับ
5) ความยาวของส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด (1, 0) ในทิศทวนเข็มนาฬิกาไปยังจุดกึ่งกลางของส่วนโค้งที่เชื่อมระหว่าง

   (1) จุด (1, 0) กับจุด (0, 1) ยาว $\frac{\pi}{4}$ หน่วย

   (2) จุด (0, 1) กับจุด (–1, 0) ยาว $\frac{3\pi}{4}$ หน่วย

   (3) จุด (–1, 0) กับจุด (0, –1) ยาว $\frac{5\pi}{4}$ หน่วย

   (4) จุด (0, –1) กับจุด (1, 0) ยาว $\frac{7\pi}{4}$ หน่วย

ผู้สอนบอกข้อตกลงกับผู้เรียนว่าถ้าวัดความยาวส่วนโค้งไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกาจะแสดงความยาวของส่วนโค้งด้วยจำนวนลบ แต่ถ้าวัดทวนเข็มนาฬิกาจะแสดงความยาวของส่วนโค้งด้วย

จำนวนบวก ผู้สอนให้ผู้เรียนบอกความยาวส่วนโค้ง ดังเช่นในข้อ 4) และ 5) แต่ให้วัดในทิศตามเข็มนาฬิกา

4. เมื่อเริ่มสอน ผู้สอนควรทำให้ผู้เรียนเข้าใจเกี่ยวกับการวัดความยาวส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยให้ยาว $|\theta|$ หน่วย โดยเริ่มวัดจากจุด $(1, 0)$ ไปถึงจุด (x, y) โดยคิดทิศทางและควรกำหนด θ เป็นจำนวนจริงต่าง ๆ เช่น $\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ เป็นต้น

ผู้สอนอาจทำได้โดยให้ผู้เรียนบอกพิกัดของจุดปลายของส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่เริ่มวัดจากจุด $(1, 0)$ ไปยาว θ หน่วย (โดยคิดทิศทาง) ซึ่งผู้สอนตกลงกับผู้เรียนว่าต่อไปนี้จะเรียกจุดปลายที่ได้ว่า "จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย" และผู้สอนอาจใช้วิธีการดังนี้

ผู้สอนให้ผู้เรียนบอกจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ ซึ่งผู้เรียนควรตอบได้ว่าคือจุด $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1), (1, 0)$ ตามลำดับ

ผู้สอนให้ผู้เรียนบอกจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $-\frac{\pi}{2}, -\pi, -\frac{3\pi}{2}, -2\pi$ ซึ่งผู้เรียนควรตอบได้ว่าคือจุด $(0, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, 0)$ ตามลำดับ

ผู้สอนและผู้เรียนอาจช่วยกันหาจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$ หน่วย โดยยังไม่ต้องกล่าวถึงชื่อไซน์และโคไซน์ หลังจากช่วยกันหาได้แล้ว ผู้เรียนควรบอกจุดปลายของส่วนโค้งที่ยาว $\frac{n\pi}{4}, \frac{n\pi}{6}, \frac{n\pi}{3}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มได้ โดยใช้วิธีการนับเพิ่มทีละส่วน และในทำนองเดียวกันควรบอกจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $2n\pi + \frac{\pi}{4}$, $2n\pi + \frac{\pi}{6}$, $2n\pi + \frac{\pi}{3}$ ได้ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มใดๆ

ผู้เรียนควรสรุปได้ว่า เมื่อกำหนดจำนวนจริง θ ให้ 1 ค่าก็จะมีจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วยเพียงจุดเดียวเท่านั้น เช่น

ถ้า $\theta = \frac{\pi}{4}$ จะได้จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย จุดเดียวเท่านั้น คือ จุด $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

ถ้า $\theta = \frac{\pi}{6}$ จะได้จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย จุดเดียวเท่านั้น คือ จุด $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$

ถ้า $\theta = \frac{\pi}{2}$ จะได้จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย จุดเดียวเท่านั้น คือ จุด $(0, 1)$

จากนั้นผู้สอนให้ผู้เรียนบอกคู่อันดับซึ่งสมาชิกตัวหน้าเป็นจำนวนจริง θ ที่แทนความยาว ส่วนโค้งและสมาชิกตัวหลัง คือ พิกัดที่สองของจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย ซึ่งผู้เรียนควรบอกคู่อันดับได้ เช่น $(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2})$, $(\frac{\pi}{2}, 1)$

ผู้สอนและผู้เรียนช่วยกันเขียนเซตของคู่อันดับดังกล่าวแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก จะได้ $f = \{(\theta, y) \mid \theta$ เป็นจำนวนจริง และ y เป็นพิกัดที่สองของจุด (x, y) ซึ่งเป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย$\}$

ผู้สอนถามผู้เรียนว่า f เป็นฟังก์ชันหรือไม่ ซึ่งผู้เรียนควรจะตอบได้ว่าเป็นฟังก์ชันพร้อมทั้งบอกเหตุผลได้

ผู้สอนบอกผู้เรียนว่าฟังก์ชันนี้ เรียกว่า ฟังก์ชันไซน์ (sine) ดังนั้น sine คือ $\{ (\theta, y) \mid \theta$ เป็นจำนวนจริง และ y เป็นพิกัดที่สองของจุด(x, y) ซึ่งเป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย$\}$

5. ผู้สอนทบทวนความรู้ในเรื่องค่าของฟังก์ชันว่า เมื่อ f เป็นฟังก์ชัน และ $(x, y) \in f$ จะได้ว่า y เป็นค่าของฟังก์ชัน f ที่ x หรือเขียนได้ว่า $y = f(x)$

ดังนั้นผู้เรียนควรบอกได้ว่า เมื่อ $(\theta, y) \in \text{sine}$ จะได้ว่า y เป็นค่าของฟังก์ชันไซน์ที่ θ หรือเขียนได้ว่า $y = \text{sine}\,\theta$ ซึ่งผู้สอนบอกผู้เรียนว่านิยมเขียนเป็น $y = \sin\theta$

6. ผู้สอนให้ผู้เรียนบอกคู่อันดับซึ่งสมาชิกตัวหน้าเป็นจำนวนจริง θ ที่แทนความยาวส่วนโค้งและสมาชิกตัวหลังคือ พิกัดที่หนึ่งของจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย แล้วใช้วิธีการในทำนองเดียวกันกับข้อ 4 และ 5 เพื่อให้ผู้เรียนสรุปได้ว่า $x = \text{cosine}\,\theta$ หรือ $x = \cos\theta$

7. ผู้สอนให้ผู้เรียนบอกโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันทั้งสองซึ่งผู้เรียนควรบอกได้ว่า

$$D_{\text{sine}} = D_{\text{cosine}} = R$$

$$R_{\text{sine}} = R_{\text{cosine}} = \{x \mid -1 \le x \le 1\}$$

8. ผู้สอนฝึกให้ผู้เรียนหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริง 0, π, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$ และ $\frac{\pi}{6}$ แล้วสรุปดังตารางต่อไปนี้

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin θ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos θ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

จากตารางจะเห็นว่าค่าของฟังก์ชันไซน์ และค่าของฟังก์ชันโคไซน์ของความยาวส่วนโค้งที่มีผลรวมของความยาวเป็น $\frac{\pi}{2}$ จะมีค่าเท่ากัน เช่น $\sin\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3}$ ดังนั้น ผู้สอนอาจให้ผู้เรียนท่องจำแค่ค่าของฟังก์ชันไซน์หรือฟังก์ชันโคไซน์ฟังก์ชันใดฟังก์ชันหนึ่งก็เป็นการเพียงพอ

9. ผู้สอนให้ผู้เรียนหาความสัมพันธ์ระหว่าง sin θ และ cos θ ซึ่งผู้เรียนควรสรุปได้ว่า $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

10. ผู้สอนแนะนำให้ผู้เรียนเข้าใจความหมายของสัญลักษณ์ $\cos^2\theta$ กับ $(\cos\theta)^2$ และ $\cos\theta^2$

ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ

ในการสอนเกี่ยวกับบทนิยามของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ ผู้สอนอาจทบทวนความรู้เรื่องพีชคณิตของฟังก์ชันและใช้วิธีการดังต่อไปนี้

1. ผู้สอนยกตัวอย่างฟังก์ชันพีชคณิต 2 ฟังก์ชัน แล้วให้ผู้เรียนหาผลหารของฟังก์ชันพร้อมทั้งบอกโดเมนของฟังก์ชันผลลัพธ์ เช่น

ให้ $f = \{(x, y) \mid y = 1\}$

$g = \{(x, y) \mid y = x - 5\}$

ซึ่งผู้เรียนควรตอบได้ว่า $\frac{f}{g} = \{(x, y) \mid y = \frac{1}{x-5}\}$ และ โดเมนของ $\frac{f}{g}$ คือ $\{x \mid x \neq 5\}$

2. ผู้สอนกำหนดฟังก์ชัน g และ h ต่อไปนี้

$g = \{(\theta, y) \mid y = \sin\theta\}$

$h = \{(\theta, y) \mid y = \cos\theta\}$

ให้ผู้เรียนบอกโดเมนของ g และ h และให้หา $\frac{g}{h}$ และ $\frac{h}{g}$ ผู้เรียนควรตอบได้ว่า

$D_h = D_g = R$

$\frac{g}{h} = \{(\theta, y) \mid y = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \cos\theta \neq 0\}$

$\frac{h}{g} = \{(\theta, y) \mid y = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \sin\theta \neq 0\}$

3. ผู้สอนบอกผู้เรียนว่าฟังก์ชัน $\frac{g}{h}$ นี้เรียกว่าฟังก์ชันแทนเจนต์ และ $\frac{h}{g}$ เรียกว่า ฟังก์ชันโคแทนเจนต์ และเนื่องจาก $(\theta, y) \in$ tangent ผู้เรียนควรบอกได้ว่า

$$y = \text{tangent}\,\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \cos\theta \neq 0$$

ในทำนองเดียวกันเมื่อ $(\theta, y) \in$ cotangent ผู้เรียนควรบอกได้ว่า

$$y = \text{cotangent}\,\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \sin\theta \neq 0$$

4. ผู้สอนแนะนำผู้เรียนว่าอาจเขียน tangent ย่อๆ เป็น tan ได้ แล้วผู้สอนให้ผู้เรียนหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันแทนเจนต์ซึ่งผู้เรียนควรตอบได้ว่า

$$D_{\tan} = \{x \mid x \in D_{\sin} \cap D_{\cos}, \cos x \neq 0\}$$

แต่ $\cos x \neq 0$ เมื่อ $x \neq \frac{n\pi}{2}$, โดยที่ n เป็นจำนวนคี่

นั่นคือ $D_{\tan} = \{x \mid x \in R, x \neq \frac{n\pi}{2}$, โดยที่ n เป็นจำนวนคี่ $\}$

และแนะนำฟังก์ชันโคแทนเจนต์ในทำนองเดียวกัน

5. ผู้สอนใช้คำถามเพื่อให้ผู้เรียนสรุปเกี่ยวกับฟังก์ชันโคซีแคนต์ ได้ดังนี้

ถ้าให้ $f = \{(\theta, y) \mid y = 1\}$

$g = \{(\theta, y) \mid y = \sin\theta\}$

จะได้ $\frac{f}{g} = \{(\theta, y) \mid y = \frac{1}{\sin\theta}, \sin\theta \neq 0\}$

ผู้สอนบอกผู้เรียนว่าฟังก์ชัน $\frac{f}{g}$ นี้เรียกว่าฟังก์ชันโคซีแคนต์ ดังนั้น

cosecant คือ $\{(\theta, y) \mid y = \frac{1}{\sin\theta}, \sin\theta \neq 0\}$

และเนื่องจาก $(\theta, y) \in$ cosecant ผู้เรียนควรบอกได้ว่า

$$y = \text{cosecant } \theta = \frac{1}{\sin\theta}, \sin\theta \neq 0$$

6. ผู้สอนแนะนำสัญลักษณ์ cosec และ csc แล้วให้ผู้เรียนบอกโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันโคซีแคนต์ ผู้เรียนควรตอบได้ว่า

$$D_{cosec} = \{x \mid x \in D_{sin} \cap R, \sin x \neq 0\}$$

แต่ $\sin\theta \neq 0$ เมื่อ $\theta \neq n\pi$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็ม

นั่นคือ $D_{cosec} = \{x \mid x \in R, x \neq n\pi, n \in I\}$

การพิจารณาเรนจ์ของฟังก์ชันโคซีแคนต์ คือพิจารณา cosec x ทำได้ดังนี้

เนื่องจาก $-1 \leq \sin x \leq 1$

นั่นคือ $|\sin x| \leq 1$

จะได้ $1 \leq \frac{1}{|\sin x|}$

$|\operatorname{cosec} x| \geq 1$

นั่นคือ $\operatorname{cosec} x \geq 1$ หรือ $\operatorname{cosec} x \leq -1$

ดังนั้น $R_{cosec} = \{x \mid x \geq 1$ หรือ $x \leq -1\}$

ผู้สอนใช้วิธีการเดียวกันนี้ในการพิจารณาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ

7. ผู้สอนให้ผู้เรียนหาความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติต่าง ๆ เช่น $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$, $1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$ หลังจากนั้นฝึกให้ผู้เรียนใช้ความสัมพันธ์เหล่านี้ โดยการหาค่าของฟังก์ชันหนึ่งเมื่อกำหนดค่าของฟังก์ชันอีกฟังก์ชันหนึ่งให้ เช่น

(1) กำหนด $\sin\theta = 0.40$, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ หา $\cos\theta$ (โดยใช้ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$)

(2) กำหนด $\tan\theta = 0.75$, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ หา $\sec\theta$ (โดยใช้ $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$)

(3) กำหนด $\cot\theta = 0.75$, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ หา $\operatorname{cosec}\theta$ (โดยใช้ $1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$)

8. หลังจากที่ผู้เรียนได้รู้จักฟังก์ชันแทนเจนต์ โคแทนเจนต์ โคซีแคนต์ และ ซีแคนต์ แล้วควรให้ผู้เรียนสรุปข้อความต่อไปนี้ได้ โดยใช้บทนิยามของฟังก์ชันเหล่านี้ เมื่อ θ เป็นจำนวนจริง

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta$$
$$\cot(-\theta) = -\cot\theta$$
$$\operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec}\theta$$
$$\sec(-\theta) = \sec\theta$$

9. ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติในตารางที่กำหนดไว้ให้ท้ายหนังสือเรียนนั้น ส่วนใหญ่เป็นค่าโดยประมาณ แต่มีบางค่าที่เป็นค่าที่ถูกต้อง เช่น $\sin 30^\circ = 0.5000$, $\tan 45^\circ = 1.0000$ ในหนังสือเรียนจะเขียนค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง (หรือมุม) ที่กำหนดให้ว่าเท่ากับค่าที่อ่านได้จากตาราง จะไม่ใช้เครื่องหมาย $\approx$ เช่น $\sin\frac{\pi}{4} = 0.7071$

ถ้าต้องการจะตรวจสอบว่าค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง (หรือมุม) ที่กำหนดให้ค่าใดเป็นค่าโดยประมาณ ค่าใดเป็นค่าที่แท้จริง อาจทำได้โดยอาศัยสมการ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ ถ้าค่านั้นสอดคล้องกับสมการแสดงว่าเป็นค่าที่แท้จริง ถ้าใกล้เคียงก็แสดงว่าเป็นค่าประมาณ เช่น

จากตาราง $\sin 41^\circ = 0.6561$ และ $\cos 41^\circ = 0.7547$

จะได้ $\sin^2 41^\circ + \cos^2 41^\circ \approx 0.43046721 + 0.56957209 = 1.0000393$

จะเห็นว่าค่าดังกล่าวไม่สอดคล้องกับสมการ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

ดังนั้นค่า $\sin 41^\circ$ และ $\cos 41^\circ$ ที่ได้จากตารางจึงเป็นค่าประมาณ

10. ผู้สอนควรให้ผู้เรียนสังเกตว่า เมื่อ $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

1) $\sin x$, $\tan x$, $\sec x$ จะมีค่าเพิ่มขึ้น เมื่อ x เพิ่มขึ้น
2) $\cos x$, $\cot x$, $\operatorname{cosec} x$ จะมีค่าลดลง เมื่อ x เพิ่มขึ้น
3) $\sin x$, $\tan x$, $\sec x$ จะมีค่าลดลง เมื่อ x ลดลง
4) $\cos x$, $\cot x$, $\operatorname{cosec} x$ จะมีค่าเพิ่มขึ้น เมื่อ x ลดลง

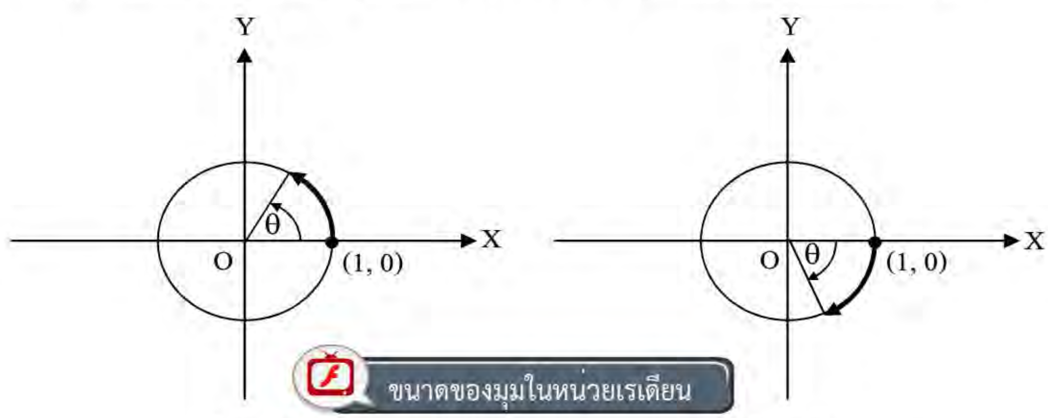
ข้อสังเกตนี้มีประโยชน์ในการเขียนกราฟและการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติเมื่อกำหนดจำนวนจริง (หรือมุม) ให้ หรือการหาจำนวนจริง (หรือมุม) เมื่อกำหนดค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติให้ โดยที่ค่าที่กำหนดให้นั้นไม่อยู่ในตาราง ดังนั้น การประมาณค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่เพิ่มขึ้นหรือลดลง จึงควรจะพิจารณาสมบัติของฟังก์ชันดังกล่าวข้างต้น

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

1. ก่อนที่ผู้สอนจะสอนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม ผู้สอนควรทบทวนเรื่องการวัดมุมในทิศทวนเข็มนาฬิกาหรือทิศตามเข็มนาฬิกา ดังนี้

1) ให้ผู้เรียนเขียนวงกลม 1วงจากนั้นเขียนรัศมีของวงกลม แล้วให้ผู้เรียนวัดมุมที่จุดศูนย์กลางในทิศทวนเข็มนาฬิกาและตามเข็มนาฬิกาจากรัศมีของวงกลมนั้นให้มีขนาด 30°
2) ผู้สอนถามผู้เรียนว่าความยาวของส่วนโค้งที่วัดจากรัศมีไปทิศทวนเข็มนาฬิกาและความยาวของส่วนโค้งที่วัดจากรัศมีไปทิศตามเข็มนาฬิกาเท่ากันหรือไม่ ผู้เรียนควรตอบได้ว่า เท่ากัน
3) ผู้สอนให้นิยามของการวัดมุมในหน่วยเรเดียน โดยให้นิยามว่า มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งของวงกลมที่ยาวเท่ากับความยาวรัศมีของวงกลมนั้น ถือว่าเป็นมุมที่มีขนาด 1 เรเดียน จากนั้นผู้สอนให้ผู้เรียนหาตำแหน่งบนเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยที่มีความยาว 1 หน่วยในทิศทวนเข็มนาฬิกาและทิศตามเข็มนาฬิกา
4) ผู้สอนให้ผู้เรียนพิจารณาว่า ถ้าเส้นรอบวงของวงกลมยาว $2\pi r$ หน่วย มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งของวงกลมนี้มีขนาดกี่เรเดียน ผู้เรียนควรจะตอบได้ว่า 2π เรเดียน ผู้สอนถามผู้เรียนอีกว่า มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งครึ่งวงกลมมีขนาดกี่เรเดียน (π เรเดียน)
5) ผู้สอนให้ผู้เรียนช่วยกันสรุปว่า 2π เรเดียนมีขนาดกี่องศา (360 องศา) และ π เรเดียนมีขนาดกี่องศา (180 องศา)

2. ผู้สอนให้ผู้เรียนพิจารณารูปวงกลมหนึ่งหน่วยสองรูปดังนี้ (หนังสือเรียนหน้า 84)



$\theta > 0$ $\theta < 0$

ผู้สอนถามผู้เรียนว่า ส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่ยาว θ หน่วยรองรับมุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเท่าใด (θ เรเดียน)

3. ผู้สอนกำหนดมุมขนาด θ เรเดียน ให้หนึ่งมุม แล้วถามผู้เรียนว่าเกิดจุดตัดระหว่างด้านสิ้นสุดของมุมกับเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยกี่จุด (จุดเดียว)

ผู้สอนให้ผู้เรียนสังเกตที่รูปจากข้อ 2. แล้วให้ผู้เรียนสรุปว่า จุดตัดที่ได้นี้เป็นจุดปลายของส่วนโค้งที่ยาว $|\theta|$ หน่วย

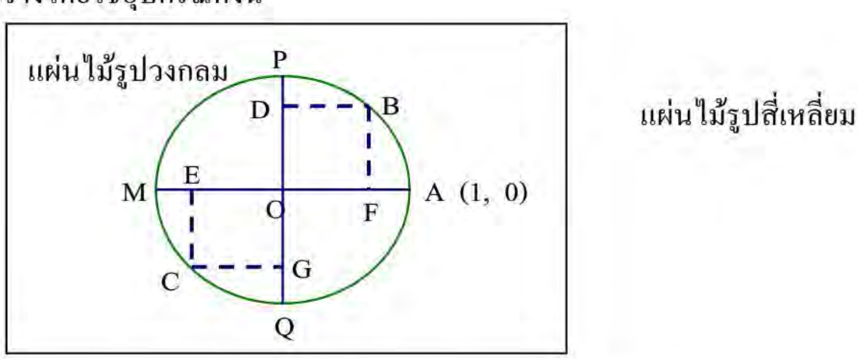
จากข้อสังเกตนี้ผู้เรียนควรจะสรุปได้ว่า ใช้วิธีวัดมุมหรือวัดความยาวส่วนโค้งของวงกลม จุดที่แขนของมุมตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยจะเป็นจุดเดียวกับจุดปลายของส่วนโค้ง ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

4. จากข้อสรุปที่ได้จากข้อ 3. ให้ผู้เรียนสรุปว่า ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมใด จะเท่ากับค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงที่ได้จากการวัดความยาวของส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่รองรับมุมนั้น ผู้สอนให้ผู้เรียนหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของมุม 0°, 90°, 180° และ 270° จากนั้น ผู้สอนให้ผู้เรียนสรุปเป็นตารางดังนี้

θ	$0\ (0^\circ)$	$\frac{\pi}{6}\ (30^\circ)$	$\frac{\pi}{4}\ (45^\circ)$	$\frac{\pi}{3}\ (60^\circ)$	$\frac{\pi}{2}\ (90^\circ)$
sin θ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos θ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

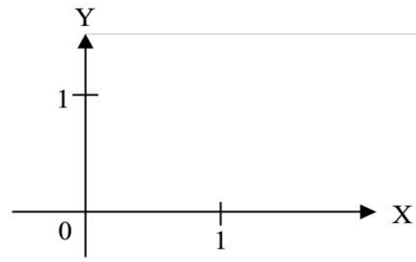
กราฟของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

1. ในการสอนให้ผู้เรียนเขียนกราฟของ $y = \sin x$ หรือ $y = \cos x$ โดยใช้วงกลมหนึ่งหน่วยนั้น ผู้สอนอาจสร้างโดยใช้อุปกรณ์ดังนี้

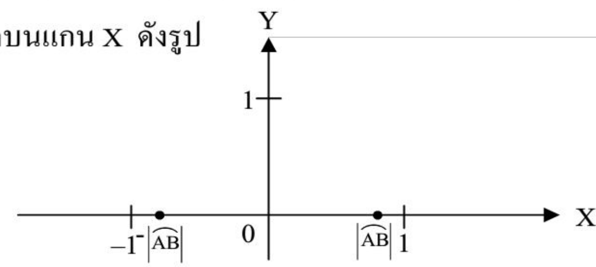


วัสดุที่ใช้ ไม้ 2 แผ่น แผ่นบนเป็นรูปวงกลมหนึ่งหน่วยติดอยู่บนแผ่นไม้รูปสี่เหลี่ยม ตะปูและเชือก 1 เส้น หรือแถบกระดาษ

วิธีใช้ 1) ใช้เชือกหรือแถบกระดาษวัดความยาวของ OA ไปกำหนดตำแหน่งของ 1 หน่วย บนแกน X และแกน Y ของระนาบที่จะใช้เขียนกราฟ เพื่อให้สอดคล้องกับ OA ดังรูป



2) ใช้เชือกหรือแถบกระดาษวัดความยาวส่วนโค้ง AB แล้วนำความยาวส่วนโค้งไปกำหนดจุดบนแกน X ดังรูป



3) ใช้เชือกหรือแถบกระดาษวัดความยาวส่วนโค้งจากจุด (1, 0) ถึงจุด (–1, 0) ซึ่งความยาวนี้คือ π แล้วนำไปกำหนดตำแหน่งของ π บนแกน X จากนั้นหาจุดที่แทนจำนวนต่อไปนี้บนแกน X

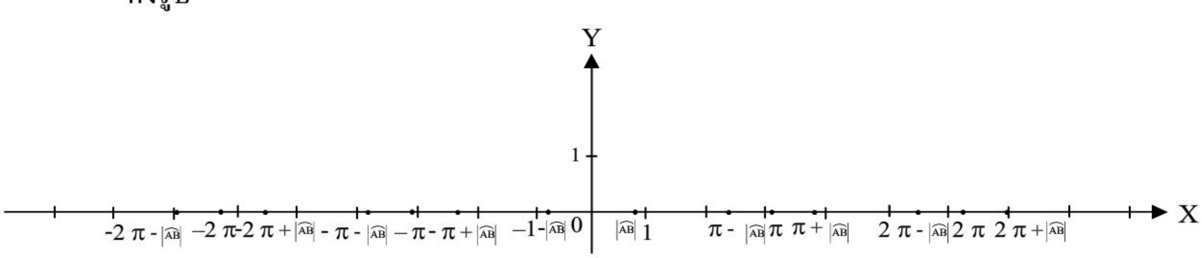
(1) $2\pi + |\overparen{AB}|$, $4\pi + |\overparen{AB}|$, ...

(2) $2\pi - |\overparen{AB}|$, $4\pi - |\overparen{AB}|$, ...

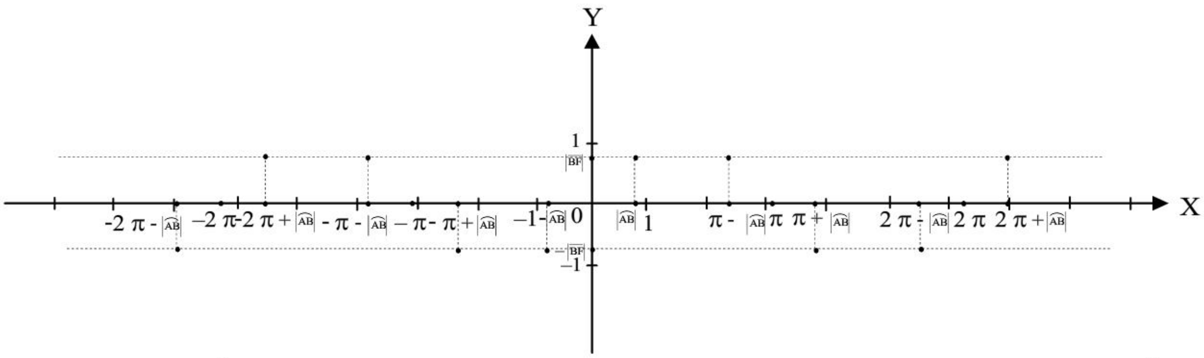
(3) $\pi - |\overparen{AB}|$, $3\pi - |\overparen{AB}|$, $5\pi - |\overparen{AB}|$, ...

(4) $\pi + |\overparen{AB}|$, $3\pi + |\overparen{AB}|$, $5\pi + |\overparen{AB}|$, ...

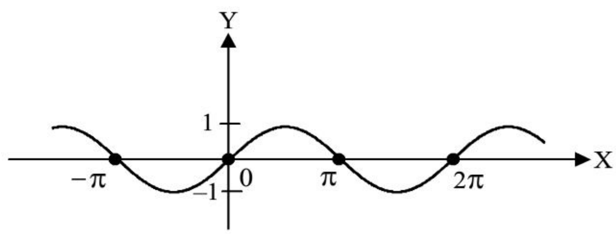
ดังรูป



4) ใช้เชือกหรือแถบกระดาษวัดระยะ BF ใช้ $|\overline{BF}|$ จับคู่กับ $|\overparen{AB}|$ และจำนวนใน (1) และ (3) แล้วลงจุดในระนาบ XY และใช้ $-|\overline{BF}|$ จับคู่กับ $-|\overparen{AB}|$ และจำนวนใน (2) และ (4) แล้วลงจุดในระนาบ XY ดังรูป



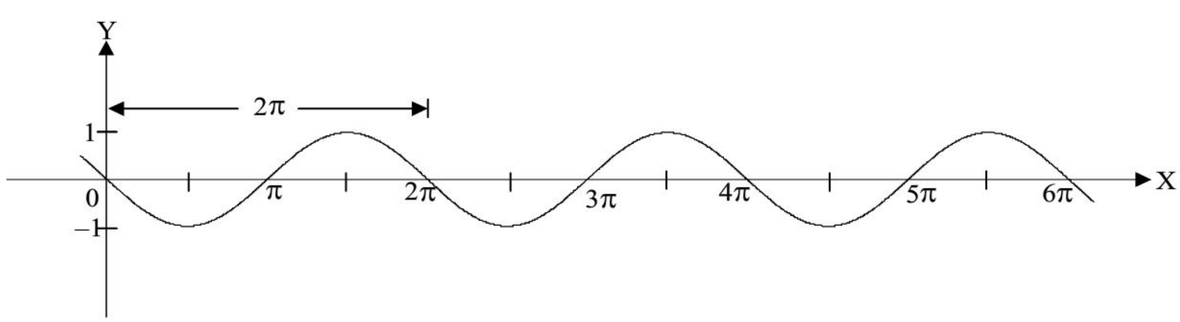
5) ทำซ้ำข้อ 1) – 4) โดยการวัดความยาวของส่วนโค้ง AB ที่ต่างกัน ยิ่งมากยิ่งดี หลังจากนั้นลากเส้นกราฟตามจุดที่ได้ลงไว้จะได้กราฟของฟังก์ชันไซน์ ดังรูป

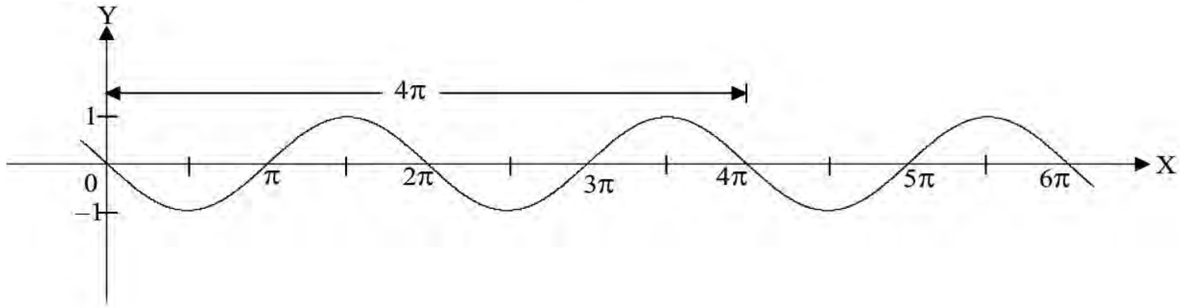


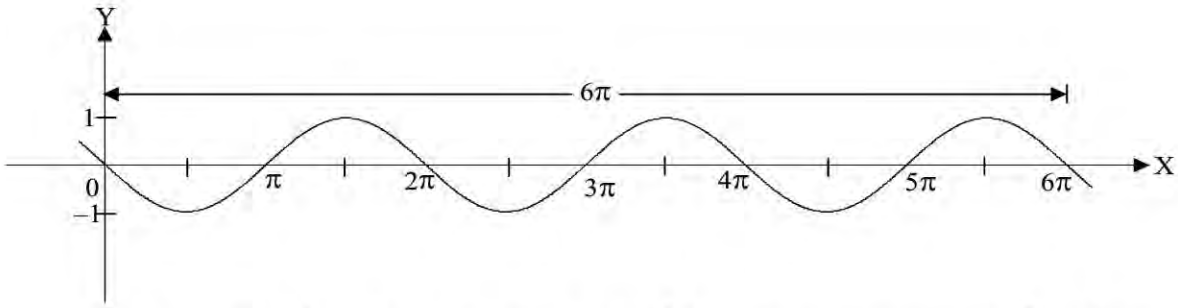
2. เมื่อผู้เรียนเขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้แล้วผู้สอนควรให้ผู้เรียนเข้าใจเรื่องฟังก์ชันที่เป็นคาบ เนื่องจากในหนังสือเรียนไม่ได้ให้บทนิยามของฟังก์ชันที่เป็นคาบไว้ เพราะไม่ได้มุ่งหวังให้ผู้เรียนสามารถพิสูจน์ได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบหรือไม่ สำหรับบทนิยามของฟังก์ชันที่เป็นคาบเป็นดังนี้

"ฟังก์ชัน f ซึ่งไม่เป็นฟังก์ชันคงตัว จะเป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบก็ต่อเมื่อมีจำนวนจริง p ที่ทำให้ $f(x + p) = f(x)$ สำหรับทุกค่าของ x และ $x + p$ ที่อยู่ในโดเมนของ f

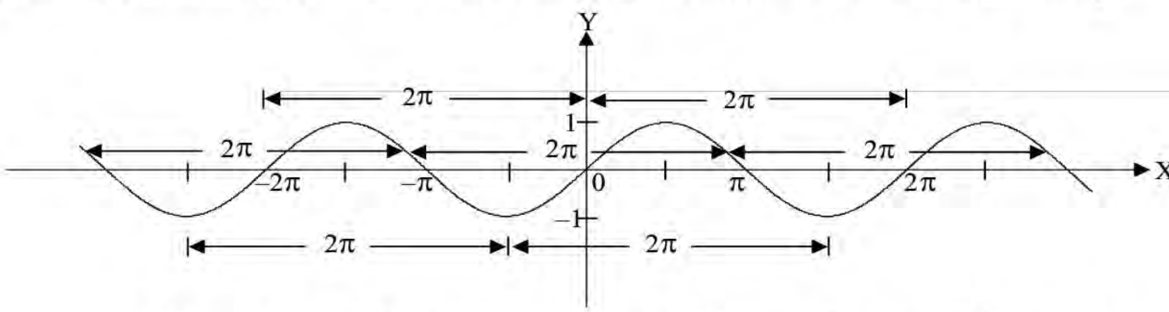
และถ้า p เป็นจำนวนบวกที่น้อยที่สุดที่ทำให้ฟังก์ชัน f มีสมบัติดังกล่าวจะเรียก p ว่า คาบ (fundamental period) ของฟังก์ชัน f" จากรูป เป็นกราฟของ $y = \sin x$ และจำนวนบวก p ที่น้อยที่สุดที่ทำให้กราฟของ $y = \sin x$ มีสมบัติเป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบ คือ 2π ดังนั้น กราฟของ $y = \sin x$ มีคาบเป็น 2π



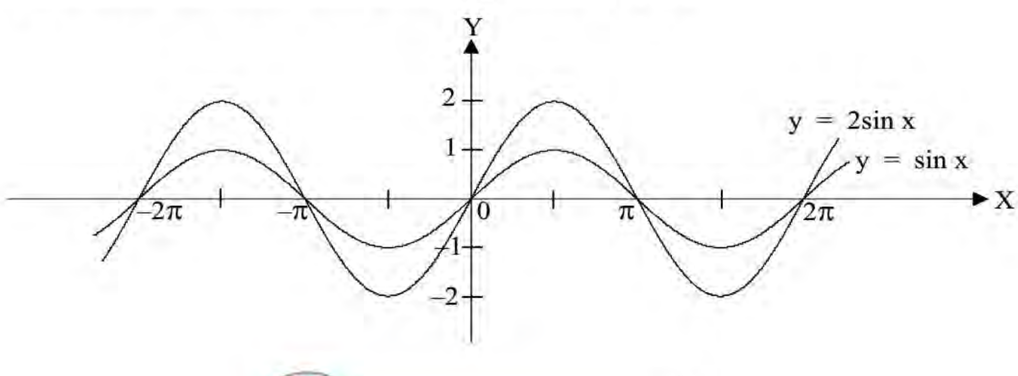




การพิจารณาช่วงที่มีกราฟเหมือนกันของฟังก์ชันที่เป็นคาบ (periodic function) นั้นจะเริ่มจากจุดใดก็ได้ เช่น กราฟของ $y = \sin x$ ซึ่งมีคาบเป็น 2π อาจพิจารณาช่วงที่มีกราฟซ้ำกันได้ดังรูป



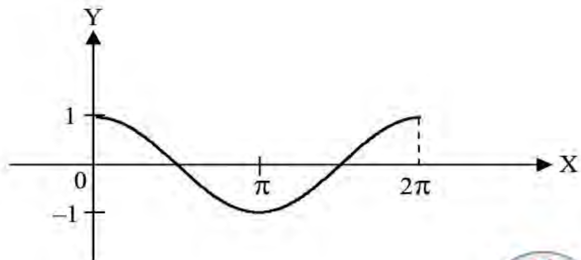
3. ในเรื่องของฟังก์ชันที่เป็นคาบ นอกจากจะกล่าวถึงเรื่องคาบแล้วยังกล่าวถึงเรื่องแอมพลิจูด ซึ่งครึ่งหนึ่งของค่าสูงสุดลบด้วยค่าต่ำสุดของฟังก์ชันเรียกว่าแอมพลิจูด คาบและแอมพลิจูด จะบอกลักษณะและขอบเขตของกราฟ ดังนั้น ผู้สอนควรให้ผู้เรียนเขียนกราฟเหล่านี้บนกระดาษกราฟแล้วให้สังเกตดูว่ากราฟของแต่ละฟังก์ชันมีคาบและมีแอมพลิจูดเป็นอย่างไร เช่น



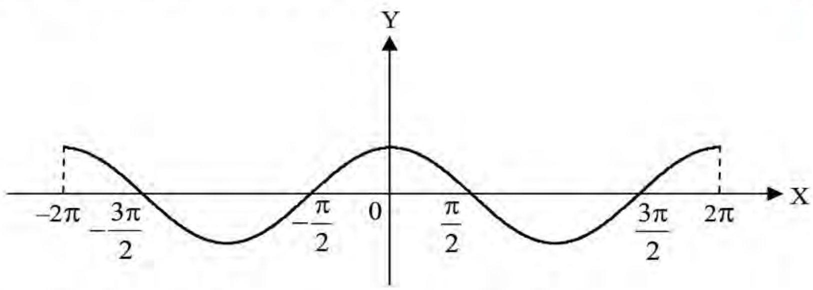
จากรูป กราฟของ $y = \sin x$ และ $y = 2\sin x$ มีคาบเท่ากันคือ 2π แต่มีแอมพลิจูดต่างกันคือ 1 และ 2 ตามลำดับ

4. สำหรับการเขียนกราฟของฟังก์ชันโคไซน์ ผู้สอนอาจใช้อุปกรณ์ที่เสนอไว้ในข้อ 1 ได้เช่นเดียวกับการเขียนกราฟของฟังก์ชันไซน์ หรือผู้สอนอาจใช้การเลื่อนแกนของกราฟ $y = \sin x$ เนื่องจาก $y = \cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ จะได้กราฟของ $y = \cos x$ ดังรูป

กราฟของ $y = \cos x$; $0 \leq x \leq 2\pi$



กราฟของ $y = \cos x$, $-2\pi \leq x \leq 2\pi$



ฟังก์ชัน $y = \cos x$ มีคาบเท่ากับ 2π และแอมพลิจูดเท่ากับ 1

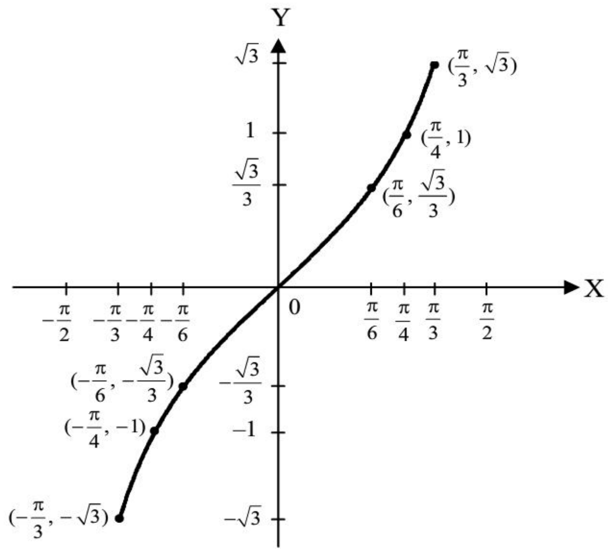
กราฟของฟังก์ชัน $y = \cos x$ ตัดแกน X ที่จุด $(-\frac{3\pi}{2}, 0)$, $(-\frac{\pi}{2}, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, 0)$ และ $(\frac{3\pi}{2}, 0)$

ผู้สอนชี้แจงการเขียนกราฟของฟังก์ชันแทนเจนต์ ดังนี้

เนื่องจากโดเมนของฟังก์ชันแทนเจนต์ไม่ใช่เซตของจำนวนจริงดังนั้นอาจเขียนกราฟของฟังก์ชันแทนเจนต์ได้ดังนี้

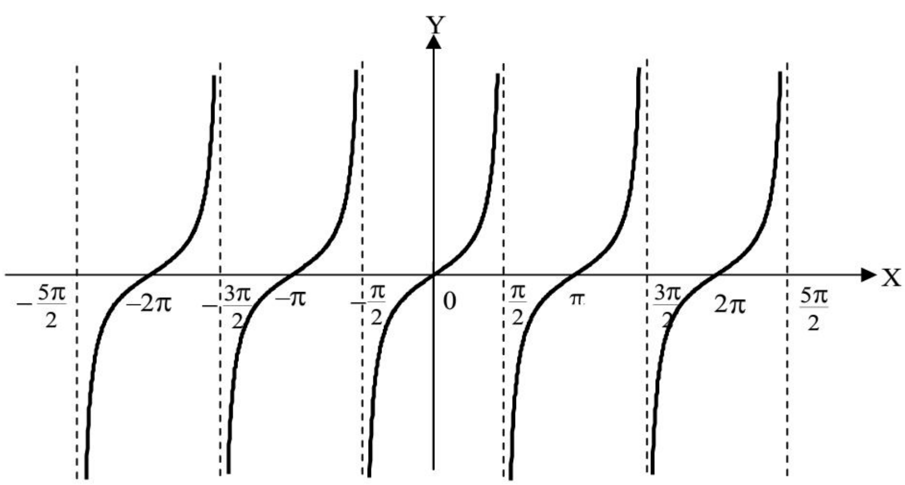
กราฟของ $y = \tan x$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

x	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$y = \tan x$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
(x, y)	$(-\frac{\pi}{3}, -\sqrt{3})$	$(-\frac{\pi}{4}, -1)$	$(-\frac{\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{3})$	(0, 0)	$(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{3})$	$(\frac{\pi}{4}, 1)$	$(\frac{\pi}{3}, \sqrt{3})$



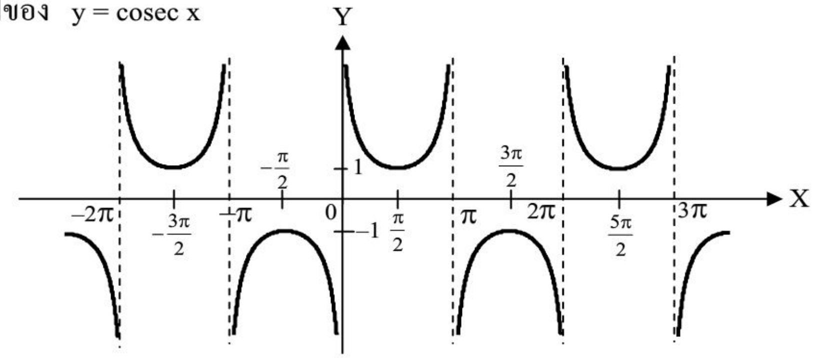
จากกราฟจะเห็นว่า เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0 และเข้าใกล้ $\frac{\pi}{2}$ ค่าของ tan x จะเป็นจำนวนบวกและเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ และเส้นกราฟจะโค้งเข้าหาเส้นตรง $x = \frac{\pi}{2}$ แต่เมื่อ $x = \frac{\pi}{2}$ จะหาค่า tan x ไม่ได้ ดังนั้น ในการเขียนกราฟดังกล่าว ถ้าลากเส้นประ $x = \frac{\pi}{2}$ เสียก่อน จะช่วยให้เขียนกราฟได้ง่ายขึ้น แต่เส้นประดังกล่าวนั้นมิได้เป็นส่วนหนึ่งของกราฟ

เขียนกราฟของ $y = \tan x$ เมื่อ $-\frac{5\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{2}$ ได้ดังนี้



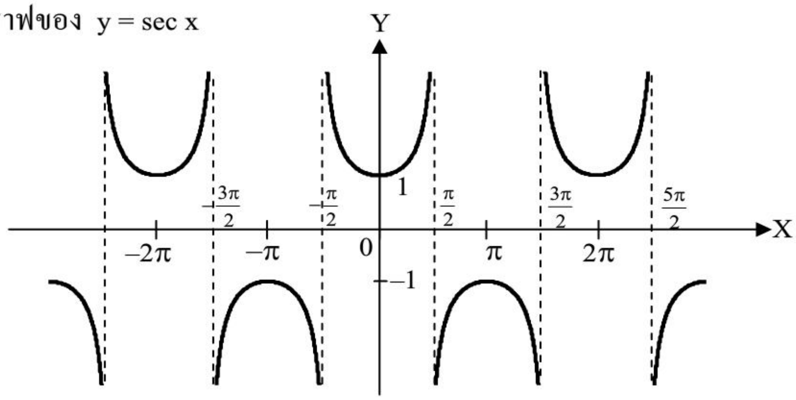
จากรูปจะเห็นว่า ฟังก์ชันแทนเจนต์เป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบ และมีคาบเท่ากับ π

กราฟของ y = cosec x



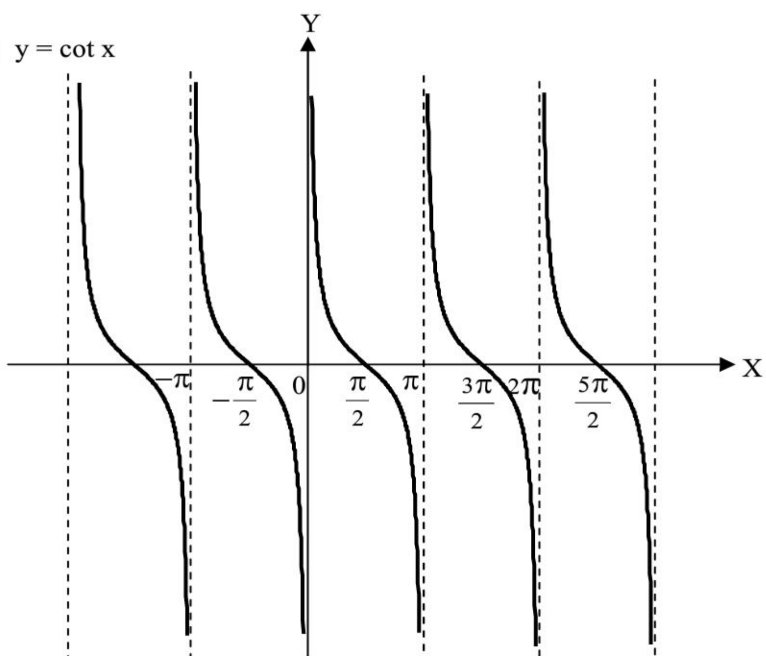
จากรูป จะเห็นว่า ฟังก์ชันโคซีแคนต์เป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบ และมีคาบเท่ากับ 2π

กราฟของ y = sec x



จากรูป จะเห็นว่า ฟังก์ชันซีแคนต์เป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบ และมีคาบเท่ากับ 2π

กราฟของ y = cot x



จากรูป จะเห็นว่า ฟังก์ชันโคแทนเจนต์เป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบ และมีคาบเท่ากับ π

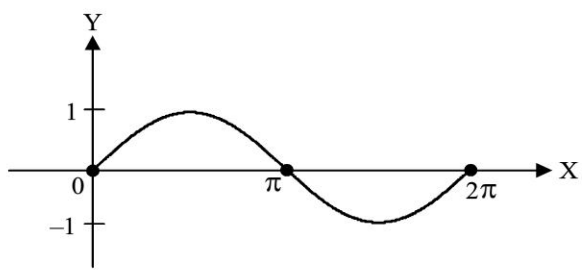
กราฟของ $y = \sin(2n\pi + x)$ และ $y = \cos(2n\pi + x)$

อาศัยการแปลงทางเรขาคณิตในการเขียนกราฟของ $y = \sin(2n\pi + x)$ และ $y = \cos(2n\pi + x)$ โดยการเลื่อนขนานกราฟของ $y = \sin x$ และ $y = \cos x$ ไปตามแกน X เป็นระยะ $2n\pi$ หน่วย ซึ่งแอมพลิจูดและคาบของฟังก์ชันไม่เปลี่ยนแปลง

กราฟของ $y = a\sin x$ และ $y = a\cos x$, $a \in R$

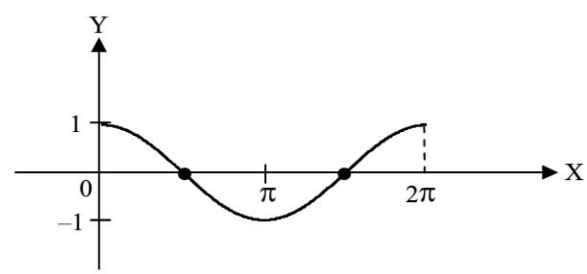
ผู้สอนให้ผู้เรียนพิจารณาในกรณีที่ $a = 1$

$a = 1$, $y = \sin x$; $0 \le x \le 2\pi$



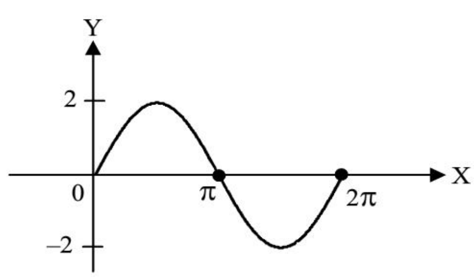
ฟังก์ชัน $y = \sin x$ มีคาบเป็น 2π
และแอมพลิจูดเป็น 1
ตัดแกน X ที่จุด $(0, 0)$, $(\pi, 0)$ และ $(2\pi, 0)$

$y = \cos x$; $0 \le x \le 2\pi$



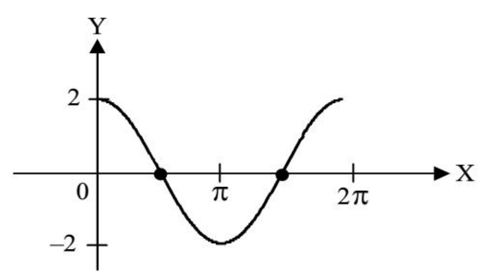
ฟังก์ชัน $y = \cos x$ มีคาบเป็น 2π
และแอมพลิจูดเป็น 1
ตัดแกน X ที่จุด $(\frac{\pi}{2}, 0)$ และ $(\frac{3\pi}{2}, 0)$

$a = 2$, $y = 2\sin x$; $0 \le x \le 2\pi$



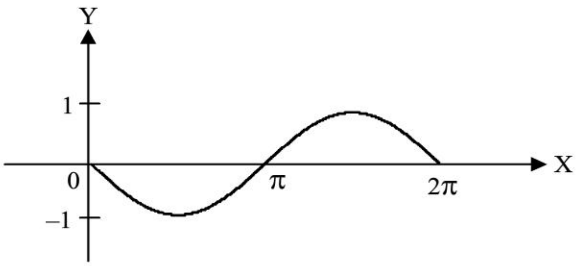
ฟังก์ชัน $y = 2\sin x$ มีคาบเป็น 2π
และแอมพลิจูดเป็น 2
ตัดแกน X ที่จุด $(0, 0)$, $(\pi, 0)$ และ $(2\pi, 0)$

$y = 2\cos x$; $0 \le x \le 2\pi$



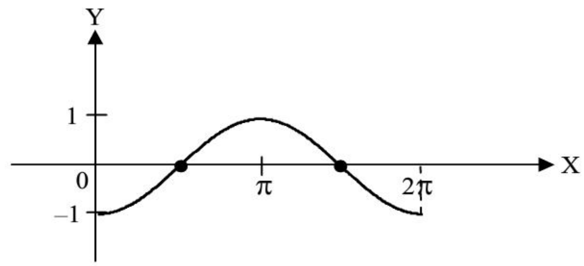
ฟังก์ชัน $y = 2\cos x$ มีคาบเป็น 2π
และแอมพลิจูดเป็น 2
ตัดแกน X ที่จุด $(\frac{\pi}{2}, 0)$ และ $(\frac{3\pi}{2}, 0)$

$a = -1, \quad y = -\sin x ; \quad 0 \le x \le 2\pi$



ฟังก์ชัน $y = -\sin x$ มีคาบเป็น 2π
และแอมพลิจูดเป็น 1
ตัดแกน X ที่จุด $(0, 0)$, $(\pi, 0)$ และ $(2\pi, 0)$

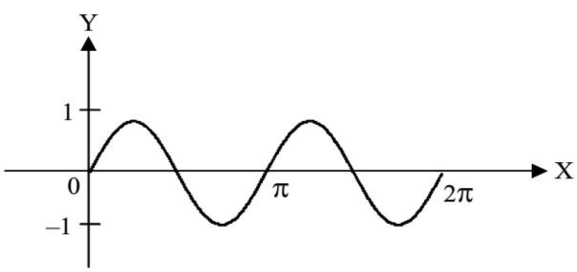
$y = -\cos x ; \quad 0 \le x \le 2\pi$



ฟังก์ชัน $y = -\cos x$ มีคาบเป็น 2π
และแอมพลิจูดเป็น 1
ตัดแกน X ที่จุด $(\frac{\pi}{2}, 0)$ และ $(\frac{3\pi}{2}, 0)$

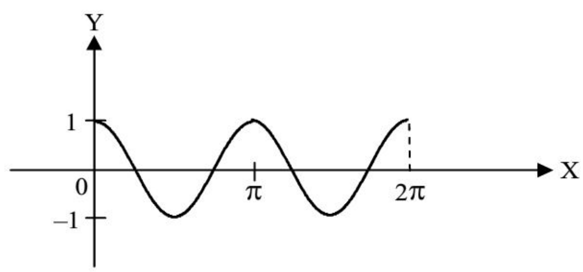
กราฟของ $y = \sin(nx)$, $y = \cos(nx), n \in R$

$n = 2, \quad y = \sin 2x ; \quad 0 \le x \le 2\pi$



ฟังก์ชัน $y = \sin 2x$ มีคาบเป็น π
และแอมพลิจูดเป็น 1

$y = \cos 2x ; \quad 0 \le x \le 2\pi$



ฟังก์ชัน $y = \cos 2x$ มีคาบเป็น π
และแอมพลิจูดเป็น 1

กราฟของฟังก์ชันที่เกี่ยวเนื่องกับกราฟของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ จะมีลักษณะเหมือนกราฟของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ คือเป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบและมีแอมพลิจูด สรุปลักษณะรวมได้ดังนี้

$f : R \to R$, $\mathbf{f(x) = \sin(nx), n > 0}$ คาบคือ $\frac{2\pi}{n}$ แอมพลิจูดคือ 1 เรนจ์คือ $[-1, 1]$	$f : R \to R$, $\mathbf{f(x) = \cos(nx), n > 0}$ คาบคือ $\frac{2\pi}{n}$ แอมพลิจูดคือ 1 เรนจ์คือ $[-1, 1]$

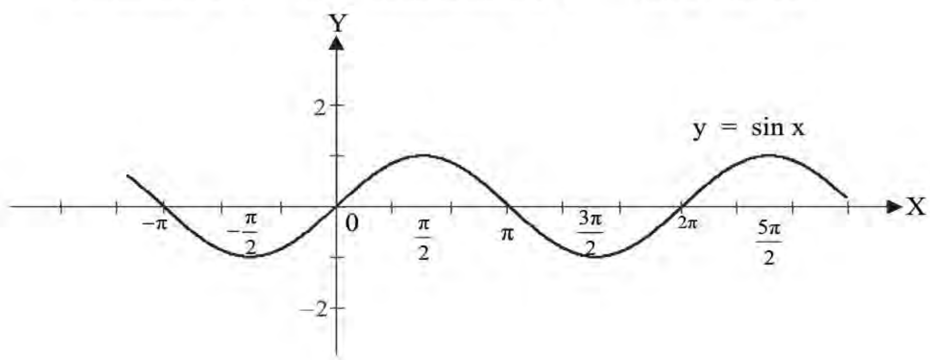
$f : R \to R$, $\mathbf{f(x) = a \sin (nx), n > 0}$	$f : R \to R$, $\mathbf{f(x) = a \cos (nx), n > 0}$
คาบคือ $\frac{2\pi}{n}$	คาบคือ $\frac{2\pi}{n}$
แอมพลิจูดคือ $\mid a \mid$	แอมพลิจูดคือ $\mid a \mid$
เรนจ์คือ $[-\mid a \mid, \mid a \mid]$	เรนจ์คือ $[-\mid a \mid, \mid a \mid]$

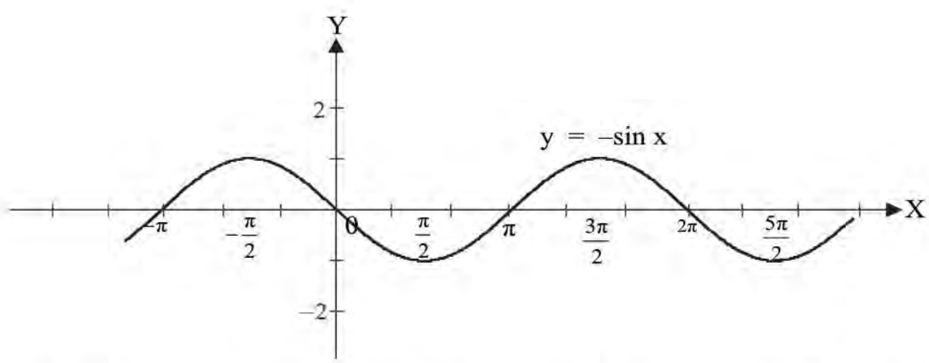
ผู้เรียนควรร่างกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติแบบคร่าว ๆ ได้ เมื่อทราบคาบและแอมพลิจูดของฟังก์ชันที่กำหนดให้

เมื่อผู้เรียนมีความเข้าใจและสามารถเขียนกราฟของฟังก์ชันไซน์ และ ฟังก์ชันโคไซน์ ได้แล้ว ผู้สอนควรฝึกให้ผู้เรียนเขียนกราฟของฟังก์ชันที่อาศัยการแปลงทางเรขาคณิต ซึ่งในที่นี้จะขอยกตัวอย่างเพียงการเขียนกราฟของฟังก์ชันที่ใช้กราฟของฟังก์ชันไซน์เป็นจุดเริ่มต้นเท่านั้น เพราะเมื่อผู้เรียนมีความเข้าใจหลักการแล้วก็จะสามารถเขียนกราฟของฟังก์ชันอื่นๆ โดยอาศัยหลักการเดียวกันนี้ได้

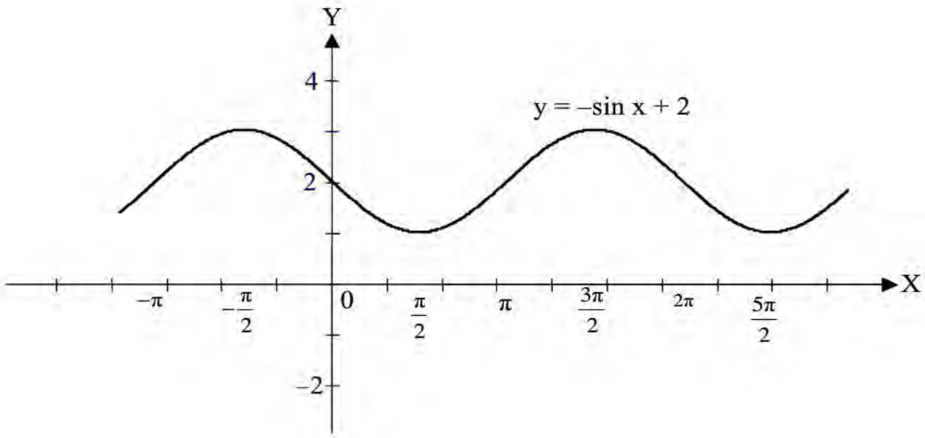
ตัวอย่าง จงเขียนกราฟของ $y = -\sin x + 2$

วิธีทำ จากกราฟของ $y = \sin x$ เขียนกราฟของ $y = -\sin x$ ได้ดังนี้





จากกราฟ $y = -\sin x$ เขียนกราฟของ $y = -\sin x + 2$ โดยการเลื่อนขนานกราฟของฟังก์ชัน $y = -\sin x$ ตามแกน Y ขึ้นไป 2 หน่วย ได้ดังนี้



ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม

ในหนังสือเรียน หัวข้อนี้จะเริ่มศึกษาจากการหา $\cos(\alpha - \beta)$ เมื่อ α, β เป็นจำนวนจริงหรือมุมใด ๆ ก่อนดังนี้

1. ผู้สอนทบทวนความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติและระยะทางระหว่างจุด 2 จุดซึ่งผู้เรียนควรจะบอกได้ว่า

1) ถ้า (m, n) เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วยแล้ว จะได้ $m = \cos\theta$ และ $n = \sin\theta$

2) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

3) ระยะทางระหว่างจุด (a, b) และ (c, d) เท่ากับ $\sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$

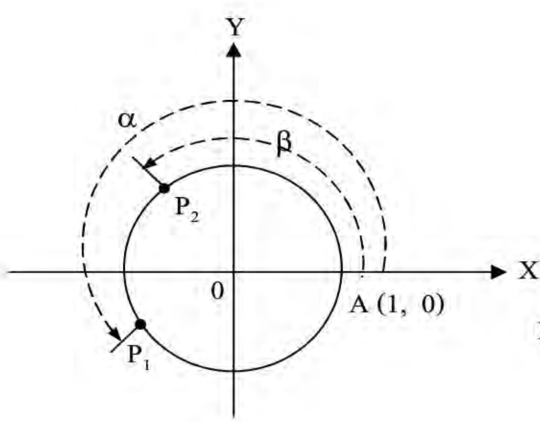
2. ผู้สอนและผู้เรียนช่วยกันหา $\cos(\alpha - \beta)$ ตามขั้นตอนด้วยวิธีการต่อไปนี้

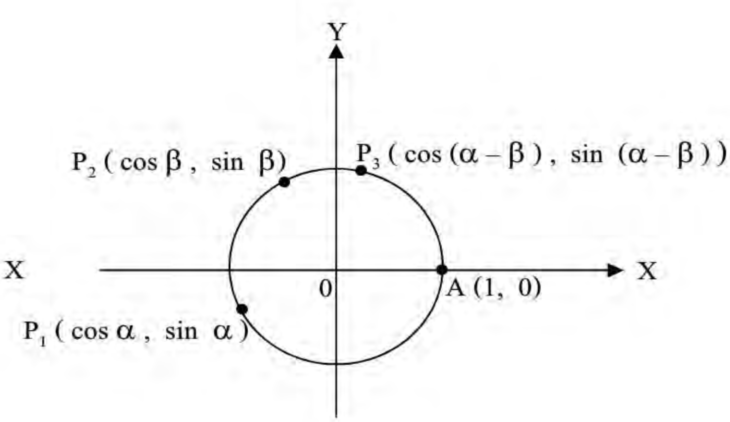
เนื่องจากในวงกลมหนึ่งหน่วย จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย คือจุด $(\cos\theta, \sin\theta)$ ดังนั้นผู้เรียนควรบอกได้ว่า

ถ้า P_1 เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว α หน่วย จะได้พิกัดของจุด P_1 คือ $(\cos\alpha, \sin\alpha)$

ถ้า P_2 เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว β หน่วยจะได้พิกัดของจุด P_2 คือ $(\cos\beta, \sin\beta)$

ถ้า P_3 เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\alpha - \beta$ หน่วย จะได้พิกัดของจุด P_3 คือ $(\cos(\alpha-\beta), \sin(\alpha-\beta))$





เนื่องจากส่วนโค้ง P_1P_2 และส่วนโค้ง AP_3 ต่างก็ยาว $\alpha - \beta$ หน่วย

ดังนั้น คอร์ด P_1P_2 ยาวเท่ากับคอร์ด AP_3

นั่นคือ $|P_1P_2| = |AP_3|$

$$\sqrt{(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2} = \sqrt{\{\cos(\alpha - \beta) - 1\}^2 + \sin^2(\alpha - \beta)}$$

$$(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = \{\cos(\alpha - \beta) - 1\}^2 + \sin^2(\alpha - \beta)$$

$$2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = 2 - 2\cos(\alpha - \beta)$$

$$-2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = -2\cos(\alpha - \beta)$$

ดังนั้น $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

จากวิธีการข้างต้น ผู้สอนอาจให้ผู้เรียนหา $\cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha \pm \beta)$ และ $\tan(\alpha \pm \beta)$

3. เมื่อผู้เรียนสามารถหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือของมุม $\alpha \pm \beta$ ได้แล้ว ผู้สอนควรให้ผู้เรียนหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ $\pi \pm \alpha$, $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ เปรียบเทียบกับผลที่ได้มาก่อนหน้านี้ เช่น ผู้เรียนควรหาได้ว่า

$$\sin(\pi + \alpha) = \sin\pi\cos\alpha + \cos\pi\sin\alpha$$
$$= -\sin\alpha$$

หรือ $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha$

$= \sin\alpha$ เป็นต้น

ในกรณีที่หาค่า $\tan(\frac{\pi}{2} \pm \alpha)$ และ $\cot(\frac{\pi}{2} \pm \alpha)$ ต้องเปลี่ยนให้อยู่ในรูป $\sin(\frac{\pi}{2} \pm \alpha)$ และ $\cos(\frac{\pi}{2} \pm \alpha)$ เสียก่อน

ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

1. ผู้สอนอาจทบทวนเรื่องตัวผกผันของฟังก์ชัน โดยกำหนดฟังก์ชันทั้งแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิกและแบบแจกแจงสมาชิกแล้วให้ผู้เรียนหาตัวผกผันของแต่ละฟังก์ชันนั้น เช่น

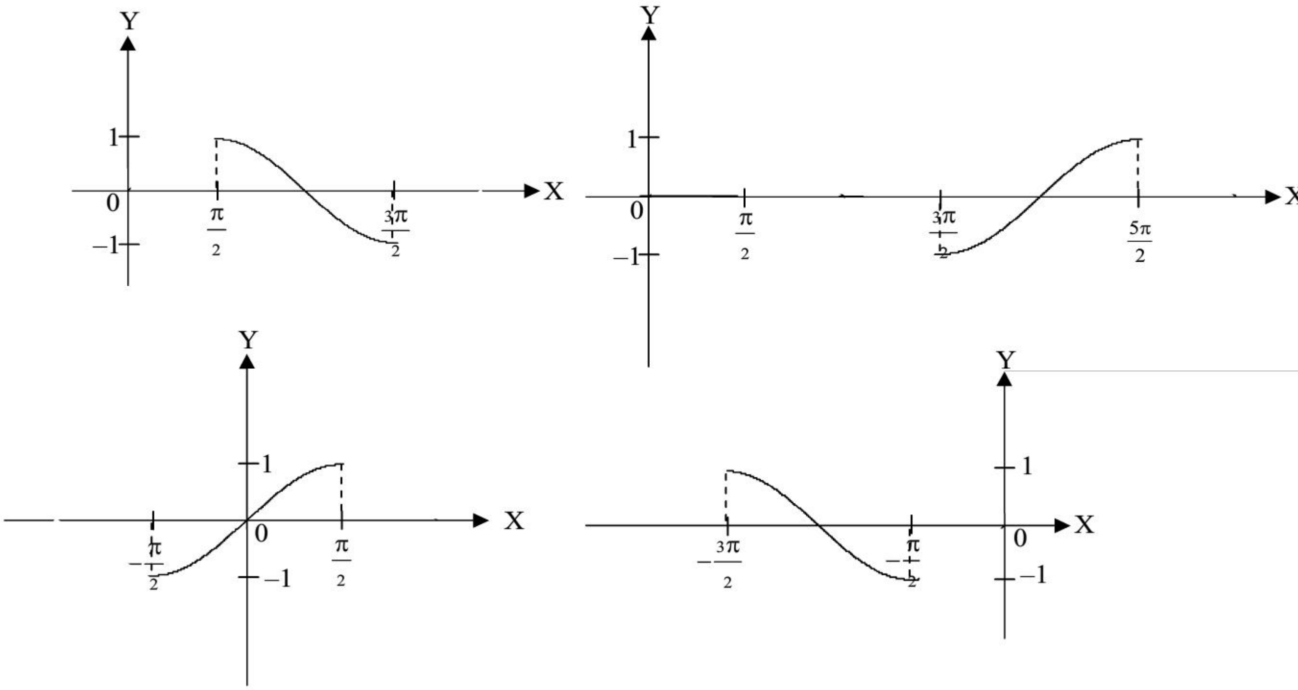
$$f = \{(1, 2), (2, 4), (4, 6), (5, 4)\}$$
$$g = \{(x, y) \mid y = x^2 + 5\}$$
$$h = \{(x, y) \mid 2y - 3x = 4\}$$

ผู้เรียนควรหาตัวผกผันของแต่ละฟังก์ชันนั้นได้และบอกได้ว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่

2. ผู้สอนทบทวนเรื่องฟังก์ชันผกผันซึ่งผู้เรียนควรบอกได้ว่าคือตัวผกผันของฟังก์ชันที่เป็นฟังก์ชัน และฟังก์ชัน 1 – 1 เท่านั้นที่มีฟังก์ชันผกผัน

3. ผู้สอนให้ผู้เรียนพิจารณาฟังก์ชัน $\{(x, y) \mid y = \sin x\}$ ให้ผู้เรียนบอกตัวผกผันของฟังก์ชันนี้และบอกด้วยว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่ เพราะเหตุใด ผู้เรียนควรตอบได้ว่าคือ $\{(x, y) \mid x = \sin y\}$ ซึ่งไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะฟังก์ชันไซน์ไม่เป็นฟังก์ชัน 1 – 1 ในการพิจารณาว่าตัวผกผันของฟังก์ชันไซน์เป็นฟังก์ชันหรือไม่ ผู้สอนอาจให้ผู้เรียนพิจารณาจากกราฟของ $y = \sin x$ ก็ได้

4. จากกราฟของ $y = \sin x$ ผู้สอนและผู้เรียนช่วยกันพิจารณาหาช่วงบนแกน X ที่ทำให้กราฟเป็นฟังก์ชัน 1 – 1 และฟังก์ชันนั้นมีเรนจ์เป็น $[-1, 1]$ ซึ่งผู้เรียนควรหาช่วงได้ต่าง ๆ กัน เช่น $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, $[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$, $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$



5. ผู้สอนให้ผู้เรียนเขียนฟังก์ชันที่มีกราฟอยู่ในแต่ละช่วงที่หาได้ ซึ่งผู้เรียนควรเขียนได้ ดังนี้

$\{(x, y) \mid y = \sin x, \frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}\}$ $\quad$ $\{(x, y) \mid y = \sin x, -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\}$

$\{(x, y) \mid y = \sin x, \frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{5\pi}{2}\}$ $\quad$ $\{(x, y) \mid y = \sin x, \frac{-3\pi}{2} \le x \le -\frac{\pi}{2}\}$

6. จากฟังก์ชันที่ได้ในข้อ 5 ผู้สอนชี้แจงว่า การพิจารณาเลือกใช้ x จะเลือกค่า x ที่มีค่าสัมบูรณ์น้อยที่สุด ดังนั้น $\{(x, y) \mid y = \sin x, -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\}$ จึงเป็นฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันไซน์จะเรียกฟังก์ชันนี้ว่า arcsine ดังนั้น arcsine คือ $\{(x, y) \mid x = \sin y, -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}\}$ นั่นคือ สำหรับ $(x, y) \in$ arcsine จะได้ $y = \arcsin x$ เมื่อ $x = \sin y$ และ $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

7. ผู้สอนอาจใช้วิธีการทำนองเดียวกับข้างต้นในการให้นิยามฟังก์ชันอาร์กแทนเจนต์ ดังนั้น arctangent คือ $\{(x, y) \mid x = \tan y, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\}$ ส่วนฟังก์ชันอาร์กโคไซน์นั้นจะพิจารณา x ในช่วงที่เป็นจำนวนบวก ดังนั้น arccosine คือ $\{(x, y) \mid x = \cos y, 0 \le y \le \pi\}$

8. ผู้สอนให้ผู้เรียนสรุปโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันอาร์กไซน์ อาร์กโคไซน์ และอาร์กแทนเจนต์

9. ผู้สอนฝึกให้ผู้เรียนหาค่าของฟังก์ชันผกผันทั้งสาม ซึ่งผู้เรียนจำเป็นต้องทราบว่าค่าของฟังก์ชันผกผันต้องอยู่ในเรนจ์ของฟังก์ชันผกผันนั้น ๆ เช่น ผู้สอนให้ผู้เรียนหาค่า $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$

เมื่อให้ $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = t$ แล้ว ผู้เรียนควรบอกได้ว่า $\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ และ $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$

ดังนั้น $t = \frac{\pi}{4}$ นั่นคือ $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$

10. ในหนังสือเรียนไม่ได้กล่าวถึงโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันโคแทนเจนต์ โคซีแคนต์ และซีแคนต์ ซึ่งถ้าผู้เรียนถามผู้สอนอาจตอบว่าหนังสือบางเล่มกำหนดโดเมนและเรนจ์ดังนี้

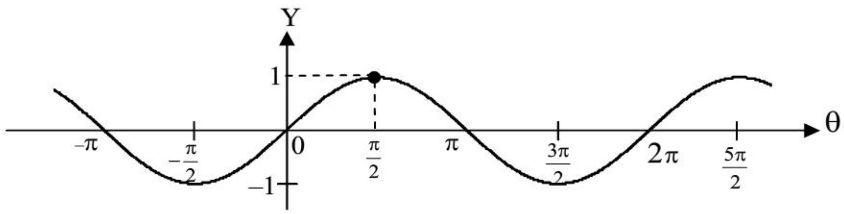
ฟังก์ชัน	โดเมน	เรนจ์
arccotangent	R	$\{y \mid 0 < y < \pi\}$
arcsecant	$\{x \mid x \ge 1$ หรือ $x \le -1\}$	$\{y \mid 0 \le y < \frac{\pi}{2}$ หรือ $\frac{\pi}{2} < y \le \pi\}$
arccosecant	$\{x \mid x \ge 1$ หรือ $x \le -1\}$	$\{y \mid 0 < y \le \frac{\pi}{2}$ หรือ $-\frac{\pi}{2} \le y < 0\}$

สำหรับตัวอย่างที่ 1 – 3 ในหนังสือเรียน หัวข้อ 2.8 หน้า 130 – 131 นั้น ผู้สอนอาจอาศัยกราฟเพื่อช่วยให้ผู้เรียนเกิดความเข้าใจ และสามารถหาคำตอบได้ง่ายและรวดเร็วขึ้น โดยขอยกตัวอย่างที่ 1 เพียงตัวอย่างเดียว ดังนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ arcsin 1

วิธีทำ ให้ $\arcsin 1 = \theta$ จะได้ $\sin \theta = 1$ หาค่า θ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ และ $\sin \theta = 1$

พิจารณากราฟ $y = \sin \theta$



จากกราฟ จะพบว่า เมื่อ $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ จะมี $\theta = \frac{\pi}{2}$ เพียงค่าเดียวที่ $\sin\theta = 1$ ดังนั้น $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$

เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ

1. ผู้สอนควรบอกผู้เรียนว่าเอกลักษณ์ใดที่ได้พิสูจน์แล้ว สามารถนำไปอ้างอิงได้ และผู้สอนควรแนะนำเอกลักษณ์ที่เห็นว่าสำคัญ เช่น

1) เอกลักษณ์พื้นฐาน (basic identities)

$$\sin\theta = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta}, \quad \operatorname{cosec}\theta \neq 0$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}, \quad \sec\theta \neq 0$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\cot\theta}, \cos\theta \neq 0 \text{ หรือ } \cot\theta \neq 0$$

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta$$

2) เอกลักษณ์แบบพีทาโกรัส (Pythagorean identities)

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad 1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$$

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

3) เอกลักษณ์แบบฟังก์ชันร่วม (Cofunction identities)

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

4) เอกลักษณ์แบบผลบวกและผลต่าง

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

5) เอกลักษณ์แบบจำนวนทวีคูณ

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \qquad \tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

6) เอกลักษณ์แบบครึ่งมุม

$$\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \qquad \tan\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

$$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

7) เอกลักษณ์อื่น ๆ

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \qquad \cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \qquad \cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

2. เพื่อให้ผู้เรียนไม่มีความรู้สึกว่าเอกลักษณ์ตรีโกณมิติมีมากเกินไป ผู้สอนควรให้ผู้เรียนเลือกจำเฉพาะบางเอกลักษณ์ แล้วนำเอกลักษณ์เหล่านั้นไปพัฒนาเป็นเอกลักษณ์อื่นๆ เช่น

จากเอกลักษณ์ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ ซึ่งได้มาจากสมการของวงกลมหนึ่งหน่วย $x^2 + y^2 = 1$

หารด้วย $\sin^2\theta$ จะได้ $1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$

หารด้วย $\cos^2\theta$ จะได้ $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

หรือจากเอกลักษณ์ $\sin(\alpha+\beta)$ สามารถพัฒนาไปสู่ $\sin 2x$ เป็นต้น

3. ในการสอนการพิสูจน์เอกลักษณ์ สำหรับผู้เรียนที่มีความสามารถทางการเรียนไม่มากนัก ผู้สอนควรเริ่มต้นจากการยกตัวอย่างที่ง่ายก่อน แล้วจึงค่อยๆยกตัวอย่างที่ยากขึ้น เพื่อให้ผู้เรียนไม่เกิดความท้อถอยตั้งแต่แรก ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงพิสูจน์ว่า $\sin^2(-\theta) + \cos^2(-\theta) = 1$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\sin^2(-\theta) + \cos^2(-\theta) &= [\sin(-\theta)]^2 + [\cos(-\theta)]^2 \\ &= (-\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 \\ &= (\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 \\ &= 1\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงพิสูจน์ว่า $\dfrac{\sin^2(-\theta)-\cos^2(-\theta)}{\sin(-\theta)-\cos(-\theta)} = \cos\theta - \sin\theta$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\frac{\sin^2(-\theta)-\cos^2(-\theta)}{\sin(-\theta)-\cos(-\theta)} &= \frac{[\sin(-\theta)]^2-[\cos(-\theta)]^2}{\sin(-\theta)-\cos(-\theta)} \\
&= \frac{(-\sin\theta)^2-(\cos\theta)^2}{-\sin\theta-\cos\theta} \\
&= \frac{(\sin\theta)^2-(\cos\theta)^2}{-\sin\theta-\cos\theta} \\
&= \frac{(\sin\theta-\cos\theta)(\sin\theta+\cos\theta)}{-(\sin\theta+\cos\theta)} \\
&= \cos\theta - \sin\theta
\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3 จงพิสูจน์ว่า $\dfrac{1+\tan\theta}{1+\cot\theta} = \tan\theta$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\frac{1+\tan\theta}{1+\cot\theta} &= \frac{1+\tan\theta}{1+\dfrac{1}{\tan\theta}} \\
&= \frac{1+\tan\theta}{\dfrac{\tan\theta+1}{\tan\theta}} \\
&= \frac{\tan\theta(1+\tan\theta)}{\tan\theta+1} \\
&= \tan\theta
\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 4 จงพิสูจน์ว่า $\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = 2\ \text{cosec}\ \theta$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} &= \frac{\sin^2\theta+(1+\cos\theta)^2}{(1+\cos\theta)(\sin\theta)} \\
&= \frac{\sin^2\theta+1+2\cos\theta+\cos^2\theta}{(1+\cos\theta)(\sin\theta)} \\
&= \frac{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+1+2\cos\theta}{(1+\cos\theta)(\sin\theta)} \\
&= \frac{2+2\cos\theta}{(1+\cos\theta)(\sin\theta)} \\
&= \frac{2(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(\sin\theta)} \\
&= \frac{2}{\sin\theta} \\
&= 2\ \text{cosec}\ \theta
\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 5 จงพิสูจน์ว่า $\frac{1}{\cos\theta}-\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = \tan\theta$

วิธีทำ

$$\frac{1}{\cos\theta}-\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = \frac{1+\sin\theta-\cos^2\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$$

$$= \frac{\sin\theta+(1-\cos^2\theta)}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$$

$$= \frac{\sin\theta+\sin^2\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$$

$$= \frac{\sin\theta(1+\sin\theta)}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$$

$$= \tan\theta$$

4. การพิสูจน์เอกลักษณ์โดยทั่ว ๆ ไปไม่มีกฎเกณฑ์แน่นอนตายตัว เพียงแต่พยายามแสดงให้เห็นว่าจำนวนทางซ้ายและจำนวนทางขวาของเครื่องหมายเท่ากับนั้นเท่ากันจริงสำหรับทุกค่าของสมาชิกที่อยู่ในโดเมนของฟังก์ชันทั้งหมดในสมการ โดยอาศัยเอกลักษณ์ที่พิสูจน์แล้ว การพิสูจน์เอกลักษณ์อาจจะเริ่มทำจากนิพจน์ที่อยู่ทางซ้ายของเครื่องหมายเท่ากับให้เหมือนกับนิพจน์ที่อยู่ทางขวาของเครื่องหมายเท่ากับ หรือทำจากนิพจน์ที่อยู่ทางขวาของเครื่องหมายเท่ากับให้เหมือนกับนิพจน์ที่อยู่ทางซ้ายของเครื่องหมายเท่ากับ หรืออาจจะทำจากนิพจน์ที่อยู่แต่ละข้างของเครื่องหมายเท่ากับในสมการให้ผลสุดท้ายเป็นนิพจน์เดียวกัน สำหรับบางเอกลักษณ์การทำจากนิพจน์ที่อยู่แต่ละข้างของเครื่องหมายเท่ากับในสมการให้ผลสุดท้ายเป็นนิพจน์เดียวกันจะสะดวกกว่าการทำจากนิพจน์ข้างใดข้างหนึ่งให้เหมือนกับนิพจน์อีกข้างหนึ่งดังตัวอย่างต่อไปนี้

จงพิสูจน์ $\tan\theta\sin^2\theta+\cot\theta\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta = \cot\theta+\tan\theta$

$$\text{L.S.} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\sin^2\theta+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta$$

$$= \frac{\sin^3\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos^3\theta}{\sin\theta}+2\sin\theta\cos\theta$$

$$= \frac{\sin^4\theta+\cos^4\theta+2\sin^2\theta\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$\text{R.S.} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$\text{L.S.} = \text{R.S.}$$

5. ในเรื่องการแก้สมการตรีโกณมิติ เมื่อเอกภพสัมพัทธ์คือ เซตของจำนวนจริงหรือมุม ในกรณีที่หาค่า θ เมื่อ $0 < \theta < 2\pi$ ได้มากกว่า 1 ค่านั้น การตอบคำตอบในรูปของค่าทั่วไปไม่จำเป็นต้องให้ผู้เรียนเขียนคำตอบรวมเป็นค่าเดียวเสมอไป ผู้เรียนสามารถตอบในรูปของค่าทั่วไปของแต่ละค่าของ θ เมื่อ $0 < \theta < 2\pi$ ได้ก็เพียงพอแล้ว ตัวอย่างเช่น

จงแก้สมการ $\cot\theta = 1$

จะได้ $\theta = \frac{\pi}{4}$ หรือ $\theta = \frac{5\pi}{4}$ เมื่อ $0 \le \theta < 2\pi$

ดังนั้น ค่าทั่วไปของ θ คือ $2n\pi + \frac{\pi}{4}$ และ $2n\pi + \frac{5\pi}{4}$ เมื่อ $n \in I$

ผู้เรียนไม่จำเป็นต้องตอบได้ว่าค่าทั่วไปของ θ คือ $n\pi + \frac{\pi}{4}$ เมื่อ $n \in I$

6. ในโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับเรื่องระยะทางและความสูง กรณีที่โจทย์กล่าวถึงผู้สังเกตมองดูวัตถุเป็นมุมก้มหรือมุมเงย โดยที่โจทย์ไม่ได้กำหนดความสูงของผู้สังเกตให้ ถือว่าความสูงของผู้สังเกตเป็นศูนย์หน่วย

ตัวอย่างกิจกรรมที่ส่งเสริมทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

การสอนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔– ๖ เล่ม ๓ ของ สสวท. นั้น ผู้สอนอาจพบว่าการเขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติเป็นเรื่องยุ่งยาก กิจกรรมต่อไปนี้จะช่วยให้ผู้สอนจัดการเรียนการสอนเรื่องนี้ได้ง่ายขึ้น นอกจากนี้ยังมีกิจกรรมที่ช่วยให้ผู้เรียนสามารถเข้าใจเกี่ยวกับฟังก์ชันคาบและวงกลมหนึ่งหน่วยด้วย แต่เนื่องจากสื่อเหล่านี้สร้างจากโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad ดังนั้นผู้สอนหรือผู้เรียนจะใช้งานสื่อเหล่านี้ได้เมื่อมีเครื่องคอมพิวเตอร์ที่ติดตั้งโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad แล้ว ทั้งนี้ผู้ที่จะใช้สื่อนี้ต้องมีความรู้เกี่ยวกับการใช้โปรแกรม The Geometer’s Sketchpad บ้างพอสมควร

แฟ้มที่ใช้ประกอบการจัดกิจกรรมนี้ บรรจุอยู่ในซีดีรอมซึ่งแนบมากับหนังสือคู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔ – ๖ เล่ม ๓ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ ในโฟลเดอร์ชื่อ บทที่ 2 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

อัตราส่วนตรีโกณมิติ

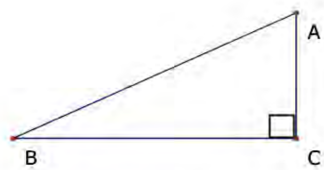
กิจกรรมนี้ใช้เป็นกิจกรรมทบทวนเรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติโดยการสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉากสองรูปที่คล้ายกันในการสรุปค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติ

วัตถุประสงค์

เพื่อให้ผู้เรียนสำรวจอัตราส่วนของความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก และผู้เรียนควรสรุปได้ว่า อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมที่มีขนาดเท่ากันจะมีค่าคงตัว

แนวทางการจัดกิจกรรม

1. เปิดโฟลเดอร์ **บทที่ 2 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ** แฟ้มชื่อ **ฟังก์ชันตรีโกณมิติ.gsp** แบบร่างหน้า **1. อัตราส่วนตรีโกณมิติ** ในแบบร่างหน้านี้จะมีรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก BCA และความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมที่วัดไว้

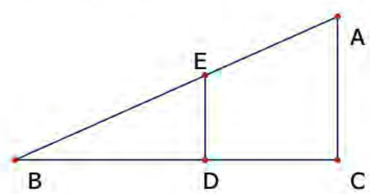


AB = 6.23 ซม.

AC = 2.72 ซม.

BC = 5.61 ซม.

2. สร้างจุด D บนส่วนของเส้นตรง BC
3. สร้างเส้นตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรง BC ผ่านจุด D
4. สร้างจุดตัด E ระหว่างเส้นตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรง AB แล้วซ่อนเส้นตั้งฉาก
5. สร้างส่วนของเส้นตรง DE



คำถาม 1) รูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม EBD มีความสัมพันธ์กันอย่างไร

2) ผู้เรียนคิดว่าอัตราส่วนของ AC ต่อ BC เท่ากับอัตราส่วนของ ED ต่อ BD หรือไม่

6. วัดระยะ BD , DE และ BE
7. คำนวณอัตราส่วนระหว่างความยาวของด้านตรงข้ามมุม B กับความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉากของรูปสามเหลี่ยมทั้งสอง โดยใช้ระยะที่วัดไว้
8. ลากจุด C ไป-มา จากซ้ายไปขวา แล้วสังเกตค่าของอัตราส่วนที่คำนวณไว้
9. ลากจุด A ขึ้น-ลง แล้วสังเกตค่าของอัตราส่วนที่คำนวณไว้

คำถาม 3) จากการทำกิจกรรมข้อ 8 และ ข้อ 9 ผู้เรียนสามารถสรุปสิ่งที่เกิดขึ้นได้อย่างไร

จะเห็นว่าอัตราส่วนของความยาวของด้านตรงข้ามมุมกับความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉากจะเป็นค่าคงตัวสำหรับมุมหนึ่ง ๆ เรียกอัตราส่วนนี้ว่า ไซน์ (sine) ของมุมนั้น

สำหรับอัตราส่วนตรีโกณมิติอื่น (cos, tan) ผู้สอนอาจให้ผู้เรียนลองสร้างแบบสำรวจด้วยตนเอง โดยผู้สอนอาจแนะนำให้ผู้เรียนเริ่มด้วยการวัดอัตราส่วนของความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยม

นิยามของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

วัตถุประสงค์

เพื่อให้ผู้เรียนสำรวจนิยามของฟังก์ชันไซน์ และฟังก์ชันโคไซน์

แนวทางการจัดกิจกรรม

1. เปิดแบบร่างหน้า **2. นิยามของฟังก์ชันไซน์** ในแบบร่างหน้านี้จะมีวงกลมหนึ่งหน่วย ส่วนโค้ง θ ความยาวส่วนโค้ง θ ที่วัดไว้ และปุ่มแสดงการทำงานเริ่มต้น
2. วัดพิกัดที่สอง (y) ของจุด B ซึ่งเป็นจุดปลายของส่วนโค้ง θ
3. ลากจุด B ไปทิศทวนเข็มนาฬิกา แล้วสังเกตการเปลี่ยนแปลงของค่าที่วัดไว้
4. ลากจุด B ไปที่ตำแหน่งต่าง ๆ บนเส้นรอบวงของวงกลมจนครบ 1 รอบ พร้อมกับบันทึกความยาวส่วนโค้ง θ และพิกัดที่สอง (y) ของจุด B ในรูปตาราง

คำถาม 1) จงอธิบายการเปลี่ยนแปลงของพิกัดที่สอง (y) ของจุด B เมื่อลากจุด B ครบ 1 รอบ
2) มีโอกาสที่ความยาวส่วนโค้ง θ หนึ่งค่าจะให้พิกัดที่สอง (y) ได้มากกว่าหนึ่งค่าหรือไม่
3) ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของพิกัดที่สอง (y) ของจุด B เป็นเท่าไร และในขณะที่พิกัดที่สอง (y) ของจุด B ให้ค่าต่ำสุดหรือค่าสูงสุด ความยาวของส่วนโค้ง θ มีค่าเท่าไร

การจับคู่ระหว่างความยาวส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยกับพิกัดที่สอง (y) ของจุดปลายส่วนโค้งนั้น เป็นความสัมพันธ์ที่เรียกว่า ฟังก์ชันไซน์

5. เปิดแบบร่างหน้า **3.นิยามของฟังก์ชันโคไซน์** ในแบบร่างหน้านี้จะมีวงกลมหนึ่งหน่วย ส่วนโค้ง θ ความยาวส่วนโค้ง θ ที่วัดไว้ และปุ่มแสดงการทำงานเริ่มต้น
6. วัดพิกัดที่หนึ่ง (x) ของจุด B ซึ่งเป็นจุดปลายของส่วนโค้ง θ
7. ลากจุด B ไปทิศทวนเข็มนาฬิกา แล้วสังเกตการเปลี่ยนแปลงของค่าที่วัดไว้
8. ลากจุด B ไปที่ตำแหน่งต่าง ๆ บนเส้นรอบวงของวงกลมจนครบ 1 รอบ พร้อมกับบันทึกความยาวส่วนโค้ง θ และพิกัดที่หนึ่ง (x) ของจุด B ในรูปตาราง

คำถาม 4) จงอธิบายการเปลี่ยนแปลงของพิกัดที่หนึ่ง (x) ของจุด B เมื่อลากจุด B ครบ 1 รอบ
5) มีโอกาสที่ความยาวส่วนโค้ง θ หนึ่งค่าจะให้พิกัดที่หนึ่ง (x) ได้มากกว่าหนึ่งค่าหรือไม่
6) ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของพิกัดที่สอง (y) ของจุด B เป็นเท่าไร และในขณะที่พิกัดที่หนึ่ง (x) ของจุด B ให้ค่าต่ำสุดหรือค่าสูงสุด ความยาวของส่วนโค้ง θ มีค่าเท่าไร

การจับคู่ระหว่างความยาวส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยกับพิกัดที่หนึ่งของจุดปลายส่วนโค้งนั้น เรียกความสัมพันธ์นี้ว่า ฟังก์ชันโคไซน์

9. เปิดแบบร่างหน้า **4. ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์** ในแบบร่างหน้านี้จะมีวงกลมหนึ่งหน่วยส่วนโค้ง θ ส่วนโค้ง –θ ความยาวส่วนโค้ง θ ที่วัดไว้ และปุ่มแสดงการทำงานเริ่มต้น

10. ลากจุด B ซึ่งเป็นจุดปลายส่วนโค้ง θ ในทิศทวนเข็มนาฬิกา แล้วสังเกตการเคลื่อนที่ของจุด C ซึ่งเป็นจุดปลายส่วนโค้ง –θ และค่าความยาวส่วนโค้งทั้งสองที่วัดไว้

คำถาม 7) เมื่อลากจุด B จุด C มีการเปลี่ยนแปลงอย่างไร ส่วนโค้ง θ และ ส่วนโค้ง –θ เหมือนหรือต่างกันอย่างไร
8) ขนาดของมุมที่ส่วนโค้ง θ และส่วนโค้ง –θ เท่ากันหรือไม่ เพราะเหตุใด

มุมที่วัดจากแกน X ทางบวกไปในทิศทวนเข็มนาฬิกาเป็นมุมที่มีค่าเป็นบวก ส่วนมุมที่วัดจากแกน X ทางบวกไปในทิศตามเข็มนาฬิกาเป็นมุมที่มีค่าเป็นลบ

11. วัดพิกัดที่สอง (y) ของจุด B และจุด C

12. ลากจุด B ไปทิศทวนเข็มนาฬิกาเพื่อเปลี่ยนขนาดของ θ ไปเรื่อย ๆ พร้อมกับสังเกตการเปลี่ยนแปลงของค่าพิกัดที่สอง (y) ของจุด B และจุด C ที่วัดไว้

คำถาม 9) ค่าของฟังก์ชันไซน์ของ θ และ –θ มีความสัมพันธ์กันอย่างไร

13. คลิกปุ่มแสดงการทำงาน*เริ่มต้น* เพื่อให้จุด B และจุด C ไปอยู่ที่ตำแหน่งเริ่มต้น (จุด A)

14. ลากจุด B ไปทิศทวนเข็มนาฬิกาให้ห่างจากจุด A เล็กน้อย

15. วัดพิกัดที่หนึ่ง (x) ของจุด B และจุด C

16. ลากจุด B ไปทิศทวนเข็มนาฬิกา เพื่อเปลี่ยนขนาดของ θ ไปเรื่อยๆ พร้อมกับสังเกตการเปลี่ยนแปลงของค่าพิกัดที่หนึ่ง (x) ของจุด B และจุด C ที่วัดไว้

คำถาม 10) ค่าของฟังก์ชันโคไซน์ของ θ และ –θ มีความสัมพันธ์กันอย่างไร

การเขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

หลังจากผู้เรียนได้ทบทวนความรู้เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ แล้วในกิจกรรมนี้จะเป็นการสร้างฟังก์ชันตรีโกณมิติที่นิยามจากการวัดความยาวของส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย ดังนั้นกราฟของฟังก์ชันจะอยู่ในช่วง $[0, 2\pi]$

วัตถุประสงค์

เพื่อให้ผู้เรียนสำรวจความสัมพันธ์ระหว่างมุมรอบจุดศูนย์กลางกับฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้วงกลมหนึ่งหน่วย

แนวทางการจัดกิจกรรม

ตอนที่ 1

1. เปิดโฟลเดอร์ **บทที่ 2 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ** แฟ้มชื่อ **กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ.gsp** แบบร่างหน้า **1. กราฟของฟังก์ชันไซน์** ในแบบร่างหน้านี้จะมีรูปวงกลมหนึ่งหน่วย OA จุด B เป็นจุดที่เคลื่อนที่ได้บนเส้นรอบวงของวงกลม ค่าของมุมของ $m\widehat{AB}$ ที่วัดไว้
2. วัดพิกัดที่สอง (y) ของจุด B
3. ลากจุด B ไปตามเส้นรอบวงของวงกลม แล้วสังเกตค่าพิกัดที่สอง (y) ของจุด B ที่วัดไว้

คำถาม 1) ถ้าลงจุดแบบ (x, y) โดยใช้มุมของ $m\widehat{AB}$ เป็นพิกัดที่หนึ่ง(x) และพิกัดที่สอง (y) ของจุด B เป็นพิกัดที่สอง(y) แล้วลากจุด B กราฟที่ได้จะมีลักษณะอย่างไรให้ผู้เรียนร่างกราฟที่คาดการณ์ว่าจะเป็นลงในกระดาษ

4. ลงจุด C แบบ (x, y) โดยใช้มุมของ $m\widehat{AB}$ เป็นพิกัดที่หนึ่ง(x) และพิกัดที่สอง (y) ของจุด B เป็นพิกัดที่สอง(y)
5. สร้างรอยของจุด C

คำถาม 2) ลากจุด B ไปตามเส้นรอบวงของวงกลมอีกครั้ง แล้วสังเกตรอยของจุด C ว่าเหมือนหรือต่างจากรอยที่คาดการณ์ไว้หรือไม่ ให้อธิบายรอยที่เกิดขึ้นว่ามีรูปร่างอย่างไร มีจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดที่ตำแหน่งใด มีค่าเป็นบวก ศูนย์หรือลบ เมื่อใด และจะเริ่มซ้ำเดิมอีกเมื่อใด

เมื่อต้องการเปลี่ยนตำแหน่งหรือขนาดของวงกลมเพื่อให้เห็นรอยของจุดที่ลงไว้ครบสมบูรณ์ ให้ลากจุด O หรือจุด A จากนั้นลบรอยของจุดที่ลงไว้แล้วลากจุด B ไปตามเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยเพื่อสร้างรอยใหม่

6. ยกเลิกการสร้างรอยจุด C
7. สร้างโลคัสของจุด C
8. เปลี่ยนโลคัสเป็นเส้นประสีเขียวสด
9. สร้างปุ่มแสดงการทำงาน ซ่อน/แสดง จุด C และโลคัสของจุด C
10. คลิกปุ่มซ่อนจุด C และโลคัสของจุดC
11. คำนวณค่า sin($m\widehat{AB}$)
12. ลงจุด D แบบ (x, y) โดยใช้มุมของ $m\widehat{AB}$ และsin($m\widehat{AB}$) เป็นพิกัดที่หนึ่ง (x) และพิกัดที่สอง (y) ตามลำดับ
13. สร้างโลคัสของจุด D
14. เปลี่ยนโลคัสเป็นเส้นหนาสีน้ำเงินเข้มหรือสีดำ
15. คลิกปุ่มแสดงจุด C และโลคัสของจุด C

คำถาม 3) จุด C กับจุด D และโลคัสของจุด C กับโลคัสของจุด D มีลักษณะเหมือนหรือต่างกันอย่างไร

4) พิกัดที่สอง (y) ของจุด B กับค่า sin($m\widehat{AB}$) สัมพันธ์กันอย่างไร

5) ถ้าจุด B อยู่บนวงกลมใด ๆ ที่ไม่ใช่วงกลมหนึ่งหน่วย ความสัมพันธ์ที่ได้ในข้อ 4) ยังใช้ได้หรือไม่ ถ้าไม่ได้จะต้องทำอย่างไร เพราะเหตุใด

ตอนที่ 2

1. เปิดแบบร่างหน้า **2. กราฟของฟังก์ชันโคไซน์** ในแบบร่างหน้านี้จะมีวงกลมหนึ่งหน่วย OA จุด B เป็นจุดที่เคลื่อนที่ได้บนเส้นรอบวงของวงกลม ค่าของมุมของ $m\widehat{AB}$ ที่วัดไว้
2. วัดพิกัดที่หนึ่ง (x) ของจุด B
3. ลากจุด B ไปตามเส้นรอบวงแล้วสังเกตค่าพิกัดที่หนึ่ง (x) ของจุด B ที่วัดไว้

คำถาม 1) ถ้าลงจุดแบบ (x, y) โดยใช้มุมของ $m\widehat{AB}$ เป็นพิกัดที่หนึ่ง (x) และพิกัดที่หนึ่ง (x) ของจุด B เป็นพิกัดที่สอง (y) แล้วลากจุด B กราฟที่ได้จะมีลักษณะอย่างไร ให้ผู้เรียนร่างกราฟที่คาดการณ์ว่าจะเป็นลงในกระดาษ

4. ลงจุด C แบบ (x, y) โดยใช้มุมของ $m\widehat{AB}$ และพิกัดที่หนึ่ง (x) ของจุด B เป็นพิกัดที่หนึ่ง (x) และพิกัดที่สอง (y) ตามลำดับ

5. สร้างโลคัสของจุด C

> **คำถาม** 2) เมื่อลากจุด B ไปตามเส้นรอบวงของวงกลม สังเกตว่าจุด C จะเคลื่อนที่ไปตามโลคัส โลคัสของจุด C เหมือนหรือต่างจากกราฟที่ร่างตามความคาดการณ์อย่างไร และอธิบายโลคัสของจุด C ว่ามีรูปร่างอย่างไร มีจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดที่ตำแหน่งใด พิกัดที่หนึ่ง(x) ของจุด C มีค่าเป็นบวก ศูนย์ หรือลบเมื่อใด กราฟจะเริ่มซ้ำเดิมอีกเมื่อใด

6. เปลี่ยนโลคัสเป็นเส้นประสีฟ้าสด

7. สร้างปุ่มแสดงการทำงาน ซ่อน/แสดง จุด C และโลคัสของจุดC

8. คลิกปุ่มซ่อนจุด C และโลคัสของจุด C

9. คำนวณค่า cos ($m\widehat{AB}$)

10. ลงจุด D แบบ (x, y)โดยใช้มุมของ $m\widehat{AB}$ และcos ($m\widehat{AB}$) ที่คำนวณไว้ เป็นพิกัดที่หนึ่ง(x) และพิกัดที่สอง (y) ตามลำดับ

11. สร้างโลคัสของจุด D

12. เปลี่ยนโลคัสเป็นเส้นหนาสีน้ำเงินเข้มหรือสีดำ

13. คลิกปุ่มแสดงจุด C และโลคัสของจุด C

> **คำถาม** 3) จุด C กับจุด D และโลคัสของจุด C กับโลคัสของจุด D มีลักษณะเหมือนกันหรือต่างกันอย่างไร
>
> 4) พิกัดที่หนึ่ง (x) ของจุด B กับค่า cos ($m\widehat{AB}$) สัมพันธ์กันอย่างไร
>
> 5) ถ้าจุด B อยู่บนวงกลมใด ๆ ที่ไม่ใช่วงกลมหนึ่งหน่วย ความสัมพันธ์ในข้อ 4 ยังใช้ได้หรือไม่ ถ้าไม่ได้จะต้องทำอย่างไร เพราะเหตุใด

ตอนที่ 3

1. เปิดแบบร่างหน้า **3. กราฟของฟังก์ชันแทนเจนต์** ในแบบร่างหน้านี้จะมีวงกลมหนึ่งหน่วย OA จุด B เป็นจุดที่เคลื่อนที่ได้บนเส้นรอบวงของวงกลม ค่าของมุมของ $m\widehat{AB}$ ที่วัดได้

2. วัดพิกัดที่หนึ่ง (x) และพิกัดที่สอง (y) ของจุด B

3. คำนวณค่า $\frac{y_B}{x_B}$

4. ลากจุด B ไปตามเส้นรอบวงของวงกลมแล้วสังเกตค่าที่คำนวณไว้ $\frac{y_B}{x_B}$

คำถาม 1) ถ้าลงจุดแบบ (x, y) โดยใช้มุม $m\widehat{AB}$ และค่าที่คำนวณไว้ $\frac{y_B}{x_B}$ เป็นพิกัดที่หนึ่ง (x) และพิกัดที่สอง (y) ตามลำดับ แล้วลากจุด B เพื่อเปลี่ยนค่า $m\widehat{AB}$ กราฟที่ได้จะมีลักษณะอย่างไร ให้ผู้เรียนร่างกราฟที่คาดว่าจะเป็นลงในกระดาษ

5. ลงจุด C แบบ (x, y) โดยใช้มุม $m\widehat{AB}$ และค่าที่คำนวณไว้ $\frac{y_B}{x_B}$ เป็นพิกัดที่หนึ่ง (x) และพิกัดที่สอง (y) ตามลำดับ

6. สร้างโลคัสของจุด C

คำถาม 2) โลคัสของจุด C เหมือนหรือต่างจากกราฟที่ร่างตามความคาดการณ์อย่างไร ให้อธิบายโลคัสของจุด C ว่ามีรูปร่างอย่างไร มีจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดที่ตำแหน่งใด กราฟจะเริ่มซ้ำเดิมอีกเมื่อใด

7. เปลี่ยนโลคัสเป็นเส้นประสีเหลือง

8. ปุ่มแสดงการทำงาน ซ่อน/แสดง ของจุดC และโลคัสของจุดC

9. คลิกปุ่มซ่อนจุด C และโลคัสของจุด C

10. คำนวณค่า $\tan(m\widehat{AB})$

11. ลงจุด D แบบ (x, y) โดยใช้มุม $m\widehat{AB}$ และ$\tan(m\widehat{AB})$ ที่คำนวณไว้เป็นพิกัดที่หนึ่ง (x) และพิกัดที่สอง (y) ตามลำดับ

12. สร้างโลคัสของจุด D

13. เปลี่ยนโลคัสเป็นเส้นหนาสีน้ำเงินเข้มหรือดำ

14. คลิกปุ่มแสดงจุด C และโลคัสของจุด C

คำถาม 3) จุด C กับจุด D และโลคัสของจุด C กับโลคัสของจุด D มีลักษณะเหมือนหรือต่างกันอย่างไร 4) ค่า $\frac{y_B}{x_B}$ กับค่า $\tan(m\widehat{AB})$ สัมพันธ์กันอย่างไร 5) ถ้าจุด B อยู่บนวงกลมใด ๆ ที่ไม่ใช่วงกลมหนึ่งหน่วย ความสัมพันธ์ในข้อ 4) ยังใช้ได้หรือไม่ ถ้าไม่ได้จะต้องทำอย่างไร เพราะเหตุใด

กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติในรูป $y = \sin(n\pi + x)$

หลังจากผู้เรียนมีความรู้เกี่ยวกับนิยามของฟังก์ชันตรีโกณมิติ แล้วในกิจกรรมนี้จะเป็นการสำรวจกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติในรูป $y = \sin(n\pi + x)$

วัตถุประสงค์

เพื่อให้ผู้เรียนสำรวจกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติในรูป $y = \sin(n\pi + x)$ และเข้าใจความหมายของคาบกับแอมพลิจูดของกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติซึ่งหลังจากทำกิจกรรมนี้ผู้เรียนจะสรุปได้ด้วยว่า $\sin(2n\pi + x) = \sin x$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

แนวทางการจัดกิจกรรม

1. เปิดแบบร่างหน้า **4. y = sin(npi+ x)** ในแบบร่างหน้านี้มีกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \sin x$ และกราฟของฟังก์ชัน $g(x) = \sin(n\pi + x)$ พารามิเตอร์ n ที่มีค่าปัจจุบันเท่ากับ 0 ปุ่ม + สำหรับเพิ่ม และปุ่ม – สำหรับลดค่าพารามิเตอร์ n

2. เปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์ n โดยเลือกพารามิเตอร์ n แล้วกดแป้นพิมพ์เครื่องหมาย + เพื่อเพิ่มค่า n และกดแป้นพิมพ์เครื่องหมาย – เพื่อลดค่า n แล้วสังเกตการเปลี่ยนแปลงของกราฟ g(x)

คำถาม 1) กราฟของ f(x) มีแอมพลิจูดและคาบเป็นเท่าไร กราฟมีจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดอยู่ที่ใด

2) กราฟของ g(x) มีแอมพลิจูดและคาบเป็นเท่าไร จุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดอยู่ที่จุดใด เมื่อ $n = 0$

3) จะเกิดอะไรขึ้นเมื่อกดที่แป้นพิมพ์เครื่องหมาย + เพื่อเพิ่ม n ให้เป็น1, 2, 3, 4, ... เพราะเหตุใดจึงเป็นเช่นนั้น

4) ถ้า n เป็น –1, –2, –3, ... กราฟที่ได้จะเป็นอย่างไร (แอมพลิจูด คาบ จุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุด)

5) กราฟของ f(x) และ g(x) เหมือนหรือต่างกันอย่างไร

6) กราฟของ f(x) และg(x) จะเหมือนกันในกรณีใดและเขียนให้อยู่ในรูปทั่วไปอย่างไร

กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติในรูป y = sin(k x)

หลังจากผู้เรียนมีความรู้เกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติในรูป $y = \sin(n\pi + x)$ แล้วในกิจกรรมนี้จะเป็นการสำรวจกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติในรูป $y = \sin(k x)$

วัตถุประสงค์

เพื่อให้ผู้เรียนสำรวจกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติในรูป $y = \sin(kx)$ และเข้าใจความหมายของคาบกับแอมพลิจูดของกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติในรูป $y = \sin(kx)$

แนวทางการจัดกิจกรรม

1. เปิดแบบร่างหน้า **5 . y = sin(kx)** ในแบบร่างหน้านี้ จะมีกราฟของ f(x) = sin x และกราฟของ g(x) = sin(kx) และพารามิเตอร์ k ที่มีค่าปัจจุบันเท่ากับ 2

2. เปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ k เป็น 3, 4 และ 5 ตามลำดับ แล้วสังเกตการเปลี่ยนแปลงของกราฟ

คำถาม 1) เมื่อเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ k เป็น 3, 4 และ 5 กราฟของ g(x) เปลี่ยนแปลงอย่างไร เมื่อเทียบกับกราฟของ f(x)

2) เมื่อ k = 2 กราฟของ g(x) มีคาบเป็นเท่าไร
เมื่อ k = 3 กราฟของ g(x) มีคาบเป็นเท่าไร
เมื่อ k = 4 กราฟของ g(x) มีคาบเป็นเท่าไร

3) ให้ผู้เรียนเขียนข้อคาดการณ์เกี่ยวกับ k ว่าสัมพันธ์กับคาบของฟังก์ชันอย่างไร

กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติในรูป y = a sin b(x–c)

หลังจากผู้เรียนมีความรู้เกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติในรูป y = sin(kx) แล้วในกิจกรรมนี้จะเป็นการสำรวจกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติในรูป y = asin b(x–c)

วัตถุประสงค์

เพื่อให้ผู้เรียนสำรวจกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติในรูป y = asin b(x–c) และเข้าใจความหมายของคาบกับแอมพลิจูดของกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

แนวทางการจัดกิจกรรม

1. เปิดแบบร่างหน้า **6. y = asin b(x–c)** ในแบบร่างหน้านี้จะมีกราฟของ f(x) = sin x และกราฟของ g(x) = asin (b(x–c)) และพารามิเตอร์ a , b และ c

2. ลากตัวเลื่อน a เพื่อเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ a สังเกตการเปลี่ยนแปลงของกราฟของ g(x)

3. ลากตัวเลื่อน b เพื่อเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ b สังเกตการเปลี่ยนแปลงของกราฟของ g(x)

4. ลากตัวเลื่อน c เพื่อเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ c สังเกตการเปลี่ยนแปลงของกราฟของ g(x)

คำถาม 1) พิจารณากราฟของฟังก์ชันไซน์ที่อยู่ในรูป f(x) = a sin b(x–c) แอมพลิจูด คาบ และ การเลื่อนกราฟไปตามแกน X ของฟังก์ชันนี้เป็นอย่างไร

2) เปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์ a , b และ c ทีละค่าโดยให้ค่าพารามิเตอร์อีกสองตัวที่เหลือเป็นค่าคงตัวอยู่ที่ค่าใดค่าหนึ่ง แล้วสังเกตกราฟของฟังก์ชันว่ามีการเปลี่ยนแปลงอย่างไร

3) กราฟของ f(x) และกราฟของ g(x) เหมือนหรือต่างกันอย่างไร

ตัวอย่างคำตอบกิจกรรมที่ส่งเสริมทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

ผู้สอนควรเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้ค้นหาคำตอบอย่างเต็มความสามารถ และบางคำถามอาจมีคำตอบได้หลากหลาย ดังนั้นผู้เรียนไม่จำเป็นต้องได้คำตอบเหมือนกัน

อัตราส่วนตรีโกณมิติ

1) รูปสามเหลี่ยม BCA และรูปสามเหลี่ยม EBD เป็นรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน

2) อัตราส่วนของ AC ต่อ BC เท่ากับอัตราส่วนของ ED ต่อ BD

3) อัตราส่วนของความยาวของด้านตรงข้ามมุม B กับความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉากจะเท่ากันไม่ว่าจะเลื่อนจุด C ไปตำแหน่งใดก็ตาม และแม้จะเปลี่ยนขนาดของมุม B แต่อัตราส่วนนี้ของรูปสามเหลี่ยมสองรูปยังมีค่าเท่ากัน

นิยามของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

1) ค่าของฟังก์ชันไซน์สรุปได้ดังนี้ $\sin\theta = -\sin\theta$

2) ค่าของฟังก์ชันโคไซน์สรุปได้ดังนี้ $\cos(-\theta) = \cos\theta$

การเขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ตอนที่ 1

1) ขึ้นอยู่กับคำตอบของผู้เรียน

2) รอยของจุด C เริ่มต้นที่จุด (0,0) และสิ้นสุดที่ จุด$(2\pi,0)$ และมีค่าเป็นบวกเมื่อ $0 < x < \pi$ เป็นศูนย์เมื่อ $x = 0$, $x = \pi$ หรือ $x = 2\pi$ และเป็นลบเมื่อ $\pi < x < 2\pi$ และรอยจะซ้ำจุดเดิมเมื่อหมุนจุด B ไปตามเส้นรอบวงของวงกลม หนึ่งหน่วยครบ 1 รอบ

3) จุด C และจุด D เป็นจุดเดียวกัน โลคัสของจุด C และโลคัสของจุด D เป็นรอยเดียวกัน

4) พิกัดที่สอง (y) ของจุด B กับค่า $\sin(m\widehat{AB})$ เป็นค่าเดียวกัน สังเกตจากการเลื่อนจุด B ไปตามเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วย ค่าของ $\sin(m\widehat{AB})$ กับพิกัดที่สอง (y) ของจุด B จะเปลี่ยนแปลงแต่ก็ยังมีค่าเท่ากัน

5) ถ้าจุด B อยู่บนวงกลมใด ๆ ที่ไม่ใช่วงกลมหนึ่งหน่วย ค่าของ $\sin(m\widehat{AB})$ กับพิกัดที่สอง (y) ของจุด B จะไม่เท่ากัน เนื่องจากค่าของ $\sin(m\widehat{AB})$ เป็นค่าที่ได้จากขนาดของมุมที่รองรับส่วนโค้ง AB ดังนั้นไม่ว่าจุด B จะอยู่บนวงกลมใด ๆ ที่ไม่ใช่วงกลมหนึ่งหน่วย ค่าของ $\sin(m\widehat{AB})$ จะมีขนาดเท่ากัน แต่ค่าของพิกัดที่สอง (y) ของจุด B จะมีค่าแตกต่างกันไปตามขนาดของวงกลม เช่น ถ้าวงกลมมีความยาวรัศมี 2 หน่วย ค่าของพิกัดที่สอง (y) ของจุด B ก็จะมากขึ้น กราฟจะโด่งขึ้น

ตอนที่ 2

1) ขึ้นอยู่กับคำตอบของผู้เรียน

2) กราฟเริ่มที่จุด(0, 1) และสิ้นสุดที่จุด(2π,0)กราฟเป็นบวกเมื่อ$0 < x < \frac{\pi}{2}$ และ $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ กราฟเป็นศูนย์เมื่อ $x = \frac{\pi}{2}$ หรือ $x = \frac{3\pi}{2}$ กราฟเป็นลบเมื่อ $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ และกราฟจะซ้ำจุดเดิมเมื่อหมุนจุด B ไปตามเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยครบ 1 รอบ

3) จุด C และจุด D เป็นจุดเดียวกัน โลคัสของจุด C และโลคัสของจุด D เป็นรอยเดียวกัน

4) พิกัดที่หนึ่ง (x) ของจุด B กับค่า $\cos(m\widehat{AB})$ เป็นค่าเดียวกัน สังเกตจากการเลื่อนจุด B ไปตามเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วย ค่าของ $\cos(m\widehat{AB})$ กับพิกัดที่หนึ่ง(x) ของจุด B จะเปลี่ยนแปลงแต่ก็ยังมีค่าเท่ากัน

5) ถ้าจุด B อยู่บนวงกลมใด ๆ ที่ไม่ใช่วงกลมหนึ่งหน่วย ค่าของ $\cos(m\widehat{AB})$ กับพิกัดที่หนึ่ง(x) ของจุด B จะไม่เท่ากันเนื่องจากค่าของ $\cos(m\widehat{AB})$ เป็นค่าที่ได้จากขนาดของมุมที่รองรับส่วนโค้ง AB ดังนั้นไม่ว่าจุด B จะอยู่บนวงกลมใด ๆ ที่ไม่ใช่วงกลมหนึ่งหน่วย ค่าของ $\cos(m\widehat{AB})$ จะมีขนาดเท่ากัน แต่ค่าของพิกัดที่หนึ่ง(x) ของจุด B จะมีค่าแตกต่างกันไปตามขนาดของวงกลม เช่น ถ้าวงกลมมีความยาวรัศมี 2 หน่วย ค่าของพิกัดที่หนึ่ง (x) ของจุด B ก็จะมากขึ้น กราฟจะโด่งขึ้น

ตอนที่ 3

1) ขึ้นอยู่กับคำตอบของผู้เรียน

2) กราฟเริ่มต้นที่จุด(0, 0)และสิ้นสุดที่จุด (2π,0) กราฟเป็นบวกเมื่อ $0 < x < \frac{\pi}{2}$ และ $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ กราฟเป็นศูนย์เมื่อ $x = 0$ หรือ $x = \pi$ หรือ $x = 2\pi$ กราฟเป็นลบเมื่อ $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ และ $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ และกราฟจะซ้ำจุดเดิมเมื่อหมุนจุด B ไปตามเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยครบ 1 รอบ

3) จุด C และจุด D เป็นจุดเดียวกัน โลคัสของจุด C และโลคัสของจุด D เป็นรอยเดียวกัน

4) ค่าของ $\frac{y_B}{x_B}$ กับค่า $\tan(m\widehat{AB})$ เป็นค่าเดียวกันสังเกตจากการเลื่อนจุด Bไปตามเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วย ค่าของ $\tan(m\widehat{AB})$ กับค่าของ $\frac{y_B}{x_B}$ จะเปลี่ยนแปลงแต่ก็ยังมีค่าเท่ากัน

5) ถ้าจุด B อยู่บนวงกลมใด ๆ ที่ไม่ใช่วงกลมหนึ่งหน่วย ค่าของ $\tan(m\widehat{AB})$ กับค่าของ $\frac{y_B}{x_B}$ จะยังคงเท่ากัน เนื่องจากค่าของ $\tan(m\widehat{AB})$ เป็นอัตราส่วนของ y_B กับ x_B ซึ่งไม่ว่าค่าของ x และ y จะเปลี่ยนแปลงอย่างไรอัตราส่วน ของ x และ y จะยังคงเท่ากันไม่ว่าวงกลมจะมีขนาดเท่าใดก็ตาม

กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติในรูป $y = \sin(n\pi + x)$

1) กราฟของ f(x) มีแอมพลิจูดเป็น 1 และคาบเป็น 2π กราฟมีจุดเริ่มต้นที่จุด (0, 0) และสิ้นสุดที่จุด $(2\pi, 0)$

2) กราฟของ g(x) เป็นกราฟเดียวกับกราฟของ f(x) มีแอมพลิจูดเป็น 1 และคาบเป็น 2π กราฟมีจุดเริ่มต้นที่จุด (0, 0) และสิ้นสุดที่จุด $(2\pi, 0)$ เมื่อ $n = 0$

3) เมื่อ $n = 1$ กราฟของฟังก์ชันมีแอมพลิจูดเป็น 1 และมีคาบเป็น 2π กราฟเริ่มต้นที่ $(2\pi, 0)$ สิ้นสุดที่ $(4\pi, 0)$ เมื่อเพิ่ม n เป็น 2, 3, 4, ... กราฟมีลักษณะเหมือนเดิมคือ มีคาบเท่าเดิม และ มีแอมพลิจูดเท่าเดิมแต่จุดเริ่มต้น และจุดสิ้นสุดต่างกัน เนื่องจากค่าพารามิเตอร์ n เป็นค่าที่บอกว่ากราฟเลื่อนไปจากเดิมเป็นระยะทาง $2n\pi$ หน่วย

4) กราฟของ f(x) เหมือนกับกราฟของ g(x)

กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติในรูป $y = \sin(kx)$

1) เมื่อเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ k กราฟของ g(x) มีจำนวนคาบเพิ่มขึ้นเมื่อเทียบกับกราฟของ f(x)

2) เปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ k เป็น 3, 4 และ 5 กราฟของ g(x) เปลี่ยนแปลงเมื่อ k เปลี่ยน คือ กราฟยังมีจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดที่จุด (0, 0) ถึง $(2\pi, 0)$ แต่จำนวนคาบของกราฟจะมากขึ้นตามค่า k

เมื่อ $k = 2$ กราฟของ g(x) มีคาบเป็น $\frac{2\pi}{2}$

เมื่อ $k = 3$ กราฟของ g(x) มีคาบเป็น $\frac{2\pi}{3}$

เมื่อ $k = 4$ กราฟของ g(x) มีคาบเป็น $\frac{2\pi}{4}$

3) กราฟของฟังก์ชัน $y = \sin(kx)$ มีคาบเป็น $\frac{2\pi}{k}$ เมื่อ k เป็นจำนวนจริง

กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติในรูป $y = a \sin b(x-c)$

1) กราฟของฟังก์ชันไซน์ที่อยู่ในรูป $f(x) = a \sin(b(x-c))$ แอมพลิจูดเป็น a คาบของฟังก์ชันเป็น $\frac{2\pi}{b}$ และการเลื่อนกราฟไปทางขวาตามแกน X เป็นระยะทาง c หน่วย

2) ผู้เรียนอาจสรุปว่า จากกราฟของ $f(x) = a \sin(b(x-c))$

เมื่อ ค่า a เพิ่มขึ้นแอมพลิจูดของกราฟจะเพิ่มขึ้น

เมื่อค่า b เพิ่มขึ้นคาบของกราฟจะลดลง

เมื่อค่า c เพิ่มขึ้นกราฟจะเลื่อนไปทางขวาตามแนวแกน X มากขึ้น

3) กราฟของ f(x) มีคาบ และแอมพลิจูดต่างจากกราฟของ g(x)

การวัดและการประเมินผลระหว่างเรียน

การประเมินผลระหว่างเรียนเป็นการวัดผลการเรียนรู้เพื่อปรับปรุงและพัฒนาการเรียนการสอนและตรวจสอบว่าผู้เรียนแต่ละคนมีความรู้ความเข้าใจในเรื่องที่ผู้สอนสอนมากน้อยเพียงใด ซึ่งในที่นี้จะกล่าวถึงตัวอย่างการประเมินผลด้านความรู้โดยผู้สอนอาจใช้วิธีการประเมินดังนี้

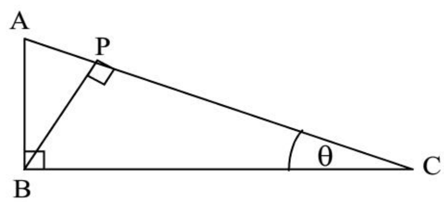
1. สังเกตจากการตอบคำถามและการเข้าร่วมกิจกรรม
2. ทำแบบฝึกหัด
3. ทดสอบ

จากผลการประเมินหากพบว่ามีผู้เรียนไม่ผ่านเกณฑ์ที่ผู้สอนกำหนดไว้ ผู้สอนอาจสอนเสริมหรือให้ผู้เรียนศึกษาจากหนังสือเรียนหรืออาจให้ผู้เรียนที่มีผลการเรียนรู้ผ่านเกณฑ์แล้วช่วยสอน หลังจากนั้นจึงให้ทำข้อที่ทำผิดอีกครั้งจนกว่าจะผ่านเกณฑ์

ตัวอย่างแบบทดสอบ

1. กำหนดให้ $\sin\alpha + \cos\alpha = 1.2$ จงหาค่าของ $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$

2. จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC กำหนดด้าน AC และ BP ยาว 4 และ 1 หน่วย ตามลำดับ $\overline{BP}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AC}$ ที่จุด P จงหาขนาดของ $A\hat{C}B$

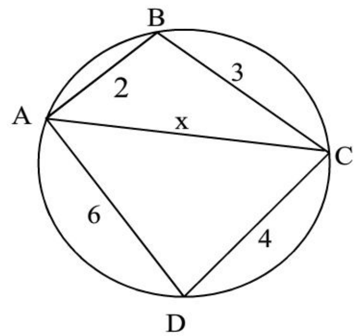


3. กำหนดให้ a และ b เป็นค่าคงตัว และ $\dfrac{-3+4\cos^2\theta}{1-2\sin\theta} = a + b\sin\theta$
จงหา a และ b ที่ทำให้สมการนี้เป็นจริง

4. จงหาค่า x ทั้งหมด ซึ่ง $0 \le x \le 2\pi$ และ $\sin 2x + \cos 2x + \sin x + \cos x + 1 = 0$

5. รูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง มีด้านทั้งสามยาว x, y และ $\sqrt{x^2 + xy + y^2}$ หน่วย
จงหาขนาดของมุมที่ใหญ่ที่สุดของรูปสามเหลี่ยมนี้

6. กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ที่อยู่ภายในวงกลม ซึ่ง $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ และ $\overline{DA}$ ยาว 2 , 3 , 4 และ 6 หน่วย ตามลำดับ ดังรูป จงหาความยาวของ $\overline{AC}$



7. จงหาค่า x ที่ทำให้สมการ $\cos^{10}x - \sin^{10}x = 1$ เป็นจริง เมื่อ $0 \le x \le 2\pi$

8. กำหนดให้ $\sin 54^\circ = \cos 36^\circ$ จงหาค่าของ $\sin 18^\circ$

9. ถ้าเข็มยาวและเข็มสั้นของนาฬิกายาว 6 เซนติเมตร และ 4 เซนติเมตร ตามลำดับ จงหาระยะทางจากจุดปลายของเข็มยาวไปยังจุดปลายของเข็มสั้น เมื่อนาฬิกาเรือนนี้บอกเวลา 14.00 น.

10. รูปสามเหลี่ยม ABC มี AC = BC และ $\dfrac{AB}{AC} = r$ จงพิสูจน์ว่า $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + r - \dfrac{r^2}{2}$

เฉลยตัวอย่างแบบทดสอบ

1. เนื่องจาก $\sin\alpha + \cos\alpha = 1.2$ ---------- (1)

จะได้ $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = (1.2)^2$

$$\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = 1.44$$

$$1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = 1.44$$

$$\sin\alpha\cos\alpha = 0.22 \qquad \text{---------- (2)}$$

จาก(1) จะได้ $(\sin\alpha + \cos\alpha)^3 = (1.2)^3$

$$\sin^3\alpha + 3\sin^2\alpha\cos\alpha + 3\sin\alpha\cos^2\alpha + \cos^3\alpha = 1.728$$

$$\sin^3\alpha + 3\sin\alpha\cos\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha) + \cos^3\alpha = 1.728 \qquad \text{---------- (3)}$$

จาก (1), (2) และ (3) จะได้ $\sin^3\alpha + 3(0.22)(1.2) + \cos^3\alpha = 1.728$

ดังนั้น $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha = 0.936$

หมายเหตุ : หาค่าของ $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$ โดยใช้ $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha = (\sin\alpha + \cos\alpha)(\sin^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha)$ ก็ได้

2. พื้นที่ Δ ABC $= \frac{1}{2}(4)(1) = 2$ --------- (1)

แต่พื้นที่ Δ ABC $= \frac{1}{2} AB \cdot BC$

$= \frac{1}{2} AC \sin\theta \cdot AC \cos\theta$

$= 8 \sin \cos\theta = 4 \sin 2\theta$ ---------- (2)

จากสมการ (1) และ (2)

จะได้ $2 = 4 \sin 2\theta$

$\sin 2\theta = \frac{1}{2}$

ดังนั้น $2\theta = 30^\circ$ หรือ $2\theta = 150^\circ$

นั่นคือ $\theta = 15^\circ$ หรือ $\theta = 75^\circ$

3. $\frac{-3+4\cos^2\theta}{1-2\sin\theta} = \frac{-3+4(1-\sin^2\theta)}{1-2\sin\theta}$

$= \frac{1-4\sin^2\theta}{1-2\sin\theta}$

$= \frac{(1-2\sin\theta)(1+2\sin\theta)}{1-2\sin\theta}$

$= 1 + 2\sin\theta$

เนื่องจากโจทย์กำหนดให้ $\frac{-3+4\cos^2\theta}{1-2\sin\theta} = a + b\sin\theta$

ดังนั้น $a = 1$ และ $b = 2$

4. $\sin 2x + \cos 2x + \sin x + \cos x + 1 = 0, \quad 0 \le x \le 2\pi$

$2\sin x\cos x + 2\cos^2 x - 1 + \sin x + \cos x + 1 = 0$

$\sin x(2\cos x + 1) + \cos x(2\cos x + 1) = 0$

$(\sin x + \cos x)(2\cos x + 1) = 0$

ถ้า $\sin x + \cos x = 0$

$\frac{\sin x}{\cos x} + 1 = 0$

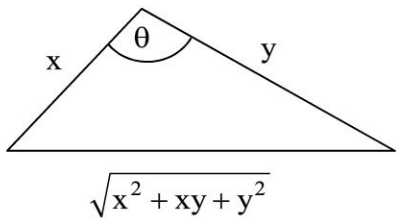
$\tan x = -1$ ดังนั้น $x = \frac{3\pi}{4}$ หรือ $x = \frac{7\pi}{4}$

ถ้า $2\cos x + 1 = 0$

$\cos x = -\frac{1}{2}$ ดังนั้น $x = \frac{2\pi}{3}$ หรือ $x = \frac{4\pi}{3}$

ดังนั้น x คือ $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}$ หรือ $\frac{7\pi}{4}$

5. เนื่องจากด้านที่ยาว $\sqrt{x^2+xy+y^2}$ หน่วย เป็นด้านที่ยาวที่สุด ดังนั้นมุมตรงข้ามด้านที่ยาว $\sqrt{x^2+xy+y^2}$ หน่วย จึงเป็นมุมที่ใหญ่ที่สุด



โดยกฎของโคไซน์

จะได้ $x^2+xy+y^2 = x^2+y^2-2xy\cos\theta$

$$\cos\theta = -\frac{1}{2}$$

$$\theta = 120^\circ$$

ดังนั้น มุมที่ใหญ่ที่สุดมีขนาด 120°

6. ใช้กฎของโคไซน์ พิจารณารูป $\Delta\,ABC$ และ $\Delta\,ADC$

จาก $\Delta\,ABC$ จะได้ $x^2 = 4+9-12\cos B$ ---------- (1)

จาก $\Delta\,ADC$ จะได้ $x^2 = 36+16-48\cos D$ ---------- (2)

เนื่องจากรูปสี่เหลี่ยม ABCD อยู่ภายในวงกลม จะได้ว่า $\hat{D}+\hat{B} = 180^\circ$

ดังนั้น $\cos D = \cos(180^\circ - B)$

$= -\cos B$

แทน $\cos D$ ในสมการ (2) ด้วย $-\cos B$

จะได้ $x^2 = 36+16+48\cos B$ ---------- (3)

(3) – (1), $0 = 39+60\cos B$

$\cos B = -\dfrac{39}{60}$

แทน $\cos B$ ในสมการ (1) ด้วย $-\dfrac{39}{60}$

จะได้ $x^2 = 13-(12)(-\dfrac{39}{60})$

$= \dfrac{104}{5}$

ดังนั้น $x = \sqrt{\dfrac{104}{5}} = \dfrac{2\sqrt{130}}{5}$

ดังนั้น AC ยาว $\dfrac{2\sqrt{130}}{5}$ หน่วย

7. $\cos^{10}x - \sin^{10}x = 1$

$\cos^{10}x = 1+\sin^{10}x$ ---------- (1)

เนื่องจาก $0 \le \cos^{10}x \le 1$ และ $1+\sin^{10}x \ge 1$

คำตอบของสมการ (1) จะเป็นไปได้เพียงกรณีเดียวเมื่อ $\cos^{10}x = 1$ และ $\sin^{10}x = 0$

$\cos^{10}x = 1$ จะได้ $\cos x = 1$ หรือ $\cos x = -1$

ดังนั้น $x = 0, \quad x = \pi$ หรือ $x = 2\pi$

$\sin^{10}x = 0$ จะได้ $\sin x = 0$

ดังนั้น $x = 0, \quad x = \pi$ หรือ $x = 2\pi$

นั่นคือ x มีค่าเป็น $0, \pi$ และ 2π

8. เนื่องจาก $\sin 54^\circ = \cos 36^\circ$

$\sin(3 \times 18^\circ) = \cos(2 \times 18^\circ)$

เพราะว่า $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$

และ $\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$

ให้ $x = \sin A = \sin 18^\circ$

จะได้ $3x - 4x^3 = 1 - 2x^2$

$$4x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0$$

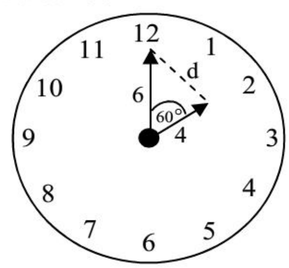
$$(x-1)(4x^2 + 2x - 1) = 0 \quad , x \neq 1$$

$$4x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{8}$$

เนื่องจาก $\sin 18^\circ > 0$ ดังนั้น $\sin 18^\circ = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

9. มุมระหว่างเข็มยาวและเข็มสั้นเมื่อนาฬิกาบอกเวลา 14.00 น. มีขนาด 60°



จากกฎของโคไซน์ จะได้

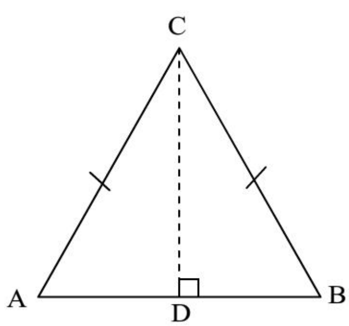
$$d^2 = 6^2 + 4^2 - 2(6)(4)\cos 60^\circ$$

$$= 36 + 16 - 24 = 28$$

$$d = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

ดังนั้น จุดปลายของเข็มยาวห่างจากจุดปลายของเข็มสั้น $2\sqrt{7}$ เซนติเมตร เมื่อนาฬิกาบอกเวลา 14.00 น.

10.



จากรูป ให้ $AC = BC = 1$

จากที่โจทย์กำหนด $\dfrac{AB}{AC} = r$

จะได้ $AB = r$

โดยกฎของโคไซน์ จะได้ $\cos C = 1 - \dfrac{r^2}{2}$

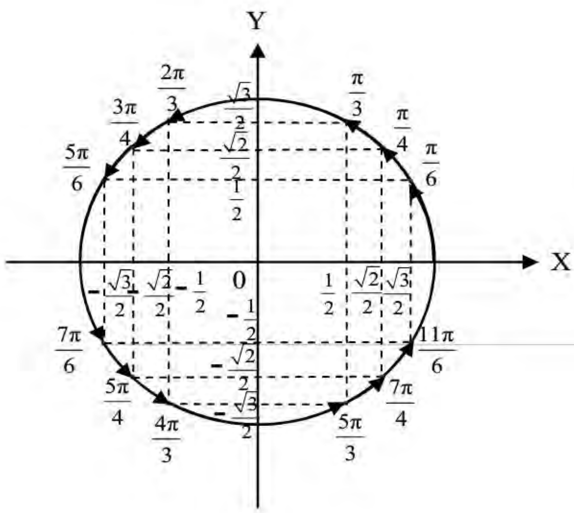
ดังนั้น $\cos A + \cos B + \cos C = \dfrac{r}{2} + \dfrac{r}{2} + (1 - \dfrac{r^2}{2}) = 1 + r - \dfrac{r^2}{2}$

เฉลยแบบฝึกหัด

แบบฝึกหัด 2.2 ก

1. 1) $0, -1$ 2) $0, 1$ 3) $0, -1$
   4) $0, 1$ 5) $-1, 0$ 6) $1, 0$
   7) $-1, 0$ 8) $1, 0$ 9) $1, 0$
   10) $-1, 0$ 11) $0, -1$ 12) $0, -1$
   13) $0, -1$ 14) $0, -1$ 15) $-1, 0$
   16) $1, 0$

2.



θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. 1) เช่น $0, \pi, 2\pi, 3\pi, -\pi$ 2) เช่น $\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{7\pi}{2}$
   3) เช่น $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{-3\pi}{2}$ 4) เช่น $0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, -2\pi$
   5) เช่น $\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}$ 6) เช่น $\pi, 3\pi, 5\pi, -\pi, -3\pi$
   7) เช่น $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}, -\frac{11\pi}{6}$ 8) เช่น $\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4}$
   9) เช่น $\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}$

4. 1) $\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 2) $\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}$

3) $\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}$ 4) $\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}$

5) $-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}$ 6) $\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}$

7) $-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}$ 8) $\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}$

9) $\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}$ 10) $\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}$

5. ไม่มี เพราะ $-1 \le \sin\theta \le 1$

แบบฝึกหัด 2.2 ข

1. จตุภาคที่ 1 และ 2

2. จตุภาคที่ 2 และ 3

3.
$$\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{2}$$
$$\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = \frac{1}{2}$$
$$2\cos^2 x - 1 = \frac{1}{2}$$
$$\cos^2 x = \frac{3}{4}$$

เนื่องจาก $\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$ ดังนั้น $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. 1)
$$\sin\frac{13\pi}{12} = \sin(\pi + \frac{\pi}{12}) = -\sin\frac{\pi}{12}$$
$$\cos\frac{13\pi}{12} = \cos(\pi + \frac{\pi}{12}) = -\cos\frac{\pi}{12}$$

2)
$$\sin\frac{5\pi}{3} = \sin(2\pi - \frac{\pi}{3}) = -\sin\frac{\pi}{3}$$

$$
\begin{aligned}
\cos\frac{5\pi}{3} &= \cos(2\pi - \frac{\pi}{3}) \\
&= \cos\frac{\pi}{3}
\end{aligned}
$$

3) $$
\begin{aligned}
\sin\frac{7\pi}{6} &= \sin(\pi + \frac{\pi}{6}) \\
&= -\sin\frac{\pi}{6} \\
\cos\frac{7\pi}{6} &= \cos(\pi + \frac{\pi}{6}) \\
&= -\cos\frac{\pi}{6}
\end{aligned}
$$

4) $$
\begin{aligned}
\sin\frac{7\pi}{10} &= \sin(\pi - \frac{3\pi}{10}) \\
&= \sin\frac{3\pi}{10} \\
\cos\frac{7\pi}{10} &= \cos(\pi - \frac{3\pi}{10}) \\
&= -\cos\frac{3\pi}{10}
\end{aligned}
$$

5) $$
\begin{aligned}
\sin\frac{9\pi}{5} &= \sin(2\pi - \frac{\pi}{5}) \\
&= -\sin\frac{\pi}{5} \\
\cos\frac{9\pi}{5} &= \cos(2\pi - \frac{\pi}{5}) \\
&= \cos\frac{\pi}{5}
\end{aligned}
$$

6) $$
\begin{aligned}
\sin(-\frac{16\pi}{7}) &= -\sin\frac{16\pi}{7} \\
&= -\sin(2\pi + \frac{2\pi}{7}) \\
&= -\sin\frac{2\pi}{7} \\
\cos(-\frac{16\pi}{7}) &= \cos\frac{16\pi}{7} \\
&= \cos(2\pi + \frac{2\pi}{7}) \\
&= \cos\frac{2\pi}{7}
\end{aligned}
$$

5. 1) จาก $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$

$$\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}$$

ดังนั้น $\cos\theta = \sqrt{1-(0.4848)^2}$

$$\approx 0.8746$$

2) $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$

$$= 0.4848$$

3) $\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$

$$\approx -0.8746$$

4) $\sin(-\theta) = -\sin\theta$

$$= -0.4848$$

5) $\cos(\theta - 2\pi) = \cos\theta$

$$\approx 0.8746$$

6) $\sin(3\pi - \theta) = \sin\theta$

$$= 0.4848$$

6. $\sin(\theta - \pi) = -\sin(\pi - \theta) = -\sin\theta = -\dfrac{3}{5}$

7. 1) เท็จ

ให้ $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$ จะได้ $\sin\dfrac{3\pi}{2} = -1$ และ $\cos\dfrac{3\pi}{2} = 0$

ดังนั้น $\sin\theta \geq \cos\theta$ จึงเป็นเท็จ

2) จริง

3) จริง

แบบฝึกหัด 2.3

1. 1) จตุภาคที่ 1 2) จตุภาคที่ 3

   3) จตุภาคที่ 2 4) จตุภาคที่ 2

2.

	ฟังก์ชัน / จำนวนจริง	sin	cos	tan	cosec	sec	cot
1)	0	0	1	0	–	1	–
2)	$\frac{\pi}{2}$	1	0	–	1	–	0
3)	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
4)	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	-1
5)	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-2	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
6)	π	0	-1	0	–	-1	–
7)	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	-1
8)	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
9)	$\frac{7\pi}{2}$	-1	0	–	-1	–	0
10)	$\frac{5\pi}{2}$	1	0	–	1	–	0
11)	2π	0	1	0	–	1	–
12)	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	1
13)	$-\frac{5\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	-1
14)	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
15)	$-\pi$	0	-1	0	–	-1	–
16)	$-\frac{5\pi}{2}$	-1	0	–	-1	–	0
17)	$-\frac{7\pi}{2}$	1	0	–	1	–	0
18)	-2π	0	1	0	–	1	–

– ในตารางหมายถึง ไม่นิยาม

3. $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-0.48^2} \approx 0.88$

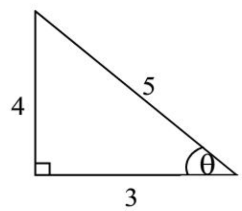
$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} \approx \dfrac{0.48}{0.88} \approx 0.55$

$\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta} = \dfrac{1}{0.48} \approx 2.08$

$\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta} \approx \dfrac{1}{0.88} \approx 1.14$

$\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} \approx \dfrac{0.88}{0.48} \approx 1.83$

4. รูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่อาจเป็นไปได้รูปหนึ่ง มีความยาวด้านต่าง ๆ ดังรูป



วิธีที่ 1 $\sec\theta + \operatorname{cosec}\theta = \dfrac{5}{3}+\dfrac{5}{4}$

$= \dfrac{20+15}{12}$

$= \dfrac{35}{12}$

≈ 2.92

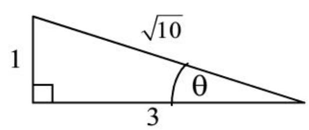
วิธีที่ 2 $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}$

$= \sqrt{1-\dfrac{16}{25}} = \sqrt{\dfrac{9}{25}} = \dfrac{3}{5}$

จะได้ $\sec\theta = \dfrac{5}{3}$

ดังนั้น $\sec\theta + \operatorname{cosec}\theta = \dfrac{5}{3}+\dfrac{5}{4} = \dfrac{20+15}{12} \approx 2.92$

5. รูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่อาจเป็นไปได้รูปหนึ่ง มีความยาวด้านต่าง ๆ ดังรูป



วิธีที่ 1 $2\cos\theta + \cot\theta = 2(\dfrac{3}{\sqrt{10}})+3$

$= \dfrac{6}{\sqrt{10}}+3$

$= \dfrac{3\sqrt{10}}{5}+3$

$= 3\dfrac{(\sqrt{10}+5)}{5}$

วิธีที่ 2 $\sec^2\theta = 1+\tan^2\theta$

$= 1+\dfrac{1}{9} = \dfrac{10}{9}$

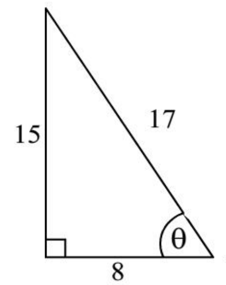
$\sec\theta = \dfrac{\sqrt{10}}{3}$

ดังนั้น $2\cos\theta + \cot\theta = 2(\dfrac{3}{\sqrt{10}})+3$

$= \dfrac{3\sqrt{10}}{5}+3$

$= 3\dfrac{(\sqrt{10}+5)}{5}$

6. รูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่อาจเป็นไปได้รูปหนึ่ง มีความยาวด้านต่าง ๆ ดังรูป



วิธีที่ 1 $\cos\theta + \operatorname{cosec}\theta = \frac{8}{17} + \frac{17}{15}$

$= \frac{409}{255}$

≈ 1.60

วิธีที่ 2 $\cos^2\theta = \frac{1}{\sec^2\theta}$

$= \frac{1}{1+\tan^2\theta}$

$= \frac{1}{1+(\frac{15}{8})^2} = \frac{64}{289}$

$\cos\theta = \frac{8}{17}$

$\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta = 1 + (\frac{8}{15})^2 = \frac{289}{225}$

$\operatorname{cosec}\theta = \frac{17}{15}$

$\cos\theta + \operatorname{cosec}\theta = \frac{8}{17} + \frac{17}{15} = \frac{409}{255} \approx 1.60$

หมายเหตุ รูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่อธิบายไว้ในข้อ 4 – 6 เป็นตัวอย่างหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเท่านั้น ผู้เรียนอาจใช้รูปสามเหลี่ยมมุมฉากอื่นก็ได้

7. $\cos\theta = 0.9848$

$\sec\theta = \frac{1}{0.9848} \approx 1.015$

$\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1 \approx (1.015)^2 - 1 \approx 0.0302$

$\tan\theta \approx 0.174$

$\sec\theta + \tan\theta \approx 1.015 + 0.174 = 1.189$

8. $\tan\theta = 0.7177$

$\cot\theta = \frac{1}{0.7177} \approx 1.3933$

$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1+(0.7177)^2}}$

$\approx \frac{1}{1.231} \approx 0.812$

ดังนั้น $\cot\theta - \cos\theta \approx 1.3933 - 0.812 = 0.5813$

9. 1) $\frac{4\sqrt{3}}{3}+1 = \frac{4\sqrt{3}+3}{3}$ 2) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{6+4\sqrt{3}-3\sqrt{6}}{12}$

3) $-\frac{1}{2}+\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}-1}{2}$ 4) $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

5) 2

10. 1) ไม่จริง เพราะ $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{5\pi}{6} = \cos(\pi-\frac{\pi}{6}) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{3} = 0+\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

ดังนั้น $\cos(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}) \neq \cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{3}$

2) จริง เพราะ $\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)$

$= \frac{3}{4}+\frac{1}{4} = 1$

3) ไม่จริง เพราะ $\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\frac{\pi}{2} = 1$

ดังนั้น $\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{3} \neq \sin\frac{\pi}{2}$

4) ไม่จริง เพราะ $\cos\frac{\pi}{6}+2\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}+1$

$\cos\frac{5\pi}{6} = \cos(\pi-\frac{\pi}{6}) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ดังนั้น $\cos\frac{\pi}{6}+2\cos\frac{\pi}{3} \neq \cos\frac{5\pi}{6}$

5) ไม่จริง เพราะ $\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

$\sin\frac{\pi}{2} = 1$

ดังนั้น $\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4} \neq \sin\frac{\pi}{2}$

แบบฝึกหัด 2.4

1. 1) 120° 2) -150° 3) 396°

   4) 720° 5) 171.89° หรือ $171^\circ\ 53'$

2. 1) $\frac{5\pi}{3}$ 2) $-\frac{169\pi}{270}$ 3) $-\frac{7\pi}{4}$

   4) $\frac{44\pi}{9}$ 5) $-\frac{25\pi}{9}$

3. $\frac{2\pi}{15}$

4.

	มุม \ ฟังก์ชัน	sin	cos	tan	cosec	sec	cot
1)	150°	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
2)	120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-2	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
3)	315°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	-1
4)	-315°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
5)	930°	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	-2	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$

5. 1) เนื่องจาก $\tan 135^\circ = -1$, $\sec 300^\circ = 2$ และ $\sin 330^\circ = -\frac{1}{2}$

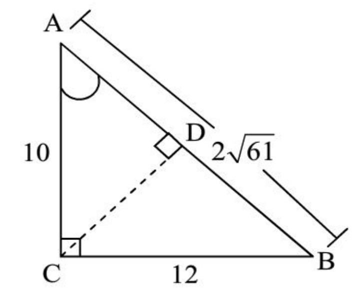
   ดังนั้น $\frac{3\tan^2 135^\circ - \sec^2 300^\circ}{2\sin 330^\circ} = \frac{3(-1)^2-(2)^2}{2(-\frac{1}{2})} = \frac{3-4}{-1} = 1$

   2) เนื่องจาก $\tan(-480^\circ) = \sqrt{3}$, $\sin(-840^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ และ $\cos(-390^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

   ดังนั้น $\frac{\tan(-480^\circ)-\sin(-840^\circ)}{\cos(-390^\circ)} = \frac{\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}$

   $= 3$

6.



$$\sin A = \frac{12}{2\sqrt{61}} = \frac{6}{\sqrt{61}} = \frac{6\sqrt{61}}{61}$$

$$\cos A = \frac{10}{2\sqrt{61}} = \frac{5}{\sqrt{61}} = \frac{5\sqrt{61}}{61}$$

$$\tan A = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

$$\sin B = \frac{10}{2\sqrt{61}} = \frac{5}{\sqrt{61}} = \frac{5\sqrt{61}}{61}$$

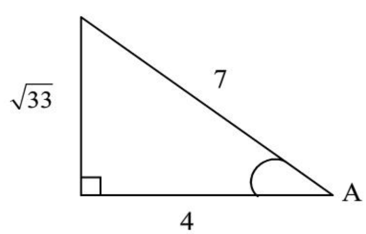
$$\cos B = \frac{12}{2\sqrt{61}} = \frac{6}{\sqrt{61}} = \frac{6\sqrt{61}}{61}$$

$$\tan B = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

จาก $\sin A = \frac{CD}{10}$ ดังนั้น $CD = 10\times\frac{6}{\sqrt{61}} = \frac{60}{\sqrt{61}} \approx 7.68$ หน่วย

$\cos B = \frac{DB}{12}$ ดังนั้น $BD = 12\times\frac{6}{\sqrt{61}} = \frac{72}{\sqrt{61}} \approx 9.22$ หน่วย

7.



กำหนด $\cos A = \frac{4}{7}$

ดังนั้น $\sin A = \frac{\sqrt{33}}{7}$

$$\tan A = \frac{\sqrt{33}}{4}$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{7\sqrt{33}}{33}$$

$$\sec A = \frac{7}{4}$$

$$\cot A = \frac{4\sqrt{33}}{33}$$

8. เนื่องจาก $-1 \le \cos\theta \le 1$ หรือ $0 \le |\cos\theta| \le 1$

$$0 \le \left|\frac{1}{\sec\theta}\right| \le 1$$

$$0 \le \left|\frac{1}{|\sec\theta|}\right| \le 1$$

ดังนั้น $|\sec\theta| \ge 1$

จะได้ว่า ไม่มีจำนวนจริง θ ใด ที่ทำให้ $|\sec\theta| < 1$

9. มี เพราะเรนจ์ของฟังก์ชันแทนเจนต์เป็นเซตของจำนวนจริง

10. เนื่องจาก $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$

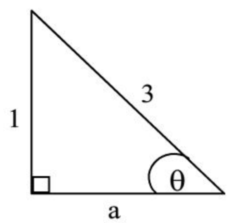
จะได้ $\sec^2 x + \sec^2 x - 1 = \frac{7}{2}$

$2\sec^2 x = \frac{9}{2}$

$\sec x = \pm\frac{3}{2}$

แต่ $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ ดังนั้น $\sec x = -\frac{3}{2}$ จะได้ $\cos x = -\frac{2}{3}$

11. จากโจทย์ $\sin\theta = \frac{1}{3}$ อาจเขียนเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งที่มีความยาวของด้านทั้งสามดังรูป



วิธีที่ 1 $3^2 = a^2 + 1^2$

$a^2 = 9 - 1 = 8$

$a = 2\sqrt{2}$

เนื่องจาก $\sec\theta < 0$ ดังนั้น $\cos\theta < 0$ ด้วย

ดังนั้น $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

จะได้ $\tan\theta = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

วิธีที่ 2 เพราะว่า $\sec\theta < 0$ ดังนั้น $\cos\theta < 0$ ด้วย

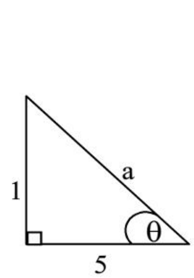
จาก $\sin\theta = \frac{1}{3}$ จะทำให้ $\cos\theta = -\sqrt{1-(\frac{1}{3})^2} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

ดังนั้น $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$= \frac{1}{3}\times\frac{3}{-2\sqrt{2}}$

$= -\frac{\sqrt{2}}{4}$

12. จากโจทย์ $\cot\theta = 5$ อาจเขียนเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งที่มีความยาวของด้านทั้งสาม ดังรูป



วิธีที่ 1 $a^2 = 1^2 + 5^2$

$a = \sqrt{26}$

เนื่องจาก $\sin\theta < 0$ ดังนั้น $\operatorname{cosec}\theta < 0$ ด้วย ดังนั้น $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

จะได้ $\cos\theta = -\frac{5}{\sqrt{26}} = -\frac{5\sqrt{26}}{26}$

วิธีที่ 2 เพราะว่า $\sin\theta < 0$ ดังนั้น $\text{cosec}\,\theta < 0$ ด้วย

จาก $\cot\theta = 5$ จะได้ $\text{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta = 1 + 25$

$$\text{cosec}\,\theta = -\sqrt{26} \qquad \sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{26}}$$

จาก $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

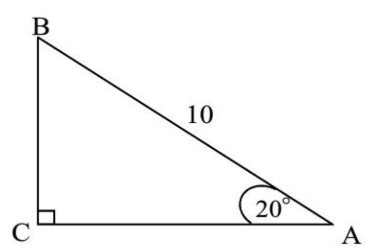
$$5 = \frac{\cos\theta}{-\frac{1}{\sqrt{26}}}$$

$$\cos\theta = -\frac{5\sqrt{26}}{26}$$

แบบฝึกหัด 2.5

1. 1) จตุภาคที่ 1 หรือ จตุภาคที่ 2
   2) จตุภาคที่ 2 หรือ จตุภาคที่ 3
   3) จตุภาคที่ 2 หรือ จตุภาคที่ 4
   4) จตุภาคที่ 1 หรือ จตุภาคที่ 3
   5) จตุภาคที่ 1 หรือ จตุภาคที่ 2

2.



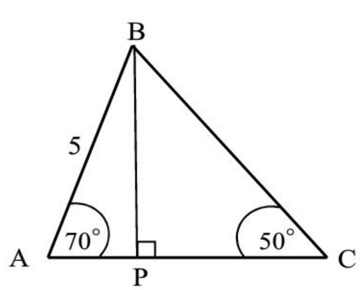
$\dfrac{BC}{AB} = \sin 20^\circ$

$BC \approx 10\,(0.342) = 3.42$ เซนติเมตร

$\dfrac{AC}{AB} = \cos 20^\circ$

$AC \approx 10\,(0.9397) = 9.397$ เซนติเมตร

3.



$\dfrac{BP}{AB} = \sin 70^\circ$

$BP \approx 5(0.9397)$

$= 4.6985$ เซนติเมตร

$BC = \dfrac{BP}{\sin 50^\circ} \approx \dfrac{4.6985}{0.7660}$

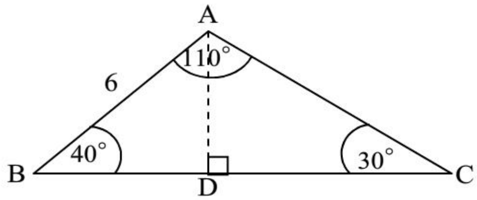
≈ 6.1338 เซนติเมตร

$AP = AB\cos 70^\circ \approx 5(0.3420) = 1.71$ เซนติเมตร

$PC = BC\cos 50^\circ \approx 6.1338 \times 0.6428 \approx 3.9428$ เซนติเมตร

$AC = AP + PC \approx 1.71 + 3.9428 = 5.6528$ เซนติเมตร

4.



$$BD = AB\cos 40^\circ \approx 6(0.7660) = 4.5960 \text{ เซนติเมตร}$$

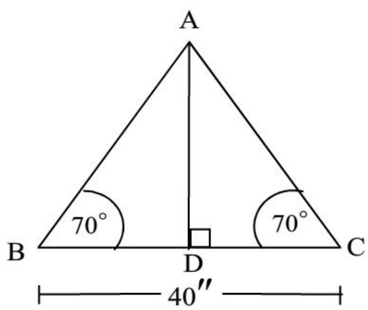
$$AD = AB\sin 40^\circ \approx 6(0.6428) = 3.8568 \text{ เซนติเมตร}$$

$$DC = AD\cot 30^\circ \approx 3.8568 \times 1.7321 \approx 6.680 \text{ เซนติเมตร}$$

$$AC = \frac{AD}{\sin 30^\circ} \approx 2 \times 3.8568 = 7.7136 \text{ เซนติเมตร}$$

$$BC = BD + DC \approx 4.5960 + 6.680 = 11.276 \text{ เซนติเมตร}$$

5.



จากสมบัติของรูป Δ หน้าจั่ว

จะได้ $BD = DC = 20$ นิ้ว

$$\frac{BD}{AB} = \cos 70^\circ$$

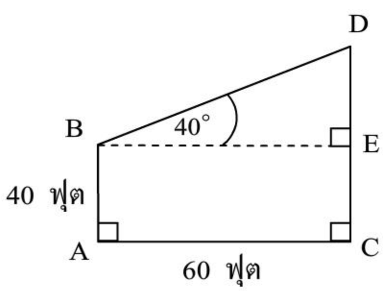
$$AB = \frac{BD}{\cos 70^\circ} = \frac{20}{0.3420}$$

$$\approx 58.4795 \text{ นิ้ว}$$

ดังนั้น เส้นรอบรูปของ Δ หน้าจั่วยาว $58.4795 + 58.4795 + 40 = 156.959$ นิ้ว

6. ให้ AB แทน ความสูงของตึกที่เตี้ยกว่า

CD แทน ความสูงของตึกที่สูงกว่า

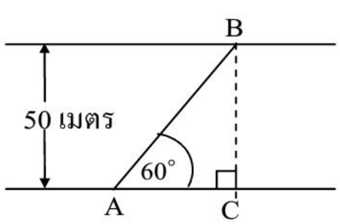


จากรูป $\frac{DE}{BE} = \tan 40^\circ$

$$DE \approx 60(0.8391) = 50.346$$

ดังนั้น ตึกที่สูงกว่าสูงประมาณ $40 + 50.346 = 90.346$ ฟุต

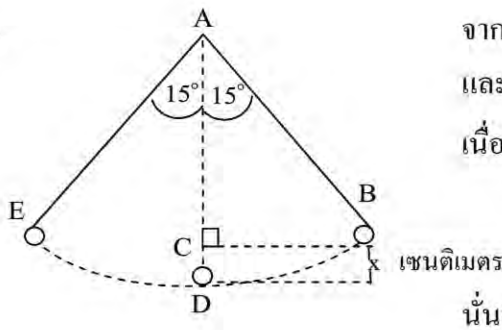
7.



จากรูป $\frac{BC}{AB} = \sin 60^\circ$

$$AB = \frac{BC}{\sin 60^\circ} = \frac{50}{\sqrt{3}} \times 2 = \frac{100\sqrt{3}}{3}$$

ดังนั้น ระยะทางที่นักว่ายน้ำว่ายข้ามฝั่ง $\frac{100\sqrt{3}}{3}$ เมตร

8. 

จากรูป $x = AD - AC$

และ $AE = AD = AB = 90$ เซนติเมตร

เนื่องจาก $\frac{AC}{AB} = \cos 15^\circ$

$AC = 90 \cos 15^\circ$

$\approx 90(0.9659) = 86.931$

นั่นคือ x ประมาณ $90 - 86.931 = 3.069$ เซนติเมตร

แบบฝึกหัด 2.6

1. 1) แอมพลิจูด คือ $\frac{1}{2}$

คาบ คือ $\frac{2\pi}{1} = 2\pi$

2) แอมพลิจูด คือ 3

คาบ คือ $\frac{2\pi}{1} = 2\pi$

3) แอมพลิจูด คือ 3

คาบ คือ $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$

4) แอมพลิจูด คือ 4

คาบ คือ $\frac{2\pi}{3}$

5) แอมพลิจูด คือ $\left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

คาบ คือ $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

6) แอมพลิจูด คือ $|-2| = 2$

คาบ คือ $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$

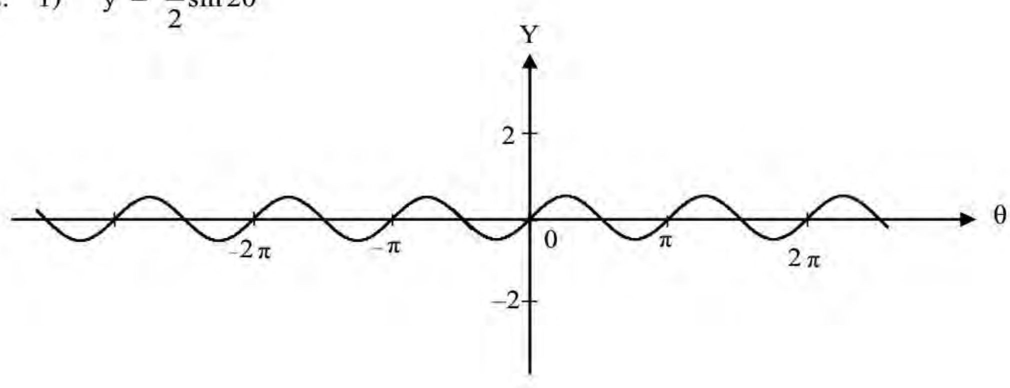
7) แอมพลิจูด คือ 1

คาบ คือ 2π

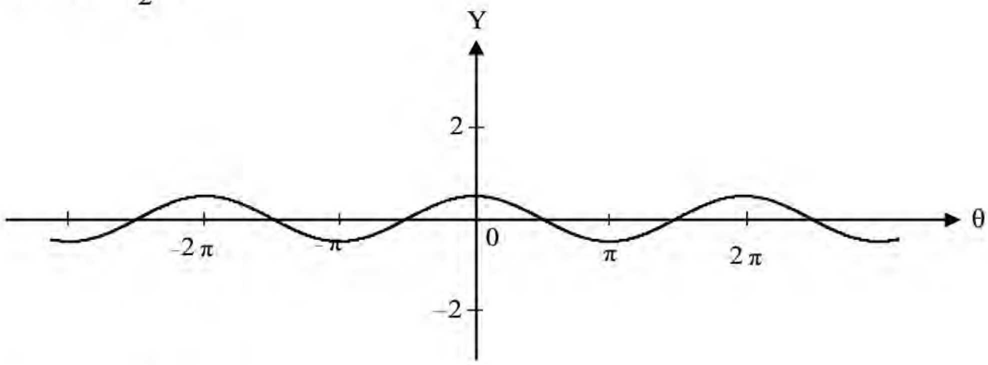
8) แอมพลิจูด คือ 3

คาบ คือ 2π

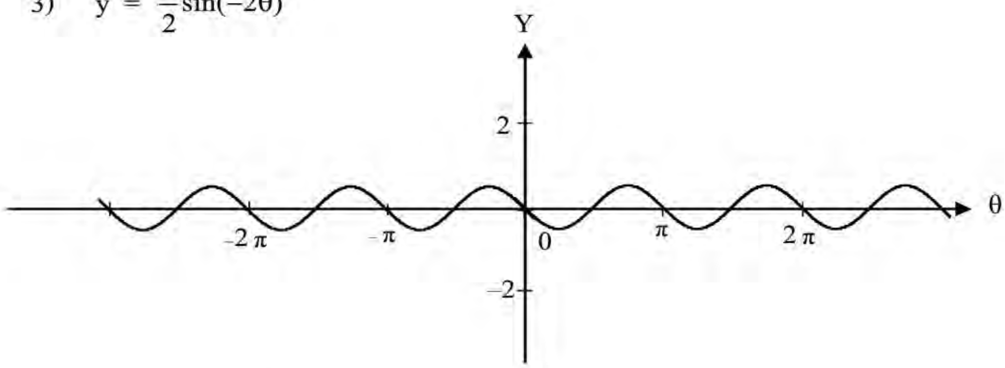
2. 1) $y = \frac{1}{2}\sin 2\theta$



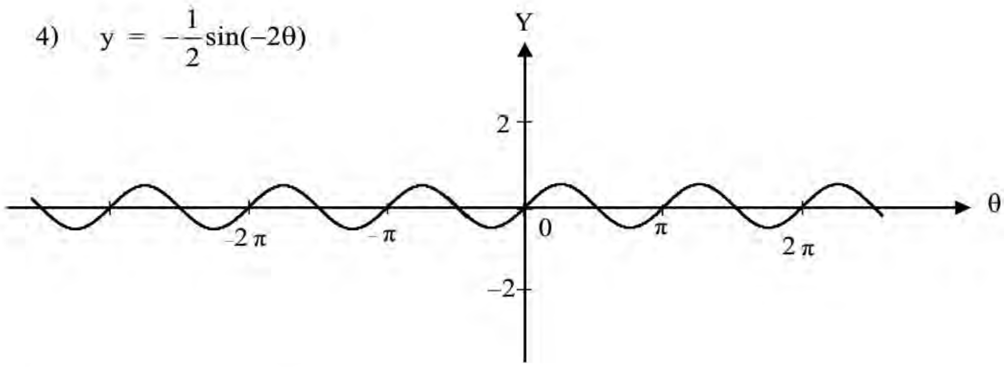
2) $y = \frac{1}{2}\cos\theta$



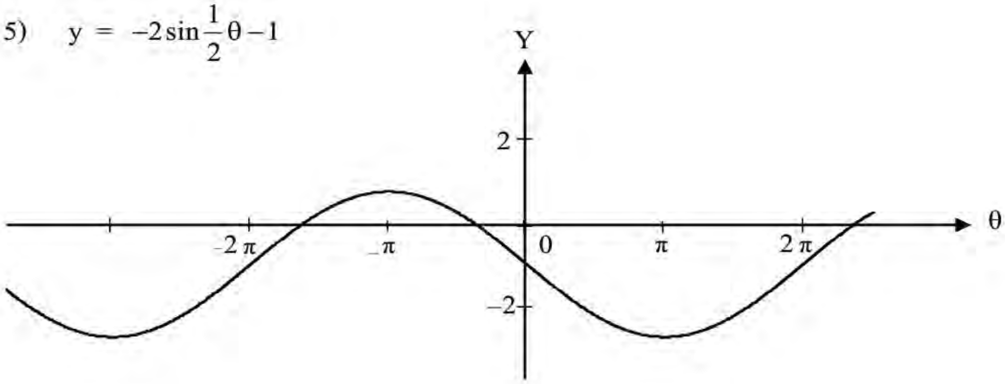
3) $y = \frac{1}{2}\sin(-2\theta)$



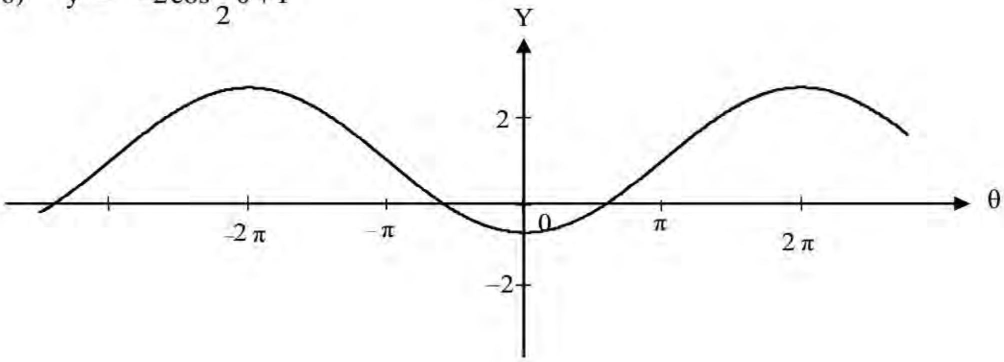
4) $y = -\frac{1}{2}\sin(-2\theta)$



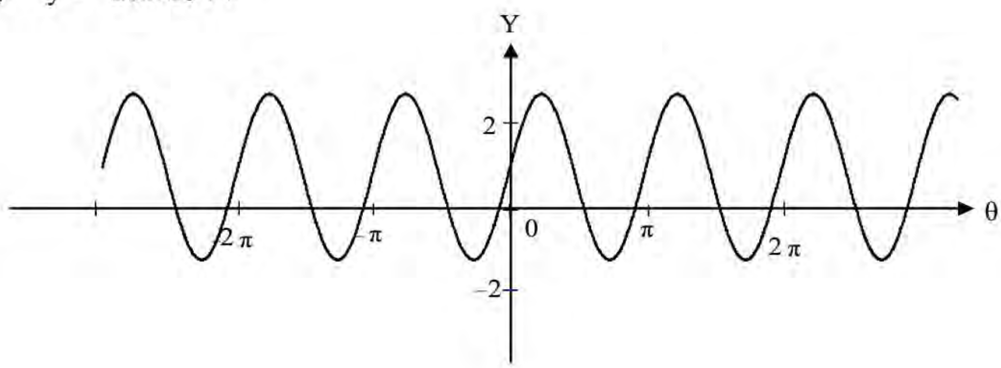
5) $y = -2\sin\frac{1}{2}\theta - 1$



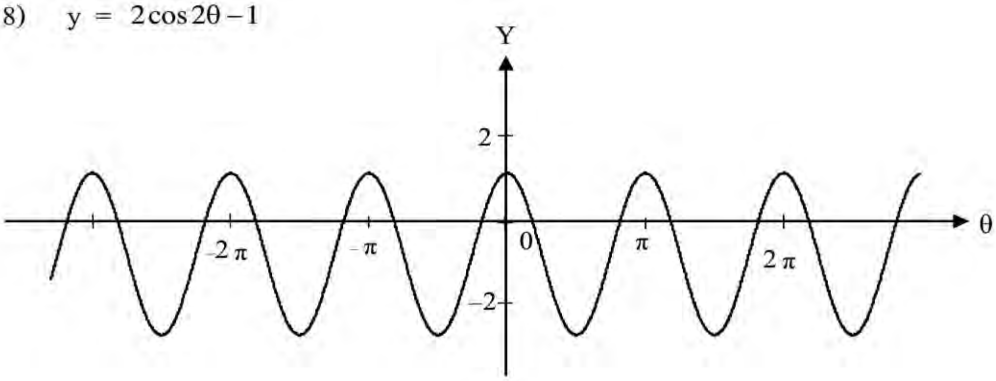
6) $y = -2\cos\frac{1}{2}\theta + 1$



7) $y = 2\sin 2\theta + 1$



8) $y = 2\cos 2\theta - 1$



3. 1)	จ	2)	ฉ	3)	ก
4)	ฌ	5)	ซ	6)	ข
7)	ค	8)	ช	9)	ง

แบบฝึกหัด 2.7

1. 1) $\cos(60^\circ + 45^\circ) = \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ$

$$= (\frac{1}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2}) - (\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} = \frac{1}{4}(\sqrt{2}-\sqrt{6})$$

2) $\cos(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{3}) = \cos\frac{3\pi}{2}\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{3\pi}{2}\sin\frac{\pi}{3}$

$$= 0 + (-1)(\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

3) $\cos 165^\circ = \cos(120^\circ + 45^\circ)$

$$= \cos 120^\circ \cos 45^\circ - \sin 120^\circ \sin 45^\circ$$

$$= (-\frac{1}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2}) - (\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$= -\frac{1}{4}(\sqrt{2}+\sqrt{6})$$

4) $\cos 225^\circ = \cos(180^\circ + 45^\circ)$

$$= \cos 180^\circ \cos 45^\circ - \sin 180^\circ \sin 45^\circ$$

$$= (-1)(\frac{\sqrt{2}}{2}) - 0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

5) $\sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ)$

$$= \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ$$

$$= (\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2}) + (\frac{1}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$= \frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$$

6) $\sin 135^\circ = \sin(90^\circ + 45^\circ)$

$$= \sin 90^\circ \cos 45^\circ + \cos 90^\circ \sin 45^\circ$$

$$= (1)(\frac{\sqrt{2}}{2}) + 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

7) $\tan 75^\circ = \tan(30^\circ + 45^\circ)$

$$= \frac{\tan 30^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 30^\circ \tan 45^\circ}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}+1}{1-(\frac{\sqrt{3}}{3})(1)} = \frac{\sqrt{3}+3}{3}\times\frac{3}{3-\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} \times \frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{9+(2\times 3\sqrt{3})+3}{9-3} = 2+\sqrt{3}$$

8) $\tan 105^\circ$

$$= \tan(60^\circ + 45^\circ)$$

$$= \frac{\tan 60^\circ + \tan 45^\circ}{1-\tan 60^\circ \tan 45^\circ}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{1-(\sqrt{3})(1)} = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} \times \frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{1+2\sqrt{3}+3}{1-3}$$

$$= -2-\sqrt{3}$$

9) $\sin \frac{17\pi}{12}$

$$= \sin(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{12})$$

$$= \sin\frac{3\pi}{2}\cos\frac{\pi}{12} - \cos\frac{3\pi}{2}\sin\frac{\pi}{12}$$

$$= (-1)\cos(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}) - 0$$

$$= -\left[\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\right]$$

$$= -\left[(\frac{1}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2}) + (\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2})\right]$$

$$= -\frac{1}{4}(\sqrt{2}+\sqrt{6})$$

10) $\cos \frac{7\pi}{12}$

$$= \cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12})$$

$$= \cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{12}$$

$$= 0-(1)\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})$$

$$= -\left[\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\right]$$

$$= -\left[(\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2}) - (\frac{1}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2})\right]$$

$$= \frac{1}{4}(\sqrt{2}-\sqrt{6})$$

11) $\tan\frac{19\pi}{12} \quad = \quad \tan(\pi+\frac{7\pi}{12})$

$$= \frac{\tan\pi+\tan\frac{7\pi}{12}}{1-\tan\pi\tan\frac{7\pi}{12}}$$

จากข้อ 8 ได้ $\tan\frac{7\pi}{12} \quad = \quad -2-\sqrt{3}$

ดังนั้น $\tan\frac{19\pi}{12} \quad = \quad \frac{0+(-2-\sqrt{3})}{1-0}$

$$= -2-\sqrt{3}$$

12) $\tan\frac{7\pi}{12} \quad = \quad \tan 105^\circ$

จากข้อ 8 ได้ $\tan\frac{7\pi}{12} \quad = \quad -2-\sqrt{3}$

13) $\sin(-\frac{\pi}{12}) \quad = \quad -\sin\frac{\pi}{12}$

$$= -\left[\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})\right]$$

$$= -\left[\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\right]$$

$$= -\left[(\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2})-(\frac{1}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2})\right]$$

$$= \frac{1}{4}(\sqrt{2}-\sqrt{6})$$

14) $\sec(-\frac{\pi}{12}) \quad = \quad \frac{1}{\cos(-\frac{\pi}{12})} \quad = \quad \frac{1}{\cos\frac{\pi}{12}}$

$$= \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})} \quad = \quad \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{(\frac{1}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2})+(\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2})} \quad = \quad \frac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}} \quad = \quad \frac{4(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{2-6}$$

$$= \sqrt{6}-\sqrt{2}$$

15) $\cot(-\frac{5\pi}{12}) \quad = \quad \frac{1}{\tan(-\frac{5\pi}{12})} \quad = \quad \frac{1}{\tan(\frac{7\pi}{12}-\pi)}$

$$= \frac{1}{\dfrac{\tan\frac{7\pi}{12} - \tan\pi}{1+\tan\frac{7\pi}{12}\tan\pi}}$$

จากข้อ 12 ได้ $\tan\frac{7\pi}{12} = -2-\sqrt{3}$

ดังนั้น $\cot(-\frac{5\pi}{12}) = \frac{1}{-2-\sqrt{3}}$

$$= \frac{1}{-2-\sqrt{3}} \times \frac{-2+\sqrt{3}}{-2+\sqrt{3}}$$

$$= -2+\sqrt{3}$$

2. $\sin(-\frac{5\pi}{2})\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}\cos(-\frac{5\pi}{2}) = \cos\ (\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi}{2})$

$$= \cos 3\pi$$

$$= -1$$

3. $\sin\frac{\pi}{3}\sin(-\frac{\pi}{4}) + \cos(-\frac{\pi}{4})\cos\frac{\pi}{3} = (\frac{\sqrt{3}}{2})(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + (\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{1}{2})$

$$= -\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$= \frac{1}{4}(\sqrt{2}-\sqrt{6})$$

4. 1) $\sin 20^\circ\ \cos 10^\circ\ + \cos 20^\circ\ \sin\ 10^\circ = \sin\ (20^\circ + 10^\circ)$

$$= \sin\ 30^\circ$$

$$= \frac{1}{2}$$

2) $\cos\ 70^\circ\ \cos\ 20^\circ - \sin\ 70^\circ\ \sin\ 20^\circ = \cos\ (70^\circ + 20^\circ)$

$$= \cos\ 90^\circ$$

$$= 0$$

3) $\dfrac{\tan 20^\circ + \tan 25^\circ}{1-\tan 20^\circ \tan 25^\circ} = \tan\ (20^\circ + 25^\circ)$

$$= \tan\ 45^\circ$$

$$= 1$$

4) $\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12}-\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{7\pi}{12} = \sin(\frac{\pi}{12}-\frac{7\pi}{12})$

$= \sin(-\frac{\pi}{2})$

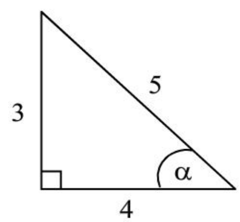
$= -1$

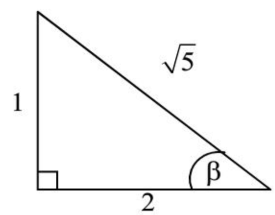
5) $\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}-\sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} = \sin(\frac{\pi}{12}-\frac{5\pi}{12})$

$= \sin(-\frac{\pi}{3})$

$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$

5. 1) จากฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดอาจเขียนรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีความยาวของด้านทั้งสามดังรูป





จากรูปจะได้

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$= (\frac{3}{5})(\frac{2}{\sqrt{5}}) + (\frac{4}{5})(-\frac{1}{\sqrt{5}}) = \frac{6}{5\sqrt{5}}-\frac{4}{5\sqrt{5}} = \frac{2}{5\sqrt{5}}$

$= \frac{2\sqrt{5}}{25}$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$= (\frac{4}{5})(\frac{2}{\sqrt{5}})-(\frac{3}{5})(-\frac{1}{\sqrt{5}}) = \frac{8}{5\sqrt{5}}+\frac{3}{5\sqrt{5}} = \frac{11}{5\sqrt{5}}$

$= \frac{11\sqrt{5}}{25}$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

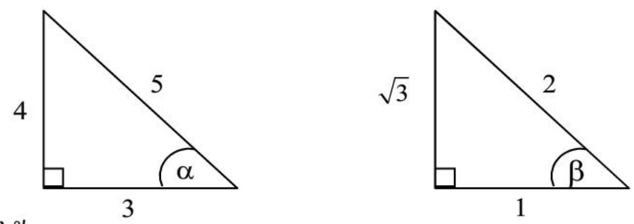
$= (\frac{3}{5})(\frac{2}{\sqrt{5}})-(\frac{4}{5})(-\frac{1}{\sqrt{5}}) = \frac{6}{5\sqrt{5}}+\frac{4}{5\sqrt{5}} = \frac{10}{5\sqrt{5}}$

$= \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$= \frac{\frac{3}{4}-(-\frac{1}{2})}{1+(\frac{3}{4})(-\frac{1}{2})} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{8}} = \frac{5}{4}\times\frac{8}{5} = 2$

2) จากฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดอาจเขียนรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีความยาวของด้านทั้งสามดังรูป



จากรูปจะได้

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\ \sin\beta$$

$$= (\frac{4}{5})(\frac{1}{2}) + (-\frac{3}{5})(\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$= \frac{4}{10} - \frac{3\sqrt{3}}{10} = \frac{1}{10}(4-3\sqrt{3})$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\ \sin\beta$$

$$= (-\frac{3}{5})(\frac{1}{2}) - (\frac{4}{5})(\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$= -\frac{3}{10} - \frac{4\sqrt{3}}{10} = -\frac{1}{10}(3+4\sqrt{3})$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\ \sin\beta$$

$$= (\frac{4}{5})(\frac{1}{2}) - (-\frac{3}{5})(\frac{\sqrt{3}}{2})$$

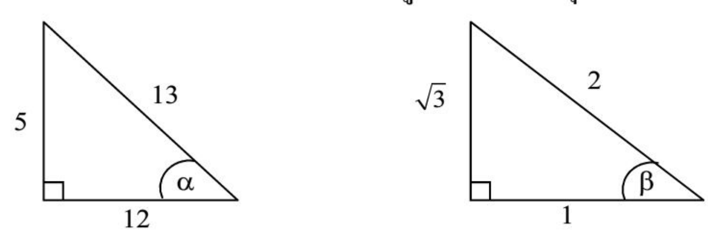
$$= \frac{4}{10} + \frac{3\sqrt{3}}{10} = \frac{1}{10}(4+3\sqrt{3})$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$= \frac{(-\frac{4}{3})-\sqrt{3}}{1+(-\frac{4}{3})(\sqrt{3})} = \frac{\frac{-4-3\sqrt{3}}{3}}{\frac{3-4\sqrt{3}}{3}}$$

$$= \frac{4+3\sqrt{3}}{4\sqrt{3}-3} = \frac{48+25\sqrt{3}}{39}$$

3) จากฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดอาจเขียนรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีความยาวของด้านทั้งสามดังรูป



จากรูปจะได้

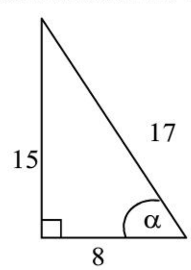
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\ \sin\beta$$
$$= (\frac{5}{13})(-\frac{1}{2}) + (-\frac{12}{13})(\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{5}{26} - \frac{12\sqrt{3}}{26}$$
$$= -\frac{1}{26}(5+12\sqrt{3})$$

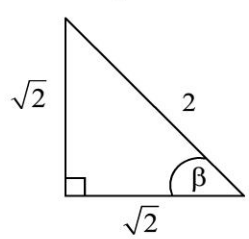
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\ \sin\beta$$
$$= (-\frac{12}{13})(-\frac{1}{2}) - (\frac{5}{13})(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{12}{26} - \frac{5\sqrt{3}}{26}$$
$$= \frac{1}{26}(12-5\sqrt{3})$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\ \sin\beta$$
$$= (\frac{5}{13})(-\frac{1}{2}) - (-\frac{12}{13})(\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{5}{26} + \frac{12\sqrt{3}}{26}$$
$$= \frac{1}{26}(12\sqrt{3}-5)$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$
$$= \frac{(-\frac{5}{12}) - (-\sqrt{3})}{1+(-\frac{5}{12})(-\sqrt{3})} = \frac{\frac{12\sqrt{3}-5}{12}}{\frac{12+5\sqrt{3}}{12}}$$
$$= \frac{12\sqrt{3}-5}{5\sqrt{3}+12} = \frac{12\sqrt{3}-5}{5\sqrt{3}+12} \times \frac{5\sqrt{3}-12}{5\sqrt{3}-12}$$
$$= -\frac{80}{23} + \frac{169\sqrt{3}}{69}$$

4) จากฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดอาจเขียนรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีความยาวของด้านทั้งสามดังรูป





จากรูปจะได้

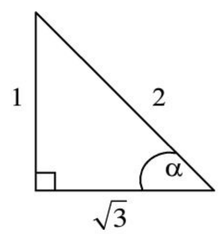
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\ \sin\beta$$
$$= (-\frac{15}{17})(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + (-\frac{8}{17})(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{15\sqrt{2}}{34} - \frac{8\sqrt{2}}{34}$$
$$= \frac{7\sqrt{2}}{34}$$

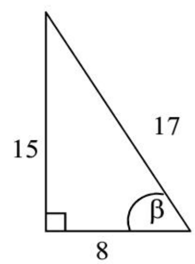
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\ \sin\beta$$
$$= (-\frac{8}{17})(-\frac{\sqrt{2}}{2}) - (-\frac{15}{17})(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{8\sqrt{2}}{34} + \frac{15\sqrt{2}}{34}$$
$$= \frac{23\sqrt{2}}{34}$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\ \sin\beta$$
$$= (-\frac{15}{17})(-\frac{\sqrt{2}}{2}) - (-\frac{8}{17})(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{15\sqrt{2}}{34} + \frac{8\sqrt{2}}{34}$$
$$= \frac{23\sqrt{2}}{34}$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$
$$= \frac{\frac{15}{8} - (-1)}{1+(\frac{15}{8})(-1)} = \frac{\frac{23}{8}}{-\frac{7}{8}} = \frac{23}{8} \times (-\frac{8}{7})$$
$$= -\frac{23}{7}$$

5) จากฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดอาจเขียนรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีความยาวของด้านทั้งสามดังรูป





จากรูปจะได้

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\ \sin\beta$$
$$= (-\frac{1}{2})(-\frac{8}{17}) + (\frac{\sqrt{3}}{2})(-\frac{15}{17}) = \frac{8}{34} - \frac{15\sqrt{3}}{34}$$
$$= \frac{8-15\sqrt{3}}{34}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\ \sin\beta$$
$$= (\frac{\sqrt{3}}{2})(-\frac{8}{17}) - (-\frac{1}{2})(-\frac{15}{17}) = -\frac{8\sqrt{3}}{34} - \frac{15}{34}$$
$$= \frac{-8\sqrt{3}-15}{34}$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\ \sin\beta$$
$$= (-\frac{1}{2})(-\frac{8}{17}) - (\frac{\sqrt{3}}{2})(-\frac{15}{17}) = \frac{8}{34} + \frac{15\sqrt{3}}{34}$$
$$= \frac{8+15\sqrt{3}}{34}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

$$= \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{15}{8}}{1 + (-\frac{1}{\sqrt{3}})(\frac{15}{8})} = \frac{\frac{-8-15\sqrt{3}}{8\sqrt{3}}}{\frac{8\sqrt{3}-15}{8\sqrt{3}}} = \frac{-8-15\sqrt{3}}{8\sqrt{3}-15}$$

$$= \frac{-8-15\sqrt{3}}{8\sqrt{3}-15} \times \frac{8\sqrt{3}+15}{8\sqrt{3}+15} = \frac{-480-289\sqrt{3}}{-33}$$

$$= \frac{480+289\sqrt{3}}{33}$$

6. 1) $\sin(\frac{\pi}{2} + \theta) = \sin\frac{\pi}{2}\cos\theta + \cos\frac{\pi}{2}\sin\theta$

$= (1)\cos\theta + 0$

$= \cos\theta$

2) $\cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\theta - \sin\frac{\pi}{2}\sin\theta$

$= 0 - (1)\sin\theta$

$= -\sin\theta$

3) $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\frac{\pi}{2}\cos\theta - \cos\frac{\pi}{2}\sin\theta$

$= (1)\cos\theta - 0$

$= \cos\theta$

4) $\sin(\pi + \theta) = \sin\pi\cos\theta + \cos\pi\sin\theta$

$= 0 + (-1)\sin\theta$

$= -\sin\theta$

5) $\cos(\frac{3\pi}{2} - \theta) = \cos\frac{3\pi}{2}\cos\theta + \sin\frac{3\pi}{2}\sin\theta$

$= 0 + (-1)\sin\theta$

$= -\sin\theta$

6) $\sin(\frac{3\pi}{2} + \theta) = \sin\frac{3\pi}{2}\cos\theta + \cos\frac{3\pi}{2}\sin\theta$

$= (-1)\cos\theta + 0$

$= -\cos\theta$

7) $\tan(\pi - \theta) = \dfrac{\tan\pi - \tan\theta}{1+\tan\pi\tan\theta}$

$= \dfrac{0-\tan\theta}{1+0}$

$= -\tan\theta$

8) $\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$= 2\sin\alpha\cos\beta$

9) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cos\beta} = \dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta}$

$= 1+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta}$

$= 1+\cot\alpha\tan\beta$

10) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = \dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}$

$= 1-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}$

$= 1-\tan\alpha\tan\beta$

11) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)} = \dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}$

$= \dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}$

$= \dfrac{1}{1-\cot\alpha\tan\beta}+\dfrac{1}{\tan\alpha\cot\beta-1}$

$= \dfrac{1}{1-\dfrac{\tan\beta}{\tan\alpha}}+\dfrac{1}{\dfrac{\tan\alpha}{\tan\beta}-1}$

$= \dfrac{\tan\alpha}{\tan\alpha-\tan\beta}+\dfrac{\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}$

$= \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}$

7. 1) $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$

$= \dfrac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$

$= \dfrac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$, $\quad \cos\alpha \neq 0,\ \cos\beta \neq 0$

$= \dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

2) $2\cos\alpha\sin\beta = \cos\alpha\sin\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$= \sin(\alpha+\beta) - \sin\alpha\cos\beta - \sin(\alpha-\beta) + \sin\alpha\cos\beta$

$= \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$

3) $2\cos\alpha\cos\beta = \cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha\cos\beta$

$= \cos(\alpha+\beta) + \sin\alpha\sin\beta + \cos(\alpha-\beta) - \sin\alpha\sin\beta$

$= \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$

4) $2\sin\alpha\sin\beta = \sin\alpha\sin\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$= \cos(\alpha-\beta) - \cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha\cos\beta - \cos(\alpha+\beta)$

$= \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$

5) เนื่องจาก $\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2\cos x\sin y$

ให้ $\alpha = x+y$, $\beta = x-y$ จะได้ $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $y = \frac{\alpha-\beta}{2}$

ดังนั้น $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$

6) เนื่องจาก $\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x\cos y$

ให้ $\alpha = x+y$, $\beta = x-y$ จะได้ $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $y = \frac{\alpha-\beta}{2}$

ดังนั้น $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$

7) เนื่องจาก $\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2\sin\alpha\sin\beta$

ให้ $\alpha = x+y$, $\beta = x-y$ จะได้ $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $y = \frac{\alpha-\beta}{2}$

ดังนั้น $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$

8) เนื่องจาก $\cos\alpha = \cos(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2})$

$= \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$

$= (1-\sin^2\frac{\alpha}{2}) - \sin^2\frac{\alpha}{2}$

$= 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$

$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha$

ดังนั้น $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$

9) เนื่องจาก $\cos\alpha = \cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)$

$$= \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$= \cos^2\frac{\alpha}{2} - \left(1 - \cos^2\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$$

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha$$

ดังนั้น $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$

10) **วิธีที่ 1** จาก $\cos\alpha = \cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)$

$$= \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$= \left(1 - \tan^2\frac{\alpha}{2}\right)\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$= \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{\sec^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos\alpha + \cos\alpha\tan^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \tan^2\frac{\alpha}{2}$$

$$(1 + \cos\alpha)\tan^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha$$

$$\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

วิธีที่ 2 ผลจากข้อ 8) และข้อ 9)

จะได้ $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$

และ $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$

$$\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{1-\cos\alpha}{2}}{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

ดังนั้น $\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

8. 1) $\sin(90^\circ - A) = \sin 90^\circ \cos A - \cos 90^\circ \sin A$

$= \cos A - 0$

$= \cos A$

2) $\tan(90^\circ - A) = \dfrac{\sin(90^\circ - A)}{\cos(90^\circ - A)}$

$= \dfrac{\sin 90^\circ \cos A - \cos 90^\circ \sin A}{\cos 90^\circ \cos A + \sin 90^\circ \sin A}$

$= \dfrac{\cos A}{\sin A}$

$= \cot A$

3) $\cot(90^\circ - B) = \dfrac{\cos(90^\circ - B)}{\sin(90^\circ - B)}$

$= \dfrac{\cos 90^\circ \cos B + \sin 90^\circ \sin B}{\sin 90^\circ \cos B - \cos 90^\circ \sin B}$

$= \dfrac{\sin B}{\cos B}$

$= \tan B$

4) $\sec(90^\circ - A) = \dfrac{1}{\cos(90^\circ - A)}$

$= \dfrac{1}{\cos 90^\circ \cos A + \sin 90^\circ \sin A}$

$= \dfrac{1}{\sin A}$

$= \text{cosec } A$

5) $\csc(90^\circ - B) = \dfrac{1}{\sin(90^\circ - B)}$

$= \dfrac{1}{\sin 90^\circ \cos B - \cos 90^\circ \sin B}$

$= \dfrac{1}{\cos B}$

$= \sec B$

6) $\sin(90^\circ + A) = \sin 90^\circ \cos A + \cos 90^\circ \sin A$

$= \cos A$

7) $\cos(270^\circ - A) = \cos 270^\circ \cos A + \sin 270^\circ \sin A$

$= -\sin A$

8) $\tan(270^\circ - A) = \dfrac{\sin(270^\circ - A)}{\cos(270^\circ - A)}$

$$= \frac{\sin 270^\circ \cos A - \cos 270^\circ \sin A}{\cos 270^\circ \cos A + \sin 270^\circ \sin A}$$

$$= \frac{-\cos A}{-\sin A}$$

$$= \cot A$$

9. 1) $\cos(x - 30^\circ) - \cos(x + 30^\circ) = (\cos x \cos 30^\circ + \sin x \sin 30^\circ) - (\cos x \cos 30^\circ - \sin x \sin 30^\circ)$

$$= 2 \sin x \sin 30^\circ$$

$$= \frac{2\sin x}{2}$$

$$= \sin x$$

2) $\cos(x + 45^\circ) + \cos(x - 45^\circ) = (\cos x \cos 45^\circ - \sin x \sin 45^\circ) + (\cos x \cos 45^\circ + \sin x \sin 45^\circ)$

$$= 2 \cos x \cos 45^\circ$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{2} \cos x$$

$$= \sqrt{2} \cos x$$

3) $\sin(x - 30^\circ) + \sin(x + 30^\circ) = (\sin x \cos 30^\circ - \cos x \sin 30^\circ) + (\sin x \cos 30^\circ + \cos x \sin 30^\circ)$

$$= 2 \sin x \cos 30^\circ$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{2} \sin x$$

$$= \sqrt{3} \sin x$$

4) $\sin(x + y) \sin(x - y) = (\sin x \cos y + \cos x \sin y)(\sin x \cos y - \cos x \sin y)$

$$= \sin^2 x \cos^2 y - \cos^2 x \sin^2 y$$

$$= \sin^2 x (1 - \sin^2 y) - (1 - \sin^2 x) \sin^2 y$$

$$= \sin^2 x - \sin^2 x \sin^2 y - \sin^2 y + \sin^2 x \sin^2 y$$

$$= \sin^2 x - \sin^2 y$$

10. $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$$= 2\left(\frac{3}{7}\right)^2 - 1$$

$$= 2\left(\frac{9}{49}\right) - 1$$

$$= -\frac{31}{49}$$

11. $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

$= \dfrac{2(\frac{1}{2})}{1-(\frac{1}{2})^2} = \dfrac{1}{1-\frac{1}{4}}$

$= \dfrac{4}{3}$

12. จาก $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$\cos 64^\circ = \cos 2\,(32^\circ) = 2\cos^2 32^\circ - 1$

$\cos 32^\circ = \sqrt{\dfrac{1+\cos 64^\circ}{2}} = \sqrt{\dfrac{1+0.44}{2}}$

$= \sqrt{0.72} \approx 0.849$

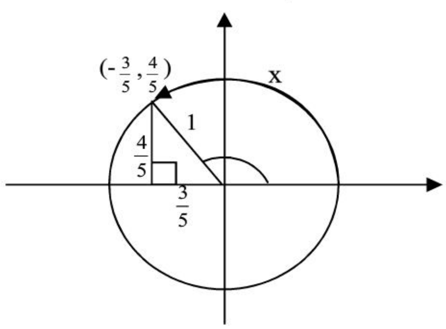
13. จาก $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

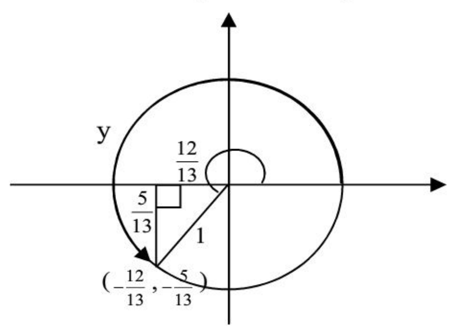
$\cos 1.04 = \cos 2(0.52) = 1 - 2\sin^2 0.52$

$\sin 0.52 = \sqrt{\dfrac{1-\cos 1.04}{2}} = \sqrt{\dfrac{1-0.5}{2}}$

$= \sqrt{0.25} = 0.5$

14. จาก $\cos x = -\dfrac{3}{5}$ เมื่อ $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$ และ $\tan y = \dfrac{5}{12}$ เมื่อ $\pi < y < \dfrac{3\pi}{2}$
เขียนวงกลมหนึ่งหน่วยที่มีจุดปลายส่วนโค้งยาว x หน่วย และ y หน่วย ดังรูป





จากรูป

$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x \sin y$

$= (-\frac{3}{5})(-\frac{12}{13}) - (\frac{4}{5})(-\frac{5}{13})$

$= \dfrac{36}{65} + \dfrac{20}{65}$

$= \dfrac{56}{65}$

15. 1) จาก $0 < x < \frac{\pi}{2}$ และ $\sin x = \frac{3}{5}$

ดังนั้น $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{3}{4}$

จาก $\pi < x + y < \frac{3\pi}{2}$ และ $\sin(x+y) = -\frac{5}{13}$

ดังนั้น $\cos(x+y) = -\sqrt{1-\sin^2(x+y)} = -\frac{12}{13}$

$$\tan(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{-\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}} = \frac{5}{12}$$

จาก $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$

$$\frac{5}{12} = \frac{\frac{3}{4} + \tan y}{1 - \frac{3}{4}\tan y}$$

$$\tan y = -\frac{16}{63}$$

เนื่องจาก $0 < x < \frac{\pi}{2}$ และ $\pi < x + y < \frac{3\pi}{2}$ ดังนั้น $\frac{\pi}{2} < y < \pi$

ดังนั้น $\sin y = \frac{16}{65}$

2) $$\tan(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{-\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}} = \frac{5}{12}$$

แบบฝึกหัด 2.8

1. 1) arcsin 0

ให้ $\arcsin 0 = \theta$ จะได้ $\sin\theta = 0$

หาค่า θ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ และ $\sin\theta = 0$

จะพบว่าในช่วง $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ จะมี 0 เพียงค่าเดียวที่ $\sin 0 = 0$

ดังนั้น $\arcsin 0 = 0$

2) arccos 1

ให้ $\arccos 1 = \theta$ จะได้ $\cos\theta = 1$

หาค่า θ เมื่อ $0 \leq \theta \leq \pi$ และ $\cos\theta = 1$

จะพบว่าในช่วง $[0, \pi]$ จะมี 0 เพียงค่าเดียวที่ $\cos 0 = 1$

ดังนั้น $\arccos 1 = 0$

3) arcsin (–1)

ให้ $\arcsin(-1) = \theta$ จะได้ $\sin\theta = -1$

หาค่า θ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ และ $\sin\theta = -1$

จะพบว่าในช่วง $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ จะมี $-\frac{\pi}{2}$ เพียงค่าเดียวที่ $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$

ดังนั้น $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$

4) arccos(–1)

ให้ $\arccos(-1) = \theta$ จะได้ $\cos\theta = -1$

หาค่า θ เมื่อ $0 \leq \theta \leq \pi$ และ $\cos\theta = -1$

จะพบว่าในช่วง $[0, \pi]$ จะมี π เพียงค่าเดียวที่ $\cos\pi = -1$

ดังนั้น $\arccos(-1) = \pi$

5) arctan 0

ให้ $\arctan 0 = \theta$ จะได้ $\tan\theta = 0$

หาค่า θ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ และ $\tan\theta = 0$

จะพบว่าในช่วง $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ จะมี 0 เพียงค่าเดียวที่ $\tan 0 = 0$

ดังนั้น $\arctan 0 = 0$

6) arctan (–1)

ให้ $\arctan(-1) = \theta$ จะได้ $\tan\theta = -1$

หาค่า θ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ และ $\tan\theta = -1$

จะพบว่าในช่วง $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ จะมี $-\frac{\pi}{4}$ เพียงค่าเดียวที่ $\tan(-\frac{\pi}{4}) = -1$

ดังนั้น $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$

7) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$

ให้ $\arcsin (\frac{\sqrt{2}}{2}) = \theta$ จะได้ $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

หาค่า θ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ และ $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

จะพบว่าในช่วง $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ จะมี $\frac{\pi}{4}$ เพียงค่าเดียวที่ $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ดังนั้น $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$

8) $\arctan \frac{\sqrt{3}}{3}$

ให้ $\arctan (\frac{\sqrt{3}}{3}) = \theta$ จะได้ $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$

หาค่า θ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ และ $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$

จะพบว่าในช่วง $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ จะมี $\frac{\pi}{6}$ เพียงค่าเดียวที่ $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

ดังนั้น $\arctan \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$

9) $\arctan \sqrt{3}$

ให้ $\arctan \sqrt{3} = \theta$ จะได้ $\tan\theta = \sqrt{3}$

หาค่า θ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ และ $\tan\theta = \sqrt{3}$

จะพบว่าในช่วง $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ จะมี $\frac{\pi}{3}$ เพียงค่าเดียวที่ $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

ดังนั้น $\arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$

10) $\arcsin (-\frac{\sqrt{3}}{2})$

ให้ $\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \theta$ จะได้ $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

หาค่า θ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ และ $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

จะพบว่าในช่วง $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ จะมี $-\frac{\pi}{3}$ เพียงค่าเดียวที่ $\sin(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ดังนั้น $\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{\pi}{3}$

11) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

ให้ $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \theta$ จะได้ $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

หาค่า θ เมื่อ $0 \le \theta \le \pi$ และ $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

จะพบว่าในช่วง $[0, \pi]$ จะมี $\frac{5\pi}{6}$ เพียงค่าเดียวที่ $\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ดังนั้น $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$

12) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

ให้ $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \theta$ จะได้ $\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

หาค่า θ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ และ $\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

จะพบว่าในช่วง $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ จะมี $-\frac{\pi}{4}$ เพียงค่าเดียวที่ $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

ดังนั้น $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$

2. 1) $81^\circ\ 10'$ 2) $54^\circ\ 50'$ 3) $55^\circ\ 40'$

4) $26^\circ\ 50'$ 5) $20^\circ\ 10'$ 6) 165°

7) -22° 8) 141° 9) -43°

3. 1) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

ให้ $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \theta$ จะได้ $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

หา θ ที่ $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ และ $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

จะได้ว่า $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

จะได้ $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$

ดังนั้น $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

2) $\sin(\arcsin(-\frac{1}{2}))$

วิธีที่ 1 ให้ $\arcsin(-\frac{1}{2}) = \theta$ จะได้ $\sin\theta = -\frac{1}{2}$

หา θ ที่ $\sin\theta = -\frac{1}{2}$ และ $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

จะได้ว่า $\sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$

จะได้ $\arcsin(-\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{6}$

ดังนั้น $\sin(\arcsin(-\frac{1}{2})) = \sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$

วิธีที่ 2 ให้ $\arcsin(-\frac{1}{2}) = \theta$ จะได้ $\sin\theta = -\frac{1}{2}$

เนื่องจาก $\sin(\arcsin(-\frac{1}{2})) = \sin\theta$

ดังนั้น $\sin(\arcsin(-\frac{1}{2})) = -\frac{1}{2}$

3) $\cos(\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}))$

วิธีที่ 1 ให้ $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \theta$ จะได้ $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

หา θ ที่ $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ และ $0 \le \theta \le \pi$

จะได้ว่า $\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

จะได้ $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{5\pi}{6}$

ดังนั้น $\cos(\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})) = \cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

วิธีที่ 2 ให้ $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \theta$ จะได้ $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

เนื่องจาก $\cos(\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})) = \cos\theta$

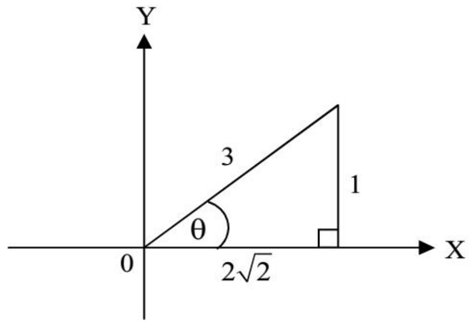
ดังนั้น $\cos(\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

4) $\tan(\arcsin\frac{1}{3})$

ให้ $\arcsin\frac{1}{3} = \theta$ จะได้ $\sin\theta = \frac{1}{3}$

เนื่องจาก $\sin\theta > 0$ และ $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ ดังนั้น $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

ใช้รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก และทฤษฎีบทพีทาโกรัส หาคำตอบได้ดังนี้



จากรูป $\sin\theta = \frac{1}{3}$

และ $\tan\theta = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

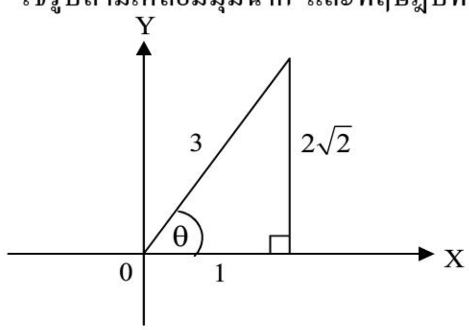
ดังนั้น $\tan(\arcsin\frac{1}{3}) = \tan\theta = \frac{\sqrt{2}}{4}$

5) $\tan(\arccos\frac{1}{3})$

ให้ $\arccos\frac{1}{3} = \theta$ จะได้ $\cos\theta = \frac{1}{3}$

เนื่องจาก $\cos\theta > 0$ และ $0 \le \theta \le \pi$ ดังนั้น $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

ใช้รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก และทฤษฎีบทพีทาโกรัส หาคำตอบได้ดังนี้



จากรูป $\cos\theta = \frac{1}{3}$

และ $\tan\theta = 2\sqrt{2}$

ดังนั้น $\tan(\arccos\frac{1}{3}) = \tan\theta = 2\sqrt{2}$

6) $\tan(\arctan\frac{1}{2})$

ให้ $\arctan\frac{1}{2} = \theta$ จะได้ $\tan\theta = \frac{1}{2}$

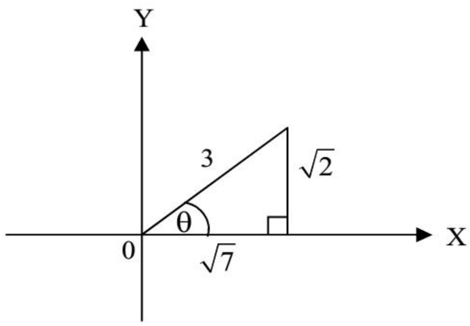
เนื่องจาก $\tan(\arctan\frac{1}{2}) = \tan\theta$ ดังนั้น $\tan(\arctan\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

7) $\cos(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3})$

ให้ $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3} = \theta$ จะได้ $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{3}$

เนื่องจาก $\sin\theta > 0$ และ $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ ดังนั้น $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

ใช้รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก และทฤษฎีบทพีทาโกรัส หาคำตอบได้ดังนี้



จากรูป $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{3}$

และ $\cos\theta = \frac{\sqrt{7}}{3}$

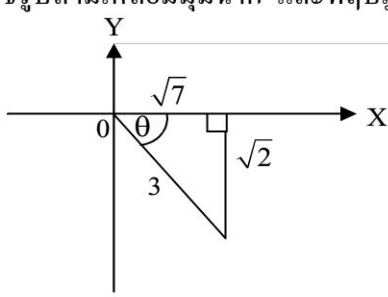
ดังนั้น $\cos(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}) = \cos\theta = \frac{\sqrt{7}}{3}$

8) $\cot(\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{3}))$

ให้ $\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{3}) = \theta$ จะได้ $\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{3}$

เนื่องจาก $\sin\theta < 0$ และ $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ ดังนั้น $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$

ใช้รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก และทฤษฎีบทพีทาโกรัส หาคำตอบได้ดังนี้



จากรูป $\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{3}$

และ $\cot\theta = -\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{14}}{2}$

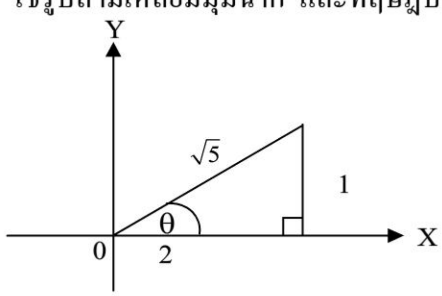
ดังนั้น $\cot(\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{3}) = \cot\theta = -\frac{\sqrt{14}}{2}$

9) $\operatorname{cosec}(\arctan\frac{1}{2})$

ให้ $\arctan\frac{1}{2} = \theta$ จะได้ $\tan\theta = \frac{1}{2}$

เนื่องจาก $\tan\theta > 0$ และ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ดังนั้น $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

ใช้รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก และทฤษฎีบทพีทาโกรัส หาคำตอบได้ดังนี้



จากรูป $\tan\theta = \frac{1}{2}$

และ $\operatorname{cosec}\theta = \sqrt{5}$

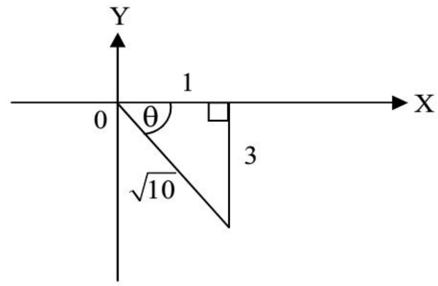
ดังนั้น $\operatorname{cosec}(\arctan\frac{1}{2}) = \operatorname{cosec}\theta = \sqrt{5}$

10) $\sin(\arctan(-3))$

ให้ $\arctan(-3) = \theta$ จะได้ $\tan\theta = -3$

เนื่องจาก $\tan\theta < 0$ และ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ดังนั้น $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$

ใช้รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก และทฤษฎีบทพีทาโกรัส หาคำตอบได้ดังนี้



จากรูป $\tan\theta = -3$

และ $\sin\theta = -\frac{3}{\sqrt{10}}$

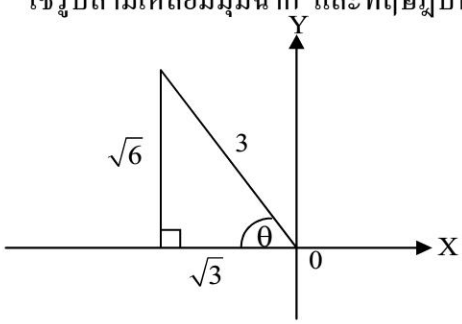
ดังนั้น $\sin(\arctan(-3)) = \sin\theta = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$

11) $\cot(\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{3}))$

ให้ $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = \theta$ จะได้ $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

เนื่องจาก $\cos\theta < 0$ และ $0 \le \theta \le \pi$ ดังนั้น $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

ใช้รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก และทฤษฎีบทพีทาโกรัส หาคำตอบได้ดังนี้



จากรูป $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

และ $\cot\theta = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

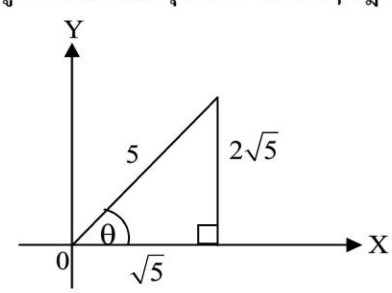
ดังนั้น $\cot(\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{3})) = \cot\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

12) $\sec(\arcsin\frac{2\sqrt{5}}{5})$

ให้ $\arcsin\frac{2\sqrt{5}}{5} = \theta$ จะได้ $\sin\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

เนื่องจาก $\sin\theta > 0$ และ $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ ดังนั้น $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

ใช้รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก และทฤษฎีบทพีทาโกรัส หาคำตอบได้ดังนี้



จากรูป $\sin\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

และ $\sec\theta = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

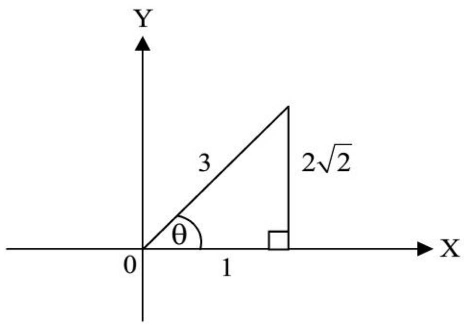
ดังนั้น $\sec(\arcsin\frac{2\sqrt{5}}{5}) = \sec\theta = \sqrt{5}$

13) $\operatorname{cosec}(\arccos\frac{1}{3})$

ให้ $\arccos\frac{1}{3} = \theta$ จะได้ $\cos\theta = \frac{1}{3}$

เนื่องจาก $\cos\theta > 0$ และ $0 \le \theta \le \pi$ ดังนั้น $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

ใช้รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก และทฤษฎีบทพีทาโกรัส หาคำตอบได้ดังนี้



จากรูป $\cos\theta = \frac{1}{3}$

และ $\operatorname{cosec}\theta = \frac{3}{2\sqrt{2}}$

ดังนั้น $\operatorname{cosec}(\arccos\frac{1}{3}) = \operatorname{cosec}\theta$

$= \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

14) tan (arcsin 0.7030)

ให้ $\arcsin 0.7030 = \theta$ จะได้ $\sin\theta = 0.7030$

หา θ ที่ $\sin\theta = 0.7030$ และ $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

เปิดตารางได้ $\theta = 44^\circ\ 40'$

ดังนั้น $\tan(\arcsin 0.7030) = \tan 44^\circ\ 40' = 0.9884$

15) $\tan(\arcsin(\cos\frac{\pi}{6})) = \tan(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2})$

ให้ $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \theta$ จะได้ $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

หา θ ที่ $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ และ $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

จะได้ว่า $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ จะได้ $\arcsin(\cos\frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{3}$

ดังนั้น $\tan(\arcsin(\cos\frac{\pi}{6})) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

16) cos (arctan 3.2709)

ให้ $\arctan 3.2709 = \theta$ จะได้ $\tan\theta = 3.2709$

หา θ ที่ $\tan\theta = 3.2709$ และ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

เปิดตารางได้ $\tan 73^\circ = 3.2709$

จะได้ $\arctan 3.2709 = 73^\circ$

ดังนั้น $\cos(\arctan 3.2709) = \cos 73^\circ = 0.2924$

17) $\cos^2(\arcsin 0.9261)$

ให้ $\arcsin 0.9261 = \theta$ จะได้ $\sin\theta = 0.9261$

หา θ ที่ $\sin\theta = 0.9261$ และ $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

เปิดตารางได้ $\sin 67^\circ\ 50' = 0.9261$

จะได้ $\arcsin 0.9261 = 67^\circ\ 50'$

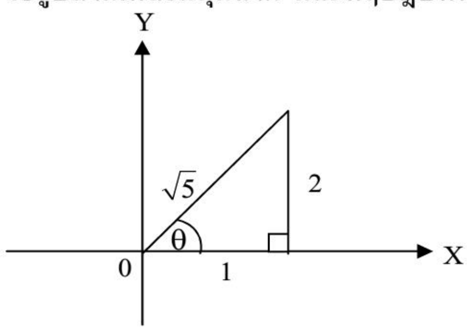
ดังนั้น $\cos^2(\arcsin 0.9261) = \cos^2 67^\circ\ 50' = (0.3773)^2 \approx 0.1424$

18) $\sin(\arctan 2)$

ให้ $\arctan 2 = \theta$ จะได้ $\tan\theta = 2$

เนื่องจาก $\tan\theta > 0$ และ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ดังนั้น $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

ใช้รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก และทฤษฎีบทพีทาโกรัส หาคำตอบได้ดังนี้



จากรูป $\tan\theta = 2$

และ $\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

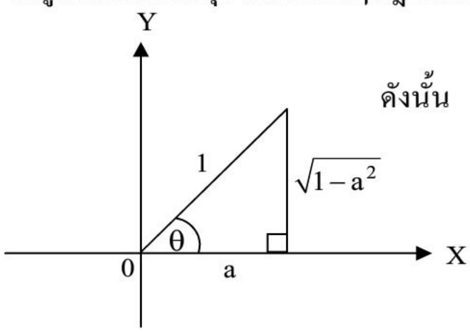
ดังนั้น $\sin(\arctan 2) = \sin\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

19) $\sin(2\arccos a)$, $0 < a \le 1$

ให้ $\arccos a = \theta$ จะได้ $\cos\theta = a$

เนื่องจาก $\cos\theta > 0$ และ $0 \le \theta \le \pi$ ดังนั้น $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

ใช้รูปสามเหลี่ยมมุมฉากและทฤษฎีบทพีทาโกรัสหาคำตอบได้ดังนี้



$\sin\theta = \sqrt{1-a^2}$, $\cos\theta = a$

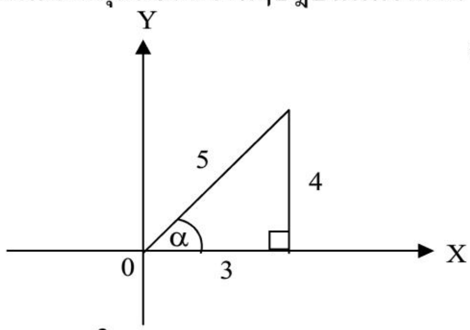
ดังนั้น
$$\begin{aligned}\sin(2\arccos a) &= \sin 2\theta \\ &= 2\sin\theta\cos\theta \\ &= 2(\sqrt{1-a^2})a \\ &= 2a\sqrt{1-a^2}\end{aligned}$$

20) $\sin(\arccos\frac{3}{5} + \arcsin(-\frac{3}{5}))$

ให้ $\arccos\frac{3}{5} = \alpha$ จะได้ $\cos\alpha = \frac{3}{5}$

เนื่องจาก $\cos\alpha > 0$ และ $0 \le \alpha \le \pi$ ดังนั้น $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

ใช้รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก และทฤษฎีบทพีทาโกรัส หาคำตอบได้ดังนี้



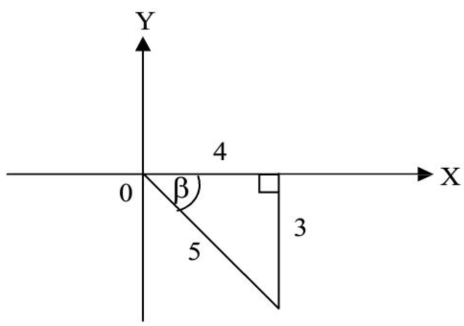
จากรูป $\sin\alpha = \frac{4}{5}$

$\cos\alpha = \frac{3}{5}$

ให้ $\arcsin(-\frac{3}{5}) = \beta$ จะได้ $\sin\beta = -\frac{3}{5}$

เนื่องจาก $\sin\beta < 0$ และ $-\frac{\pi}{2} \le \beta \le \frac{\pi}{2}$ ดังนั้น $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$

ใช้รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก และทฤษฎีบทพีทาโกรัส หาคำตอบได้ดังนี้



จากรูป $\sin\beta = -\frac{3}{5}$

$\cos\beta = \frac{4}{5}$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\sin(\arccos\frac{3}{5} + \arcsin(-\frac{3}{5})) &= \sin(\alpha+\beta)\\ &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\\ &= (\frac{4}{5})(\frac{4}{5}) + (\frac{3}{5})(-\frac{3}{5})\\ &= \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}\end{aligned}$$

4. 1) $\cos(2\arcsin\theta)$

ให้ $\arcsin\theta = x$

$\sin x = \theta$ และ $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

และ $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 1 - 2\theta^2$

ดังนั้น $\cos(2\arcsin\theta) = \cos 2x = 1 - 2\theta^2$

2) $\arcsin\frac{4}{5} + \arccos\frac{12}{13} + \arcsin\frac{16}{65}$

ให้ $\arcsin\frac{4}{5} = x$

ดังนั้น $\sin x = \frac{4}{5}$ และ $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

จะได้ $\cos x = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$

ให้ $\arccos\frac{12}{13} = y$

ดังนั้น $\cos y = \frac{12}{13}$ และ $0 \le y \le \pi$

จะได้ $\sin y = \sqrt{1-\frac{144}{169}} = \frac{5}{13}$

ให้ $\arcsin\frac{16}{65} = z$

ดังนั้น $\sin z = \frac{16}{65}$ และ $-\frac{\pi}{2} \le z \le \frac{\pi}{2}$

จะได้ $\cos z = \sqrt{1-(\frac{16}{65})^2} = \frac{63}{65}$

เพราะว่า $\sin(x+y+z) = \sin(x+(y+z))$

$= \sin x\cos(y+z) + \cos x\sin(y+z)$

$= \sin x(\cos y\cos z - \sin y\sin z) + \cos x(\sin y\cos z + \cos y\sin z)$

$= \frac{4}{5}(\frac{12}{13}\cdot\frac{63}{65} - \frac{5}{13}\cdot\frac{16}{65}) + \frac{3}{5}(\frac{5}{13}\cdot\frac{63}{65} + \frac{12}{13}\cdot\frac{16}{65})$

นั่นคือ $\sin(x+y+z) = 1$

จะได้ $x+y+z = \frac{\pi}{2}$

ดังนั้น $\arcsin\frac{4}{5} + \arccos\frac{12}{13} + \arcsin\frac{16}{65} = \frac{\pi}{2}$

3) $\arcsin\frac{1}{2} + \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$

$-\arcsin(-1) = \frac{\pi}{2}$

ดังนั้น $\arcsin\frac{1}{2} + \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = -\arcsin(-1)$

4) ให้ $\arctan x = \theta$

จะได้ $\tan\theta = x$ และ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

$\sec(\arctan x) = \sec\theta$

$= \sqrt{1+\tan^2\theta}$ $\quad(\sec^2\theta = 1+\tan^2\theta)$

$= \sqrt{1+x^2}$

5) ให้ $\arctan \frac{1}{3} = \theta$

ดังนั้น $\tan\theta = \frac{1}{3}$ และ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

เนื่องจาก $\tan\theta > 0$ จะได้ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ นั่นคือ $0 < 2\theta < \pi$

เพราะว่า $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{3}{4}$

เนื่องจาก $0 < 2\theta < \pi$ และ $\tan 2\theta > 0$ จะได้ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

จะได้ $2\theta = \arctan\frac{3}{4}$

นั่นคือ $2\arctan\frac{1}{3} = \arctan\frac{3}{4}$

6) ให้ $\arcsin x = \theta$

จะได้ $\sin\theta = x$ และ $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

ดังนั้น $\cos\theta = \sqrt{1-x^2}$

เพราะว่า $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2x\sqrt{1-x^2}$

ดังนั้น $\sin(2\arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2}$

5. 1) ให้ $\arctan x = \theta$

จะได้ $\tan\theta = x$ และ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

ดังนั้น $-\tan\theta = -x$

$\tan(-\theta) = -x$ และ $-\frac{\pi}{2} < -\theta < \frac{\pi}{2}$

จะได้ $\arctan(-x) = -\theta$

นั่นคือ $\arctan x + \arctan(-x) = \theta + (-\theta) = 0$

อีกวิธีหนึ่ง

ให้ $\arctan x = \theta$ จะได้ $\tan\theta = x$ และ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

ให้ $\arctan(-x) = \beta$ จะได้ $\tan\beta = -x$ และ $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$

เพราะว่า $\tan(\theta+\beta) = \frac{\tan\theta + \tan\beta}{1-\tan\theta\tan\beta} = \frac{x+(-x)}{1-x(-x)}$

$= 0$

จาก $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ และ $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$ จะได้ $-\pi < \theta+\beta < \pi$

ดังนั้น $\theta+\beta = 0$

นั่นคือ $\arctan x + \arctan(-x) = 0$

2) ให้ $\arcsin x = y$

$\sin y = x$ และ $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

ให้ $\arccos x = z$

$\cos z = x$ และ $0 \le z \le \pi$

ดังนั้น $\sin y = \cos z$ โดยที่ $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$ และ $0 \le z \le \frac{\pi}{2}$

จะได้ $y + z = \frac{\pi}{2}$

นั่นคือ $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$

3) ให้ $\arctan x = A$ จะได้ $\tan A = x$ และ $-\frac{\pi}{2} < A < \frac{\pi}{2}$

ให้ $\arctan y = B$ จะได้ $\tan B = y$ และ $-\frac{\pi}{2} < B < \frac{\pi}{2}$

เมื่อ $-\frac{\pi}{2} < A < \frac{\pi}{2}$ และ $-\frac{\pi}{2} < B < \frac{\pi}{2}$ จะได้ $-\pi < A+B < \pi$

แต่ $\arctan x + \arctan y < -\frac{\pi}{2}$ จะได้ $A+B < -\frac{\pi}{2}$

นั่นคือ $-\pi < A+B < -\frac{\pi}{2}$ และ $0 < \pi + (A+B) < \frac{\pi}{2}$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\tan(\pi + (A+B)) &= \tan(A+B)\\ &= \frac{\tan A + \tan B}{1-\tan A\tan B}\\ &= \frac{x+y}{1-xy}\end{aligned}$$

จะได้
$$\begin{aligned}\pi + (A+B) &= \arctan\frac{x+y}{1-xy}\\ A+B &= -\pi + \arctan\frac{x+y}{1-xy}\end{aligned}$$

นั่นคือ $\arctan x + \arctan y = -\pi + \arctan\frac{x+y}{1-xy}$

4) ให้ $\arctan x = A$ จะได้ $\tan A = x$ และ $-\frac{\pi}{2} < A < \frac{\pi}{2}$

ให้ $\arctan y = B$ จะได้ $\tan B = y$ และ $-\frac{\pi}{2} < B < \frac{\pi}{2}$

เมื่อ $-\frac{\pi}{2} < A < \frac{\pi}{2}$ และ $-\frac{\pi}{2} < B < \frac{\pi}{2}$ จะได้ $-\pi < A+B < \pi$

แต่ $\arctan x + \arctan y > \frac{\pi}{2}$ จะได้ $A + B > \frac{\pi}{2}$

นั่นคือ $\frac{\pi}{2} < A + B < \pi$ และ $-\frac{\pi}{2} < -\pi + (A+B) < 0$

ดังนั้น $\tan(-\pi + (A+B)) = \tan(A+B)$

$$= \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$= \frac{x+y}{1-xy}$$

จะได้ $-\pi + (A+B) = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$

$$A + B = \pi + \arctan \frac{x+y}{1-xy}$$

นั่นคือ $\arctan x + \arctan y = \pi + \arctan \frac{x+y}{1-xy}$

แบบฝึกหัด 2.9 ก

1. 1) $\operatorname{cosec}\theta \cdot \cos\theta = \frac{1}{\sin\theta} \cos\theta$

$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \cot\theta$$

2) $1 + \tan^2(-\theta) = 1 + \frac{\sin^2(-\theta)}{\cos^2(-\theta)}$

$$= \frac{\cos^2(-\theta) + \sin^2(-\theta)}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$= \sec^2\theta$$

3) $\cos\theta(\tan\theta + \cot\theta) = \cos\theta \tan\theta + \cos\theta \cot\theta$

$$= \cos\theta\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right) + \cos\theta\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

$$= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta}$$

$$= \operatorname{cosec}\theta$$

4) $\tan\theta\ \cot\theta - \cos^2\theta \quad = \quad \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\,\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} - \cos^2\theta$

$= \quad 1 - \cos^2\theta$

$= \quad \sin^2\theta$

5) $(\sec\theta - 1)(\sec\theta + 1) \quad = \quad \sec^2\theta - 1$

$= \quad \tan^2\theta$

6) $(\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta) \quad = \quad \sec^2\theta - \tan^2\theta$

$= \quad 1$

7) $\sin^2\theta\,(1 + \cot^2\theta) \quad = \quad \sin^2\theta + \sin^2\theta\ \dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$

$= \quad \sin^2\theta + \cos^2\theta$

$= \quad 1$

8) $(\sin\theta + \cos\theta)^2 + (\sin\theta - \cos\theta)^2 = \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta$

$= \quad 2\sin^2\theta + 2\cos^2\theta$

$= \quad 2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$

$= \quad 2$

9) $\sec^4\theta - \sec^2\theta \quad = \quad \sec^2\theta\,(\sec^2\theta - 1)$

$= \quad (\tan^2\theta + 1)\tan^2\theta$

$= \quad \tan^4\theta + \tan^2\theta$

10) $\sec\theta - \tan\theta \quad = \quad \dfrac{1}{\cos\theta} - \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$= \quad \dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta} \times \dfrac{(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)}$

$= \quad \dfrac{1-\sin^2\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$

$= \quad \dfrac{\cos^2\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$

$= \quad \dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$

11) $3\sin^2\theta + 4\cos^2\theta \quad = \quad 3(1 - \cos^2\theta) + 4\cos^2\theta$

$= \quad 3 - 3\cos^2\theta + 4\cos^2\theta$

$= \quad 3 + \cos^2\theta$

12) $1-\dfrac{\cos^2\theta}{1+\sin\theta}$ $= 1 - \dfrac{1-\sin^2\theta}{1+\sin\theta}$

$= 1 - \dfrac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{1+\sin\theta}$

$= 1 - (1-\sin\theta)$

$= \sin\theta$

13) $\dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$ $= \dfrac{1+\dfrac{1}{\cot\theta}}{1-\dfrac{1}{\cot\theta}}$

$= \dfrac{\cot\theta+1}{\cot\theta-1}$

14) $\dfrac{\sec\theta}{\operatorname{cosec}\theta}+\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $= \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$= \dfrac{2\sin\theta}{\cos\theta}$

$= 2\tan\theta$

15) $\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$ $= \dfrac{1+\dfrac{1}{\operatorname{cosec}\theta}}{1-\dfrac{1}{\operatorname{cosec}\theta}}$

$= \dfrac{\operatorname{cosec}\theta+1}{\operatorname{cosec}\theta-1}$

16) $\dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$ $= \dfrac{1-2\sin\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta(1-\sin\theta)}$

$= \dfrac{1-2\sin\theta+1}{\cos\theta(1-\sin\theta)}$

$= \dfrac{2(1-\sin\theta)}{\cos\theta(1-\sin\theta)}$

$= \dfrac{2}{\cos\theta}$

$= 2\sec\theta$

17) $\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$ $= \dfrac{1}{\dfrac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta}}$

$= \dfrac{1}{1-\cot\theta}$

18) $\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}$ $= \dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta} \times \dfrac{1-\sin\theta}{1-\sin\theta}$

$= \dfrac{1-2\sin\theta+\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}$

$= \dfrac{1-2\sin\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$= \sec^2\theta - \dfrac{2\sin\theta}{\cos^2\theta} + \tan^2\theta$

$= \sec^2\theta - 2\sec\theta\tan\theta + \tan^2\theta$

$= (\sec\theta - \tan\theta)^2$

19) $\dfrac{\cos\theta}{1-\tan\theta} + \dfrac{\sin\theta}{1-\cot\theta}$ $= \dfrac{\cos\theta}{1-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}} + \dfrac{\sin\theta}{1-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}}$

$= \dfrac{\cos^2\theta}{\cos\theta-\sin\theta} + \dfrac{\sin^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$

$= \dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$

$= \dfrac{(\cos\theta-\sin\theta)(\cos\theta+\sin\theta)}{\cos\theta-\sin\theta}$

$= \sin\theta + \cos\theta$

20) $\dfrac{\cot\theta}{1-\tan\theta} + \dfrac{\tan\theta}{1-\cot\theta}$ $= \dfrac{\cot\theta}{1-\tan\theta} + \dfrac{\tan^2\theta}{\tan\theta-1}$

$= \dfrac{\dfrac{1}{\tan\theta} - \tan^2\theta}{1-\tan\theta}$

$= \dfrac{1-\tan^3\theta}{\tan\theta(1-\tan\theta)}$

$= \dfrac{(1-\tan\theta)(1+\tan\theta+\tan^2\theta)}{\tan\theta(1-\tan\theta)}$

$= 1 + \tan\theta + \cot\theta$

2. 1) $\dfrac{\cos x}{\sec x} + \dfrac{\sin x}{\operatorname{cosec} x}$ $= \cos^2 x + \sin^2 x$

$= 1$

2) $\cot\theta\cos\theta + \sin\theta$ $= \dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta} + \dfrac{\sin^2\theta}{\sin\theta}$

$= \dfrac{1}{\sin\theta}$

$= \operatorname{cosec}\theta$

3) $\operatorname{cosec} x - \sin x \quad = \quad \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{\sin^2 x}{\sin x}$

$= \dfrac{\cos^2 x}{\sin x}$

$= \cos x \cot x$

4) $\sin^2\alpha \cot^2\alpha + \tan^2\alpha \cos^2\alpha \quad = \quad \sin^2\alpha \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} + \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cos^2\alpha$

$= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$

$= 1$

5) $\sec\theta - \sec\theta \sin^2\theta \quad = \quad \sec\theta\,(1 - \sin^2\theta)$

$= \dfrac{\cos^2\theta}{\cos\theta}$

$= \cos\theta$

6) $2\sin^2\alpha - 1 \quad = \quad 2(1 - \cos^2\alpha) - 1$

$= 2 - 2\cos^2\alpha - 1$

$= 1 - 2\cos^2\alpha$

7) $\tan^2\theta - \cot^2\theta \quad = \quad (\sec^2\theta - 1) - (\operatorname{cosec}^2\theta - 1)$

$= \sec^2\theta - \operatorname{cosec}^2\theta$

8) $\tan^2\theta - \sin^2\theta \quad = \quad \dfrac{\sin^2\theta - \sin^2\theta\cos^2\theta}{\cos^2\theta}$

$= \dfrac{\sin^2\theta(1 - \cos^2\theta)}{\cos^2\theta}$

$= \dfrac{\sin^2\theta\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$= \tan^2\theta\sin^2\theta$

3. 1) $\sin^2\theta\tan\theta + \cos^2\theta\cot\theta + 2\sin\theta\cos\theta$

$= (1 - \cos^2\theta)\tan\theta + (1 - \sin^2\theta)\cot\theta + 2\sin\theta\cos\theta$

$= \tan\theta - \cos^2\theta\,\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} + \cot\theta - \sin^2\theta\,\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} + 2\sin\theta\cos\theta$

$= \tan\theta + \cot\theta$

2) $\dfrac{2\sin\theta\cos\theta - \cos\theta}{1 - \sin\theta + \sin^2\theta - \cos^2\theta} \quad = \quad \dfrac{\cos\theta(2\sin\theta - 1)}{1 - \sin\theta + \sin^2\theta - 1 + \sin^2\theta}$

$= \dfrac{\cos\theta(2\sin\theta - 1)}{2\sin^2\theta - \sin\theta}$

$$= \frac{\cos\theta(2\sin\theta - 1)}{\sin\theta(2\sin\theta - 1)}$$

$$= \cot\theta$$

4. 1) $\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta)$

$$= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\cos\beta)$$

$$= \cos^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\alpha\sin^2\beta$$

$$= \cos^2\alpha(1 - \sin^2\beta) - (1 - \cos^2\alpha)\sin^2\beta$$

$$= \cos^2\alpha - \cos^2\alpha\sin^2\beta - \sin^2\beta + \cos^2\alpha\sin^2\beta$$

$$= \cos^2\alpha - \sin^2\beta$$

2) $\cos(45^\circ - \theta) - \sin(45^\circ + \theta)$

$$= \cos 45^\circ\cos\theta + \sin 45^\circ\sin\theta - \sin 45^\circ\cos\theta - \cos 45^\circ\sin\theta$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta + \sin\theta - \cos\theta - \sin\theta)$$

$$= 0$$

3) $\tan(45^\circ - \alpha)$

$$= \frac{\tan 45^\circ - \tan\alpha}{1 + \tan 45^\circ\tan\alpha}$$

$$= \frac{1 - \tan\alpha}{1 + \tan\alpha}$$

4) $\cot 2\theta + \tan\theta$

$$= \frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta}{2\sin\theta} - \frac{\sin\theta}{2\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta}{2\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{2\cos\theta}$$

$$= \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin 2\theta}$$

$$= \operatorname{cosec} 2\theta$$

5) $\dfrac{\tan(\alpha - \beta) + \tan\beta}{1 - \tan(\alpha - \beta)\tan\beta}$

$$= \tan((\alpha - \beta) + \beta)$$

$$= \tan\alpha$$

5. 1) $\dfrac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta} = \dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{1+2\cos^2\theta-1}$

$= \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$= \tan\theta$

2) $\cot\alpha - \tan\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$= \dfrac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$

$= \dfrac{2\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$

$= 2\cot 2\alpha$

3) $(\sin\frac{\theta}{2} - \cos\frac{\theta}{2})^2 = \sin^2\frac{\theta}{2} - 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2}$

$= 1 - \sin 2(\frac{\theta}{2})$

$= 1 - \sin\theta$

4) $\dfrac{\sin 2\theta + \sin\theta}{\cos 2\theta + \cos\theta + 1} = \dfrac{2\sin\theta\cos\theta + \sin\theta}{2\cos^2\theta - 1 + \cos\theta + 1}$

$= \dfrac{\sin\theta(2\cos\theta+1)}{\cos\theta(2\cos\theta+1)}$

$= \tan\theta$

6. 1) $\cos 3\theta = \cos(2\theta + \theta)$

$= \cos 2\theta \cos\theta - \sin 2\theta \sin\theta$

$= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta$

$= 2\cos^3\theta - \cos\theta + 2\cos^3\theta - 2\cos\theta$

$= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

2) $\cos 4\theta = 2\cos^2 2\theta - 1$

$= 2(2\cos^2\theta - 1)^2 - 1$

$= 2(4\cos^4\theta - 4\cos^2\theta + 1) - 1$

$= 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 2 - 1$

$= 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$

3) $\tan 3\theta = \tan(2\theta + \theta)$

$$= \frac{\tan 2\theta + \tan\theta}{1 - \tan 2\theta \tan\theta}$$

$$= \frac{\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} + \tan\theta}{1 - \dfrac{2\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta}}$$

$$= \frac{2\tan\theta + \tan\theta(1-\tan^2\theta)}{1-\tan^2\theta - 2\tan^2\theta}$$

$$= \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}$$

7. 1) $\sin A = \sin(180^\circ - (B + C))$

$= \sin(B + C)$

2) $\cos A = \cos(180^\circ - (B + C))$

$= -\cos(B + C)$

3) $\sin A + \sin B + \sin C = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \sin C$

$$= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \sin[180^\circ - (A+B)]$$

$$= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \sin(A+B)$$

$$= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$

$$= 2\sin\frac{A+B}{2}(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2})$$

$$= 2\sin(\frac{180^\circ - C}{2})2\cos\frac{(\frac{A-B}{2} + \frac{A+B}{2})}{2}\cos\frac{(\frac{A-B}{2} - \frac{A+B}{2})}{2}$$

$$= 4\sin(90^\circ - \frac{C}{2})\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$= 4(\sin 90^\circ\cos\frac{C}{2} - \cos 90^\circ \sin\frac{C}{2})\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$= 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

4) $\cos A + \cos B + \cos C = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \cos C$

$$= 2\cos(\frac{180^\circ - C}{2})\cos\frac{A-B}{2} + (1 - 2\sin^2\frac{C}{2})$$

$$= 1 + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} - 2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$= 1 + 2\sin\frac{C}{2}(\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{180^\circ - (A+B)}{2})$$

$$= \quad 1+2\sin\frac{C}{2}(\cos\frac{A-B}{2}-\sin(90^\circ-\frac{A+B}{2})$$

$$= \quad 1+2\sin\frac{C}{2}(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2})$$

$$= \quad 1+2\sin\frac{C}{2}[-2\sin\left(\frac{\frac{A-B}{2}+\frac{A+B}{2}}{2}\right)\sin\left(\frac{\frac{A-B}{2}-\frac{A+B}{2}}{2}\right)]$$

$$= \quad 1+2\sin\frac{C}{2}[-2\sin\frac{A}{2}\sin(-\frac{B}{2})]$$

$$= \quad 1+2\sin\frac{C}{2}[-2\sin\frac{A}{2}(-\sin\frac{B}{2})]$$

$$= \quad 1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

8. 1) $\dfrac{\sin 8\theta+\sin 2\theta}{\cos 8\theta+\cos 2\theta} = \dfrac{\sin(5\theta+3\theta)+\sin(5\theta-3\theta)}{\cos(5\theta+3\theta)+\cos(5\theta-3\theta)}$

$$= \frac{2\sin 5\theta\cos 3\theta}{2\cos 5\theta\cos 3\theta}$$

$$= \tan 5\theta$$

2) $\sin\theta+\sin 3\theta+\sin 5\theta+\sin 7\theta = \sin(2\theta+\theta)+\sin(2\theta-\theta)+\sin(6\theta+\theta)+\sin(6\theta-\theta)$

$$= 2\sin 2\theta\cos\theta+2\sin 6\theta\cos\theta$$

$$= 2\cos\theta(\sin 2\theta+\sin 6\theta)$$

$$= 2\cos\theta[\sin(4\theta+2\theta)+\sin(4\theta-2\theta)]$$

$$= 2\cos\theta\, 2\sin 4\theta\cos 2\theta$$

$$= 4\cos\theta\cos 2\theta\sin 4\theta$$

3) $\dfrac{\sin\theta+\sin 3\theta+\sin 5\theta}{\cos\theta+\cos 3\theta+\cos 5\theta} = \dfrac{\sin 3\theta+[\sin(3\theta+2\theta)+\sin(3\theta-2\theta)]}{\cos 3\theta+[\cos(3\theta+2\theta)+\cos(3\theta-2\theta)]}$

$$= \frac{\sin 3\theta+2\sin 3\theta\cos 2\theta}{\cos 3\theta+2\cos 3\theta\cos 2\theta}$$

$$= \frac{\sin 3\theta[1+2\cos 2\theta]}{\cos 3\theta[1+2\cos 2\theta]}$$

$$= \tan 3\theta$$

4) $\cos^2 A+\cos^2(60^\circ+A)+\cos^2(60^\circ-A)$

$$= \cos^2 A+[\cos 60^\circ\cos A-\sin 60^\circ\sin A]^2+[\cos 60^\circ\cos A+\sin 60^\circ\sin A]^2$$

$$= \cos^2 A+\left[\frac{1}{2}\cos A-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A\right]^2+\left[\frac{1}{2}\cos A+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A\right]^2$$

$$= \cos^2 A+\frac{1}{4}\cos^2 A-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A\sin A+\frac{3}{4}\sin^2 A+\frac{1}{4}\cos^2 A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A\sin A+\frac{3}{4}\sin^2 A$$

$$= \frac{3}{2}\cos^2 A + \frac{3}{2}\sin^2 A$$

$$= \frac{3}{2}(\cos^2 A + \sin^2 A)$$

$$= \frac{3}{2}$$

5) **วิธีที่ 1** $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{2}\cos 20^\circ (2\cos 80^\circ \cos 40^\circ)$

$$= \frac{1}{2}\cos 20^\circ (\cos 120^\circ + \cos 40^\circ)$$

$$= \frac{1}{2}\cos 20^\circ (-\frac{1}{2} + \cos 40^\circ)$$

$$= -\frac{1}{4}\cos 20^\circ + \frac{1}{2}\cos 20^\circ \cos 40^\circ$$

$$= -\frac{1}{4}\cos 20^\circ + \frac{1}{4}(\cos 60^\circ + \cos 20^\circ)$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \quad = \quad \frac{1}{8}$$

วิธีที่ 2 $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = 2\sin 20^\circ (\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ) \times \frac{1}{2\sin 20^\circ}$

$$= (2\sin 20^\circ \cos 20^\circ)(\cos 40^\circ \cos 80^\circ) \times \frac{1}{2\sin 20^\circ}$$

$$= (2\sin 40^\circ \cos 40^\circ)\cos 80^\circ \times \frac{1}{4\sin 20^\circ}$$

$$= 2\sin 80^\circ \cos 80^\circ \times \frac{1}{8\sin 20^\circ}$$

$$= \sin 160^\circ \times \frac{1}{8\sin 20^\circ}$$

$$= \sin(180^\circ - 20^\circ)\frac{1}{8\sin 20^\circ}$$

$$= \sin 20^\circ \times \frac{1}{8\sin 20^\circ}$$

$$= \frac{1}{8}$$

แบบฝึกหัด 2.9 ข

1\. 1) $2\cos^2\theta + \cos\theta = 0$

$\cos\theta(2\cos\theta + 1) = 0$

$\cos\theta = 0$ หรือ $2\cos\theta + 1 = 0$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ หรือ $\theta = \frac{3\pi}{2}$ $\quad\quad$ $\cos\theta = -\frac{1}{2}$

$\theta = \frac{2\pi}{3}$ หรือ $\theta = \frac{4\pi}{3}$

ดังนั้น $\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ และ $\frac{3\pi}{2}$ เป็นคำตอบของสมการ

2) $2\sin^2\theta - \sin\theta - 1 = 0$

$(2\sin\theta + 1)(\sin\theta - 1) = 0$

$2\sin\theta + 1 = 0$ หรือ $\sin\theta - 1 = 0$

$\sin\theta = -\frac{1}{2}$ $\quad\quad$ $\sin\theta = 1$

$\theta = \frac{7\pi}{6}$ หรือ $\theta = \frac{11\pi}{6}$ $\quad\quad$ $\theta = \frac{\pi}{2}$

ดังนั้น $\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}$ และ $\frac{11\pi}{6}$ เป็นคำตอบของสมการ

3) $\tan\theta = 2\sin\theta$

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - 2\sin\theta = 0$ โดยที่ $\cos\theta \neq 0$

$\sin\theta(\frac{1}{\cos\theta} - 2) = 0$

$\sin\theta = 0$ หรือ $\frac{1}{\cos\theta} - 2 = 0$

$\theta = 0$ หรือ $\theta = \pi$ $\quad\quad$ $\frac{1}{\cos\theta} = 2$

$\cos\theta = \frac{1}{2}$

$\theta = \frac{\pi}{3}$ หรือ $\theta = \frac{5\pi}{3}$

ดังนั้น $0, \frac{\pi}{3}, \pi$ และ $\frac{5\pi}{3}$ เป็นคำตอบของสมการ

2\. 1) $4\sin^2 x - 3 = 0$

จะได้ $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ หรือ $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ดังนั้น $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ และ $\frac{5\pi}{3}$ เป็นคำตอบของสมการ

2) $\tan x(\sin x + 1) = 0$ โดยที่ $\cos\theta \neq 0$

ถ้า $\tan x = 0$ จะได้ $x = 0$ หรือ $x = \pi$

ถ้า $\sin x + 1 = 0$ นั่นคือ $\sin x = -1$ จะได้ $x = \frac{3\pi}{2}$

แต่ $\tan\frac{3\pi}{2}$ หาค่าไม่ได้

ดังนั้น 0 และ π เป็นคำตอบของสมการ

3) $\cos x(2\cos x - \sqrt{3}) = 0$

ถ้า $\cos x = 0$ จะได้ $x = \frac{\pi}{2}$ หรือ $x = \frac{3\pi}{2}$

ถ้า $2\cos x - \sqrt{3} = 0$ นั่นคือ $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ จะได้ $x = \frac{\pi}{6}$ หรือ $x = \frac{11\pi}{6}$

ดังนั้น $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ และ $\frac{11\pi}{6}$ เป็นคำตอบของสมการ

4) $\sin x(4\sin^2 x - 1) = 0$

ถ้า $\sin x = 0$ จะได้ $x = 0$ หรือ $x = \pi$

ถ้า $4\sin^2 x - 1 = 0$

$\sin x = \frac{1}{2}$ หรือ $\sin x = -\frac{1}{2}$

จะได้ x เป็น $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$ หรือ $\frac{11\pi}{6}$

ดังนั้น $0, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7\pi}{6}$ และ $\frac{11\pi}{6}$ เป็นคำตอบของสมการ

5) $\sin^2 x - \cos x + 5 = 0$

$1 - \cos^2 x - \cos x + 5 = 0$

$\cos^2 x + \cos x - 6 = 0$ จะได้ $(\cos x + 3)(\cos x - 2) = 0$

ถ้า $\cos x + 3 = 0$ จะได้ $\cos x = -3$

ถ้า $\cos x - 2 = 0$ จะได้ $\cos x = 2$

แต่ $|\cos\theta| \leq 1$ เสมอ ดังนั้น จึงไม่มีค่า x ใดที่สอดคล้องกับสมการ

6) $3\sec x - \cos x + 2 = 0$

$\frac{3}{\cos x} - \cos x + 2 = 0$ โดยที่ $\cos x \neq 0$

$3 - \cos^2 x + 2\cos x = 0$ นั่นคือ $(\cos x - 3)(\cos x + 1) = 0$

ถ้า $\cos x - 3 = 0$ ไม่มีค่า x ใดที่สอดคล้องกับสมการนี้

ถ้า $\cos x + 1 = 0$ นั่นคือ $\cos x = -1$ จะได้ $x = \pi$

ดังนั้น π เป็นคำตอบของสมการ

7) $\sqrt{3}\operatorname{cosec}^2 x + 2\operatorname{cosec} x \quad = \quad 0$

$\dfrac{\sqrt{3}}{\sin^2 x} + \dfrac{2}{\sin x} \quad = \quad 0$ โดยที่ $\sin x \neq 0$

$\sqrt{3} + 2\sin x \quad = \quad 0$ โดยที่ $\sin x \neq 0$

$\sin x \quad = \quad -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ จะได้ $x = \dfrac{4\pi}{3}$ หรือ $x = \dfrac{5\pi}{3}$

ดังนั้น $\dfrac{4\pi}{3}$ และ $\dfrac{5\pi}{3}$ เป็นคำตอบของสมการ

8) $\cos 2x + 2\cos^2 \dfrac{x}{2} \quad = \quad 1$

$2\cos^2 x - 1 + (2\cos^2 \dfrac{x}{2} - 1) \quad = \quad 0$

$2\cos^2 x - 1 + \cos x \quad = \quad 0$

$(2\cos x - 1)(\cos x + 1) \quad = \quad 0$

ถ้า $2\cos x - 1 = 0$ นั่นคือ $\cos x = \dfrac{1}{2}$ จะได้ $x = \dfrac{\pi}{3}$ หรือ $x = \dfrac{5\pi}{3}$

ถ้า $\cos x + 1 = 0$ นั่นคือ $\cos x = -1$ จะได้ $x = \pi$

ดังนั้น $\dfrac{\pi}{3}$, π และ $\dfrac{5\pi}{3}$ เป็นคำตอบของสมการ

9) $2\sin^2 x - 3\cos x - 3 \quad = \quad 0$

$2(1 - \cos^2 x) - 3\cos x - 3 \quad = \quad 0$

$2\cos^2 x + 3\cos x + 1 \quad = \quad 0$

$(2\cos x + 1)(\cos x + 1) \quad = \quad 0$

ถ้า $2\cos x + 1 = 0$ นั่นคือ $\cos x = -\dfrac{1}{2}$ จะได้ $x = \dfrac{2\pi}{3}$ หรือ $x = \dfrac{4\pi}{3}$

ถ้า $\cos x + 1 = 0$ นั่นคือ $\cos x = -1$ จะได้ $x = \pi$

ดังนั้น $\dfrac{2\pi}{3}$, π และ $\dfrac{4\pi}{3}$ เป็นคำตอบของสมการ

10) $\cot x + 2\sin x \quad = \quad \operatorname{cosec} x$

$\cos x + 2\sin^2 x \quad = \quad 1$ โดยที่ $\sin x \neq 0$

$2\cos^2 x - \cos x - 1 \quad = \quad 0$

$(2\cos x + 1)(\cos x - 1) \quad = \quad 0$

ถ้า $2\cos x + 1 = 0$ นั่นคือ $\cos x = -\dfrac{1}{2}$ จะได้ $x = \dfrac{2\pi}{3}$ หรือ $x = \dfrac{4\pi}{3}$

ถ้า $\cos x - 1 = 0$ นั่นคือ $\cos x = 1$ จะได้ $x = 0$

แต่ $x = 0$ ทำให้ $\sin x = 0$

ดังนั้น $\dfrac{2\pi}{3}$ และ $\dfrac{4\pi}{3}$ เป็นคำตอบของสมการ

3. 1) $2\sin\theta - 1 = 0$ นั่นคือ $\sin\theta = \frac{1}{2}$ จะได้ $\theta = 30^\circ$ หรือ $\theta = 150^\circ$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{30^\circ, 150^\circ\}$

2) $3\tan^2\theta - 1 = 0$ นั่นคือ $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ หรือ $\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

จะได้ θ เป็น 30°, 150°, 210° หรือ 330°

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{30^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 330^\circ\}$

3) $\sqrt{3}\operatorname{cosec}^2\theta + 2\operatorname{cosec}\theta = 0$ จะได้ $\operatorname{cosec}\theta(\sqrt{3}\operatorname{cosec}\theta + 2) = 0$ เมื่อ $\sin\theta \neq 0$

ถ้า $\operatorname{cosec}\theta = 0$ ไม่มีค่า θ ที่ทำให้ $\operatorname{cosec}\theta = 0$

ถ้า $\sqrt{3}\operatorname{cosec}\theta + 2 = 0$ นั่นคือ $\operatorname{cosec}\theta = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ หรือ $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

จะได้ $\theta = 240^\circ$ หรือ $\theta = 300^\circ$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{240^\circ, 300^\circ\}$

4) $4\tan^2\theta - 3\sec^2\theta = 0$

$4\tan^2\theta - 3(1 + \tan^2\theta) = 0$ จะได้ $\tan^2\theta = 3$ โดยที่ $\cos\theta \neq 0$

นั่นคือ $\tan\theta = \sqrt{3}$ หรือ $\tan\theta = -\sqrt{3}$

จะได้ว่า θ คือ 60°, 120°, 240°, 300°

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{60^\circ, 120^\circ, 240^\circ, 300^\circ\}$

5) $2\cos^2\theta + 2\cos 2\theta = 1$ หรือ $2\cos^2\theta + 2(2\cos^2\theta - 1) = 1$

นั่นคือ $6\cos^2\theta - 3 = 0$ หรือ $\cos^2\theta = \frac{1}{2}$

นั่นคือ $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ หรือ $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

จะได้ว่า θ คือ 45°, 135°, 225°, 315°

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ\}$

6) $\sin 2\theta - \cos^2\theta + 3\sin^2\theta = 0$

$2\sin\theta\cos\theta - \cos^2\theta + 3\sin^2\theta = 0$

$(3\sin\theta - \cos\theta)(\sin\theta + \cos\theta) = 0$

ถ้า $3\sin\theta - \cos\theta = 0$ จะได้ $\tan\theta = \frac{1}{3} \approx 0.3333$

จากตาราง $\tan 18^\circ 30' = 0.3346$ และ $\tan 18^\circ 20' = 0.3314$

ค่าของฟังก์ชันเพิ่มขึ้น 0.0032 ค่าของมุมเพิ่มขึ้น 10 ลิบดา

ค่าของฟังก์ชันเพิ่มขึ้น 0.0019 ค่าของมุมเพิ่มขึ้น $\frac{10 \times 0.0019}{0.0032} = 5.94$ ลิบดา

จะได้ $\tan 18^\circ\ 25.9' = 0.3333$

ดังนั้น ถ้า $\tan\theta = \frac{1}{3}$ จะได้ $\theta \approx 18^\circ 26'$ หรือ $\theta \approx 198^\circ 26'$

ถ้า $\sin\theta + \cos\theta = 0$ นั่นคือ $\tan\theta = -1$ จะได้ $\theta = 135^\circ$ หรือ $\theta = 315^\circ$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{ 18^\circ 26',\ 198^\circ 26', 135^\circ, 315^\circ \}$

7) $4\operatorname{cosec}\theta - 4\sin\theta = 2\sqrt{2}\cot\theta$ โดยที่ $\sin\theta \neq 0$

คูณด้วย $\sin\theta$ จะได้ $4 - 4\sin^2\theta = 2\sqrt{2}\cos\theta$

$$2 - 2 + 2\cos^2\theta = \sqrt{2}\cos\theta$$

$$2\cos^2\theta - \sqrt{2}\cos\theta = 0$$

นั่นคือ $\cos\theta\,(2\cos\theta - \sqrt{2}) = 0$

ถ้า $\cos\theta = 0$ จะได้ $\theta = 90^\circ$ หรือ $\theta = 270^\circ$

ถ้า $2\cos\theta - \sqrt{2} = 0$ นั่นคือ $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ จะได้ $\theta = 45^\circ$ หรือ $\theta = 315^\circ$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{ 45^\circ, 90^\circ, 270^\circ, 315^\circ \}$

8) $\cos\theta + 4\sin\theta - \sin 2\theta = 2$

$$\cos\theta + 4\sin\theta - 2\sin\theta\cos\theta - 2 = 0$$

$$\cos\theta - 2 - 2\sin\theta(\cos\theta - 2) = 0$$

$$(\cos\theta - 2)(1 - 2\sin\theta) = 0$$

ถ้า $\cos\theta - 2 = 0$ นั่นคือ $\cos\theta = 2$ ซึ่งไม่มีค่า θ ที่สอดคล้องกับสมการนี้

ถ้า $1 - 2\sin\theta = 0$ นั่นคือ $\sin\theta = \frac{1}{2}$ จะได้ $\theta = 30^\circ$ หรือ $\theta = 150^\circ$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{30^\circ, 150^\circ\}$

9) $4\cos^4\theta = (\sin 2\theta)^2$ หรือ $4\cos^4\theta - (2\sin\theta\cos\theta)^2 = 0$

นั่นคือ $4\cos^4\theta - 4\sin^2\theta\cos^2\theta = 0$

ดังนั้น $4\cos^2\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0$

ถ้า $4\cos^2\theta = 0$ นั่นคือ $\cos\theta = 0$ จะได้ $\theta = 90^\circ$ หรือ $\theta = 270^\circ$

ถ้า $\cos^2\theta - \sin^2\theta = 0$ นั่นคือ $1 - 2\sin^2\theta = 0$

ดังนั้น $\sin^2\theta = \frac{1}{2}$ นั่นคือ $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ หรือ $\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

จะได้ว่า θ คือ $45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{ 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 270^\circ, 315^\circ \}$

10) $\sin 5\theta + \sin 3\theta = 0$

$2\sin\frac{(5\theta+3\theta)}{2}\cos\frac{(5\theta-3\theta)}{2} = 0$ นั่นคือ $2\sin 4\theta\cos\theta = 0$

ถ้า $\cos\theta = 0$ จะได้ $\theta = 90^\circ$ หรือ $\theta = 270^\circ$

ถ้า $\sin 4\theta = 0$ จะได้ 4θ คือ $0^\circ, 180^\circ, 360^\circ, 540^\circ, 720^\circ, 900, 1080, 1260^\circ$

θ คือ $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ, 225^\circ, 270^\circ, 315^\circ$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ, 225^\circ, 270^\circ, 315^\circ\}$

11) $\sin 3\theta\cos\theta - \cos 3\theta\sin\theta = \cos\theta$

$\sin(3\theta - \theta) = \cos\theta$

$2\sin\theta\cos\theta = \cos\theta$

$(2\sin\theta - 1)\cos\theta = 0$

ถ้า $\cos\theta = 0$ จะได้ $\theta = 90^\circ$ หรือ $\theta = 270^\circ$

ถ้า $2\sin\theta - 1 = 0$ นั่นคือ $\sin\theta = \frac{1}{2}$ จะได้ $\theta = 30^\circ$ หรือ $\theta = 150^\circ$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{30^\circ, 90^\circ, 150^\circ, 270^\circ\}$

4. 1) $4\sin^2\theta = 1$ จะได้ $\sin\theta = \frac{1}{2}$ หรือ $\sin\theta = -\frac{1}{2}$

นั่นคือ $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ เป็นคำตอบของสมการ

ค่าทั่วไปของ θ ที่จะทำให้สมการเป็นจริง

คือ $2n\pi+\frac{\pi}{6}, 2n\pi+\frac{5\pi}{6}, 2n\pi+\frac{7\pi}{6}, 2n\pi+\frac{11\pi}{6}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

หรือ $n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{\theta \mid \theta = n\pi+\frac{\pi}{6}$ หรือ $\theta = n\pi-\frac{\pi}{6}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม$\}$

2) $\tan^2\theta - 3 = 0$ จะได้ $\tan\theta = \sqrt{3}$ หรือ $\tan\theta = -\sqrt{3}$

ดังนั้น คำตอบของสมการ คือ $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

ค่าทั่วไปของ x ที่ทำให้สมการนี้เป็นจริง

คือ $2n\pi+\frac{\pi}{3}, 2n\pi+\frac{2\pi}{3}, 2n\pi+\frac{4\pi}{3}, 2n\pi+\frac{5\pi}{3}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

หรือ $n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{\theta \mid \theta = n\pi+\frac{\pi}{3}$ หรือ $\theta = n\pi-\frac{\pi}{3}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม$\}$

3) $\tan\theta\ \sin\theta\ +\ \tan\theta\ =\ 0$ นั่นคือ $\tan\theta\,(\sin\theta\ +1)\ =\ 0$

ถ้า $\tan\theta\ =\ 0$ จะได้ $\theta\ =\ 0$ หรือ $\theta\ =\ \pi$

ถ้า $\sin\theta + 1\ =\ 0$ นั่นคือ $\sin\theta\ =\ -1$ จะได้ $\theta\ =\ \dfrac{3\pi}{2}$

แต่ถ้า $\theta\ =\ \dfrac{3\pi}{2}$ แล้ว $\tan\theta$ หาค่าไม่ได้

ดังนั้น ค่าทั่วไปของ θ ที่ทำให้สมการนี้เป็นจริงคือ $2n\pi + 0, 2n\pi + \pi$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

หรือ $n\pi$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{\,\theta \mid \theta\ =\ n\pi$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม $\}$

4) $\sec^2\theta - 2\tan\theta\ =\ 0$ นั่นคือ $1 + \tan^2\theta\ - 2\tan\theta\ =\ 0$

จะได้ $(\tan\theta\ - 1)^2\ =\ 0$ หรือ $\tan\theta\ - 1\ =\ 0$

นั่นคือ $\tan\theta\ =\ 1$ จะได้ $\theta\ =\ \dfrac{\pi}{4}$ หรือ $\theta\ =\ \dfrac{5\pi}{4}$

ดังนั้น ค่าทั่วไปของ θ ที่ทำให้สมการนี้เป็นจริงคือ $2n\pi + \dfrac{\pi}{4},\ \ 2n\pi + \dfrac{5\pi}{4}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

หรือ $n\pi + \dfrac{\pi}{4}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{\,\theta \mid \theta\ =\ n\pi + \dfrac{\pi}{4}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม $\}$

5) $\cos 2\theta\ =\ \sin\theta$

$1 - 2\ \sin^2\theta\ =\ \sin\theta$ นั่นคือ $(2\sin\theta\ - 1)\,(\sin\theta\ + 1)\ =\ 0$

ถ้า $2\sin\theta\ - 1\ =\ 0$ นั่นคือ $\sin\theta\ =\ \dfrac{1}{2}$ จะได้ $\theta\ =\ \dfrac{\pi}{6}$ หรือ $\theta\ =\ \dfrac{5\pi}{6}$

ถ้า $\sin\theta\ + 1\ =\ 0$ นั่นคือ $\sin\theta\ =\ -1$ จะได้ $\theta\ =\ \dfrac{3\pi}{2}$

ค่าทั่วไปของ θ คือ $2n\pi + \dfrac{\pi}{6},\ \ 2n\pi + \dfrac{5\pi}{6},\ \ 2n\pi + \dfrac{3\pi}{2}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

หรือ $n\pi + \dfrac{\pi}{6},\ \ 2n\pi + \dfrac{3\pi}{2}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{\,\theta \mid \theta\ = n\pi + \dfrac{\pi}{6}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม$\}$

หรือ $\{\,\theta \mid \theta\ =\ 2n\pi + \dfrac{3\pi}{2}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม$\}$

แบบฝึกหัด 2.10

1. 1) จากกฎของโคไซน์ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$= (40)^2 + (60)^2 - 2 \times 40 \times 60 \;\cos 60^\circ$

$= 2800$

จะได้ $a = 20\sqrt{7}$

ดังนั้น $a = 20\sqrt{7}$ หน่วย

2) $b = 2\sqrt{19}$ หน่วย

3) $c = 254.34$ หน่วย

4) จากกฎของโคไซน์ $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

$= \dfrac{12^2 + 8^2 - 7^2}{2 \times 12 \times 8} = 0.8281$

จากตาราง $\cos 34^\circ = 0.8290$ และ $\cos 34^\circ 10' = 0.8274$

ค่าของโคไซน์เพิ่มขึ้น 0.0016 ค่าของมุมลดลง 10 ลิบดา

ค่าของโคไซน์เพิ่มขึ้น 0.0007 ค่าของมุมลดลง $\dfrac{10 \times 0.0007}{0.0016} = 4.4$ ลิบดา

$\cos\,(34^\circ 10' - 4.4') = 0.8274 + 0.0007$

$\cos\; 34^\circ 5.6' = 0.8281$

ดังนั้น มุม B มีขนาด $34^\circ 5.6'$

5) จากกฎของโคไซน์ $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$= \dfrac{(3.7)^2 + (5.2)^2 - (8.4)^2}{2 \times 3.7 \times 5.2} = -0.7752$

จากตาราง $\cos 39^\circ 10' = 0.7753$ และ $\cos 39^\circ\, 20' = 0.7735$

ค่าของโคไซน์ลดลง 0.0018 ค่าของมุมเพิ่มขึ้น 10 ลิบดา

ค่าของโคไซน์ลดลง 0.0001 ค่าของมุมเพิ่มขึ้น $\dfrac{10 \times 0.0001}{0.0018} = 0.56$ ลิบดา

ดังนั้น $\cos 39^\circ\; 10.56' = 0.7752$

$\cos\,(180^\circ - 39^\circ 10.56') = -\cos 39^\circ\; 10.56' = -0.7752$

$\cos 140^\circ 49.44' = -0.7752$

ดังนั้น มุม A มีขนาด $140^\circ 49.44'$

2. 1) เนื่องจาก $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$

ดังนั้น $\hat{B} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{C} = 180^\circ - 45^\circ - 60^\circ = 75^\circ$

จากกฎของไซน์ $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

$$\frac{\sin 75^\circ}{20} = \frac{\sin 60^\circ}{c}$$

ดังนั้น $c = \frac{20\sin 60^\circ}{\sin 75^\circ} \approx \frac{20 \times 0.8660}{0.9659} \approx 17.93$

นั่นคือ $c = 17.93$ หน่วย

2) $a = 16.06$ หน่วย

3) $a = 14.93$ หน่วย และ $c = 13.39$ หน่วย

3. 1) พื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC $= \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \times 15 \times 20 \sin 65^\circ$

$\approx 150 \times 0.9063 = 135.9450$

ดังนั้น รูปสามเหลี่ยม ABC มีพื้นที่ประมาณ 135.9450 ตารางหน่วย

2) รูปสามเหลี่ยม ABC มีพื้นที่ประมาณ 213.9280 ตารางหน่วย

3) รูปสามเหลี่ยม ABC มีพื้นที่ประมาณ 179.107 ตารางหน่วย

4. 1) $\hat{A} = 25^\circ$, $b = 30.74$, $c = 20.36$

2) $\hat{C} = 37^\circ$, $a = 85.82$, $b = 57.56$

3) $\hat{B} = 60^\circ$, $\hat{C} = 90^\circ$, $c = 2$ หรือ $\hat{B} = 120^\circ$, $\hat{C} = 30^\circ$, $c = 1$

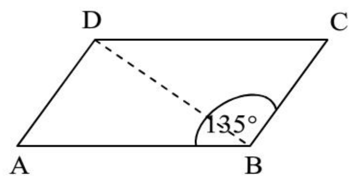
4) $\hat{A} = 45^\circ$, $\hat{C} = 75^\circ$, $a = 2\sqrt{3}$ หรือ $\hat{A} = 15^\circ$, $\hat{C} = 105^\circ$, $a = 3-\sqrt{3}$

5) $\hat{A} = 75^\circ$, $\hat{C} = 60^\circ$, $a = 3.86$ หรือ $\hat{A} = 15^\circ$, $\hat{C} = 120^\circ$, $a = 1.035$

6) $\hat{A} = 36^\circ 52'$, $\hat{B} = 53^\circ 8'$, $\hat{C} = 90^\circ$

7) $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ$

5.



ให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $A\hat{B}C = 135^\circ$

ด้าน AB ยาว 10 เซนติเมตรและด้าน AD ยาว 5 เซนติเมตร

$D\hat{A}B = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$

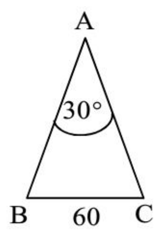
พิจารณารูปสามเหลี่ยมABD จะได้ $BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2AD \cdot AB \cos 45^\circ$

$\approx 25 + 100 - (2 \times 5 \times 10 \times 0.707) = 54.3$

$BD \approx 7.36$

ดังนั้น เส้นทแยงมุมเส้นสั้นของรูปสี่เหลี่ยมนี้ยาวประมาณ 7.36 เซนติเมตร

6.



ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มีฐาน BC ยาว 60 หน่วย

และ $B\hat{A}C = 30^\circ$

ดังนั้น $A\hat{B}C = \dfrac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$

$$\frac{\sin B\hat{A}C}{BC} = \frac{\sin A\hat{B}C}{AC}$$

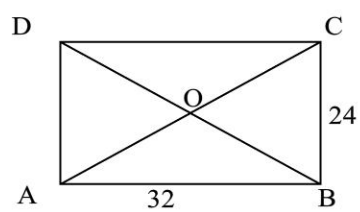
$$AC = \frac{\sin 75^\circ \times 60}{\sin 30^\circ}$$

$\approx 0.9659 \times 60 \times 2 = 115.908$

ดังนั้น $AB + AC + BC \approx 2 \times 115.908 + 60 = 291.816$

ดังนั้น เส้นรอบรูปของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วนี้ยาวประมาณ 291.816 หน่วย

7.



ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ด้าน AB ยาว 32 เซนติเมตร

ด้าน BC ยาว 24 เซนติเมตร

ให้เส้นทแยงมุม AC และ BD ตัดกันที่ O

พิจารณารูปสามเหลี่ยม ABC จะได้ $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 1024 + 576$

$AC = 40$ แต่ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

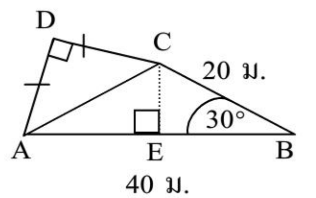
ดังนั้น AC = BD = 40 จะได้ $AO = OD = \dfrac{40}{2} = 20$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม AOD จะได้ $\cos A\hat{O}D = \dfrac{AO^2 + OD^2 - AD^2}{2 \cdot AO \cdot OD} = \dfrac{400 + 400 - 576}{2 \times 20 \times 20}$

$= 0.28$

จากตาราง $A\hat{O}D \approx 73^\circ 45'$

ดังนั้น มุมแหลมที่เกิดจากเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมนี้ตัดกันมีขนาดประมาณ $73^\circ 45'$

8. 

ABCD เป็นที่ดินของกล้า ซึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มี

$AD = DC$, $A\hat{B}C = 30^\circ$, $\overline{BC}$ ยาว 20 เมตร, $\overline{AB}$ ยาว 40 เมตร

พื้นที่ของ$\square$ABCD = พื้นที่ของ ΔADC + พื้นที่ของ ΔABC

$CE \quad = \quad BC \sin 30^\circ \quad = \quad 20 \times \frac{1}{2} \quad = \quad 10$

พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC $= \frac{1}{2} \times AB \times CE = \frac{1}{2} \times 40 \times 10 = 200$

$AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2AB \cdot BC \cos 30^\circ = 2000 - 800\sqrt{3}$

แต่ $AC^2 = AD^2 + DC^2 = 2\,AD^2$

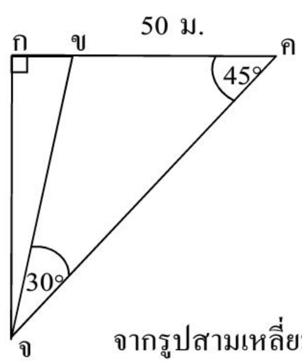
จะได้ $AD^2 = \frac{1}{2} AC^2 = \frac{1}{2}(2000 - 800\sqrt{3})$

พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ADC $= \frac{1}{2} \times AD \times DC = \frac{1}{2} AD^2$

ดังนั้น พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมADC $= \frac{1}{4}(2000\text{-}800\sqrt{3}) = 500 - 200\sqrt{3}$

พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD $= 500 - 200\sqrt{3} + 200 \approx 700 - (200 \times 1.732)$

ดังนั้น กล้ามีที่ดินประมาณ 353.6 ตารางเมตร

9. 

ให้ ก,ข,ค และ จ เป็นตำแหน่งที่บ้านของแก้ว ขวัญ คนึง และจิต ตั้งอยู่ตามลำดับ

$\overparen{\text{ขค}}$ ยาว 50 เมตร, $\text{ก}\hat{\text{ค}}\text{จ} = 45^\circ$, $\text{ข}\hat{\text{จ}}\text{ค} = 30^\circ$

$\text{ค}\hat{\text{ข}}\text{จ} = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ$

จากรูปสามเหลี่ยม คขจ จะได้ $\frac{\sin \text{ข}\hat{\text{จ}}\text{ค}}{\text{ขค}} = \frac{\sin \text{ค}\hat{\text{ข}}\text{จ}}{\text{จค}}$

$$\frac{\sin 30^\circ}{50} = \frac{\sin 105^\circ}{\text{จค}}$$

$$\text{จค} = \frac{50 \sin 75^\circ}{\sin 30^\circ} \approx 50 \times 2 \times 0.9659$$

จากรูปสามเหลี่ยม กจค จะได้ กจ = จค $\sin 45^\circ \approx 96.59 \times 0.7071 = 68.3$

ดังนั้น คลองนี้กว้างประมาณ 68.3 เมตร

10. จะพิสูจน์ Hero's Formula ที่กล่าวว่าพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ เป็น $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

เมื่อ a, b หรือ c เป็นด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมและ $s = \dfrac{a+b+c}{2}$

พื้นที่รูปสามเหลี่ยมใด ๆ $= \dfrac{1}{2}bc\sin A$ และ $\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A}$

และ $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

จะได้ พื้นที่รูปสามเหลี่ยม

$$= \frac{1}{2}bc\sqrt{1-\cos^2 A}$$

$$= \frac{1}{2}bc\sqrt{1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}bc\sqrt{\frac{(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{(2bc)^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{bc}{2bc}\sqrt{(2bc-b^2-c^2+a^2)(2bc+b^2+c^2-a^2)}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{\left[a^2-(b^2-2bc+c^2)\right]\left[(b^2+2bc+c^2)-a^2\right]}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{\left[a^2-(b-c)^2\right]\left[(b+c)^2-a^2\right]}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a)}$$

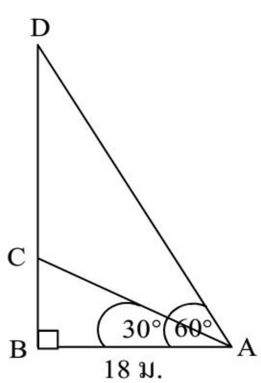
พื้นที่รูปสามเหลี่ยม $= \sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-a\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-b\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-c\right)}$

กำหนดให้ $s = \dfrac{a+b+c}{2}$

ดังนั้น พื้นที่รูปสามเหลี่ยมใด ๆ เท่ากับ $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ตารางหน่วย

แบบฝึกหัด 2.11

1.



BC เป็นความสูงของตึก CD เป็นความสูงของเสาอากาศ

A เป็นจุดที่พิเชษฐ์มองยอดตึกและยอดเสาอากาศ

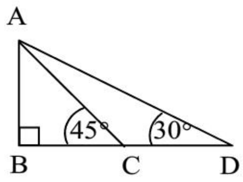
มุมเงย BAC = 30° และมุมเงย BAD = 60°

ใน Δ ABD, $BD = AB\tan 60^\circ = 18\sqrt{3}$ เมตร

ใน Δ ABC, $BC = AB\tan 30^\circ = \dfrac{18}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}$ เมตร

ดังนั้น $DC = 18\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$ เมตร

ดังนั้นเสาอากาศสูง $12\sqrt{3}$ เมตร

2. 

AB เป็นประภาคารหลังหนึ่ง

C และ D เป็นตำแหน่งที่เรือสองลำจอดอยู่ห่างกัน 60 เมตร

มุมเงย ACB = 45° และมุมเงย ADB = 30°

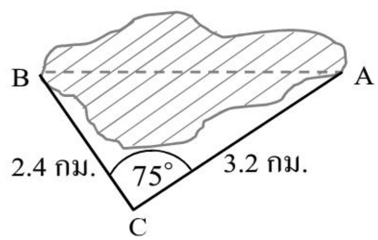
ใน Δ ABC, $A\hat{C}B = B\hat{A}C = 45^\circ$ จะได้ BC = AB

ใน Δ ABD, $BD = \dfrac{AB}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}\ AB$

เพราะว่า $BD - BC = CD$

นั่นคือ $\sqrt{3}\ AB - AB = 60$ จะได้ $AB \approx \dfrac{60}{0.732} \approx 81.97$

ดังนั้น ประภาคารสูงประมาณ 81.96 เมตร

3. 

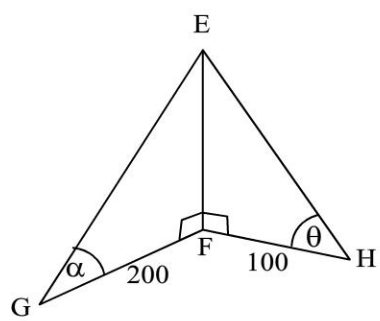
$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\,AC\cdot BC\ \cos 75^\circ$$

$$\approx (3.2)^2 + (2.4)^2 - (2 \times 3.2 \times 2.4 \times 0.2588)$$

$$= 10.24 + 5.76 - 3.98$$

$$AB \approx 3.47$$

ดังนั้น บึงกว้างประมาณ 3.47 เมตร

4. 

ให้ EF เป็นเสาอากาศของสถานีโทรทัศน์แห่งหนึ่ง

H และ G เป็นจุดที่พิชัยยืนห่างจากเสาอากาศ 100 และ 200 เมตร ตามลำดับ

มุมเงย EHF = θ และมุมเงย EGF = α

เพราะว่า $\theta + \alpha = 90^\circ$ จะได้ $\alpha = 90^\circ - \theta$

ใน Δ EHF, $\dfrac{EF}{FH} = \tan\theta$

จะได้ $EF = 100\ \tan\theta$ …………… (1)

ใน Δ EGF, $\dfrac{FF}{FG} = \tan\alpha = \tan(90^\circ - \theta) = \dfrac{\sin(90^\circ - \theta)}{\cos(90^\circ - \theta)}$

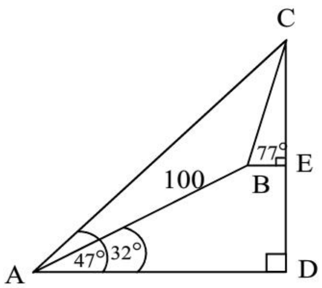
$EF = 200\ \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ …………… (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $100\ \tan\theta = \dfrac{200}{\tan\theta}$

$\tan\theta = \sqrt{2}$

ดังนั้น เสาอากาศสูง $100 \times \sqrt{2} \approx 141.4$ เมตร

5.



ให้ A เป็นจุดที่เคทยืนอยู่ และ CD เป็นความสูงของภูเขา

AB แทน ระยะทางที่เดินขึ้นไปตามไหล่เขา

$C\hat{A}B = 47^\circ - 32^\circ = 15^\circ$

$A\hat{C}D = 90^\circ - 47^\circ = 43^\circ$

$B\hat{C}E = 90^\circ - C\hat{B}E = 90^\circ - 77^\circ = 13^\circ$

$A\hat{C}B = A\hat{C}D - B\hat{C}E = 43^\circ - 13^\circ = 30^\circ$

$A\hat{B}C = 180^\circ - C\hat{A}B - A\hat{C}B = 180^\circ - 15^\circ - 30^\circ = 135^\circ$

ใน Δ ABC, $\dfrac{\sin B}{AC} = \dfrac{\sin C}{100}$

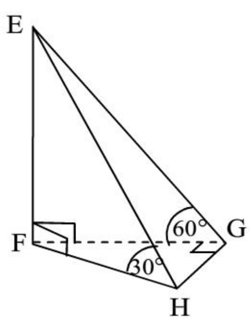
$$AC = \frac{100\sin B}{\sin C} = \frac{100\sin 135^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{100\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ}$$

ใน Δ ACD, $CD = \dfrac{AC\sin 47^\circ}{\sin 90^\circ} = \dfrac{100\sin 45^\circ \sin 47^\circ}{\sin 30^\circ \sin 90^\circ} \approx \dfrac{100\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times 0.731}{\frac{1}{2}\times 1}$

≈ 103.36

ดังนั้น ความสูงของภูเขาจากพื้นราบประมาณ 103.36 เมตร

6.



G เป็นป้อมยามซึ่งอยู่ทางทิศตะวันออกของตึก

H เป็นรถบรรทุกซึ่งจอดอยู่ทางทิศใต้ของป้อมยาม

EF เป็นตึกสูง 15 ชั้น $E\hat{G}F = 60^\circ$, $E\hat{H}F = 30^\circ$

ตึกหลังนี้สูง $15 \times 4 = 60$ เมตร

ใน Δ EFG, $GF = \dfrac{EF}{\tan 60^\circ} = 20\sqrt{3}$

ใน Δ EFH, $FH = \dfrac{EF}{\tan 30^\circ} = 60\sqrt{3}$

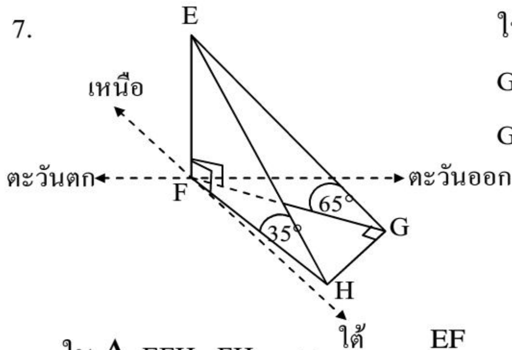
ใน Δ FGH, $GH^2 = FH^2 - GF^2 = (60\sqrt{3})^2 - (20\sqrt{3})^2$

$= 10800 - 1200$

$= 9600$

ดังนั้น รถบรรทุกอยู่ห่างจากป้อมยาม $40\sqrt{6}$ เมตร

7.



ให้ EF เป็นความสูงของภูเขา

G เป็นจุดที่สุดายืนอยู่ทางทิศตะวันออกเฉียงใต้ของภูเขา

GH เป็นระยะที่สุดาเดินไปทางทิศตะวันตกเฉียงใต้ 500 เมตร

ดังนั้น GF ตั้งฉากกับ GH

ใน Δ EFH, $FH = \dfrac{EF}{\tan 35^\circ} \approx \dfrac{EF}{0.7002}$

ใน Δ EFG, $FG = \dfrac{EF}{\tan 65^\circ} \approx \dfrac{EF}{2.1445}$

ใน Δ FGH, $GH^2 = FH^2 - FG^2$

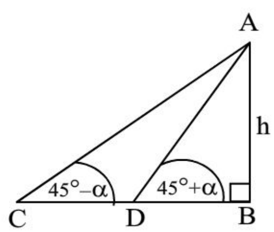
$$500^2 = \left(\frac{EF}{0.7002}\right)^2 - \left(\frac{EF}{2.1445}\right)^2$$

$$EF^2 = 250000 \times 0.5488 = 137200$$

$$EF \approx 370.4$$

ดังนั้น ภูเขาสูงประมาณ 370.4 เมตร

8.



ให้ h แทน ความสูงของหอคอย

C และ D แทนจุดที่มีวัตถุอันที่ 1 และ 2 อยู่ ตามลำดับ

ใน Δ ABD, $BD = \dfrac{h}{\tan(45^\circ + \alpha)}$

ใน Δ ABC, $BC = \dfrac{h}{\tan(45^\circ - \alpha)}$

$$CD = BC - BD = h\left[\frac{1}{\tan(45^\circ - \alpha)} - \frac{1}{\tan(45^\circ + \alpha)}\right]$$

$$= h\left[\frac{1 + \tan 45^\circ \tan\alpha}{\tan 45^\circ - \tan\alpha} - \frac{1 - \tan 45^\circ \tan\alpha}{\tan 45^\circ + \tan\alpha}\right]$$

$$= h\left[\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha} - \frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}\right]$$

$$= h\left[\frac{(1+\tan\alpha)(1+\tan\alpha) - (1-\tan\alpha)(1-\tan\alpha)}{(1+\tan\alpha)(1-\tan\alpha)}\right]$$

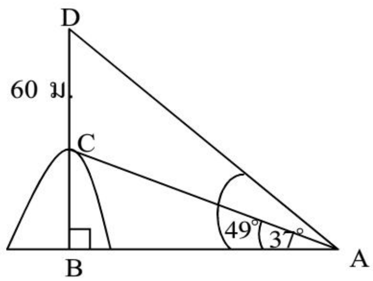
$$= h\left[\frac{(1+\tan\alpha+1-\tan\alpha)(1+\tan\alpha-1+\tan\alpha)}{(1+\tan\alpha)(1-\tan\alpha)}\right]$$

$$= h\left[\frac{2\times 2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\right]$$

$$= 2h\tan 2\alpha$$

ดังนั้น วัตถุทั้งสองห่างกัน $2h \tan 2\alpha$ เมตร

9.



A เป็นจุดที่ชายคนนี้ยืนอยู่ และBC แทนความสูงของภูเขา

CD แทนความสูงของหอคอย

จากรูป จะได้ $D\hat{A}C = 12^\circ$

$B\hat{C}A = 53^\circ$, $D\hat{C}A = 127^\circ$, $C\hat{D}A = 41^\circ$

จากกฎของไซน์ $\dfrac{\sin D\hat{A}C}{DC} = \dfrac{\sin C\hat{D}A}{AC}$

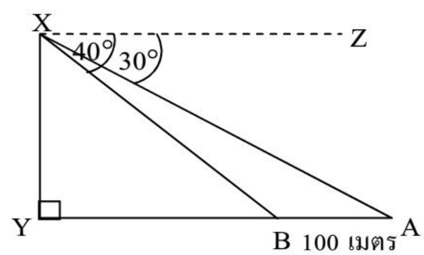
จะได้ $AC = \dfrac{60\sin 41^\circ}{\sin 12^\circ} = \dfrac{60(0.6561)}{0.2079} = 189.35$

จาก $\sin 37^\circ = \dfrac{BC}{AC}$

$BC \approx 189.35\ (0.6018) = 113.95$

ดังนั้นชายคนนี้อยู่ห่างจากฐานหอคอยประมาณ 189.35 เมตร และภูเขาสูงประมาณ 113.95 เมตร

10.



จากรูป XY แทนความสูงของประภาคาร

เพราะว่า $Z\hat{X}A = X\hat{A}B = 30^\circ$

$Z\hat{X}B = X\hat{B}Y = 40^\circ$

จะได้ $A\hat{X}B = 10^\circ$, $X\hat{B}A = 140^\circ$

กฎของไซน์ $\dfrac{\sin A\hat{X}B}{AB} = \dfrac{\sin X\hat{A}B}{BX}$

จะได้ $\dfrac{\sin 10^\circ}{100} = \dfrac{\sin 30^\circ}{BX}$

$BX \approx \dfrac{100(0.5)}{0.1736} \approx 288.02$

จากกฎของไซน์ $\dfrac{\sin X\hat{B}A}{AX} = \dfrac{\sin A\hat{X}B}{AB}$

จะได้ $\dfrac{\sin 140^\circ}{AX} = \dfrac{\sin 10^\circ}{100}$

$AX \approx \dfrac{100(0.6428)}{0.1736} \approx 370.28$

จากกฎของไซน์ $\dfrac{\sin X\hat{Y}B}{BX} = \dfrac{\sin X\hat{B}Y}{XY}$

จะได้ $\dfrac{\sin 90^\circ}{288.02} \approx \dfrac{\sin 40^\circ}{XY}$

$XY \approx 288.02\ (0.6428) = 185.14$

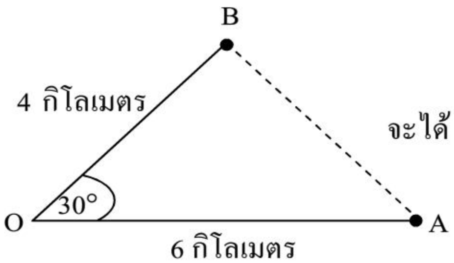
ดังนั้น ยอดประภาคารอยู่ห่างจากจุด A เป็นระยะทางประมาณ 370.28 เมตร

ยอดประภาคารอยู่ห่างจากจุด B เป็นระยะทางประมาณ 288.02 เมตร

ประภาคารสูงประมาณ 185.14 เมตร

11. จากกฎของโคไซน์ ให้ A แทนเรือลำที่หนึ่ง

B แทนเรือลำที่สอง



$$AB^2 = OB^2 + OA^2 - 2(OB)(OA)\cos B\hat{O}A$$

จะได้ $AB^2 = 4^2 + 6^2 - 2(4)(6)\cos 30^\circ$

$$= 16 + 36 - 48\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

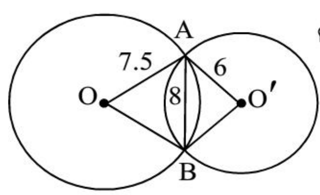
$$\approx 52 - 24(1.7321)$$

$$= 10.4296$$

$$AB \approx 3.23$$

ดังนั้น A และ B อยู่ห่างกันประมาณ 3.23 กิโลเมตร

12. จากรูปสามเหลี่ยม AOB จะได้ $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2(OA)(OB)\cos A\hat{O}B$



ดังนั้น $8^2 = 7.5^2 + 7.5^2 - 2(7.5)(7.5)\cos A\hat{O}B$

$$8^2 = 2(7.5)^2(1 - \cos A\hat{O}B)$$

$$\cos A\hat{O}B = 1 - \frac{8^2}{2(7.5)^2} = 0.4311$$

จากการเปิดตาราง $\cos 64^\circ 20' = 0.4331$ และ $\cos 64^\circ 30' = 0.4305$

ค่าของฟังก์ชันโคไซน์ต่างกับ 0.002 มุมต่างกัน $\frac{10 \times 0.002}{0.0026} = 7.7'$

จะได้ $\cos 64^\circ\ 27.7' = 0.4311$

นั่นคือ $A\hat{O}B = 64^\circ\ 27.7'$ ---------- *

จาก $\Delta AO'B$ จะได้ $AB^2 = O'A^2 + O'B^2 - 2(O'A)(O'B)\cos A\hat{O'}B$

$$\cos A\hat{O'}B = 1 - \frac{8^2}{2(6)^2}$$

$$= 0.1111$$

จากการเปิดตาราง $\cos 83^\circ\ 40' = 0.1103$ และ $\cos 83^\circ\ 30' = 0.1132$

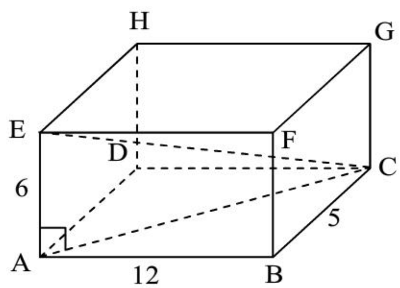
ค่าของฟังก์ชันโคไซน์ต่างกัน 0.0008 มุมต่างกัน $\frac{10 \times 0.0008}{0.0029} = 2.8'$

จะได้ $\cos 83^\circ\ 37.2' = 0.1111$

นั่นคือ $A\hat{O'}B = 83^\circ\ 37.2'$ ---------- **

ดังนั้น มุม AOB มีขนาด $64^\circ\ 27.7'$ และมุม $A\hat{O'}B$ มีขนาด $83^\circ\ 37.2'$

13.



จาก $AC^2 = AB^2 + BC^2$

จะได้ $AC^2 = 12^2 + 5^2$

$AC = 13$

จาก $EC^2 = AE^2 + AC^2$

จะได้ $EC^2 = 6^2 + 13^2$

$= 205$

$EC \approx 14.3$

จากกฎของโคไซน์ $AE^2 = AC^2 + EC^2 - 2(AC)(EC)\cos A\hat{C}E$

$36 \approx 169 + 205 - 2(13)(14.3)\cos A\hat{C}E$

$\cos A\hat{C}E \approx 0.9091$

จะได้ $A\hat{C}E \approx 24^\circ 37.5'$ ---------- *

เพราะว่า $HF = EG = AC = DB = 13$

$DF = EC \approx 14.3$

จากกฎของโคไซน์ $HF^2 = HD^2 + DF^2 - 2(HD)(DF)\cos H\hat{D}F$

$169 \approx 36 + 205 - 2(6)(14.3)\cos H\hat{D}F$

$\cos H\hat{D}F \approx 0.4196$

จะได้ $H\hat{D}F \approx 65^\circ\ 11.4'$ ---------- **

จาก Δ HCG, $HC^2 = CG^2 + HG^2$

จะได้ $HC^2 = 36 + 144$

$= 180$

$HC \approx 13.4$

จากกฎของโคไซน์ $EH^2 = EC^2 + HC^2 - 2(EC)(HC)\cos E\hat{C}H$

$25 \approx 205 + 180 - 2(14.3)(13.4)\cos E\hat{C}H$

$\cos E\hat{C}H \approx 0.9394$

จะได้ $E\hat{C}H \approx 20^\circ\ 3'$ ---------- ***

ดังนั้น มุม ACE มีขนาด $24^\circ 37.5'$ และมุม HDF มีขนาดประมาณ $65^\circ\ 11.4'$
และมุม ECH มีขนาดประมาณ $20^\circ\ 3'$

บทที่ 3

เวกเตอร์ในสามมิติ

(20 ชั่วโมง)

เวกเตอร์ นอกจากจะเป็นประโยชน์ในการศึกษาเรื่องการเคลื่อนที่ ความเร็ว และความเร่ง แล้ว เวกเตอร์ยังเป็นประโยชน์ในการศึกษาสาระคณิตศาสตร์อื่นๆ เช่น เรขาคณิต พีชคณิต เป็นต้น แนวทางในการศึกษาเวกเตอร์เบื้องต้นคือ การศึกษาในเชิงเรขาคณิตโดยให้นิยามว่า เวกเตอร์เป็นปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง และใช้ลูกศรแทนเวกเตอร์ สำหรับบทนี้จะกล่าวถึงทั้งเวกเตอร์ในสองมิติและสามมิติควบคู่กันไป โดยเริ่มต้นจากการให้ผู้เรียนมีมุมมองในสามมิติ และสามารถกำหนดจุดในระบบพิกัดฉากสามมิติได้ จากนั้นจะเริ่มศึกษาไปตามลำดับหัวข้อดังนี้ เวกเตอร์ เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก ผลคูณเชิงสเกลาร์ และผลคูณเชิงเวกเตอร์

สาระสำคัญ ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการสอน ตัวอย่างกิจกรรมการเรียนการสอน และการวัดและการประเมินผลที่นำเสนอ มีไว้เพื่อเป็นตัวอย่างในการจัดการเรียนการสอน การนำเข้าสู่บทเรียน การสอนเพื่อฝึกทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ให้ผู้เรียนมีคุณธรรม จริยธรรม และค่านิยมที่ดีงามต่อคณิตศาสตร์ ซึ่งผู้สอนสามารถเลือกหรือปรับใช้ได้ตามความเหมาะสม ในบทเรียนนี้มุ่งให้ผู้เรียนบรรลุผลการเรียนรู้ดังนี้

ผลการเรียนรู้

1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับเวกเตอร์ในสามมิติ
2. หาผลบวกเวกเตอร์ ผลคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ ผลคูณเชิงสเกลาร์และผลคูณเชิงเวกเตอร์ได้
3. หาขนาดและทิศทางของเวกเตอร์ที่กำหนดให้ได้

สาระสำคัญ

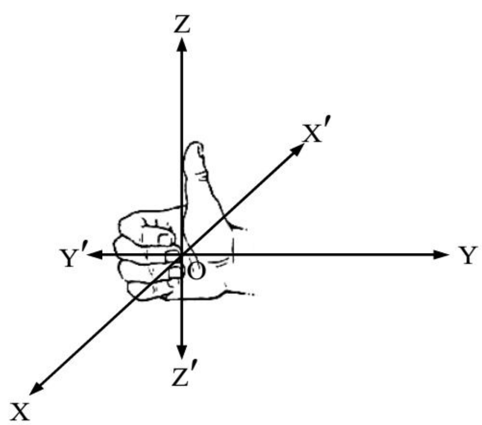
1. ระบบพิกัดฉากสามมิติ

1.1 แกนพิกัด

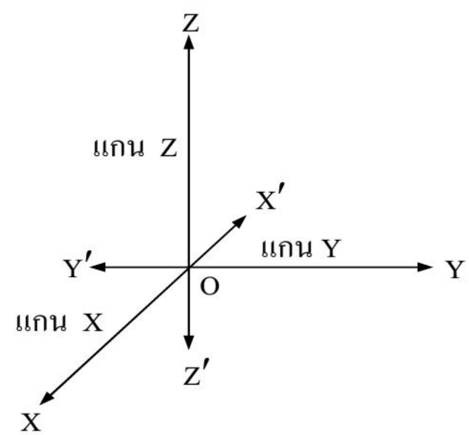
กำหนดเส้นตรง XX', YY' และ ZZ' เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด O และตั้งฉากซึ่งกันและกัน โดยการกำหนดทิศทางของเส้นตรงทั้งสามตามระบบมือขวา ดังรูปที่ 1

ถ้าให้เส้นตรงทั้งสามเป็นเส้นจำนวนจริง (real number line) จะเรียกเส้นตรง XX', YY' และ ZZ' ว่า ***แกนพิกัด X***, ***แกนพิกัด Y*** และ ***แกนพิกัด Z*** หรือเรียกสั้นๆ ว่า ***แกน X*** (x–axis)

แกน Y (y–axis) และ ***แกน Z*** (z–axis) ตามลำดับ และเรียกจุด O ซึ่งเป็นจุดตัดของแกน X แกน Y และแกน Z ว่า ***จุดกำเนิด*** (origin) ดังรูปที่ 2



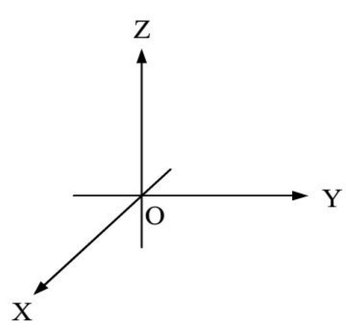
รูปที่ 1



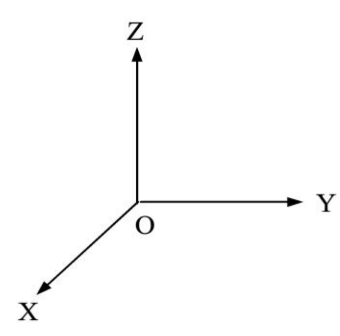
รูปที่ 2

เรียกรังสี OX , OY และ OZ ว่า แกน X ทางบวก (positive x–axis) แกน Y ทางบวก (positive y–axis) และแกน Z ทางบวก (positive z-axis) ตามลำดับ และเรียกรังสี OX′, OY′ และ OZ′ ว่าแกน X ทางลบ (negative x–axis) แกน Y ทางลบ (negative y–axis) และแกน Z ทางลบ (negative z–axis) ตามลำดับ

โดยทั่วไปเมื่อเขียนรูปแกนพิกัดในสามมิติ นิยมเขียนเฉพาะ แกน X แกน Y และแกน Z ทางบวกซึ่งมีหัวลูกศรกำกับ ดังรูปที่ 3(ก) หรือ 3(ข) โดยละทางลบไว้ในฐานที่เข้าใจ



(ก)

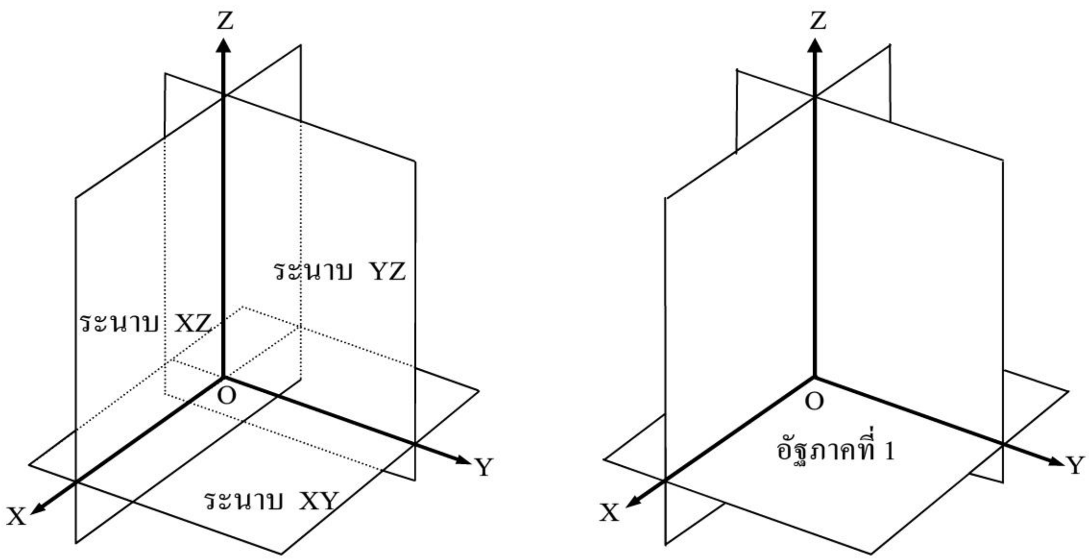


(ข)

รูปที่ 3

1.2 ระนาบ

แกน X แกน Y และแกน Z จะกำหนดระนาบขึ้น 3 ระนาบ เรียกว่า ***ระนาบอ้างอิง*** เรียกระนาบที่กำหนดด้วย แกน X และแกน Y ว่า ***ระนาบอ้างอิง XY*** ระนาบที่กำหนดด้วยแกน Y และแกน Z ว่า ***ระนาบอ้างอิง YZ*** และระนาบที่กำหนดด้วยแกน X และแกน Z ว่า ***ระนาบอ้างอิง XZ*** หรือเรียกสั้น ๆ ว่า ***ระนาบ XY ระนาบ YZ*** และ ***ระนาบ XZ*** ตามลำดับ ดังรูปที่ 4(ก)



(ก) (ข)

รูปที่ 4

ระนาบ XY ระนาบ YZ และระนาบ XZ ทั้งสามระนาบดังกล่าวจะแบ่งระบบพิกัดฉากสามมิติออกเป็น 8 บริเวณ คือ เหนือระนาบ XY จำนวน 4 บริเวณ และใต้ระนาบ XY จำนวน 4 บริเวณ เรียกแต่ละบริเวณว่า ***อัฐภาค*** (octant) ดังรูปที่ 4(ข) อัฐภาคที่บรรจุ แกน X แกน Y และแกน Z ทางบวก จะเรียกว่า ***อัฐภาคที่ 1*** ส่วนอัฐภาคอื่น ๆ จะใช้ข้อตกลงเดียวกับ ในระบบพิกัดฉากสองมิติ (นับทวนเข็มนาฬิกาไปตามลำดับ) โดยพิจารณาบริเวณเหนือระนาบ XY ก่อน

ถ้ามองระบบพิกัดฉากตามแนวแกน Z จะเรียกอัฐภาคทั้ง 8 ดังนี้

อัฐภาคที่ 3	อัฐภาคที่ 2
อัฐภาคที่ 4	อัฐภาคที่ 1

ด้านบน (แกน Z ทางบวก)

อัฐภาคที่ 7	อัฐภาคที่ 6
อัฐภาคที่ 8	อัฐภาคที่ 5

ด้านล่าง (แกน Z ทางลบ)

1.3 จุดในระบบพิกัดฉากสามมิติ

เมื่อกำหนดจุด P เป็นจุดใด ๆ ในระบบพิกัดฉากสามมิติ จะระบุตำแหน่งของจุด P หรือพิกัดของจุด P โดยใช้จำนวนจริงสามจำนวนเรียงกันตามลำดับหรือเรียกว่า ***สามสิ่งอันดับ*** (ordered triple) ในรูป (x, y, z) โดยที่

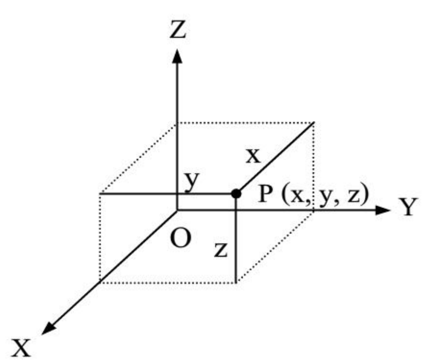
x ระบุว่า จุด P อยู่ห่างจากระนาบ YZ ไปตามแนวแกน X เป็นระยะเท่าใดและในทิศทางใด เมื่อ x เป็นจำนวนบวก แสดงว่า จุด P อยู่ห่างจากระนาบ YZ ไปตามแนวแกน X ทางด้านบวกและห่างจากระนาบ YZ เป็นระยะ x หน่วย เมื่อ x เป็นจำนวนลบ แสดงว่า จุด P อยู่ห่างจากระนาบ YZ ไปตามแนวแกน X ทางด้านลบ และห่างจากระนาบ YZ เป็นระยะ $|x|$ หน่วย และเมื่อ x เป็น 0 แสดงว่า จุด P อยู่บนระนาบ YZ

y ระบุว่า จุด P อยู่ห่างจากระนาบ XZ ไปตามแนวแกน Y เป็นระยะเท่าใดและในทิศทางใด เมื่อ y เป็นจำนวนบวก แสดงว่า จุด P อยู่ห่างจากระนาบ XZ ไปตามแนวแกน Y ทางด้านบวก และห่างจากระนาบ XZ เป็นระยะ y หน่วย เมื่อ y เป็นจำนวนลบ แสดงว่า จุด P อยู่ห่างจากระนาบ XZ ไปตามแนวแกน Y ทางด้านลบ และห่างจากระนาบ XZ เป็นระยะ $|y|$ หน่วย และเมื่อ y เป็น 0 แสดงว่า จุด P อยู่บนระนาบ XZ

z ระบุว่า จุด P อยู่ห่างจากระนาบ XY ไปตามแนวแกน Z เป็นระยะเท่าใดและในทิศทางใด เมื่อ z เป็นจำนวนบวก แสดงว่า จุด P อยู่ห่างจากระนาบ XY ไปตามแนวแกน Z ทางด้านบวก และห่างจากระนาบ XY เป็นระยะ z หน่วย เมื่อ z เป็นจำนวนลบ แสดงว่า จุด P อยู่ห่างจากระนาบ XY ไปตามแนวแกน Z ทางด้านลบ และห่างจากระนาบ XY เป็นระยะ $|z|$ หน่วย และเมื่อ z เป็น 0 แสดงว่า จุด P อยู่บนระนาบ XY

เรียก (x, y, z) ว่า ***พิกัด*** ของจุด P และบางครั้งจะเขียนจุดและพิกัดกำกับไว้ด้วยกันเป็น P(x, y, z)

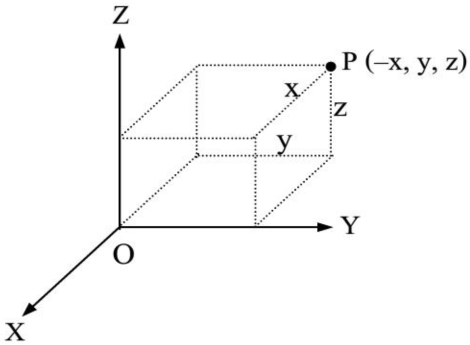
ถ้ากำหนด x, y และ z เป็นจำนวนจริงบวก การระบุจุดในระบบพิกัดฉากสามมิติ ทั้ง 8 อัฐภาค แสดงได้ดังนี้



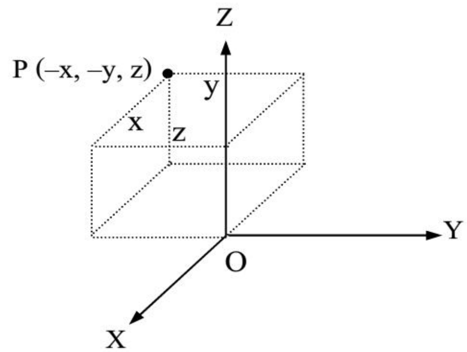
รูปที่ 5

ในรูปที่ 5 แสดง จุด P(x, y, z) ในอัฐภาคที่ 1 โดยที่ จุด P อยู่ห่างจากระนาบ YZ ไปตามแนวแกน X ทางด้านบวก เป็นระยะทาง x หน่วย จุด P อยู่ห่างจากระนาบ XZ ไปตามแนวแกน Y ทางด้านบวก เป็นระยะทาง y หน่วย และ จุด P อยู่ห่างจากระนาบ XY ไปตามแนวแกน Z ทางด้านบวก เป็นระยะทาง z หน่วย

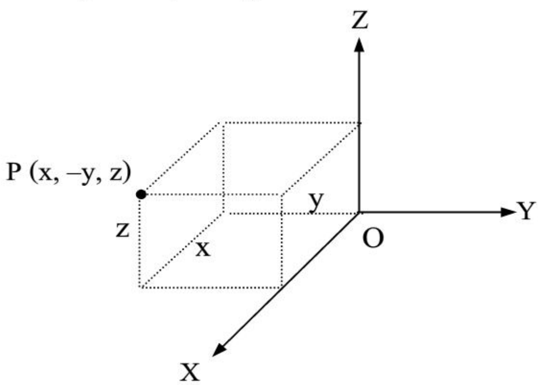
ในทำนองเดียวกัน จุด P ใด ๆ ในอัฐภาคที่ 2 ถึง อัฐภาคที่ 8 แสดงในรูปที่ 6 ถึง 12 ตามลำดับ



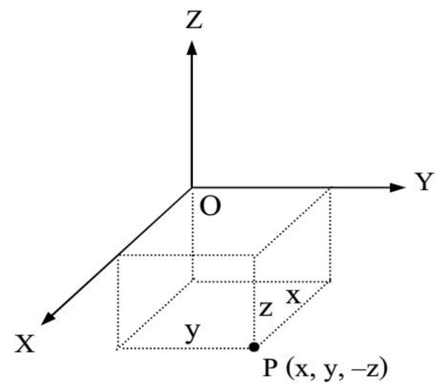
รูปที่ 6 จุดในอัฐภาคที่ 2



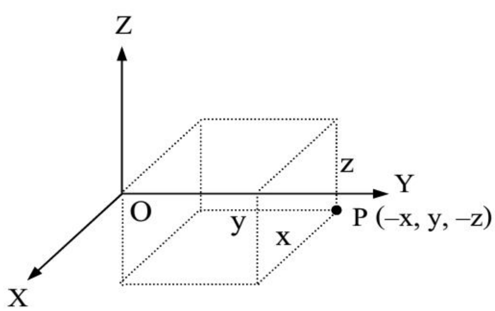
รูปที่ 7 จุดในอัฐภาคที่ 3



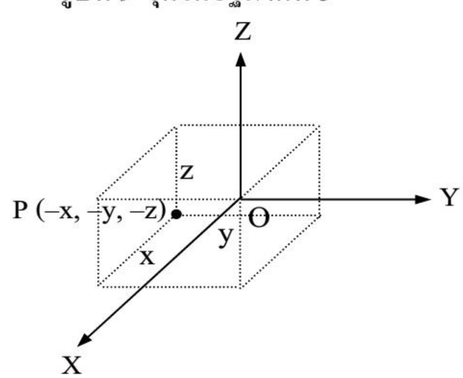
รูปที่ 8 จุดในอัฐภาคที่ 4



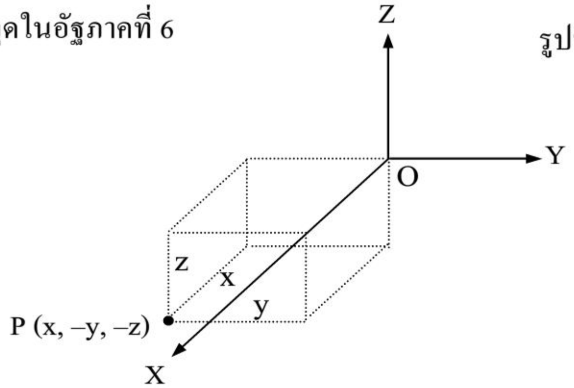
รูปที่ 9 จุดในอัฐภาคที่ 5



รูปที่ 10 จุดในอัฐภาคที่ 6



รูปที่ 11 จุดในอัฐภาคที่ 7



รูปที่ 12 จุดในอัฐภาคที่ 8

1.4 ระยะทางระหว่างจุดสองจุดในระบบพิกัดฉากสามมิติ หาได้ตามทฤษฎีบท

ทฤษฎีบท ระยะทางระหว่างจุด $P(x_1, y_1, z_1)$ และ $Q(x_2, y_2, z_2)$

หรือ PQ เท่ากับ $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ หน่วย

2. ปริมาณเวกเตอร์

2.1 การบอกปริมาณแบ่งออกเป็นสองประเภท ตามบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม ปริมาณที่มีแต่ขนาดเพียงอย่างเดียว เรียกว่า *ปริมาณสเกลาร์* (scalar quantity) ส่วนปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง เรียกว่า *ปริมาณเวกเตอร์* (vector quantity) หรือเรียกสั้น ๆ ว่า *เวกเตอร์* (vector)

2.2 ปริมาณเวกเตอร์ ในเชิงเรขาคณิตแทนได้ด้วยส่วนของเส้นตรงที่ระบุทิศทางโดยความยาวของส่วนของเส้นตรงบอกขนาดของเวกเตอร์และหัวลูกศรบอกทิศทางของเวกเตอร์

สมบัติ การเท่ากัน การขนานกัน และนิเสธของเวกเตอร์ เป็นไปตามบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ***ขนานกัน*** ก็ต่อเมื่อ เวกเตอร์ทั้งสองมีทิศทางเดียวกันหรือทิศทางตรงกันข้าม

บทนิยาม $\bar{u}$ ***เท่ากับ*** $\bar{v}$ ก็ต่อเมื่อ เวกเตอร์ทั้งสอง มีขนาดเท่ากันและทิศทางเดียวกัน เขียนแทนด้วย $\bar{u} = \bar{v}$

บทนิยาม **นิเสธ** ของ $\bar{u}$ (negative of $\bar{u}$) คือเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับขนาดของ $\bar{u}$ แต่มีทิศทางตรงกันข้ามกับทิศทางของ $\bar{u}$ เขียนแทนด้วย $-\bar{u}$

เวกเตอร์ศูนย์ การบวกและการลบเวกเตอร์ และการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ เป็นไปตามบทนิยามและสมบัติ ดังต่อไปนี้

บทนิยาม ***เวกเตอร์ศูนย์*** (zero vector) คือเวกเตอร์ที่มีขนาดเป็นศูนย์ เขียนแทนด้วย $\bar{0}$

บทนิยาม ให้ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ เลื่อน $\bar{v}$ ให้จุดเริ่มต้นของ $\bar{v}$ อยู่ที่จุดสิ้นสุดของ $\bar{u}$ **ผลบวก** ของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เขียนแทนด้วย “$\bar{u}+\bar{v}$” คือ เวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดเริ่มต้นของ $\bar{u}$ และจุดสิ้นสุดอยู่ที่จุดสิ้นสุดของ $\bar{v}$

บทนิยาม ให้ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ **ผลลบ** ของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เขียนแทนด้วย $\bar{u}-\bar{v}$ หมายถึง ผลบวกของ $\bar{u}$ และนิเสธของ $\bar{v}$ นั่นคือ $\bar{u} - \bar{v} = \bar{u} + (-\bar{v})$

บทนิยาม ให้ a เป็นสเกลาร์ และ $\bar{u}$ เป็นเวกเตอร์ **ผลคูณของเวกเตอร์ u ด้วยสเกลาร์ a** เป็นเวกเตอร์ เขียนแทนด้วย $a\bar{u}$ โดยที่

1) ถ้า $a = 0$ แล้ว $a\bar{u} = \bar{0}$
2) ถ้า $a > 0$ แล้ว $a\bar{u}$ จะมีขนาดเท่ากับ $|a||\bar{u}|$ และมีทิศทางเดียวกับ $\bar{u}$
3) ถ้า $a < 0$ แล้ว $a\bar{u}$ จะมีขนาดเท่ากับ $|a||\bar{u}|$ แต่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\bar{u}$

หมายเหตุ ขนาดของเวกเตอร์ $\bar{u}$ เขียนแทนด้วย $|\bar{u}|$ เขียนอธิบายในข้อ 5.

3. เวกเตอร์

การแทนเวกเตอร์ด้วยส่วนของเส้นตรงที่ระบุทิศทาง แล้วอาศัยการเลื่อนขนานของเวกเตอร์จากตำแหน่งหนึ่งไปอีกตำแหน่งหนึ่ง เพื่ออธิบาย การบวก การลบ การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ นั้นสามารถอธิบายในเชิงเรขาคณิตได้ง่ายในกรณีของเวกเตอร์ในสองมิติหรือสามมิติ แต่เมื่อกล่าวถึงเวกเตอร์ในปริภูมิ n มิติ (n-space, R^n) เมื่อ $n > 3$ การใช้ส่วนของเส้นตรงที่ระบุทิศทางดังกล่าว ไม่สามารถทำได้ ดังนั้น จึงมีการแทนเวกเตอร์ด้วย ***n-สิ่งอันดับ*** (n-tuple) ในรูปแบบ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ หรือ $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ x_i เป็นจำนวนจริงและเรียก x_i ว่า *ส่วนประกอบ* (component) หรือ *พิกัด* (co-ordinate) ที่ i

หมายเหตุ n-สิ่งอันดับแทนเวกเตอร์อาจเขียนในรูปแบบที่แตกต่างจากที่ยกตัวอย่างข้างบน เช่น $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ หรือ $<x_1, x_2, \ldots, x_n>$ เป็นต้น

3.1 เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ

นอกจากการใช้ส่วนของเส้นตรงระบุทิศทางแทนเวกเตอร์ดังในข้อ 2.2 แล้ว ในระบบพิกัดฉากสองมิติ สำหรับเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$ ใด ๆ ที่มีจุดเริ่มต้นที่ A (a_1, a_2) และจุดสิ้นสุดที่ B (b_1, b_2) สามารถเขียนในรูป $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ เมื่อ $x_1 = b_1 - a_1$ และ $x_2 = b_2 - a_2$

3.2 *เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ*

การเขียนแทนเวกเตอร์ในระบบพิกัดสามมิติในรูปแบบ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ ทำได้ในทำนองเดียวกับการเขียนแทนเวกเตอร์ในระบบพิกัดสองมิติ โดยอาศัยความรู้เรื่องระบบพิกัดฉากสามมิติในข้อ 1. เพื่อระบุพิกัดของจุด จะได้ว่า สำหรับเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$ ใด ๆ ในระบบพิกัดสามมิติ ที่มีจุดเริ่มต้นที่ A (a_1, a_2, a_3) และจุดสิ้นสุดที่ B (b_1, b_2, b_3) จะเขียนแทนเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$ ด้วยรูปแบบ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ เมื่อ $x_1 = b_1 - a_1, x_2 = b_2 - a_2$ และ $x_3 = b_3 - a_3$

จากความรู้เรื่องการเขียนแทนเวกเตอร์ด้วย n-สิ่งอันดับ การเท่ากันของเวกเตอร์ การบวกเวกเตอร์ เวกเตอร์ศูนย์ นิเสธของเวกเตอร์ การลบเวกเตอร์ และการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ ในระบบพิกัดฉากสองมิติ และสามมิติ เป็นไปตามบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม	เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก สองมิติ	เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก สามมิติ
การเท่ากัน	$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ ก็ต่อเมื่อ $x_1 = y_1$ และ $x_2 = y_2$	$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ ก็ต่อเมื่อ $x_1 = y_1, x_2 = y_2$ และ $x_3 = y_3$
การบวกเวกเตอร์	$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{bmatrix}$
เวกเตอร์ศูนย์	เวกเตอร์ศูนย์คือ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	เวกเตอร์ศูนย์คือ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
นิเสธของเวกเตอร์	นิเสธของ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ คือ $-\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ หรือ $\begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix}$	นิเสธของ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ คือ $-\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ หรือ $\begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{bmatrix}$
การลบเวกเตอร์	$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \\ x_3 - y_3 \end{bmatrix}$
การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์	$\alpha\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{bmatrix}$ เมื่อ α เป็นจำนวนจริงใด ๆ	$\alpha\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{bmatrix}$ เมื่อ α เป็นจำนวนจริงใด ๆ

4. ขนาดของเวกเตอร์

สำหรับเวกเตอร์ $\bar{u}$ ใด ๆ เขียนแทนขนาดของเวกเตอร์ด้วย $|\bar{u}|$ (ในหนังสือบางเล่มอาจใช้สัญลักษณ์ $\|\bar{u}\|$)

ในระบบพิกัดฉากสองมิติและ สามมิติ ขนาดของเวกเตอร์ หมายถึง ความยาวของส่วนของเส้นตรงที่ระบุทิศทางที่แทนเวกเตอร์ ดังนั้น

ในระบบพิกัดฉากสองมิติ ถ้า $\overrightarrow{PQ}$ เป็นเวกเตอร์เมื่อ P และ Q มีพิกัดเป็น (p_1, p_2) และ (q_1, q_2) ตามลำดับ

$\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \end{bmatrix}$ และขนาดของ $\overrightarrow{PQ}$ (เขียนแทนด้วย $|\overrightarrow{PQ}|$) คือ $\sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2}$

ในระบบพิกัดฉากสามมิติ ถ้า $\overrightarrow{AB}$ เป็นเวกเตอร์จากจุด A และ B มีพิกัดเป็น (a_1, a_2, a_3) และ (b_1, b_2, b_3) ตามลำดับ แล้ว $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{bmatrix}$ และ $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$

หมายเหตุ ใน n มิติ ถ้า $\overrightarrow{XY}$ เป็นเวกเตอร์ที่พิกัดของ X คือ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ และพิกัดของ Y คือ $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ จะได้ $\overrightarrow{XY} = \begin{bmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 - x_2 \\ \vdots \\ y_n - x_n \end{bmatrix}$

และ $|\overrightarrow{XY}| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}$

5. เวกเตอร์หนึ่งหน่วย

บทนิยาม เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยเรียกว่า **เวกเตอร์หนึ่งหน่วย** (unit vector)

จากบทนิยาม จะได้ว่า สำหรับเวกเตอร์ $\bar{u}$ ใด ๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\bar{u}$ คือเวกเตอร์ $\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}$

ในระบบพิกัดฉากสองมิติ สำหรับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ใด ๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยและมีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ คือ $\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในระบบพิกัดฉากสองมิติที่สำคัญคือ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ และเพื่อความสะดวกจึงแทน $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ด้วย $\bar{i}$ และแทน $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ด้วย $\bar{j}$

ดังนั้น สำหรับเวกเตอร์ $\bar{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ จะเขียนแทนเวกเตอร์ $\bar{u}$ ในรูปของ $\bar{i}$ และ $\bar{j}$ ได้ดังนี้

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = a\,\bar{i} + b\,\bar{j}$$

ในระบบพิกัดฉากสามมิติ เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยและมีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ ใด ๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ คือ $\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในระบบพิกัดฉากสามมิติที่สำคัญคือ $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ โดยแทน $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ ด้วย $\bar{i}$ แทน $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ ด้วย $\bar{j}$ และแทน $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ ด้วย $\bar{k}$

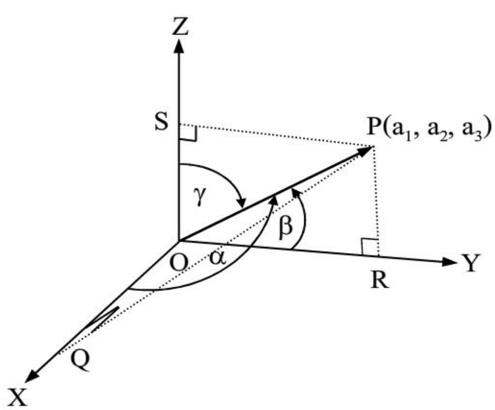
ดังนั้นสำหรับเวกเตอร์ $\bar{u} = \begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$ ใด ๆ จะเขียนแทน $\bar{u}$ ในรูปของ $\bar{i}$, $\bar{j}$ และ $\bar{k}$ ได้ดังนี้

$$\bar{u} = \begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\b\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\c\end{bmatrix} = a\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = a\,\bar{i} + b\,\bar{j} + c\,\bar{k}$$

ข้อสังเกต จาก $\bar{u} = a\,\bar{i} + b\,\bar{j}$ จะได้ $|\bar{u}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

และจาก $\bar{u} = a\,\bar{i} + b\,\bar{j} + c\,\bar{k}$ จะได้ $|\bar{u}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

6. โคไซน์แสดงทิศทาง



ในระบบพิกัดฉากสามมิติ ทิศทางของเวกเตอร์จะระบุผ่านทาง **มุมกำหนดทิศทาง** (direction angle)

จากรูป พิจารณาจุด P (a_1, a_2, a_3) ที่ไม่ใช่จุดกำเนิด $\overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีจุดกำเนิดเป็นจุดเริ่มต้นและมีจุด P เป็นจุดสิ้นสุด และ $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \pi]$ คือขนาดของมุมที่วัดจากแกนพิกัดด้านบวกทั้งสามไปยัง $\overrightarrow{OP}$ ตามลำดับ เรียกมุมเหล่านี้ว่า มุมกำหนดทิศทางของ $\overrightarrow{OP}$

จะได้ว่า $\cos\alpha = \dfrac{OQ}{|\overrightarrow{OP}|} = \dfrac{a_1}{|\overrightarrow{OP}|}$, $\cos\beta = \dfrac{OR}{|\overrightarrow{OP}|} = \dfrac{a_2}{|\overrightarrow{OP}|}$ และ $\cos\gamma = \dfrac{OS}{|\overrightarrow{OP}|} = \dfrac{a_3}{|\overrightarrow{OP}|}$

โดยที่ OQ, OR, OS หมายถึง ระยะที่มีทิศทางตามแนวแกน X, Y, Z ตามลำดับ และเรียก $\cos\alpha$, $\cos\beta$ และ $\cos\gamma$ ว่า **โคไซน์แสดงทิศทาง** (direction cosines) ของ $\overrightarrow{OP}$

โดยทั่วไปโคไซน์แสดงทิศทางของเวกเตอร์ใด ๆ หาได้ตามบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม ให้ $\bar{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ **โคไซน์แสดงทิศทาง** (direction cosines) ของ $\bar{a}$ เทียบกับแกน X, Y, Z ตามลำดับ คือ จำนวนสามจำนวนซึ่งเรียงตามลำดับดังนี้ $\frac{a_1}{|\bar{a}|}, \frac{a_2}{|\bar{a}|}, \frac{a_3}{|\bar{a}|}$

จากความรู้เรื่องโคไซน์แสดงทิศทาง การตรวจสอบว่าเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติมีทิศทางเดียวกันหรือมีทิศทางตรงข้ามกัน ทำได้ตามบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม เวกเตอร์สองเวกเตอร์ จะมีทิศทางเดียวกันก็ต่อเมื่อมีโคไซน์แสดงทิศทางชุดเดียวกัน และจะมีทิศทางตรงกันข้ามก็ต่อเมื่อ โคไซน์แสดงทิศทางเทียบแต่ละแกนของเวกเตอร์หนึ่งเป็นจำนวนตรงข้ามกับโคไซน์แสดงทิศทางของอีกเวกเตอร์หนึ่ง

7. ผลคูณเชิงสเกลาร์หมายถึงผลคูณของเวกเตอร์ที่ได้ผลลัพธ์เป็นสเกลาร์ซึ่งนิยามในระบบพิกัดฉากสองมิติ และสามมิติ ดังนี้

บทนิยาม ถ้า $\bar{u} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j}$ และ $\bar{v} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j}$ **ผลคูณเชิงสเกลาร์** (scalar product) ของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ คือ $x_1x_2 + y_1y_2$

ถ้า $\bar{u} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$ และ $\bar{v} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}$ ผลคูณเชิงสเกลาร์ของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ คือ $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

เขียนแทนผลคูณเชิงสเกลาร์ของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ด้วย $\bar{u} \cdot \bar{v}$

สมบัติที่สำคัญของผลคูณเชิงสเกลาร์

1) ให้ $\bar{u}$, $\bar{v}$ และ $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในสองมิติ หรือสามมิติ และ a เป็นสเกลาร์ จะได้ว่า

1.1 $\bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{v} \cdot \bar{u}$

1.2 $\bar{u} \cdot (\bar{v} + \bar{w}) = \bar{u} \cdot \bar{v} + \bar{u} \cdot \bar{w}$

1.3 $a(\bar{u} \cdot \bar{v}) = (a\bar{u}) \cdot \bar{v} = \bar{u} \cdot (a\bar{v})$

1.4 $\bar{0} \cdot \bar{u} = 0$

1.5 $\bar{u} \cdot \bar{u} = |\bar{u}|^2$

1.6 $\bar{i} \cdot \bar{i} = \bar{j} \cdot \bar{j} = \bar{k} \cdot \bar{k} = 1$

$\bar{i} \cdot \bar{j} = \bar{i} \cdot \bar{k} = \bar{j} \cdot \bar{k} = 0$

2) ถ้ามุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ มีขนาด θ ซึ่ง $0° \le \theta \le 180°$ แล้ว $\bar{u}\cdot\bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta$
   (มุมระหว่างเวกเตอร์ หมายถึง มุมที่ไม่ใช่มุมกลับ ซึ่งมีแขนของมุมเป็นรังสีที่ขนานและมีทิศทางเดียวกันกับเวกเตอร์ทั้งสอง)
3) $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ $\bar{u}$ ตั้งฉากกับ $\bar{v}$ ก็ต่อเมื่อ $\bar{u}\cdot\bar{v} = 0$

8. ผลคูณเชิงเวกเตอร์

ผลคูณเชิงเวกเตอร์ หมายถึง ผลคูณของเวกเตอร์ที่ได้ผลลัพธ์เป็นเวกเตอร์ ซึ่งนิยามในระบบพิกัดฉากสามมิติ ได้ดังนี้

บทนิยาม **ผลคูณเชิงเวกเตอร์** (cross product) ของ $\bar{u} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ และ $\bar{v} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

คือ เวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix}$ หรือ $\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\bar{k}$

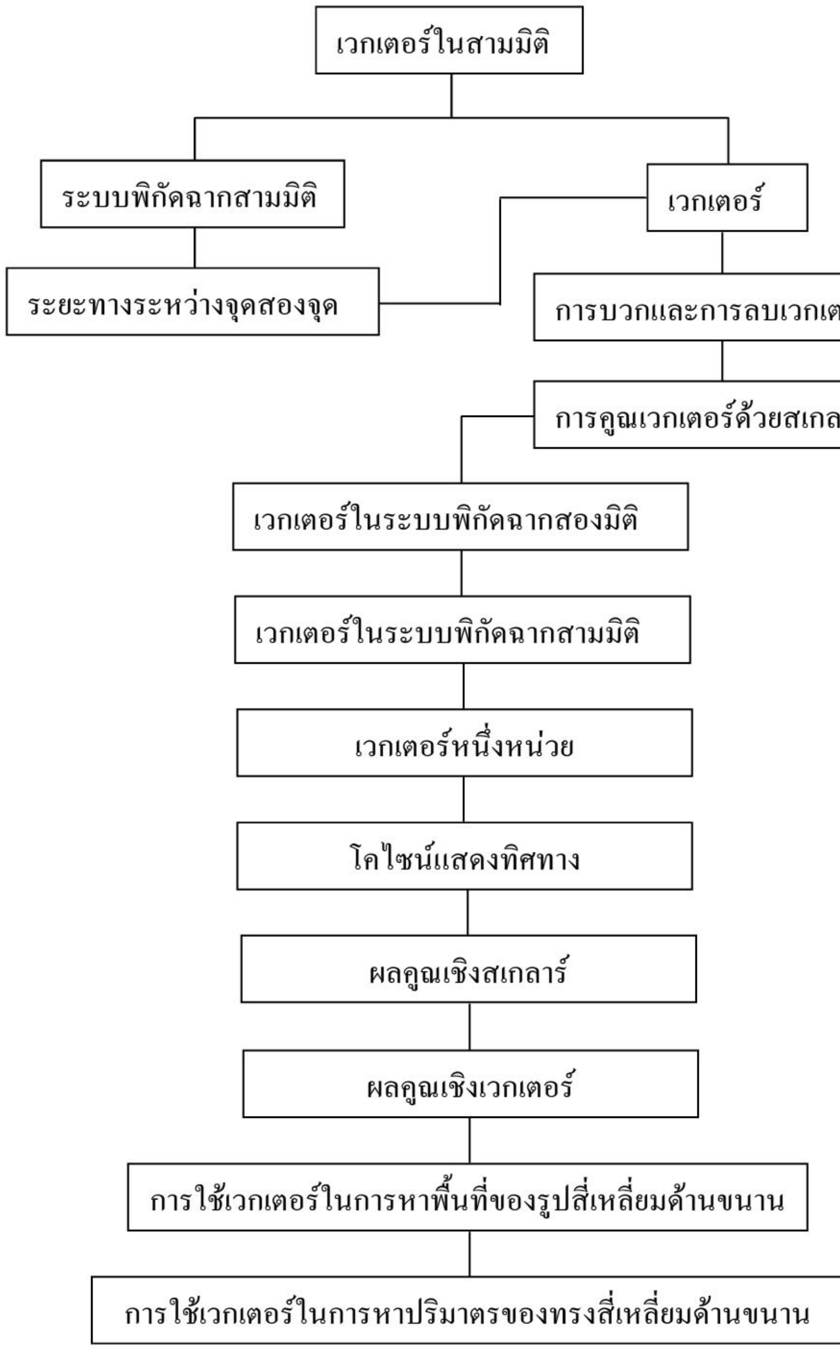
เขียนแทนผลคูณเชิงเวกเตอร์ของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ด้วย $\bar{u}\times\bar{v}$

อ่านว่า *เวกเตอร์ยู ครอส เวกเตอร์วี*

สมบัติที่สำคัญของผลคูณเชิงเวกเตอร์

1) กำหนด $\bar{u},\bar{v}$ และ $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในสามมิติ และ k เป็นจำนวนจริงใด ๆ
   1.1 $\bar{u}\times\bar{v} = -(\bar{v}\times\bar{u})$
   1.2 $(\bar{u}+\bar{v})\times\bar{w} = (\bar{u}\times\bar{w}) + (\bar{v}\times\bar{w})$
   1.3 $\bar{u}\times(\bar{v}+\bar{w}) = (\bar{u}\times\bar{v}) + (\bar{u}\times\bar{w})$
   1.4 $\bar{u}\times(k\bar{v}) = k(\bar{u}\times\bar{v})$
   1.5 $(k\bar{u})\times\bar{v} = k(\bar{u}\times\bar{v})$
   1.6 $\bar{u}\times\bar{u} = \bar{0}$
   1.7 $\bar{i}\times\bar{j} = \bar{k}, \bar{j}\times\bar{k} = \bar{i}, \bar{k}\times\bar{i} = \bar{j}$
2) ให้ $\bar{u},\bar{v}$ และ $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในสามมิติ จะได้ว่า $\bar{u}\cdot(\bar{v}\times\bar{w}) = (\bar{u}\times\bar{v})\cdot\bar{w}$
3) ถ้า $\bar{u}\ne\bar{0}$ และ $\bar{v}\ne\bar{0}$ จะได้ว่า $|\bar{u}\times\bar{v}| = |\bar{u}||\bar{v}|\sin\theta$
   เมื่อมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ มีขนาด θ โดยที่ $0°\le\theta\le 180°$
4) ให้ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ในสามมิติ ซึ่งไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์และไม่ขนานกัน จะได้ว่า $\bar{u}\times\bar{v}$ ตั้งฉากกับ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$

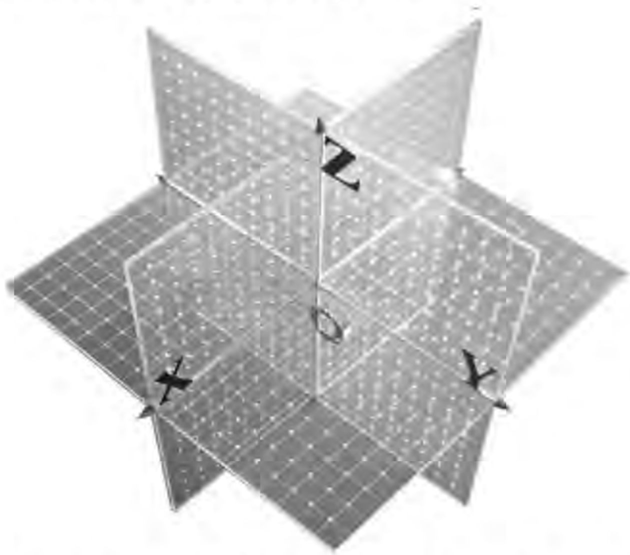
ผู้สอนอาจจัดลำดับการสอนดังนี้



ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการสอน

ระบบพิกัดฉากสามมิติ

1. เนื่องจากเวกเตอร์ในสามมิติเป็นเรื่องใหม่สำหรับผู้เรียน ดังนั้นการเริ่มต้นสอนเวกเตอร์ในสามมิตินั้น ผู้สอนควรเริ่มจากการให้ผู้เรียนมองเห็นภาพการตัดกันของระนาบสามระนาบที่ตั้งฉากกันแล้วเกิดเป็น 8 บริเวณ โดยการใช้วัสดุประดิษฐ์สำเร็จรูป ดังนี้



จากนั้นอธิบายเพิ่มเติมว่าระนาบทั้งสามจะตัดกันได้รอยตัดเป็นเส้นตรงสามเส้น เรียกว่า แกนพิกัด ดังนี้

แกน X เกิดจากการตัดกันระหว่างระนาบ XY และระนาบ XZ

แกน Y เกิดจากการตัดกันระหว่างระนาบ XY และระนาบ YZ

แกน Z เกิดจากการตัดกันระหว่างระนาบ YZ และระนาบ XZ

เรียกจุดตัดของแกนทั้งสามว่า จุดกำเนิดและแทนด้วย O

เนื่องจากระนาบสามระนาบที่ตั้งฉากกันตัดกันเกิดเป็น 8 บริเวณ โดยแบ่งเป็นด้านบน 4 บริเวณ และด้านล่าง 4 บริเวณ การเรียกชื่อระนาบแต่ละบริเวณนั้นจะอาศัยหลักการเดียวกับระบบพิกัดฉากสองมิติ โดยเริ่มจากด้านบนหมุนทวนเข็มนาฬิกา เป็นอัฐภาคที่ 1 ถึง อัฐภาคที่ 4 ส่วนด้านล่างหมุนทวนเข็มนาฬิกา เป็นอัฐภาคที่ 5 ถึง อัฐภาคที่ 8 ดังภาพสองมิติข้างล่างนี้

อัฐภาคที่ 3	อัฐภาคที่ 2
อัฐภาคที่ 4	อัฐภาคที่ 1

ด้านบน

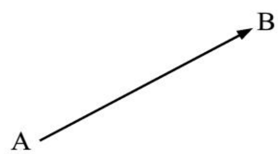
อัฐภาคที่ 7	อัฐภาคที่ 6
อัฐภาคที่ 8	อัฐภาคที่ 5

ด้านล่าง

เวกเตอร์

1. ผู้สอนและผู้เรียนช่วยกันยกตัวอย่างปริมาณที่พบเห็นเสมอในชีวิตประจำวัน ปริมาณที่ผู้เรียนอาจยกตัวอย่างได้ เช่น ความสูง ความเร็ว ความเร่ง ความยาว น้ำหนัก เวลา มวล ปริมาตร งาน พลังงาน โมเมนตัม เมื่อได้ตัวอย่างพอสมควรแล้ว ผู้สอนและผู้เรียนช่วยกันสรุปว่าปริมาณใดบ้างที่บอกแต่เพียงขนาด และปริมาณใดบ้างที่บอกทั้งขนาดและทิศทาง

2. ผู้สอนบอกผู้เรียนว่า ปริมาณที่บอกแต่เพียงขนาด เช่น ความยาว มวล เวลา ปริมาตร งาน และพลังงาน เรียกว่า ปริมาณสเกลาร์ และอาจแทนปริมาณสเกลาร์ด้วยความยาวของส่วนของเส้นตรงหรือระยะทางระหว่างจุดสองจุด ส่วนปริมาณที่บอกทั้งขนาดและทิศทาง เช่น ความเร็ว ความเร่ง แรง น้ำหนัก และโมเมนตัม เรียกว่าปริมาณเวกเตอร์ อาจเขียนรูปแทนปริมาณเวกเตอร์ได้โดยใช้ส่วนของเส้นตรง ที่มีหัวลูกศรกำกับ โดยความยาวของส่วนของเส้นตรงจะแทนขนาด ของเวกเตอร์ และทิศที่ลูกศรชี้คือทิศของเวกเตอร์ ดังรูป



3. ผู้สอนบอกข้อตกลงในการใช้สัญลักษณ์แทนเวกเตอร์ และขนาดของเวกเตอร์พร้อมทั้งบอกความหมายของเวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกัน เวกเตอร์ที่มีทิศทางตรงข้ามกันและเวกเตอร์ที่ขนานกัน

4. ผู้สอนถามผู้เรียนว่า ถ้ามี $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เวกเตอร์ทั้งสองนี้จะเท่ากันเมื่อไรผู้เรียนควรจะตอบได้ว่า $\bar{u}$ เท่ากับ $\bar{v}$ ในกรณีที่ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ มีทิศทางเดียวกันและมีขนาดเท่ากัน จากนั้นผู้สอนและผู้เรียนช่วยกันสรุปบทนิยามของเวกเตอร์ที่เท่ากัน และยกตัวอย่างเวกเตอร์ที่เท่ากันโดยการเขียนรูป

5. ผู้สอนให้ความหมายของนิเสธของเวกเตอร์พร้อมทั้งยกตัวอย่าง

การบวกและการลบเวกเตอร์

1. ผู้สอนและผู้เรียนช่วยกันหาผลบวกของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เมื่อกำหนดให้แทน $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ด้วยส่วนของเส้นตรงที่ระบุทิศทาง โดยอาศัยรูปสามเหลี่ยมหรือรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

2. ผู้สอนบอกความหมายของเวกเตอร์ศูนย์ และได้ข้อสรุปว่าเวกเตอร์ศูนย์เป็นเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดเป็นจุดเดียวกัน

3. ผู้สอนและผู้เรียนช่วยกันหาข้อสรุปได้ดังนี้

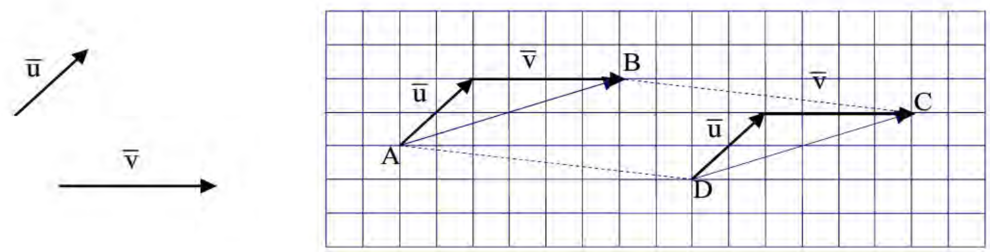
1) สมบัติของการบวกเวกเตอร์ พร้อมทั้งแสดงว่าสมบัติบางข้อเป็นจริงโดยอาศัยรูป เช่น สมบัติการสลับที่ สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มได้

2) นิยามการลบเวกเตอร์

3) หาผลลบของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เมื่อกำหนด $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ด้วยส่วนของเส้นตรงที่ระบุทิศทาง โดยอาศัยนิเสธเวกเตอร์

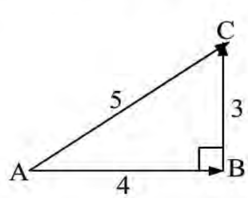
4) เมื่อกำหนด $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ให้ จะหา $\bar{u}+\bar{v}$, $\bar{u}-\bar{v}$ และ $\bar{v}-\bar{u}$ ได้โดยการสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานจะแทนผลบวกและผลลบที่ต้องการเมื่อระบุทิศทางให้ถูกต้อง

4. เมื่อกำหนด $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ให้ ผลบวกของเวกเตอร์ทั้งสองนี้ไม่ได้ขึ้นอยู่กับการเลือกตำแหน่งของจุดเริ่มต้น กล่าวคือไม่ว่าจะเลือกจุดใดเป็นจุดเริ่มต้น ผลบวกของเวกเตอร์ที่ได้จะเป็นเวกเตอร์ที่เท่ากันเสมอ



จากรูป ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ด้าน AB ขนานและยาวเท่ากับด้าน DC $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \bar{u} + \bar{v}$ ดังนั้น ไม่ว่าจุดเริ่มต้นของ $\bar{u}$ จะอยู่ที่จุด A หรือจุด D หรือจุดอื่น ๆ ผลบวกของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ จะเป็นเวกเตอร์ที่เท่ากันเสมอ

5. $|\bar{u}|+|\bar{v}|$ ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ $|\bar{u}+\bar{v}|$



จากรูป ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มีมุม B เป็นมุมฉาก ด้าน AB ยาว 4 หน่วย ด้าน BC ยาว 3 หน่วย และด้าน AC ยาว 5 หน่วย

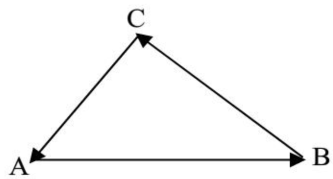
จะเห็นว่า $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

และ $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = 5$ แต่ $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| = 7$

ดังนั้น $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| \neq |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}|$ นั่นคือ $|\bar{u}|+|\bar{v}| \neq |\bar{u}+\bar{v}|$

ในกรณีที่ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ มีทิศทางเดียวกัน $|\bar{u}|+|\bar{v}| = |\bar{u}+\bar{v}|$

6. เนื่องจากเวกเตอร์ศูนย์คือ เวกเตอร์ที่มีขนาดศูนย์หน่วย เวกเตอร์ศูนย์จึงมีจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดเป็นจุดเดียวกัน ผู้สอนอาจจะใช้รูปสามเหลี่ยมอธิบายประกอบความหมายของเวกเตอร์ศูนย์ดังนี้



จากรูป $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \bar{0}$

$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB} = \bar{0}$

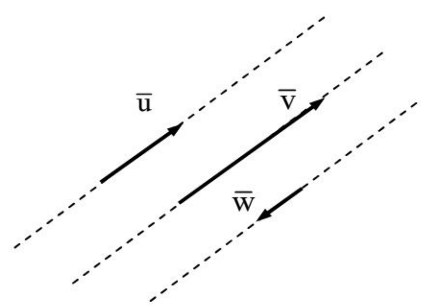
$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CC} = \bar{0}$

เหตุผลที่ต้องมีเวกเตอร์ศูนย์เพราะถ้าไม่มีเวกเตอร์ศูนย์แล้วจะทำให้ตอบคำถาม $\bar{u} + (-\bar{u})$ เป็นเท่าใด ไม่ได้

การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

1. ผู้สอนยกตัวอย่างเวกเตอร์ที่ขนานกันแต่มีขนาดต่างกันเช่น

จากรูป $\bar{u}$, $\bar{v}$ และ $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ที่ขนานกัน $\bar{u}$ มีขนาด 1 หน่วย $\bar{v}$ มีขนาด 2 หน่วย และ $\bar{w}$ มีขนาด $\frac{1}{2}$ หน่วย ผู้สอนบอกผู้เรียนว่าจำนวนจริง 2 และ $-\frac{1}{2}$ เป็นสเกลาร์



จากรูปจะเห็นว่ามีการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ ซึ่ง $\bar{v}$ อาจเขียนแทนด้วย $2\bar{u}$ และ $\bar{w}$ อาจเขียนแทนด้วย $-\frac{1}{2}\bar{u}$

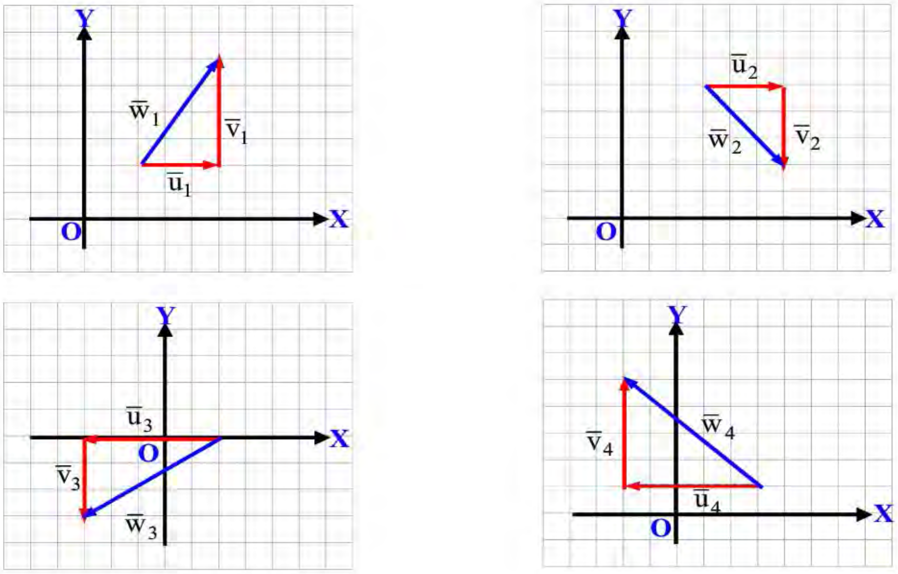
ผู้สอนบอกบทนิยามการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ โดยสเกลาร์ในที่นี้จะหมายถึงจำนวนจริงใดๆ

2. ผู้สอนบอกสมบัติของการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก

1. สำหรับหัวข้อนี้ผู้สอนอาจจะสอนเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ และเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติควบคู่ไปด้วยกัน ตามหัวข้อในหนังสือเรียน

2. ผู้สอนกำหนดเวกเตอร์ $\bar{w}_1$, $\bar{w}_2$, $\bar{w}_3$ และ $\bar{w}_4$ ให้ดังรูป



จากรูป ผู้เรียนควรบอกได้ว่า

$$\bar{w}_1 = \bar{u}_1 + \bar{v}_1$$
$$\bar{w}_2 = \bar{u}_2 + \bar{v}_2$$
$$\bar{w}_3 = \bar{u}_3 + \bar{v}_3$$
$$\bar{w}_4 = \bar{u}_4 + \bar{v}_4$$

ให้ผู้เรียนพิจารณาว่า ถ้าเขียนแทน $\bar{w}_1$ ด้วย $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ และเขียนแทน $\bar{w}_2$ ด้วย $\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$ แล้วผู้เรียนเขียนแทน $\bar{w}_3$ และ $\bar{w}_4$ ได้อย่างไร ซึ่งผู้เรียนควรบอกได้ว่า จะเขียนแทนด้วย $\begin{bmatrix} -5 \\ -3 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} -5 \\ 4 \end{bmatrix}$ ตามลำดับ

3. ผู้สอนอธิบายความหมายของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติที่เขียนในรูป $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ

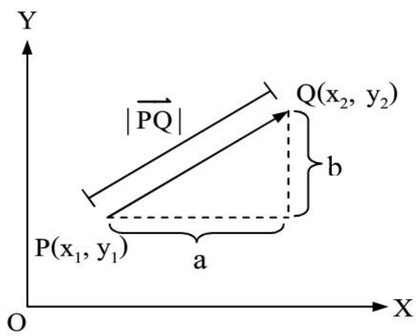
ผู้สอนให้ผู้เรียนเขียนสัญลักษณ์ $\overrightarrow{AB}$ ในระบบพิกัดฉากสองมิติ เมื่อ $\overrightarrow{AB}$ มีจุดเริ่มต้นที่ $A(x_1, y_1)$ และจุดสิ้นสุดที่ $B(x_2, y_2)$ ซึ่งผู้เรียนควรจะเขียนได้เป็น $\begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$

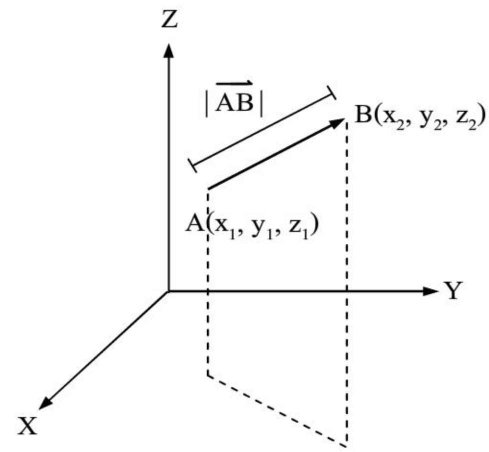
4. ผู้สอนควรทบทวนความรู้เรื่องจุดในระบบพิกัดฉากสามมิติ ก่อนเข้าสู่หัวข้อการเขียนแทนเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติด้วย 3-สิ่งอันดับ เมื่อกำหนดจุด P_1 มีพิกัดเป็น (x_1, y_1, z_1) และ จุด P_2 มีพิกัดเป็น (x_2, y_2, z_2) แล้วผู้เรียนควรเขียน $\overrightarrow{P_1P_2}$ ได้เป็น $\begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}$

5. ผู้สอนบอกความหมายของการเท่ากันของเวกเตอร์ การบวกของเวกเตอร์ เวกเตอร์ศูนย์ นิเสธของเวกเตอร์ การลบเวกเตอร์ และการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ ในระบบพิกัดฉากสองมิติ และสามมิติ ตามตารางสรุปบทนิยามในหนังสือเรียน พร้อมทั้งยกตัวอย่างประกอบ

ขนาดของเวกเตอร์

1. ผู้สอนควรทบทวนความรู้เรื่องการหาระยะทางระหว่างจุดสองจุดในระบบพิกัดฉากสองมิติ และสามมิติ ซึ่งอาจจะยกตัวอย่างพร้อมกัน ดังรูป





จากรูป ผู้สอนให้ผู้เรียนหาระยะทางระหว่างจุด P และจุด Q นักเรียนควรจะตอบได้ว่าเท่ากับ $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ หรือ $\sqrt{a^2+b^2}$ หน่วย และระยะทางระหว่างจุด A และจุด B เท่ากับ $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ หน่วย

2. ผู้สอนกำหนดให้ $x_2-x_1=a$ และ $y_2-y_1=b$ ในระบบพิกัดฉากสองมิติ และให้ $x_2-x_1=a$, $y_2-y_1=b$, $z_2-z_1=c$ ในระบบพิกัดฉากสามมิติ แล้วให้ผู้เรียนเขียนเวกเตอร์ $\overrightarrow{PQ}$ และ $\overrightarrow{AB}$ ตามลำดับ ผู้เรียนควรเขียนได้เป็น $\overrightarrow{PQ}=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ และ $\overrightarrow{AB}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$ ตามลำดับ

3. ผู้สอนให้ผู้เรียนหาขนาดของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ $\overrightarrow{PQ}$ และเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ $\overrightarrow{AB}$ ผู้เรียนควรบอกได้ว่าเวกเตอร์ดังกล่าวมีขนาดเป็น $\sqrt{a^2+b^2}$ หน่วย และ $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ หน่วย ตามลำดับ จากนั้นผู้สอนยกตัวอย่างเวกเตอร์ที่มีพิกัดที่ 1, 2 หรือพิกัดที่ 1, 2 และ 3 เช่น $\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}$ หรือ $\begin{bmatrix}-3\\1\\4\end{bmatrix}$ แล้วให้ผู้เรียนได้คำนวณขนาดของเวกเตอร์

เวกเตอร์หนึ่งหน่วย

1. ผู้สอนบอกความหมายของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย

2. ผู้สอนและผู้เรียนช่วยกันหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ดังนี้

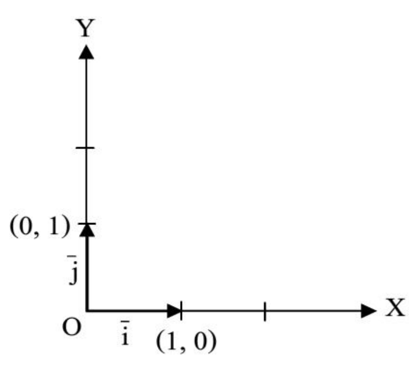
ผู้สอนให้เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ คือ $m\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ เมื่อ $m > 0$ แล้วผู้สอนให้ผู้เรียนบอกขนาดของเวกเตอร์ $m\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ซึ่งผู้เรียนควรบอกได้ว่า

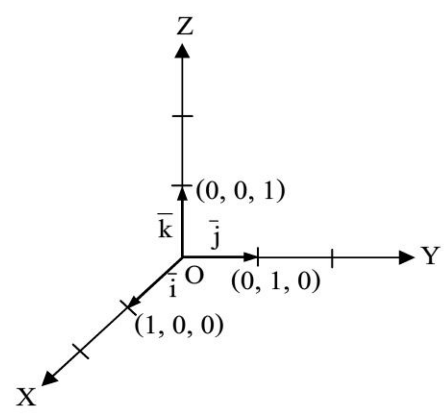
เนื่องจาก $m\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ma \\ mb \end{bmatrix}$ ดังนั้นขนาดของ $m\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ เท่ากับ $\sqrt{(ma)^2+(mb)^2}$ แต่ขนาดของเวกเตอร์ $m\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ เท่ากับ 1 หน่วย ดังนั้น $\sqrt{m^2(a^2+b^2)} = 1$ หรือ $m = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$

นั่นคือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ คือ $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

ผู้สอนให้ผู้เรียนแสดงการหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ ตามวิธีการข้างบน แล้วให้ผู้เรียนสรุปได้ว่า สำหรับเวกเตอร์ $\bar{u}$ ใด ๆ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\bar{u}$ คือเวกเตอร์ $\dfrac{\bar{u}}{|\bar{u}|}$

3. ผู้สอนแนะนำเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่สำคัญในระบบระบบพิกัดฉากสองมิติ คือ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ พร้อมทั้งบอกสัญลักษณ์ $\bar{i}$ แทน $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $\bar{j}$ แทน $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ สำหรับในระบบพิกัดฉากสามมิติเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่สำคัญคือ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ $\bar{i}$, $\bar{j}$ และ $\bar{k}$ ตามลำดับ เพื่อให้ผู้เรียนเห็นภาพ ผู้สอนแสดงเวกเตอร์ $\bar{i}$ และ $\bar{j}$ ในระบบพิกัดฉากสองมิติ และเวกเตอร์ $\bar{i}$, $\bar{j}$ และ $\bar{k}$ ในระบบพิกัดฉากสามมิติประกอบ ดังรูป





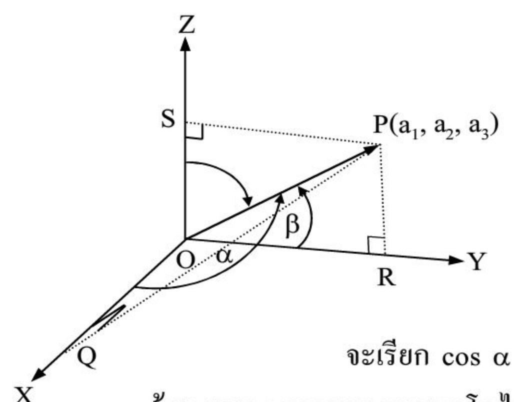
4. ผู้สอนใช้วิธีการตามหนังสือเรียน เพื่อให้ผู้เรียนเขียนเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ในรูปเวกเตอร์ $\bar{i}$ และ $\bar{j}$ ซึ่งผู้เรียนควรจะเขียนได้ว่า $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a\bar{i}+b\bar{j}$

ผู้สอนกำหนดเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุด (x_1, y_1) และจุดสิ้นสุดที่จุด (x_2, y_2) ผู้เรียนควรเขียนแทนเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} x_2-x_1 \\ y_2-y_1 \end{bmatrix}$ ด้วย $(x_2-x_1)\bar{i}+(y_2-y_1)\bar{j}$ ได้

ผู้สอนให้ผู้เรียนเขียนเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ ในรูปเวกเตอร์ $\bar{i}$, $\bar{j}$ และ $\bar{k}$ ซึ่งผู้เรียนควรจะเขียนได้ว่า $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a\bar{i}+b\bar{j}+c\bar{k}$ และเมื่อผู้สอนกำหนดเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุด (x_1, y_1, z_1) และจุดสิ้นสุดที่จุด (x_2, y_2, z_2) ผู้เรียนควรเขียนแทนเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} x_2-x_1 \\ y_2-y_1 \\ z_2-z_1 \end{bmatrix}$ ด้วย $(x_2-x_1)\bar{i}+(y_2-y_1)\bar{j}+(z_2-z_1)\bar{k}$ ได้

โคไซน์แสดงทิศทาง

1. ผู้สอนแนะนำว่า มุมกำหนดทิศทางของเวกเตอร์ใด ๆ คือมุมที่มีขนาด α, β และ γ ซึ่งวัดจากแกนพิกัดด้านบวกทั้งสาม ตามลำดับ ดังตัวอย่างจากรูป จะได้ว่า $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \pi]$ และ



$$\cos\alpha = \frac{OQ}{|\overrightarrow{OP}|} = \frac{a_1}{|\overrightarrow{OP}|}$$

$$\cos\beta = \frac{OR}{|\overrightarrow{OP}|} = \frac{a_2}{|\overrightarrow{OP}|}$$

$$\cos\gamma = \frac{OS}{|\overrightarrow{OP}|} = \frac{a_3}{|\overrightarrow{OP}|}$$

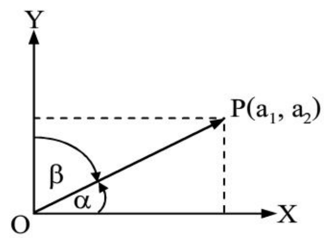
จะเรียก $\cos\alpha$, $\cos\beta$ และ $\cos\gamma$ ว่า โคไซน์แสดงทิศทาง ของ $\overrightarrow{OP}$

ผู้สอนบอกความหมายของโคไซน์แสดงทิศทางของเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ ว่า สำหรับ $\bar{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ โคไซน์แสดงทิศทางของ $\bar{a}$ เทียบกับแกน X, Y, Z ตามลำดับ คือจำนวนสามจำนวน ซึ่งเรียงตามลำดับดังนี้ $\frac{a_1}{|\bar{a}|}, \frac{a_2}{|\bar{a}|}, \frac{a_3}{|\bar{a}|}$

ผู้สอนให้ผู้เรียนใช้ความรู้เรื่องโคไซน์แสดงทิศทาง เพื่อหาทิศทางของเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ ซึ่งผู้เรียนควรตอบได้ว่า สำหรับ $\bar{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ที่

ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ โคไซน์แสดงทิศทาง ของ $\bar{a}$ เทียบกับแกน X และ Y ตามลำดับ คือ จำนวนจริง $\frac{a_1}{|\bar{a}|}$ และ $\frac{a_2}{|\bar{a}|}$ ตามลำดับ

ผู้สอนอาจชี้ให้ผู้เรียนทราบว่า ในหนังสือบางเล่มผู้เรียนจะพบว่า การกำหนดทิศทางของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ จะเขียนอยู่ในรูป แทนเจนต์ของขนาดของมุมซึ่งวัดจากแกนพิกัด X ด้านบวก เช่น



จากรูป ให้ $\bar{a} = \overrightarrow{OP}$ และ $|\bar{a}| \neq 0$

จะได้ว่า โคไซน์แสดงทิศทางของ $\bar{a}$ คือ เทียบกับแกน X และ Y คือ $\frac{a_1}{|\bar{a}|}$ และ $\frac{a_2}{|\bar{a}|}$ ตามลำดับ

นั่นคือ $\cos\alpha = \frac{a_1}{|\bar{a}|}$, $\cos\beta = \frac{a_2}{|\bar{a}|} = \sin\alpha$

ดังนั้น $\tan\alpha = \frac{a_2}{a_1}$

2. ผู้สอนให้ผู้เรียนใช้ความรู้เรื่องโคไซน์แสดงทิศทาง เพื่อหาว่า เวกเตอร์สองเวกเตอร์จะมีทิศทางเดียวกันหรือมีทิศทางตรงกันข้าม โดยใช้ตัวอย่างในหนังสือเรียน หรือหาเพิ่มเติมจากแบบฝึกหัด ผู้เรียนควรตอบได้ถูกต้องและแสดงถึงความเข้าใจบทนิยาม ที่ว่า

"เวกเตอร์สองเวกเตอร์ จะมีทิศทางเดียวกันก็ต่อเมื่อมีโคไซน์แสดงทิศทางชุดเดียวกัน และจะมีทิศทางตรงกันข้ามก็ต่อเมื่อ โคไซน์แสดงทิศทางเทียบแต่ละแกนของเวกเตอร์หนึ่งเป็นจำนวนตรงข้ามกับโคไซน์แสดงทิศทางของอีกเวกเตอร์หนึ่ง"

ผลคูณเชิงสเกลาร์

1. ผู้สอนแนะการใช้ความรู้เกี่ยวกับสมบัติของผลคูณเชิงสเกลาร์ว่า การพิสูจน์สมบัติทางเรขาคณิตบางสมบัติ ทำได้ง่ายโดยใช้สมบัติของผลคูณเชิงสเกลาร์ เช่น การแสดงว่าเส้นมัธยฐานที่ลากจากจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วตั้งฉากกับฐาน ดังตัวอย่างที่ 5 ในหนังสือเรียน หรือการแสดงว่ามุมในครึ่งวงกลมเป็นมุมฉาก ดังนี้

พิสูจน์ ให้ O เป็นจุดศุนย์กลางของวงกลม $\overline{AB}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางและ C เป็นจุด ๆ หนึ่งบนครึ่งวงกลม

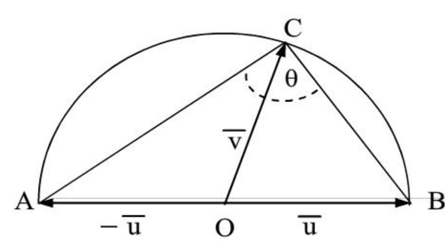
ให้ $\overrightarrow{OB} = \bar{u}$ ดังนั้น $\overrightarrow{OA} = -\bar{u}$

ให้ $\overrightarrow{OC} = \bar{v}$ และมุม ACB $= \theta$

จะแสดงว่า $\theta = 90^\circ$

เนื่องจาก $\overrightarrow{CA} = -\bar{u} - \bar{v}$

$\overrightarrow{CB} = \bar{u} - \bar{v}$



ดังนั้น $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = (-\bar{u}-\bar{v})\cdot(\bar{u}-\bar{v})$

$= (-\bar{u}-\bar{v})\cdot\bar{u}-(-\bar{u}-\bar{v})\cdot\bar{v}$

$= (-\bar{u}-\bar{v})\cdot\bar{u}+(\bar{u}+\bar{v})\cdot\bar{v}$

$= (-\bar{u}\cdot\bar{u})-(\bar{v}\cdot\bar{u})+(\bar{u}\cdot\bar{v})+(\bar{v}\cdot\bar{v})$

$= -|\bar{u}|^2+|\bar{v}|^2$

$= 0$ (เพราะว่า $|\bar{u}|=|\bar{v}|$)

เนื่องจาก $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|\cos\theta$

ดังนั้น $|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|\cos\theta = 0$

แต่ $|\overrightarrow{CA}|\neq 0$ และ $|\overrightarrow{CB}|\neq 0$

ดังนั้น $\cos\theta = 0$

จะได้ $\theta = 90^\circ$

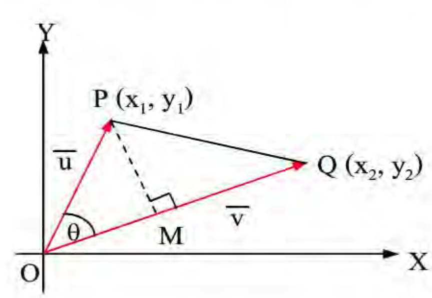
แสดงว่ามุมในครึ่งวงกลมเป็นมุมฉาก

2. ผู้สอนยกตัวอย่างเวกเตอร์สองเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ หรือ สามมิติ แล้วให้ผู้เรียนหามุมระหว่างเวกเตอร์สองเวกเตอร์ ผู้เรียนควรหาได้โดยใช้ความสัมพันธ์ $\cos\theta=\dfrac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{u}||\bar{v}|}$ เมื่อ θ เป็นขนาดของมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ซึ่ง $0^\circ\leq\theta\leq 180^\circ$ และจากความสัมพันธ์ดังกล่าว ผู้สอนควรให้ผู้เรียนสรุปได้ว่า ถ้า $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ $\bar{u}$ ตั้งฉากกับ $\bar{v}$ ก็ต่อเมื่อ $\bar{u}\cdot\bar{v}=0$ โดยการแสดงการพิสูจน์หรือการให้เหตุผลอย่างง่าย เช่น เพราะ $\cos 90^\circ$ เป็นศูนย์และขนาดของเวกเตอร์ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ไม่เป็นศูนย์

ผู้สอนอาจชี้ให้เห็นการใช้ประโยชน์จากผลคูณเชิงสเกลาร์เพิ่มเติม เช่น ยกตัวอย่างการใช้ประโยชน์จากสูตร $\cos\theta = \dfrac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{u}||\bar{v}|}$ เมื่อมุมระหว่าง $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ มีขนาด θ เพื่อหาขนาดของมุมที่เกิดจากการตัดกันของเส้นตรงสองเส้น

3. สมบัติที่สำคัญของผลคูณเชิงสเกลาร์ที่ว่า ถ้ามุมระหว่าง $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ มีขนาด θ แล้ว $\bar{u}\cdot\bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta$ นั้น การพิสูจน์จะแยกแสดงเป็นกรณีที่ $\theta < 90^\circ$, $\theta = 90^\circ$, $\theta > 90^\circ$, $\theta = 0^\circ$ หรือ $\theta = 180^\circ$

ผู้สอนอาจแสดงวิธีพิสูจน์ดังนี้



กรณีที่ $\theta < 90^\circ$

ให้ $\bar{u} = \overrightarrow{OP} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j}$

$\bar{v} = \overrightarrow{OQ} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j}$

θ คือ $P\hat{O}Q$

$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$$|\overrightarrow{PQ}|^2 = (x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2) - 2(x_1x_2 + y_1y_2)$$

$$= |\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2 - 2\,\bar{u}\cdot\bar{v} \qquad \text{---------- (1)}$$

จากจุด P ลากเส้นตั้งฉากกับส่วนเส้นตรง OQ และตัดกับส่วนของเส้นตรง OQ ที่จุด M

$$|\overrightarrow{PQ}|^2 = |\overrightarrow{PM}|^2 + |\overrightarrow{MQ}|^2$$

$$= (|\overrightarrow{OP}|^2 - |\overrightarrow{OM}|^2) + (|\overrightarrow{OQ}| - |\overrightarrow{OM}|)^2$$

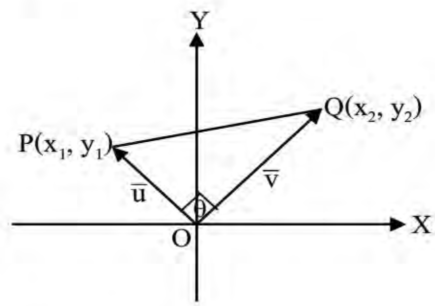
$$= |\overrightarrow{OP}|^2 - (|\overrightarrow{OP}|\cos\theta)^2 + (|\overrightarrow{OQ}| - |\overrightarrow{OP}|\cos\theta)^2$$

$$= |\overrightarrow{OP}|^2 + |\overrightarrow{OQ}|^2 - 2|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|\cos\theta$$

$$= |\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2 - 2|\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta \qquad \text{---------- (2)}$$

จาก (1) และ (2) จะได้ $\bar{u}\cdot\bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta$

กรณีที่ $\theta = 90°$



ให้ $\bar{u} = \overrightarrow{OP} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j}$

$\bar{v} = \overrightarrow{OQ} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j}$

θ คือ $P\hat{O}Q$

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2 = (x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2) - 2(x_1x_2 + y_1y_2)$$

$$= \left|\bar{u}\right|^2 + \left|\bar{v}\right|^2 - 2(\bar{u}\cdot\bar{v}) \qquad \text{---------- (1)}$$

เนื่องจาก $\theta = 90°$ ดังนั้น $\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OP}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OQ}\right|^2$

$$= \left|\bar{u}\right|^2 + \left|\bar{v}\right|^2 \qquad \text{---------- (2)}$$

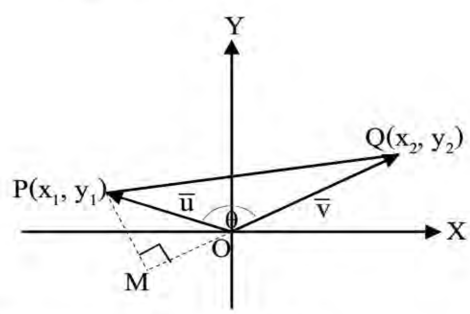
จาก (1) และ (2) จะได้ว่า $\bar{u}\cdot\bar{v} = 0$ ---------- (3)

แต่ $\theta = 90°$ จะได้ $\cos\theta = 0$

ดังนั้น $|\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta = 0$ ---------- (4)

จาก (3) และ (4) จะได้ $\bar{u}\cdot\bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta$

กรณีที่ $\theta > 90°$



ให้ $\bar{u} = \overrightarrow{OP} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j}$

$\bar{v} = \overrightarrow{OQ} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j}$

θ คือขนาดของ $P\hat{O}Q$

ในทำนองเดียวกับกรณี $\theta \le 90°$

จะได้ $\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2 = \left|\bar{u}\right|^2 + \left|\bar{v}\right|^2 - 2(\bar{u}\cdot\bar{v})$ ---------- (1)

จากจุด P ลากเส้นให้ตั้งฉากกับด้าน QO ที่ต่อออกไปทางจุด O ที่จุด M

จะได้ $\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2 = \left|\overrightarrow{PM}\right|^2 + \left|\overrightarrow{MQ}\right|^2$

$= (\left|\overrightarrow{OP}\right|^2 - \left|\overrightarrow{OM}\right|^2) + (\left|\overrightarrow{OM}\right| + \left|\overrightarrow{OQ}\right|)^2$

$= |\bar{u}|^2 - (|\bar{u}|\cos(180° - \theta))^2 + (|\bar{u}|\cos(180° - \theta) + |\bar{v}|)^2$

$= |\bar{u}|^2 - (-|\bar{u}|\cos\theta)^2 + (-|\bar{u}|\cos\theta + |\bar{v}|)^2$

$= |\bar{u}|^2 - |\bar{u}|^2\cos^2\theta + |\bar{u}|^2\cos^2\theta - 2|\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta + |\bar{v}|^2$

$= |\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2 - 2|\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta$ ---------- (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}| \cos\theta$

กรณีที่ $\theta = 0°$ **หรือ** $\theta = 180°$

เมื่อ $\theta = 0°$ จะได้ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ มีทิศทางเดียวกัน

นั่นคือ $\bar{u} = m\bar{v}$ เมื่อ $m > 0$

ให้ $\bar{v} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j}$ จะได้ $\bar{u} = mx_1\bar{i} + my_1\bar{j}$

$\bar{u} \cdot \bar{v} = mx_1^2 + my_1^2$

$= m(x_1^2 + y_1^2)$

แต่ $|\bar{u}||\bar{v}|\cos 0° = (m\sqrt{x_1^2 + y_1^2})(\sqrt{x_1^2 + y_1^2})$

$= m(x_1^2 + y_1^2)$

นั่นคือ $\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}|\cos 0°$

เมื่อ $\theta = 180°$ จะได้ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ มีทิศทางตรงกันข้าม

นั่นคือ $\bar{u} = -m\bar{v}$ เมื่อ $m > 0$

ให้ $\bar{v} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j}$ จะได้ $\bar{u} = -mx_1\bar{i} - my_1\bar{j}$

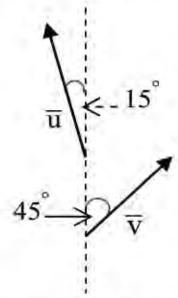
จะพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกับกรณีที่ $\theta = 0°$ ว่า

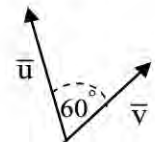
$\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}|\cos 180°$

สรุปได้ว่า ถ้า $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่ $\bar{0}$ และมุมระหว่าง $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ มีขนาด θ แล้ว $\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta$

4. สำหรับเรื่องผลคูณเชิงสเกลาร์ของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ที่กล่าวว่ามุมระหว่าง $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ มีขนาด θ นั้น โดยทั่วไปจะหมายถึง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดเดียวกัน ถ้า $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ไม่ได้มีจุดเริ่มต้นที่จุดเดียวกัน อาจสร้างเวกเตอร์ใหม่ที่เท่ากับ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ โดยให้เวกเตอร์ใหม่นี้มีจุดเริ่มต้นที่จุดเดียวกันได้

ตัวอย่างเช่นต้องการจะหาผลคูณเชิงสเกลาร์ของเวกเตอร์ $\overline{u}$ และ $\overline{v}$ ที่กำหนดให้ดังรูป





เมื่อเขียน $\overline{u}$ และ $\overline{v}$ ให้มีจุดเริ่มต้นจุดเดียวกัน จะได้ว่า มุมระหว่าง $\overline{u}$ และ $\overline{v}$ ที่มีขนาด 60°

ผลคูณเชิงเวกเตอร์

1. เนื่องจากผลคูณของเวกเตอร์ที่กล่าวถึงในหัวข้อที่แล้วได้ผลลัพท์มาเป็นปริมาณสเกลาร์จึงมักมีข้อสงสัยเสมอว่าทำไมผลคูณของเวกเตอร์จึงไม่เป็นเวกเตอร์ เพราะผลคูณของเวกเตอร์ที่เป็นเวกเตอร์นั้น เวกเตอร์ที่เป็นผลลัพธ์จะตั้งฉากกับเวกเตอร์ทั้งสองที่นำมาคูณกัน กล่าวคือจะตั้งฉากกับระนาบของเวกเตอร์ที่นำมาคูณกัน ดังนั้นแทนที่จะเป็นเวกเตอร์ในระนาบหรือในสองมิติ จึงกลายเป็นเวกเตอร์ในสามมิติ ดังนั้น เพื่อให้เกิดความคิดรวบยอดเกี่ยวกับผลคูณเชิงเวกเตอร์ ผู้สอนอาจตั้งคำถาม เช่น

"ทำไมจึงไม่กล่าวถึงผลคูณเชิงเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ" หรือ

"ในระบบพิกัดฉากสองมิติ มีผลคูณเชิงเวกเตอร์ หรือไม่"

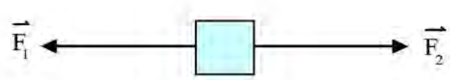
ให้ผู้เรียนร่วมกันอภิปรายเพื่อหาคำตอบ

2. ผู้สอนอาจชี้ให้เห็นการใช้ประโยชน์จากผลคูณเชิงเวกเตอร์ เช่น การหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานหรือการหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน ตามหัวข้อในหนังสือเรียน

ความรู้เพิ่มเติมสำหรับครู

1. ในวิชาฟิสิกส์ กล่าวถึงแรงซึ่งเป็นปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง แรงจึงเป็นปริมาณเวกเตอร์ ดังนั้น ในการสอนเรื่องการบวกและลบเวกเตอร์ผู้สอนอาจอาศัยตัวอย่างทางฟิสิกส์ เช่น

1) ถ้ามีแรง 2 แรงที่มีขนาดเท่ากันแต่มีทิศทางตรงกันข้าม กระทำต่อวัตถุ (ดังรูป ก) ผลก็คือวัตถุจะไม่เคลื่อนที่



รูป ก

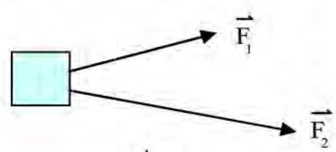
จากรูป ก แรง $\vec{F_1}$ และ $\vec{F_2}$ มีขนาด 3 นิวตัน แต่มีทิศทางตรงกันข้าม จะได้แรงลัพธ์คือ $\bar{0}$ จึงทำให้วัตถุไม่เคลื่อนที่

2) ถ้ามีแรง 2 แรงที่มีทิศทางเดียวกันกระทำต่อวัตถุ (ดังรูป ข) ผลก็คือวัตถุจะเคลื่อนที่ไปในแนวแรงทั้งสอง ด้วยแรงที่มีขนาดเท่ากับผลบวกของแรงทั้งสองนั้น

รูป ข

จากรูป ข แรง $\vec{F_1}$ มีขนาด 2 นิวตัน และ $\vec{F_2}$ มีขนาด 3 นิวตัน โดยที่แรง $\vec{F_1}$ มีทิศทางเดียวกับแรง $\vec{F_2}$ จะได้แรงลัพธ์มีขนาด 5 นิวตันและมีทิศทางเดียวกับแรง $\vec{F_1}$ และ $\vec{F_2}$ ดังนั้นวัตถุจะเคลื่อนที่ไปด้วยแรงที่มีทิศทางเดียวกับแรง $\vec{F_1}$ และ $\vec{F_2}$ และขนาด 5 นิวตัน

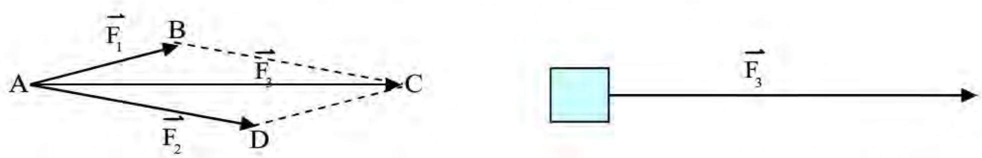
3) ถ้ามีแรง 2 แรงที่ไม่อยู่ในแนวเดียวกันกระทำต่อวัตถุ (ดังรูป ค) ผลก็คือวัตถุจะเคลื่อนที่อยู่ในแนวเส้นตรงที่อยู่ระหว่างแรงทั้งสอง โดยมิได้เคลื่อนที่ในแนวของแรงหนึ่งแรงใด



รูป ค

จากรูป ค แรง $\vec{F_1}$ มีขนาด 2 นิวตัน แรง $\vec{F_2}$ มีขนาด 3 นิวตัน แต่แรง $\vec{F_1}$ และ $\vec{F_2}$ ไม่ได้อยู่ในแนวเดียวกัน

ในการหาแรงลัพธ์หาได้โดยสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานดังนี้

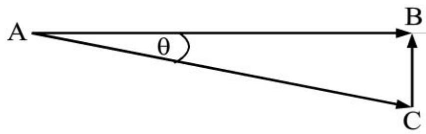


จากรูป ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $\overrightarrow{AB} = \vec{F_1}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{F_2}$ จะได้ $\overrightarrow{AC} = \vec{F_3}$ เป็นแรงลัพธ์ของแรง $\vec{F_1}$ และ $\vec{F_2}$ วัตถุจะเคลื่อนที่ไปด้วยแรง $\vec{F_3}$ ซึ่งมีขนาดและทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{AC}$

2. การสอนเรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ เพื่อให้ผู้เรียนมองเห็นประโยชน์และการนำไปใช้ ผู้สอนควรยกตัวอย่างโจทย์ปัญหาให้ผู้เรียนมองเห็นเป็นแนวทาง ดังต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 เครื่องบินลำหนึ่งมีความเร็ว 225 กิโลเมตรต่อชั่วโมง (ความเร็วเมื่อลมสงบ) ถ้าต้องการให้เครื่องบินลำนี้ บินตรงไปทางทิศตะวันออก เมื่อมีลมพัดจากทิศใต้ด้วยความเร็ว 45 กิโลเมตรต่อชั่วโมง นักบินจะต้องขับเครื่องบินไปในทิศทางใด และเครื่องบินบินตรงไปทางทิตะวันออกด้วยความเร็วเท่าใด

วิธีทำ



ต้องการให้เครื่องบินบินจาก A ไป B

$\overrightarrow{AB}$ จะเป็นเวกเตอร์ที่เป็นผลบวกของ $\overrightarrow{AC}$ และ $\overrightarrow{CB}$

ซึ่งเป็นความเร็วของเครื่องบินและของลมตามลำดับ

$$\sin\theta = \frac{|\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{45}{225} = 0.2000$$

จะได้ $\theta = 11^\circ\ 31'$

และ $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 - \left|\overrightarrow{BC}\right|^2} = \sqrt{225^2 - 45^2} \approx 220$

ดังนั้น นักบินจะต้องขับเครื่องบินไปในแนวเฉียงทิศใต้ โดยทำมุม $11^\circ\ 31'$ กับทิศตะวันออก ทำให้เครื่องบินบินตรงไปทางทิศตะวันออกด้วยความเร็วประมาณ 220 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

ตัวอย่างที่ 2 แดงและดำว่ายน้ำได้เร็วเท่ากัน เมื่อไปเล่นน้ำในคลองเขาทั้งสองตกลงที่จะว่ายน้ำแข่งกันแต่จะว่ายคนละวิธี โดยแดงว่ายข้ามฟากกลับไปกลับมาในแนวตั้งฉากกับฝั่งคลอง ส่วนดำจะว่ายตามน้ำไปเป็นระยะเท่ากับความกว้างของคลอง แล้วจึงว่ายทวนน้ำกลับมาเป็นระยะเท่าเดิม โดยวิธีดังกล่าวท่านคิดว่าใครเป็นผู้ชนะ

วิธีทำ ให้ v เป็นความเร็วในการว่ายน้ำของแดงและดำในน้ำนิ่งต่อนาที

c เป็นความเร็วของกระแสน้ำต่อนาที

d เป็นความกว้างของคลอง

ระยะทางที่ใช้ในการแข่งขัน	$2d$	หน่วย
ใน 1 นาที แดงว่ายน้ำได้ระยะทาง	$\sqrt{v^2 - c^2}$	หน่วย (เมื่อ $v > c$)
เวลาทั้งหมดที่แดงใช้ในการว่ายน้ำ	$\dfrac{2d}{\sqrt{v^2 - c^2}}$	หน่วย
ใน 1 นาที ดำว่ายตามน้ำได้ระยะทาง	$v + c$	หน่วย
ใน 1 นาที ดำว่ายทวนน้ำได้ระยะทาง	$v - c$	หน่วย
เวลาที่ดำใช้ในการว่ายกลับไปกลับมา	$\dfrac{d}{v-c} + \dfrac{d}{v+c}$	หน่วย

ดังนั้น $\dfrac{d}{v-c} + \dfrac{d}{v+c} = \dfrac{dv + dc + dv - dc}{v^2 - c^2} = \dfrac{2dv}{v^2 - c^2}$

เนื่องจาก $v > 0$ และ $c > 0$ และ $v > c$

$$c^2 > 0$$

$$v^2 > 0$$

ดังนั้น $$v^2 > v^2 - c^2$$

$$v > \sqrt{v^2 - c^2}, \qquad (\text{เพราะ } v > 0)$$

$$\frac{v}{\sqrt{v^2 - c^2}} > 1$$

คูณด้วย $\frac{1}{\sqrt{v^2 - c^2}}$ จะได้ $$\frac{v}{v^2 - c^2} > \frac{1}{\sqrt{v^2 - c^2}}$$

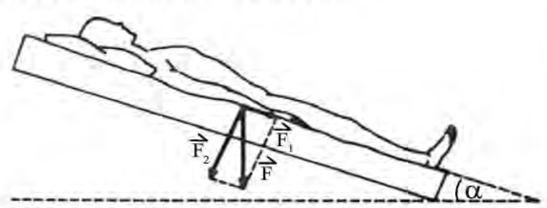
เนื่องจาก $$d > 0$$

ดังนั้น $$\frac{2dv}{v^2 - c^2} > \frac{2d}{\sqrt{v^2 - c^2}}$$

นั่นคือ เวลาที่ดำใช้ในการว่ายน้ำมากกว่าเวลาที่แดงใช้ ดังนั้น แดงเป็นผู้ชนะ

ตัวอย่างที่ 3 BED SORE คือ แผลที่ผิวหนังที่เกิดจากการกดทับทำให้หนังเปิดและถ้าปล่อยทิ้งไว้ แผลอาจเน่าถึงกระดูกได้ อาการนี้เป็นผลจากการที่คนไข้นอนป่วยอยู่บนเตียงนานเกินไป เพื่อหลีกเลี่ยงอาการนี้จึงควรลดแรงกดทับบนเตียงอันเกิดจากน้ำหนักตัวคนไข้ และไม่ควรให้คนไข้นอนอยู่ในท่าเดียวนาน ๆ

คนไข้คนหนึ่งป่วยอยู่บนเตียงเป็นเวลานาน เพื่อหลีกเลี่ยงไม่ให้คนไข้มีอาการของ BED SORE แพทย์จึงแนะนำให้ยกเตียงขึ้นเป็นเวลา 10 นาทีในเวลาเช้าและเย็น จงหาเหตุผลเพื่อแสดงว่า การยกเตียงขึ้นทำให้แรงกดทับน้อยลง

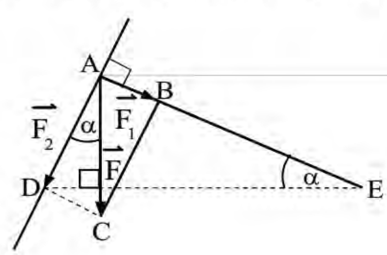


วิธีทำ เมื่อเตียงอยู่ในแนวราบ แรงกดทับกับพื้นเตียงคือน้ำหนักของคนไข้นั่นเอง ซึ่งเป็นแรงที่อยู่ในแนวดิ่ง

ให้ $\vec{F}$ เป็นเวกเตอร์แทนแรงซึ่งเกิดจากน้ำหนักคนไข้เมื่อเตียงเอียงทำมุม α กับแนวระดับ

$\vec{F_1}$ เป็นเวกเตอร์แทนแรงซึ่งเกิดจากน้ำหนักคนไข้ในแนวเดียวกับเตียง

$\vec{F_2}$ เป็นเวกเตอร์แทนแรงซึ่งเกิดจากน้ำหนักคนไข้ในแนวตั้งฉากกับเตียง



ให้ α เป็นมุมที่เตียงทำกันแนวระดับ

$\vec{F}$ เป็นผลรวมของแรงของน้ำหนักในแนวตั้งฉากกับเตียงและแรงค้ำยันของเท้า

นั่นคือ $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$ และ $\vec{F_1} \perp \vec{F_2}$

จากรูป $A\hat{E}D$ เป็นมุมที่พื้นเตียงทำกับแนวราบ

จะได้ $C\hat{A}D$ เท่ากับ $A\hat{E}D$ เท่ากับ α

$$\frac{|\vec{F_2}|}{|\vec{F}|} = \cos\alpha\ , \qquad |\vec{F_2}| = |\vec{F}|\cos\alpha$$

เนื่องจาก $|\vec{F}|$ เป็นน้ำหนักของคนไข้จึงมีค่าคงที่ ดังนั้นค่าของ $|\vec{F_2}|$ จะมากหรือน้อยจึงขึ้นอยู่กับ $\cos\alpha$ และจะเห็นว่า เมื่อ α เพิ่มขึ้นจาก $0°$ แต่ไม่เกิน $90°$ ซึ่ง $0 < \cos\alpha < 1$

แต่เมื่อเตียงอยู่ในแนวราบ $\alpha = 0°$ และ $\cos 0° = 1$

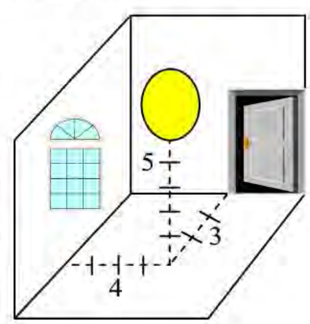
$|\vec{F_2}| = |\vec{F}|$ จะได้ แรงกดเตียงมากที่สุด

นั่นคือ เมื่อเตียงเอียงขึ้น น้ำหนักที่กดเตียง $|\vec{F_2}|$ จะน้อยลง

3. ผู้สอนอาจชี้ให้เห็นการใช้ประโยชน์จากผลคูณเชิงเวกเตอร์ เช่น การหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานหรือการหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน ตามหัวข้อในหนังสือเรียน

ตัวอย่างกิจกรรมที่ส่งเสริมทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

การฝึกให้ผู้เรียนลงจุดในระนาบพิกัดฉากสามมิติโดยใช้จินตนาการ สำหรับผู้เริ่มต้นนั้นเป็นเรื่องที่ทำได้ยาก ดังนั้นผู้สอนควรดำเนินตามกิจกรรม ดังนี้



1. ผู้สอนนำลูกโป่งหนึ่งลูกที่มีด้ายผูกยึดปลายเส้นด้ายด้วยดินน้ำมันให้ลูกโป่งลอยอยู่ตรงหน้าชั้นเรียน(ดังรูป)

ผู้สอนใช้การถามตอบให้ผู้เรียนวัดระยะที่เส้นด้ายอยู่ห่างจากผนังทั้งสองด้าน และระยะที่ลูกโป่งลอยขึ้นจากพื้นผู้สอนให้ผู้เรียนสังเกตว่า จะบอกตำแหน่งของลูกโป่งอย่างไร ผู้เรียนควรจะสรุปได้ว่า “การบอกตำแหน่งของลูกโป่ง จะต้องพึ่งระนาบสามระนาบที่ตั้งฉากกัน ได้แก่ฝาห้องทั้งสองด้านและพื้นห้อง วิธีนี้เป็นการกำหนดตำแหน่งของจุดในเวกเตอร์ 3 มิติ โดยใช้ระบบพิกัดฉาก ซึ่งใช้ระนาบสามระนาบตั้งฉากกัน”

2. ผู้สอนใช้สื่อวัสดุประดิษฐ์สำเร็จรูป ซึ่งแสดงระนาบ 3 ระนาบ ตั้งฉาก ตัดกัน สาธิตประกอบคำถาม ให้ผู้เรียนสังเกตแกน X แกน Y และ แกน Z ว่า เกิดจากการตัดกันระหว่างระนาบใด ผู้สอนนำกล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากมาวางในช่องบนช่องแรกทางขวามือ(อัฐภาคที่ 1) เพื่อให้ผู้เรียนได้สังเกตว่าค่าที่ใช้เป็นพิกัดของจุด P ทั้งสามจำนวนเป็นจำนวนจริงบวก

3. ผู้สอนนำกล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีขนาดต่าง ๆ กัน อีกหลาย ๆ กล่องมาวาง (ขนาดของกล่องควรมีความกว้าง ความยาว และความสูง ที่มีหน่วยตรงกับหน่วยที่แบ่งไว้ในแกน X แกน Y และแกน Z) ให้ผู้เรียนหาพิกัดของจุดต่าง ๆ จนกว่าจะเข้าใจ

4. ผู้สอนวางกล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก ในช่องบนทางซ้ายมือ (อัฐภาคที่ 4) เพื่อผู้เรียนจะได้สังเกตค่าที่เป็นลบ ให้วางหลาย ๆ กล่องจนกว่าผู้เรียนจะเข้าใจ แล้วให้ผู้เรียนลองวางกล่องชิดด้านล่าง (อัฐภาคที่ 5 ถึง อัฐภาคที่ 8) ของทั้งทางขวามือและซ้ายมือของแกน

การสอนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔–๖ เล่ม ๓ ของ สสวท. นั้น ผู้สอนอาจพบว่าการอธิบายให้ผู้เรียนเข้าใจเกี่ยวกับเวกเตอร์ในสามมิตินั้นเป็นเรื่องค่อนข้างยาก กิจกรรมต่อไปนี้จะช่วยให้ผู้สอนจัดการเรียนการสอนเรื่องนี้ได้ง่ายและน่าสนใจขึ้น แต่เนื่องจากสื่อเหล่านี้สร้างจากโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad ดังนั้นผู้สอนหรือผู้เรียนจะใช้งานสื่อเหล่านี้ได้ เมื่อมีเครื่องคอมพิวเตอร์ที่ติดตั้งโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad แล้ว ทั้งนี้ผู้ที่จะใช้สื่อนี้ต้องมีความรู้เกี่ยวกับการใช้โปรแกรม The Geometer’s Sketchpad บ้างพอสมควร

แฟ้มที่ใช้ประกอบการจัดกิจกรรมนี้ บรรจุอยู่ในซีดีรอมซึ่งแนบมากับหนังสือคู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔ – ๖ เล่ม ๓ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ ในโฟลเดอร์ชื่อ บทที่ 3 เวกเตอร์ในสามมิติ

กิจกรรมที่นำเสนอต่อไปนี้ จะเริ่มต้นด้วยการกล่าวถึงเวกเตอร์ในสองมิติก่อน เพราะจะทำให้ผู้เรียนเข้าใจเกี่ยวกับเวกเตอร์ในสามมิติได้ง่ายขึ้น

มานีพาเจ้าโตเดินเล่น

ก่อนที่ผู้สอนจะสอนเรื่องเวกเตอร์ ผู้สอนอาจยกตัวอย่างเรื่องเวกเตอร์ง่าย ๆ ที่เกิดขึ้นในชีวิตประจำวันเช่น ถ้าผู้เรียนเดินไปข้างหน้า 2 เมตรแล้วเดินย้อนกลับมาทางเดิม 1 เมตรผู้เรียนอาจสงสัยว่าเดินไปได้ไกลเท่าใด ผู้เรียนบางคนอาจตอบว่า เดินทางได้ 3 เมตร ผู้เรียนบางคนอาจตอบว่า เดินทางได้ 1 เมตร ผู้สอนอาจแนะนำผู้เรียนว่า ลักษณะที่เกิดขึ้นนี้อาจกล่าวได้ว่าระยะทาง 2 เมตรไปทางทิศเหนือ เดินย้อนกลับมาทางเดิม 1 เมตร ได้ผลลัพธ์เป็น 1 เมตร จากจุดเริ่มต้นไปทางเหนือ

ผู้สอนแนะนำปริมาณเวกเตอร์ ว่าเป็นปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง เวกเตอร์จึงมีประโยชน์ในการศึกษาสิ่งต่าง ๆ ที่คล้ายกับการบินของเครื่องบินท่ามกลางกระแสลม การผลักและดึงของแรงแม่เหล็ก

วัตถุประสงค์

กิจกรรมนี้ใช้เพื่อศึกษาวิธีกำหนดเวกเตอร์อิสระสองมิติ โดยจำลองสถานการณ์เป็นมานีจูงเจ้าโตไปเดินเล่น

แนวทางการจัดกิจกรรม

1. เปิดโฟลเดอร์ **บทที่ 3 เวกเตอร์ในสามมิติ** แฟ้มชื่อ **เวกเตอร์ในสองมิติ.gsp** แบบร่างหน้า **เดินเล่น 1** ในแบบร่างหน้านี้จะมีจุดแสดงตำแหน่งที่เจ้าโตอยู่และลูกศรแทนเชือกจูงเจ้าโตซึ่งผูกไว้กับต้นไม้ที่จุดกำเนิดของระนาบพิกัดฉาก XY พร้อมทั้งพิกัดของเจ้าโต ความยาวของสายเชือก และมุมที่สายเชือกทำกับแกน X เจ้าโตกำลังดึงสายเชือกจนตึง ขณะที่มันรอคอยอย่างตื่นเต้น เพื่อให้มานีพามันไปเดินเล่น เมื่อเชือกด้านที่ผูกกับต้นไม้เป็นหางของเวกเตอร์ และด้านที่อยู่กับเจ้าโตเป็นหัวของเวกเตอร์ ให้ชื่อเวกเตอร์นี้ว่า เวกเตอร์ j

คำถาม 1) เมื่อลากจุดที่เจ้าโตยืนอยู่ไปเรื่อย ๆ เวกเตอร์ j มีการเปลี่ยนแปลงอย่างไร

2) จากเวกเตอร์ j ที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้ (เป็นวิธีกำหนดเวกเตอร์วิธีหนึ่ง) ให้สำรวจหาพิกัดที่เจ้าโตยืนอยู่

(1) ขนาด 5 ทิศทางทำมุม 30 องศา กับแกน X ทางด้านบวก

(2) ขนาด 5 ทิศทางทำมุม 90 องศา กับแกน X ทางด้านบวก

(3) ขนาด 5 ทิศทางทำมุม 225 องศา กับแกน X ทางด้านบวก

3) เมื่อกำหนดให้จุดที่เจ้าโตยืนอยู่ที่จุดซึ่งมีพิกัดต่อไปนี้ (เป็นการกำหนดเวกเตอร์อีกวิธีหนึ่ง) เมื่อพิกัดที่กำหนดเป็นจุดสิ้นสุดของเวกเตอร์โดยที่จุดเริ่มต้นของเวกเตอร์อยู่ที่จุดกำเนิดเท่านั้น ให้หาขนาดและทิศทางของเวกเตอร์ j

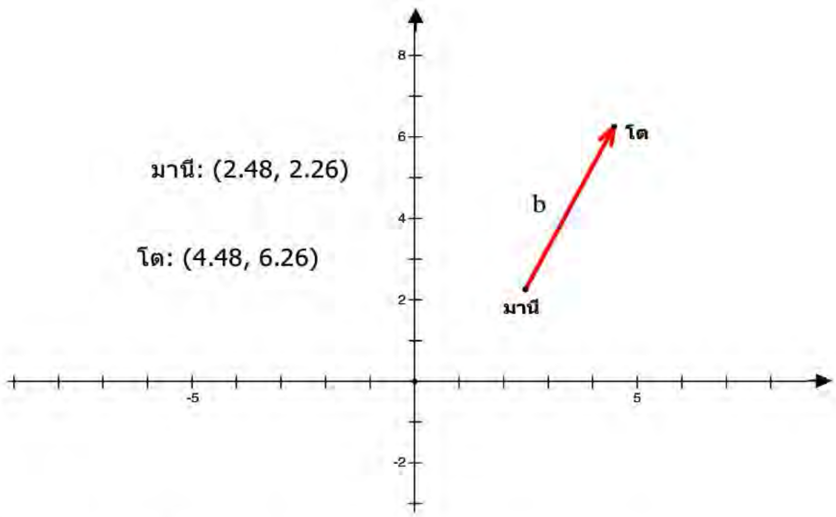
(1) (5, 0) (2) (3, 4)

(3) (0, –5) (4) (–3, –4)

4) เจ้าโตกลัวแมลงเต่าทองชนิดหนึ่งมีลายจุดสีแดง สมมติว่าแมลงเต่าทองเกาะอยู่ที่จุด(5,0) เจ้าโตควรจะหนีไปอยู่ ณ จุดใด จึงจะอยู่ไกลจากแมลงเต่าทองมากที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้ แต่ถ้าแมลงเต่าทองบินไปอยู่ ณ จุด (3, –4) เจ้าโตจะหนีไปอยู่ที่จุดใด

เมื่อถึงตอนนี้เจ้าโตอยากจะเดินเล่นเต็มที่แล้ว มานีจึงปลดเชือกจากต้นไม้และพาเจ้าโตไปเดินเล่น

2. ให้ผู้เรียนเปิดหน้า **เดินเล่น 2** จะปรากฏตำแหน่งที่มานียืนอยู่ และตำแหน่งที่เจ้าโตยืนอยู่ โดยเจ้าโตดึงสายเชือกจนตึง และพยายามดึงนำมานีให้เดินไปในทิศทางเดียวกับมันเสมอ จะได้เวกเตอร์ b ซึ่งจุดสิ้นสุดของเวกเตอร์ b อยู่ที่ตำแหน่งเจ้าโตยืนอยู่ และจุดเริ่มต้นของเวกเตอร์ b อยู่ที่ตำแหน่งมานียืนอยู่ โดยแสดงพิกัดของมานีและเจ้าโตไว้ให้แล้ว เช่น



คำถาม 5) ลากเจ้าโตซึ่งเป็นจุดสิ้นสุดของเวกเตอร์ b ไปรอบ ๆ ให้อธิบายว่าทำไมเวกเตอร์ b จึงเป็นเวกเตอร์เดิมเสมอ ไม่ว่าจะลากเจ้าโตไปที่ใด

6) สมมุติว่ามานียืนอยู่ ณ จุด (80, 80) เจ้าโตจะยืนอยู่ ณ จุดใด ให้อธิบายวิธีหาคำตอบ

3. ให้ผู้เรียนศึกษาข้อมูลในแบบร่างหน้า **เดินเล่น 3** และหน้า **เดินเล่น 4** จะเห็นว่าในแบบร่างหน้าเหล่านี้ เวกเตอร์จะมีทิศทางต่างกัน และข้อมูลที่แสดงในแบบร่างจะต่างกันด้วย

คำถาม 7) จากหน้า **เดินเล่น 3** และหน้า **เดินเล่น 4** ถ้ามานีอยู่ที่จุด (80, 80) เจ้าโตจะอยู่ที่จุดใด จงอธิบาย

8) จากหน้า **เดินเล่น 3** และหน้า **เดินเล่น 4** ถ้าเจ้าโตอยู่ห่างจากมานีเป็น 2 เท่าเสมอ จะเกิดอะไรขึ้น ให้อธิบาย

การบวกเวกเตอร์

ในกิจกรรมที่ผ่านมาผู้เรียนได้เรียนรู้เกี่ยวกับเวกเตอร์เมื่อมานีพาเจ้าโตไปเดินเล่น กิจกรรมนี้จะเป็นการเรียนรู้เกี่ยวกับการบวกและการลบเวกเตอร์โดยจำลองสถานการณ์ให้เจ้าโตเดินเล่นเพียงลำพัง

วัตถุประสงค์

เพื่อให้ผู้เรียนสำรวจแนวคิดของการบวกเวกเตอร์ในสองมิติ

แนวทางการจัดกิจกรรม

1. เปิดหน้า **การบวก** ในแบบร่างหน้านี้จะมีเวกเตอร์ a และ เวกเตอร์ b เมื่อเจ้าโตเริ่มเดินออกจากบ้าน(จุดกำเนิด) ครั้งแรกเดินไปในทิศทางและขนาดเดียวกับเวกเตอร์ a จากนั้นเดินไปอีกเส้นทางหนึ่งในทิศทางและขนาดเดียวกับเวกเตอร์ b

คำถาม 1) ลากเวกเตอร์เพื่อหาว่าเจ้าโตยืนอยู่ที่พิกัดใดเมื่อการเดินเล่นของเจ้าโตสิ้นสุดลง (โดยไม่ต้องวัดพิกัดใหม่) ให้อธิบายว่าได้คำตอบมาอย่างไร

2) ถ้าเจ้าโตเดินครั้งแรกไปตามขนาดและทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ b แล้วเดินต่อด้วยขนาดและทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ a สุดท้ายเจ้าโตจะยืนอยู่ที่พิกัดใด

3) จากการเดินของเจ้าโตในข้อ 1. และคำถามข้อ 2) การเดินทั้งสองแบบนั้นสัมพันธ์กันอย่างไร

การเขียนเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากจะช่วยให้สามารถระบุพิกัดของจุดเริ่มต้นของเวกเตอร์และพิกัดของจุดสิ้นสุดของเวกเตอร์ได้ ถ้าไม่มีระบบพิกัดฉากเราจะสามารถหาผลลัพธ์ของการเดินตามเวกเตอร์ a และเวกเตอร์ b ของเจ้าโตได้หรือไม่ ให้ผู้เรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้

2. เปิดหน้า **การบวก** ในแบบร่างหน้านี้จะมีเวกเตอร์ และปุ่มแสดงการทำงานการบวกเวกเตอร์
3. คลิกปุ่ม *แสดงการทำงาน* $a + b$ แล้วสังเกตผลของการบวก
4. คลิกปุ่ม *แสดงการทำงาน* $b + a$ แล้วสังเกตผลของการบวก
5. ลากเวกเตอร์ผลลัพธ์ของ b + a ไปเปรียบเทียบกับเวกเตอร์ผลลัพธ์ของ a + b
6. คลิกที่ปุ่มแสดงการทำงาน *เริ่มต้น* แล้วเปลี่ยนขนาดและทิศทางของเวกเตอร์ a และเวกเตอร์ b จากนั้นให้ทำข้อ 3 – 5 อีกครั้ง

ให้ผู้เรียนทำซ้ำข้อ 6 หลาย ๆ ครั้ง

คำถาม 4) ให้อธิบายการบวกเวกเตอร์ด้วยวิธีตามที่ผู้เรียนเข้าใจ

5) การบวกในระบบจำนวนจริงมีสมบัติสลับที่ เช่น $5 + 3 = 3 + 5$ การบวกเวกเตอร์มีสมบัติสลับที่หรือไม่ ให้เขียนรูปการบวกเวกเตอร์เพื่อสนับสนุนคำตอบ

6) เวกเตอร์ศูนย์ ($\vec{0}$) เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดเป็น 0 ถ้าผลรวมของเวกเตอร์สองเวกเตอร์เป็นเวกเตอร์ศูนย์ เวกเตอร์ทั้งสองต้องเป็นอย่างไร

การลบเวกเตอร์

ก่อนที่จะใช้กิจกรรมนี้ในการนำเสนอเรื่องการลบเวกเตอร์ ผู้สอนควรสอนเรื่องการลบของจำนวนจริงโดยใช้บทนิยามของการบวกจำนวนจริงด้วยจำนวนจริงลบก่อน เช่น $8 - 5 = 8 + (-5) = 3$ นั่นคือ การลบของจำนวนจริงคือการบวกด้วยจำนวนตรงข้าม ผู้สอนชี้แนะว่าการลบเวกเตอร์ก็เช่นเดียวกับการลบจำนวนจริงคือ การบวกด้วยเวกเตอร์ที่มีทิศทางตรงข้าม

วัตถุประสงค์

เพื่อให้ผู้เรียนสำรวจแนวคิดของการลบเวกเตอร์ในสองมิติ

แนวทางการจัดกิจกรรม

1. เปิดหน้า **การลบ** ในแบบร่างหน้านี้จะมีเวกเตอร์ และปุ่มแสดงการทำงานการลบเวกเตอร์
2. คลิกปุ่มแสดงการทำงาน a – b แล้วสังเกตผลของการลบ
3. คลิกปุ่มแสดงการทำงาน b – a แล้วสังเกตผลของการลบ
4. ลากเวกเตอร์ผลลัพธ์ของ b – a ไปเปรียบเทียบกับเวกเตอร์ผลลัพธ์ของ a – b
5. คลิกที่ปุ่มแสดงการทำงาน *เริ่มต้น* แล้วเปลี่ยนขนาดและทิศทางของเวกเตอร์ a และเวกเตอร์ b จากนั้นให้ทำข้อ 2 – 4 อีกครั้ง

ให้ผู้เรียนทำซ้ำข้อ 5 หลาย ๆ ครั้ง

คำถาม 1) ให้อธิบายการลบเวกเตอร์ด้วยวิธีตามที่ผู้เรียนเข้าใจ

2) การลบเวกเตอร์มีสมบัติสลับที่หรือไม่ ให้อธิบาย

3) เวกเตอร์ศูนย์ ($\vec{0}$) เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดเป็น 0 ถ้าผลต่างของเวกเตอร์สองเวกเตอร์เป็นเวกเตอร์ศูนย์ เวกเตอร์ทั้งสองต้องเป็นอย่างไร

เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก

หลังจากที่ผู้เรียนได้เรียนรู้เกี่ยวกับพิกัดของจุดเริ่มต้นของเวกเตอร์และพิกัดของจุดสิ้นสุดของเวกเตอร์โดยจุดเริ่มต้นของเวกเตอร์อยู่ที่จุดกำเนิดแล้ว กิจกรรมต่อไปนี้จะกล่าวถึงการเขียนเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากซึ่งจุดเริ่มต้นของเวกเตอร์อาจไม่ได้อยู่ที่จุดกำเนิด

วัตถุประสงค์

เพื่อให้ผู้เรียนสำรวจแนวคิดของการเขียนเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติในรูป $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

แนวทางการจัดกิจกรรม

1. เปิดโฟลเดอร์ **บทที่ 3 เวกเตอร์ในสามมิติ** แฟ้มชื่อ **เวกเตอร์สามมิติ.gsp** แบบร่างหน้า **เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก** ในแบบร่างหน้านี้จะปรากฏเวกเตอร์ AB ที่สแนพจุดไว้แล้ว และปุ่มแสดงการทำงานแสดงพิกัดของจุด A ปุ่มแสดงพิกัดของจุด B ปุ่มแสดงเวกเตอร์พิกัดฉาก และปุ่มแสดงขนาดเวกเตอร์

2. ผู้เรียนคลิกปุ่ม *แสดงพิกัดของจุด A* และปุ่ม *แสดงพิกัดของจุด B* แล้วลากจุด B ไป-มา พร้อมทั้งสังเกตการเปลี่ยนแปลงของพิกัดของจุด B

คำถาม 1) พิกัดของจุด B เปลี่ยนแปลงอย่างไร เมื่อลากจุด B เปลี่ยน

3. ผู้เรียนคลิกปุ่ม *แสดงเวกเตอร์พิกัดฉาก* ซึ่งจะอยู่ในรูป $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง

4. ผู้เรียนลากจุด B ไป-มา แล้วสังเกตการเปลี่ยนแปลงของเวกเตอร์พิกัดฉาก

คำถาม 2) เมื่อพิกัดของจุด B เปลี่ยนแปลงเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ เปลี่ยนแปลงอย่างไร 3) จงหาขนาดของเวกเตอร์ AB

5. ผู้เรียนคลิกปุ่ม *แสดงขนาดของเวกเตอร์* แล้วตรวจสอบว่าหาขนาดของเวกเตอร์ AB ถูกต้องหรือไม่

พิกัดในระบบแกนสามมิติ

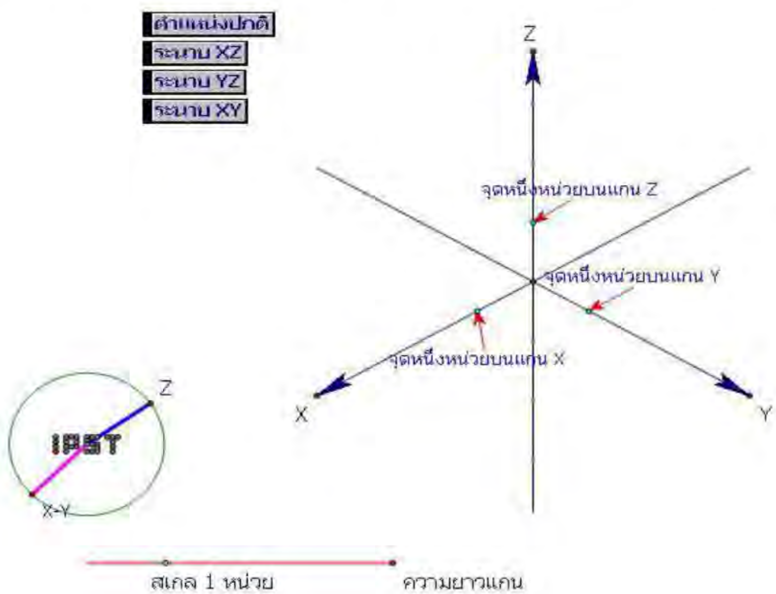
หลังจากที่ผู้เรียนมีความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับเวกเตอร์แล้ว ผู้สอนอาจนำเข้าสู่บทเรียนเกี่ยวกับเวกเตอร์ในสามมิติโดยใช้กิจกรรมต่อไปนี้

วัตถุประสงค์

เพื่อให้ผู้เรียนสำรวจแนวคิดเกี่ยวกับพิกัดในระบบสามมิติ

แนวทางการจัดกิจกรรม

1. เปิดโฟลเดอร์ **บทที่ 3 เวกเตอร์ในสามมิติ** แฟ้มชื่อ **เวกเตอร์สามมิติ.gsp** แบบร่างหน้า **พิกัดในระบบแกนสามมิติ** ในแบบร่างหน้านี้จะแนะนำการใช้เครื่องมือกำหนดเองที่มาพร้อมกับแฟ้มนี้จะเป็นตัวอย่างระบบแกนสามมิติแสดงส่วนประกอบต่าง ๆของเครื่องมือกำหนดเองแกนสามมิติ (หมุนระนาบ XY) ให้ผู้เรียนลองลากจุดที่แสดงความยาวของแกน จุดสเกลหนึ่งหน่วย จุด Z บนวงกลม จุด X-Y บนวงกลม คลิกปุ่มแสดงการทำงานต่าง ๆ เพื่อให้คุ้นเคยกับระบบแกนสามมิติ



2. เปิดหน้า **พิกัด** ในแบบร่างนี้จะมีระบบแกนสามมิติที่มีพิกัดเป็นพิกัดฉาก

3. สร้างพารามิเตอร์ $x_A = 2$, $y_A = 3$ และ $z_A = 4$

4. ลงจุด A ซึ่งมีพิกัดเป็น (2, 3, 4) โดยเลือกเครื่องมือ *ลงจุด xyz (แบบมีเส้นประ)* จากเครื่องมือกำหนดเอง แล้วคลิกที่จุดกำเนิด จุดหนึ่งหน่วยบนแกน X จุดหนึ่งหน่วยบนแกน Y จุดหนึ่งหน่วยบนแกน Z จากนั้นคลิกที่พารามิเตอร์ x_A , y_A และ z_A ตามลำดับ

5. ให้ผู้เรียนลากจุด X-Y บนวงกลมแล้วสังเกตตำแหน่งของจุด A ในขณะที่หมุนระนาบ XY

6. คลิกปุ่มแสดงการทำงาน *ระนาบ XZ ระนาบ YZ ระนาบ XY* และตำแหน่งปกติ พร้อมทั้งสังเกตตำแหน่งของจุด A และเส้นประ

คำถาม 1) เส้นประแต่ละเส้นช่วยให้ง่ายในการพิจารณาว่าจุด A อยู่ห่างจากจุดกำเนิดตามแนวแกน X แกน Y และแกน Z ตามพิกัดที่ลงไว้ ให้ผู้เรียนหาว่าจุด A อยู่ห่างจากจุดกำเนิดเท่าไร

7. สร้างพารามิเตอร์ใหม่ $x_B = 3$, $y_B = 2$ และ $z_B = 4$

8. ลงจุด B ซึ่งมีพิกัด (3, 2, 4) โดยเลือกเครื่องมือ*ลงจุด XYZ (แบบมีเส้นประ)* จากกล่องเครื่องมือกำหนดเอง แล้วคลิกที่จุดกำเนิด จุดหนึ่งหน่วยบนแกน X จุดหนึ่งหน่วยบนแกน Y และจุดหนึ่งหน่วยบนแกน Z จากนั้นคลิกที่พารามิเตอร์ x_B , y_B และ z_B ตามลำดับ

9. สร้างเวกเตอร์ AB โดยเลือกเครื่องมือ *ลูกศร* จากกล่องเครื่องมือกำหนดเอง แล้วคลิกที่จุด A ลากไปยังจุด B

คำถาม 2) จงเขียนเวกเตอร์ AB ในระบบพิกัดฉาก 3) จงหาขนาดของเวกเตอร์ AB

10. เปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ x_B , y_B และ z_B เป็น $x_B = 2$, $y_B = 4$ และ $z_B = 3$ โดยเลือกพารามิเตอร์ แล้วเปลี่ยนค่าด้วยแป้นพิมพ์

คำถาม 4) จงเขียนเวกเตอร์ AB ในระบบพิกัดฉาก 5) จงหาขนาดของเวกเตอร์ AB

11. เปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ x_B , y_B และ z_B เป็น $x_B = 4$, $y_B = 2$ และ $z_B = 3$

คำถาม 6) จงเขียนเวกเตอร์ AB ในระบบพิกัดฉาก 7) จงหาขนาดของเวกเตอร์ AB 8) ถ้าพิกัดของจุด A เป็น (x_A, y_A, z_A) และพิกัดของจุด B เป็น (x_B, y_B, z_B) จงเขียนเวกเตอร์ AB ในระบบพิกัดฉาก และให้หาขนาดของเวกเตอร์ AB

ผลคูณเชิงเวกเตอร์

การดำเนินการของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติสามารถทำได้เช่นเดียวกับการดำเนินการของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ เช่น การบวก การคูณด้วยสเกลาร์ และผลคูณเชิงสเกลาร์ แต่การดำเนินการของเวกเตอร์ ที่เรียกว่า การคูณเชิงเวกเตอร์ จะไม่มีในระบบพิกัดฉากสองมิติ ซึ่งจะกล่าวถึงการดำเนินการดังกล่าวในกิจกรรมต่อไปนี้

วัตถุประสงค์

เพื่อให้ผู้เรียนสำรวจแนวคิดของการคูณเชิงเวกเตอร์

แนวทางการจัดกิจกรรม

ตอนที่ 1

1. เปิดโฟลเดอร์ **บทที่ 3 เวกเตอร์ในสามมิติ** แฟ้มชื่อ **ผลคูณเชิงเวกเตอร์** แบบร่างหน้า **ผลคูณเชิงเวกเตอร์ 1** ในแบบร่างหน้านี้จะมีเวกเตอร์ a และเวกเตอร์ b อยู่ในระนาบแกนสามมิติ จุดเริ่มต้นของเวกเตอร์ทั้งสองอยู่ที่จุดกำเนิด ดังนั้นส่วนประกอบของเวกเตอร์ในแต่ละแกนจึงเท่ากับพิกัดของจุดปลายของเวกเตอร์ ถ้าต้องการเปลี่ยนแปลงเวกเตอร์ให้แก้ไขค่าพารามิเตอร์ที่เป็นส่วนประกอบของเวกเตอร์

2. แก้ไขค่าพารามิเตอร์ โดยใช้แป้นพิมพ์ + หรือ – เพื่อให้

$a_1 = 2 \qquad a_2 = 1 \qquad a_3 = 0$

$b_1 = -1 \qquad b_2 = 2 \qquad b_3 = 0$

3. คำนวณ $r_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2$, $r_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3$ และ $r_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1$

4. ลงจุด A โดยให้จุด A มีพิกัดเป็น (r_1, r_2, r_3)

5. สร้างเวกเตอร์ OA ให้จุดเริ่มต้นเป็นจุดกำเนิด โดยเลือกเครื่องมือ *ลูกศร* จากกล่องเครื่องมือกำหนดเอง แล้วคลิกที่จุดกำเนิด O ลากไปยังจุด A

คำถาม 1) เวกเตอร์ a และเวกเตอร์ b มีความสัมพันธ์อย่างไรกับเวกเตอร์ OA

2) จงหาผลคูณเชิงเวกเตอร์ของเวกเตอร์ b กับเวกเตอร์ a

3) ผลคูณเชิงเวกเตอร์ของเวกเตอร์ a กับเวกเตอร์ b สัมพันธ์กับผลคูณเชิงเวกเตอร์ของเวกเตอร์ b กับเวกเตอร์ a อย่างไร

ตอนที่ 2

1. เปิดโฟลเดอร์ **บทที่ 3 เวกเตอร์ในสามมิติ** แฟ้มชื่อ **เวกเตอร์ในสามมิติ.gsp** แบบร่างหน้า **ผลคูณเชิงเวกเตอร์ 2** ในแบบร่างหน้านี้จะมีเวกเตอร์ a และเวกเตอร์ b อยู่บนแกนสามมิติ จุดเริ่มต้นของ

ของเวกเตอร์ทั้งสองอยู่ที่จุดกำเนิด ดังนั้นส่วนประกอบของเวกเตอร์ในแต่ละแกนจึงเท่ากับพิกัดของจุดปลายของเวกเตอร์ ถ้าต้องการเปลี่ยนแปลงเวกเตอร์ให้แก้ไขค่าพารามิเตอร์ที่เป็นส่วนประกอบของเวกเตอร์

2. แก้ไขค่าพารามิเตอร์ โดยใช้แป้นพิมพ์ + หรือ – เพื่อให้

$a_1 = 2$ $a_2 = 1$ $a_3 = 0$

$b_1 = -1$ $b_2 = 2$ $b_3 = 0$

3. หาผลคูณเชิงเวกเตอร์ของเวกเตอร์ a และเวกเตอร์ b โดยเลือกเครื่องมือ *ผลคูณเชิงเวกเตอร์* จากกล่องเครื่องมือกำหนดเองแล้วคลิกพารามิเตอร์ a_1 , a_2, a_3 , b_1, b_2 และ b_3 ตามลำดับ จากนั้นให้ไปคลิกที่จุดกำเนิดของระบบแกนสามมิติ จุดหนึ่งหน่วยของแกน X จุดหนึ่งหน่วยของแกน Y และจุดหนึ่งหน่วยของแกน Z ตามลำดับ

คำถาม 1) ใช้ปุ่มแสดงการทำงานและส่วนควบคุมระบบแกนสามมิติ สำรวจดูว่าเวกเตอร์ r สัมพันธ์กับเวกเตอร์ a และเวกเตอร์ b อย่างไร

4. แก้ไขค่าของพารามิเตอร์ a_1 , a_2, b_1 และ b_2 แต่ยังคงให้พารามิเตอร์ a_3 และ b_3 เป็นศูนย์ แล้วสังเกตการเปลี่ยนแปลงของเวกเตอร์ r

คำถาม 2) เวกเตอร์ r มีทิศไปตามแกน Z ทางบวก เมื่อใด เวกเตอร์ r มีทิศไปตามแกน Z ทางลบ เมื่อใด และไม่ปรากฏเวกเตอร์ r เมื่อใด

5. แก้ไขค่าพารามิเตอร์ a_1 และ b_1 ให้เป็นศูนย์ และค่าของพารามิเตอร์ a_2 , a_3, b_2 และ b_3 ให้เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่ไม่ใช่ศูนย์

คำถาม 3) เวกเตอร์ r เปลี่ยนแปลงไปอย่างไร

6. แก้ไขค่าพารามิเตอร์ให้ $a_1 = 2$ $a_2 = 1$ $a_3 = 0$

$b_1 = -1$ $b_2 = 2$ $b_3 = 0$

7. หาขนาดของเวกเตอร์ r โดยใช้เครื่องมือ *ขนาดเวกเตอร์ (จุดเริ่มต้นอยู่ที่จุด (0, 0, 0))* คลิกที่ค่าที่วัดไว้ r_1 , r_2 และ r_3 ตามลำดับ

คำถาม 4) ขนาดของเวกเตอร์ r ที่ได้สัมพันธ์กับขนาดของเวกเตอร์ a และขนาดของเวกเตอร์ b อย่างไร

8. คลิกที่ปุ่มแสดงการทำงานระนาบ XY จากนั้นคลิกที่ปุ่มแสดงการทำงานของเวกเตอร์ในระนาบ และปุ่มแสดงการทำงานแสดงเวกเตอร์บนระนาบ XY

ตัวอย่างคำตอบกิจกรรมที่ส่งเสริมทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

ผู้สอนควรเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้ค้นหาคำตอบอย่างเต็มความสามารถ และบางคำถามอาจมีคำตอบได้หลากหลาย ดังนั้นผู้เรียนไม่จำเป็นต้องได้คำตอบเหมือนกัน

มานีพาเจ้าโตเดินเล่น

1) พิกัดและทิศทางของเวกเตอร์ a มีการเปลี่ยนแปลง และขนาดของมุมของเวกเตอร์ a มีการเปลี่ยนแปลง แต่ขนาดของเวกเตอร์ a ไม่เปลี่ยนแปลง

2) (1) (4.33, 2.50)

(2) (0, 5)

(3) (3.54, 3.54)

สังเกตว่าพิกัดของ x ในข้อ (1)และพิกัดของ x และพิกัดของ y ในข้อ (3) เป็นค่าโดยประมาณ คำตอบที่ผู้เรียนได้อาจแตกต่างกันไปเล็กน้อย ซึ่งค่าที่แท้จริงของพิกัด x ในข้อ(1) คือ $2.5\sqrt{3}$ และค่าที่แท้จริงของพิกัดในข้อ (3) คือ ($2.5\sqrt{2}$, $2.5\sqrt{2}$)

3) (1) ขนาด 5 ทิศทาง 0 องศา เทียบกับแกน X ทางบวก

(2) ขนาด 5 ทิศทาง 53.13 องศา เทียบกับแกน X ทางบวก

(3) ขนาด 5 ทิศทาง 270 องศา เทียบกับแกน X ทางบวก

(4) ขนาด 5 ทิศทาง 233.13 องศา เทียบกับแกน X ทางบวก

สังเกตว่าค่าแสดงทิศทางในข้อ(2) และ (4) เป็นค่าโดยประมาณคำตอบที่ได้อาจคลาดเคลื่อนไปเล็กน้อย ค่าที่แท้จริงสำหรับข้อ (2) คือ $\arctan \frac{4}{3}$ และสำหรับข้อ(4) คือค่าของ (2) บวกเพิ่มอีก 180 องศา

4) เมื่อแมลงเต่าทองอยู่ที่จุด(5, 0) เจ้าโตจะหนีแมลงเต่าทอง ไปที่จุด (–5,0) และเมื่อแมลงเต่าทองอยู่ที่จุด (3, –4) เจ้าโตจะหนีแมลงเต่าทองไปที่จุด (–3, 4) ในรูปทั่วไปเวกเตอร์ (a, b) และเวกเตอร์ (–a, –b) มีทิศทางตรงข้ามกัน

5) สิ่งที่เปลี่ยนเมื่อลากเวกเตอร์ b คือตำแหน่งของจุดสิ้นสุดและจุดเริ่มต้นของเวกเตอร์เท่านั้น

เพราะจากการสำรวจพบว่า ขนาดของเวกเตอร์และมุมของเวกเตอร์ไม่เปลี่ยนแปลง วิธีแรกสำหรับกำหนดเวกเตอร์ คือใช้ขนาดและทิศทางเมื่อลากเวกเตอร์ j ทั้งขนาดและทิศทางไม่เปลี่ยนแปลง

วิธีที่สอง ใช้พิกัดของหัวเมื่อจุดเริ่มต้นของเวกเตอร์อยู่ที่จุดกำเนิด ไม่ต้องคำนึงว่าหัวและจุดเริ่มต้นของเวกเตอร์อยู่ ณ ตำแหน่งใด พิกัดของหัวจะเหมือนเดิมถ้าหางอยู่ที่จุดกำเนิด

6) จากการสำรวจ จะได้จุด (82, 84) เนื่องจากไม่ว่ามานีจะยืนอยู่ ณ ตำแหน่งใด เจ้าโตจะอยู่ห่างจากมานีไปทางแกน X ทางบวก 2 หน่วยและ ไปตามแกน Y ทางบวก 4 หน่วย

7) จากหน้า เดินเล่น 3 เจ้าโตจะอยู่ที่ตำแหน่ง (83, 81) จากหน้า เดินเล่น 4 เจ้าโตจะอยู่ที่ตำแหน่ง (74, 83)

8) จากหน้า เดินเล่น 2 (86, 82) ถ้าสายเชือกยาวเป็นสองเท่า เจ้าโตจะอยู่ห่างจากมานี 6 หน่วยไปทางขวา และ 2 หน่วยทางทิศเหนือ หน้าเดิน 3 (68, 86) ถ้าสายเชือกยาวเป็นสองเท่า เจ้าโตจะอยู่ห่างจากมานี 12 หน่วยไปทางซ้าย และ 6 หน่วยทางทิศเหนือ

การบวกเวกเตอร์

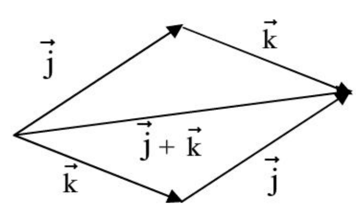
1) พิกัดที่เจ้าโตยืนอยู่คือ (7, 9) สามารถหาได้โดยวางจุดเริ่มต้นของเวกเตอร์ a ไว้ที่จุดกำเนิด และวางจุดเริ่มต้นของเวกเตอร์ b ไว้ที่จุดสิ้นสุดของเวกเตอร์ a พิกัดของจุด B หรือพิกัดของจุดสิ้นสุดของเวกเตอร์ b คือจุดที่เจ้าโตยืนอยู่

2) พิกัดที่เจ้าโตยืนอยู่คือ (7, 9)

3) จุดสิ้นสุดของการเดินทางทั้งสองแบบเป็นจุดเดียวกัน

4) ต่อจุดสิ้นสุดของเวกเตอร์ที่หนึ่งด้วยจุดเริ่มต้นของเวกเตอร์ที่สองผลรวมของเวกเตอร์ทั้งสองคือเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดเริ่มต้นของเวกเตอร์ที่หนึ่งและจุดสิ้นสุดที่จุดสิ้นสุดของเวกเตอร์ที่สอง

5) การบวกของเวกเตอร์มีสมบัติสลับที่ ดังรูปต่อไปนี้



6) เวกเตอร์สองเวกเตอร์ที่มีผลรวมเป็นเวกเตอร์ศูนย์จะมีขนาดเท่ากันแต่มีทิศทางตรงข้ามกัน

การลบเวกเตอร์

1) ต่อจุดสิ้นสุดของเวกเตอร์ที่หนึ่งด้วยจุดเริ่มต้นของเวกเตอร์ที่สองแต่ไปในทิศตรงข้ามกับเวกเตอร์ที่สอง เวกเตอร์ผลลบของเวกเตอร์ทั้งสองคือเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดเริ่มต้นของเวกเตอร์ที่หนึ่งและจุดสิ้นสุดที่จุดสิ้นสุดของเวกเตอร์ที่สอง

2) การลบของเวกเตอร์ไม่มีสมบัติสลับที่ เพราะ $a - b \neq b - a$

3) เวกเตอร์ทั้งสองต้องมีขนาดเท่ากันและทิศทางเดียวกัน

เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก

1) พิกัดของจุด B เปลี่ยนแปลงไปตามจตุภาคที่จุด B อยู่

2) ถ้าจุด A อยู่ที่จุดกำเนิด เวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ คือพิกัดของจุด B และถ้าจุด A ไม่ได้อยู่ที่จุดกำเนิด โดยให้ $A(x_1, y_1)$ และ $B(x_2, y_2)$ จะได้ว่า $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$

เวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ เปลี่ยนแปลงดังนี้

ถ้า a เป็นจำนวนบวกเวกเตอร์จะมีทิศไปทางแกน X ทางขวา a หน่วย

ถ้า a เป็นจำนวนลบเวกเตอร์จะมีทิศไปทางแกน X ทางซ้าย a หน่วย

ถ้า b เป็นจำนวนบวกเวกเตอร์จะมีทิศขึ้นไปทางแกน Y ระยะ b หน่วย

ถ้า a เป็นจำนวนลบเวกเตอร์จะมีทิศลงไปทางแกน Y ระยะ b หน่วย

3) ถ้า $A(x_1, y_1)$ และ $B(x_2, y_2)$ ขนาดของเวกเตอร์ AB คือ $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

พิกัดในระบบแกนสามมิติ

1) จุด A อยู่ห่างจากจุดกำเนิดเป็นระยะ $\sqrt{13}$ หน่วย

2) เวกเตอร์ AB คือ $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

3) ขนาดของเวกเตอร์ AB คือ $\sqrt{2}$

4) เวกเตอร์ AB คือ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

5) ขนาดของเวกเตอร์ AB คือ $\sqrt{2}$

6) เวกเตอร์ AB คือ $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

7) ขนาดของเวกเตอร์ AB คือ $\sqrt{6}$

8) ถ้าพิกัดของจุด A เป็น (X_A, Y_A, Z_A) และพิกัดของจุด B เป็น (X_B, Y_B, Z_B)

เวกเตอร์ AB คือ $\begin{bmatrix} X_B - X_A \\ Y_B - Y_A \\ Z_B - Z_A \end{bmatrix}$

ขนาดของเวกเตอร์ AB คือ $\sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2 + (Z_B - Z_A)^2}$

ผลคูณเชิงเวกเตอร์

ตอนที่ 1

1) เวกเตอร์ OA เป็นผลคูณเชิงเวกเตอร์ของเวกเตอร์ a และเวกเตอร์ b

2) $b \times a = -\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$

3) $a \times b = -(b \times a)$

ตอนที่ 2

1) เวกเตอร์ r เป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับเวกเตอร์ a และเวกเตอร์ b

2) เวกเตอร์ r มีทิศไปตามแกน Z ทางบวก เมื่อ เวกเตอร์ a หรือ เวกเตอร์ b หมุนในทิศทวนเข็มนาฬิกา

   เวกเตอร์ r มีทิศไปตามแกน Z ทางลบเมื่อเวกเตอร์ a หรือเวกเตอร์ b หมุนในทิศตามเข็มนาฬิกาและไม่ปรากฏเวกเตอร์ r เมื่อเวกเตอร์ a และเวกเตอร์ b มีทิศทางเดียวกันหรือมีทิศทางตรงข้ามกัน

3) เวกเตอร์ r มีทิศไปตามแกน X

4) ขนาดของเวกเตอร์ r เป็นผลบวกของขนาดของเวกเตอร์ a กับขนาดของเวกเตอร์ b

การวัดและการประเมินผลระหว่างเรียน

การประเมินผลระหว่างเรียนเป็นการวัดผลการเรียนรู้เพื่อปรับปรุงและพัฒนาการเรียนการสอนและตรวจสอบว่าผู้เรียนแต่ละคนมีความรู้ความเข้าใจในเรื่องที่ผู้สอนสอนมากน้อยเพียงใด ซึ่งในที่นี้จะกล่าวถึงตัวอย่างการประเมินผลด้านความรู้โดยผู้สอนอาจใช้วิธีการประเมินดังนี้

1. สังเกตจากการถามตอบและการเข้าร่วมกิจกรรม
2. ทำแบบฝึกหัด
3. ทดสอบ

จากผลการประเมินหากพบว่าผู้เรียนไม่ผ่านเกณฑ์ที่ผู้สอนกำหนดไว้ ผู้สอนอาจสอนเสริมหรือให้ผู้เรียนศึกษาจากหนังสือหรืออาจให้ผู้เรียนที่มีผลการเรียนรู้ผ่านเกณฑ์แล้วช่วยสอนหลังจากนั้นจึงให้ผู้เรียนตอบคำถามปากเปล่าหรือทำข้อที่ทำผิดอีกครั้งจนกว่าจะผ่านเกณฑ์

ตัวอย่างแบบทดสอบ

1. กำหนด $\bar{i} - 4\bar{j} + \bar{k} = x(\bar{i}+\bar{j}) + y(\bar{j}-\bar{i}) + z(2\bar{k}-\bar{j})$ จงหาค่าของ $x+y+z$

2. กำหนดให้ $P(-2, -1, 2)$ และ $Q(0, -5, 6)$ จงหาเวกเตอร์ 3 หน่วย ที่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\overrightarrow{PQ}$

3. กำหนดให้ $\bar{u} = \bar{i}+5\bar{j}$, $\bar{v} = -2\bar{i}+3\bar{j}-\bar{k}$ และ $\bar{w} = 3\bar{i}-a\bar{j}+\bar{k}$
   ถ้า $\bar{u}\cdot\bar{v} = \bar{u}\cdot\bar{w}$ แล้ว จงหา a

4. กำหนดให้ $|\bar{u}| = 2$, $|\bar{v}| = 3$ และ $|\bar{u}-\bar{v}| = 4$ จงหา $\bar{u}\cdot\bar{v}$

5. กำหนดให้ $\bar{u} = a\bar{i}+b\bar{j}+c\bar{k}$ และ $\bar{v} = x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$ เมื่อ a, b, c, x, y, z เป็นจำนวนจริงใด ๆ

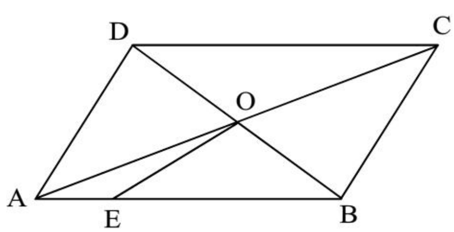
$$\bar{u} * \bar{v} = (\frac{a+x}{2})\bar{i} + (\frac{b+y}{2})\bar{j} + (\frac{c+z}{2})\bar{k}$$

   ถ้า $\bar{u} = \begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}$, $\bar{v} = \begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}$ และ $\bar{w} = \begin{bmatrix}1\\-1\\4\end{bmatrix}$ แล้ว

   จงหา $|\bar{u}\times(\bar{v}*\bar{w})|$

6. กำหนดให้ $\overrightarrow{OA} = \bar{i}-3\bar{j}+\bar{k}$ และ $\overrightarrow{OB} = 4\bar{i}-\bar{j}$ จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม AOB

7. จงหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน ที่มี $\bar{u} = \bar{i}+\bar{j}+3\bar{k}$, $\bar{v} = -\bar{i}+\bar{k}$, และ $\bar{r} = \bar{i}-\bar{j}-\bar{k}$ เป็นด้านประกอบของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานนี้

8. 

   ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $\overline{AC}$ และ $\overline{BD}$ ตัดกันที่จุด O จุด E อยู่ระหว่าง A และ B โดยที่ AE : EB = 1 : 3 ถ้า $\overrightarrow{AB} = \bar{u}$, $\overrightarrow{AD} = \bar{v}$ จงแสดงว่า $\overrightarrow{OE} = -\frac{1}{4}(\bar{u}+2\bar{v})$

9. จงแสดงว่าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน ตัดกันเป็นมุมฉาก

เฉลยตัวอย่างแบบทดสอบ

1. จาก $\bar{i}-4\bar{j}+\bar{k} = (x\bar{i}+x\bar{j})+(y\bar{j}-y\bar{i})+(2z\bar{k}-z\bar{j})$

จะได้ $x-y = 1$ ----------- (1)

$x+y-z = -4$ ----------- (2)

$2z = 1$ ----------- (3)

จาก (3) จะได้ $z = \frac{1}{2}$

แทน z ใน (2) ด้วย $\frac{1}{2}$ จะได้ $x+y = -\frac{7}{2}$

ดังนั้น $x+y+z = -3$

2. เนื่องจากพิกัดของ P และ Q คือ (–2, –1, 2) และ (0, –5, 6) ตามลำดับ

จะได้ว่า $\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} 0-(-2) \\ -5-(-1) \\ 6-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix} = 2\bar{i}-4\bar{j}+4\bar{k}$

และ $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{2^2+(-4)^2+4^2} = 6$

จะได้เวกเตอร์หนึ่งหน่วยมีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{PQ}$ คือ $\frac{\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|} = \frac{2\bar{i}-4\bar{j}+4\bar{k}}{6} = \frac{1}{3}\bar{i}-\frac{2}{3}\bar{j}+\frac{2}{3}\bar{k}$

ดังนั้น เวกเตอร์ 3 หน่วยที่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\overrightarrow{PQ}$ คือ $-\bar{i}+2\bar{j}-2\bar{k}$

3. เนื่องจาก $\bar{u} = \bar{i}+5\bar{j}$, $\bar{v} = -2\bar{i}+3\bar{j}-\bar{k}$ และ $\bar{w} = 3\bar{i}-a\bar{j}+\bar{k}$

ดังนั้น $\bar{u}\cdot\bar{v} = 13$ และ $\bar{u}\cdot\bar{w} = 3-5a$

ถ้า $\bar{u}\cdot\bar{v} = \bar{u}\cdot\bar{w}$

จะได้ $13 = 3-5a$

$5a = -10$

$a = -2$

ดังนั้น a คือ –2

4. เนื่องจาก $|\bar{u}-\bar{v}|^2 = |\bar{u}|^2-2\bar{u}\cdot\bar{v}+|\bar{v}|^2$ ----------- (1)

แทน $|\bar{u}|$, $|\bar{v}|$ และ $|\bar{u}-\bar{v}|$ ใน (1) ด้วย 2, 3 และ 4 ตามลำดับ

จะได้ $16 = 4-2\bar{u}\cdot\bar{v}+9$

$2\bar{u}\cdot\bar{v} = -3$

ดังนั้น $\bar{u}\cdot\bar{v} = -\frac{3}{2}$

5. จากสิ่งที่กำหนดให้ $\bar{u} = a\bar{i}+b\bar{j}+c\bar{k}$ และ $\bar{v} = x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$ เมื่อ a, b, c, x, y, z เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $\bar{u} * \bar{v} = (\frac{a+x}{2})\bar{i}+(\frac{b+y}{2})\bar{j}+(\frac{c+z}{2})\bar{k}$

และ $\bar{u} = \begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}$, $\bar{v} = \begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}$ และ $\bar{w} = \begin{bmatrix}1\\-1\\4\end{bmatrix}$

จะได้ว่า $\bar{v}*\bar{w} = (\frac{3+1}{2})\bar{i}+(\frac{1-1}{2})\bar{j}+(\frac{2+4}{2})\bar{k}$

$= 2\bar{i}+3\bar{k}$

และ $\bar{u}\times(\bar{v}*\bar{w}) = \begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\-1 & 2 & 0\\2 & 0 & 3\end{vmatrix}$

$= 6\bar{i}+3\bar{j}-4\bar{k}$

ดังนั้น $|\bar{u}\times(\bar{v}*\bar{w})| = \sqrt{61}$

6. กำหนดให้ $\overrightarrow{OA} = \bar{i}-3\bar{j}+\bar{k}$ และ $\overrightarrow{OB} = 4\bar{i}-\bar{j}$

จะได้ $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\1 & -3 & 1\\4 & -1 & 0\end{vmatrix}$

$= \bar{i}+4\bar{j}+11\bar{k}$

และ $|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}| = \sqrt{138}$

ดังนั้น รูปสามเหลี่ยม AOB มีพื้นที่ $\frac{1}{2}\sqrt{138}$ ตารางหน่วย

7. กำหนด $\bar{u} = i+\bar{j}+3\bar{k}$, $\bar{v} = -\bar{i}+\bar{k}$ และ $\bar{r} = \bar{i}-\bar{j}-\bar{k}$ เป็นด้านประกอบของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน

จาก $\bar{v}\times\bar{r} = \begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\-1 & 0 & 1\\1 & -1 & -1\end{vmatrix}$

$= \bar{i}+\bar{k}$

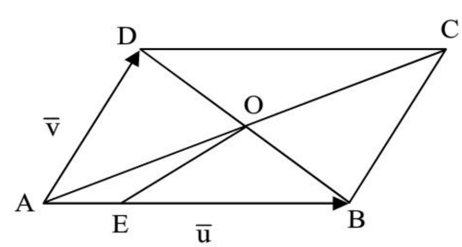
$|\bar{u}\cdot(\bar{v}\times\bar{r})| = |1+0+3| = 4$

ดังนั้น ทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานนี้มีปริมาตร 4 ลูกบาศก์หน่วย

8. จากรูป $\overrightarrow{AB} = \bar{u}$, $\overrightarrow{AD} = \bar{v}$

จะได้ $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE}$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}) + \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB})$



$$= \quad \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}) + \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB})$$

$$= \quad \frac{1}{2}(-\bar{v} - \bar{u}) + \frac{1}{4}\bar{u}$$

$$= \quad -\frac{1}{2}\bar{v} - \frac{1}{2}\bar{u} + \frac{1}{4}\bar{u}$$

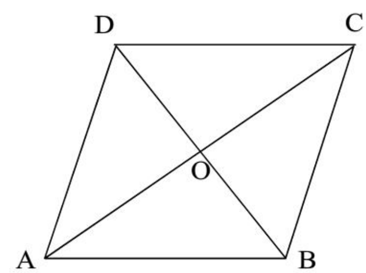
$$= \quad -\frac{1}{2}\bar{v} - \frac{1}{4}\bar{u}$$

$$= \quad -\frac{1}{4}(\bar{u} + 2\bar{v})$$

ดังนั้น $\overrightarrow{OE} = -\frac{1}{4}(\bar{u} + 2\bar{v})$

9. ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน ต้องการแสดงว่า $\overrightarrow{AC}$ ตั้งฉากกับ $\overrightarrow{BD}$

นั่นคือ จะแสดงว่า $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$



จากรูป

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$$

$$= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$$

$$= (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$$

$$= |\overrightarrow{AD}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2$$

$$= 0$$

จะได้ว่า $\overrightarrow{AC}$ ตั้งฉาก $\overrightarrow{BD}$ ดังนั้น เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน ตัดกันเป็นมุมฉาก

เฉลยแบบฝึกหัด

แบบฝึกหัด 3.1

1. B(3, 5, 0) C(1, 5, 0) D(1, 2, 0)

   E(3, 5, 3) G(1, 2, 3) H(3, 2, 3)

2. 1) E(3, 0, 0) 2) G(0, 3, 0) 3) A(0, 0, 1)

   4) F(3, 3, 0) 5) B(0, 3, 1) 6) D(3, 0, 1)

3. 1) จุดบนแกน X มีพิกัดเป็น (x, 0, 0) เมื่อ $x \in R$

   2) จุดบนแกน Y มีพิกัดเป็น (0, y, 0) เมื่อ $y \in R$

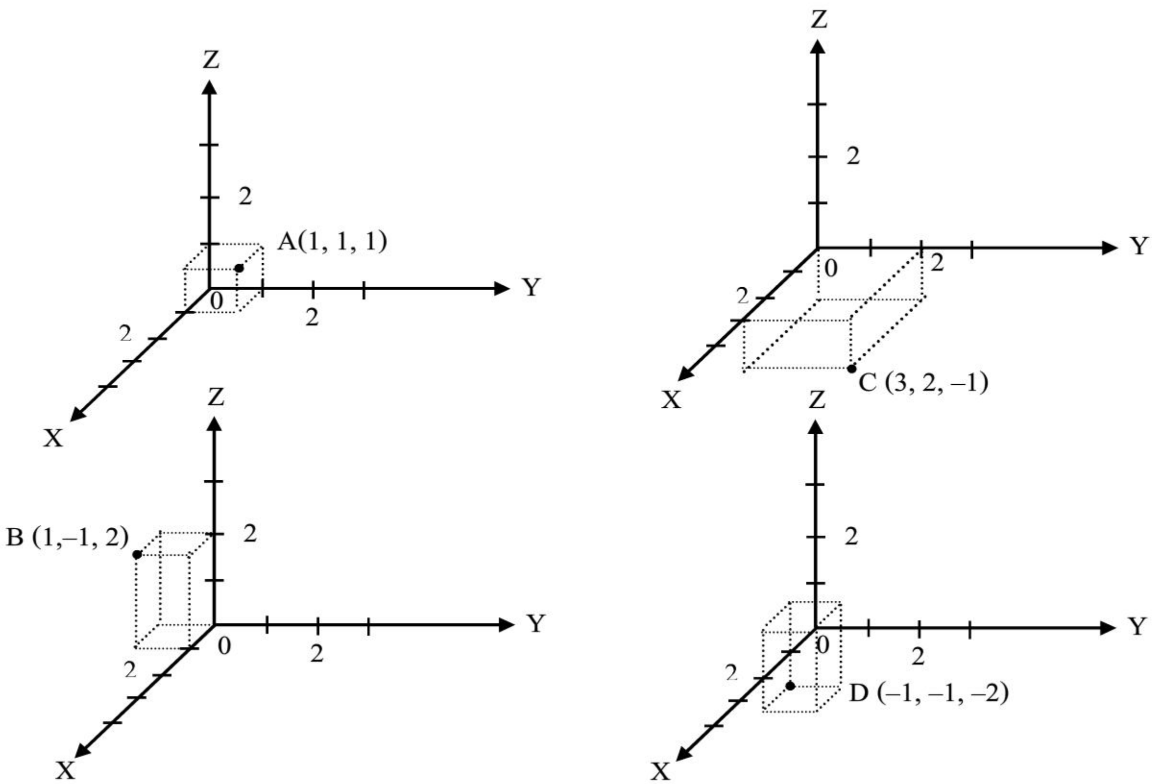
   3) จุดบนแกน Z มีพิกัดเป็น (0, 0, z) เมื่อ $z \in R$

   4) จุดในระนาบ XY มีพิกัดเป็น (x, y, 0) เมื่อ $x \in R$ และ $y \in R$

   5) จุดในระนาบ YZ มีพิกัดเป็น (0, y, z) เมื่อ $y \in R$ และ $z \in R$

   6) จุดในระนาบ XZ มีพิกัดเป็น (x, 0, z) เมื่อ $x \in R$ และ $z \in R$

4. เนื่องจากมีข้อจำกัดในการแสดงจุดทั้งหมดในระนาบ ควรแสดงแยกแต่ละจุด



5. ภาพฉายของจุด P(3, –4, 8) บนระนาบ XY คือ จุด (3, –4, 0)
   ภาพฉายของจุด P(3, –4, 8) บนระนาบ YZ คือ จุด (0, –4, 8)
   ภาพฉายของจุด P(3, –4, 8) บนระนาบ XZ คือ จุด (3, 0, 8)
   ภาพฉายของจุด Q(7, –2, 8) บนระนาบ XY คือ จุด (7, –2, 0)
   ภาพฉายของจุด Q(7, –2, 8) บนระนาบ YZ คือ จุด (0, –2, 8)
   ภาพฉายของจุด Q(7, –2, 8) บนระนาบ XZ คือ จุด (7, 0, 8)

6. $PQ = \sqrt{(-2-1)^2+(-1+2)^2+(0-7)^2} = \sqrt{9+1+49} = \sqrt{59}$

7. ให้ ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดที่ A(1, 2, 1), B(–3, 7, 9) และ C(11, 4, 2)
   แนวคิด พิจารณาลักษณะของรูปสามเหลี่ยมจากความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ดังนี้
   $AB = \sqrt{16+25+64} = \sqrt{105}$ $\quad$ $BC = \sqrt{196+9+49} = \sqrt{254}$
   $AC = \sqrt{100+4+1} = \sqrt{105}$
   จะได้ $AB = AC$ นั่นคือ ΔABC รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

แบบฝึกหัด 3.2 ก

1. **แนวคิด** ปริมาณที่มีแต่ขนาดเพียงอย่างเดียว เรียกว่า ปริมาณสเกลาร์ ส่วนปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง เรียกว่า ปริมาณเวกเตอร์

   ตัวอย่างปริมาณสเกลาร์ ได้แก่ อัตราเร็ว ระยะทาง มวล

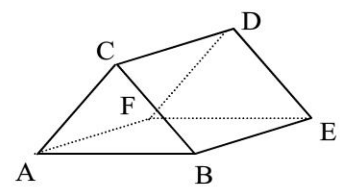
   ตัวอย่างปริมาณเวกเตอร์ ได้แก่ ความเร็ว ความเร่ง แรง

2. **แนวคิด** เวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกัน คือ เวกเตอร์ที่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกันหรือเส้นตรงที่ขนานกัน และมีหัวลูกศรไปทางเดียวกัน

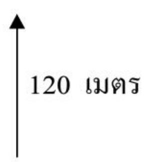
   เวกเตอร์ที่มีทิศทางตรงกันข้าม คือ เวกเตอร์ที่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกันหรือเส้นตรงที่ขนานกัน แต่หัวลูกศรไปทางตรงกันข้าม

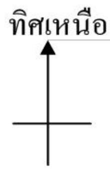
   จากรูป เวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกัน เช่น $\overrightarrow{AF}$ กับ $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{AB}$ กับ $\overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{AC}$ กับ $\overrightarrow{FD}$ หรือ $\overrightarrow{BC}$ กับ $\overrightarrow{ED}$

   เวกเตอร์ที่มีทิศทางตรงกันข้าม เช่น $\overrightarrow{AF}$ กับ $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BE}$ กับ $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BC}$ กับ $\overrightarrow{DE}$ หรือ $\overrightarrow{EF}$ กับ $\overrightarrow{AB}$

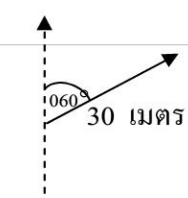


3. 1) 120 เมตร ไปทางทิศเหนือ
   มาตราส่วน 1 ซม. : 60 เมตร

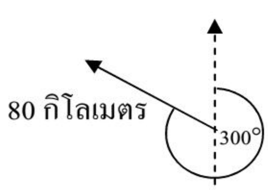




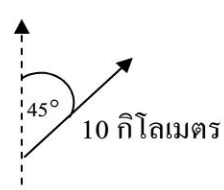
   2) 30 เมตร ไปทางทิศ 060°
   มาตราส่วน 1 ซม. : 15 เมตร



   3) 80 กิโลเมตร ไปทางทิศ 300°
   มาตราส่วน 1 ซม. : 40 กม.



   4) 10 กิโลเมตร ไปทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือ
   มาตราส่วน 1 ซม. : 5 กม.



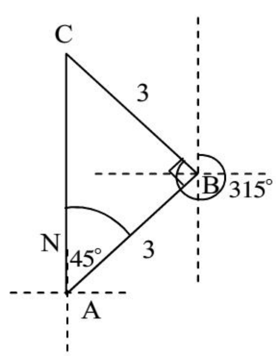
4. **แนวคิด** เวกเตอร์สองเวกเตอร์ เท่ากัน ก็ต่อเมื่อเวกเตอร์ทั้งสองมีขนาดเท่ากันและมีทิศทางเดียวกัน
   1) เวกเตอร์ที่เท่ากับ $\overrightarrow{AB}$ ได้แก่ $\overrightarrow{DC}$, $-\overrightarrow{CD}$ และ $-\overrightarrow{BA}$
   2) เวกเตอร์ที่เท่ากับ $\overrightarrow{AE}$ ได้แก่ $-\overrightarrow{CE}$ และ $-\overrightarrow{EA}$
   3) เวกเตอร์ที่เท่ากับ $-\overrightarrow{BC}$ ได้แก่ $-\overrightarrow{AD}$ และ $\overrightarrow{CB}$
   4) เวกเตอร์ที่เท่ากับ $\overrightarrow{BC}$ ได้แก่ $\overrightarrow{AD}$, $-\overrightarrow{CB}$ และ $-\overrightarrow{DA}$
   5) เวกเตอร์ที่เท่ากับ $\overrightarrow{ED}$ ได้แก่ $-\overrightarrow{EB}$ และ $-\overrightarrow{DE}$
   6) เวกเตอร์ที่เท่ากับ $-\overrightarrow{AE}$ ได้แก่ $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{CE}$ และ $-\overrightarrow{EC}$

5. **แนวคิด** เวกเตอร์สองเวกเตอร์ ขนานกันก็ต่อเมื่อ เวกเตอร์ทั้งสองมีทิศทางเดียวกัน หรือมีทิศทางตรงกันข้าม

   นิเสธของเวกเตอร์ $\bar{u}$ คือเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับขนาดของเวกเตอร์ $\bar{u}$ แต่มีทิศทางตรงข้ามกับทิศทางของเวกเตอร์ $\bar{u}$
   1) เวกเตอร์ที่ขนานกัน เช่น $\overrightarrow{AD}$ กับ $\overrightarrow{HE}$, $\overrightarrow{BA}$ กับ $\overrightarrow{HG}$ และ $\overrightarrow{CB}$ กับ $\overrightarrow{FG}$
   2) เวกเตอร์ที่เท่ากัน เช่น $\overrightarrow{AD}$ กับ $\overrightarrow{HE}$, $\overrightarrow{DC}$ กับ $\overrightarrow{HG}$ และ $\overrightarrow{CB}$ กับ $\overrightarrow{FG}$
   3) เวกเตอร์ที่เป็นนิเสธซึ่งกันและกัน เช่น $\overrightarrow{BA}$ กับ $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BA}$ กับ $\overrightarrow{HG}$ และ $\overrightarrow{AD}$ กับ $\overrightarrow{CB}$

6. $-\bar{u}$ แทนการเดินทาง 300 กิโลเมตร ในทิศ $180^\circ + 075^\circ = 225^\circ$

7. **แนวคิด** หาระยะทางที่ต้องการโดยใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

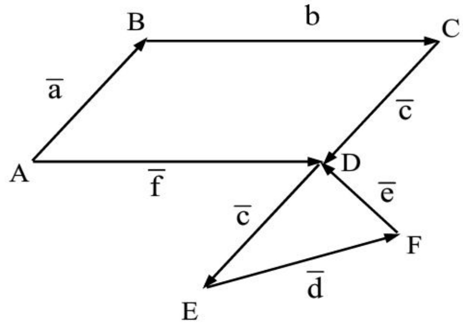


ให้ชายคนนี้เดินทางจากจุด A ไปถึงจุด B เป็นระยะทาง 3 กิโลเมตร ในทิศตะวันออกเฉียงเหนือ แล้วเขาเดินต่อไปถึงจุด C เป็นระยะทาง 3 กิโลเมตร ไปทางทิศ 315°

จากรูปจะได้ ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มี $A\hat{B}C$ เป็นมุมฉาก
ดังนั้น ระยะทางที่เขาอยู่ห่างคือ $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}$ กิโลเมตร
และอยู่ทางทิศเหนือของจุดเริ่มต้น

แบบฝึกหัด 3.2 ข

1.



$\overrightarrow{AB} = \bar{a}$

$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \bar{c} - \bar{f}$ หรือ $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = -\bar{b} - \bar{a}$

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \bar{b} + \bar{c}$ หรือ $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\bar{a} + \bar{f}$

$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = -\bar{f} + \bar{a}$ หรือ $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = -\bar{c} - \bar{b}$

$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF} = \bar{f} - \bar{e}$ หรือ $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DF} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} - \bar{e}$

$\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DA} = \bar{e} - \bar{f}$ หรือ $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \bar{e} - \bar{c} - \bar{b} - \bar{a}$

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \bar{f} + \bar{c}$ หรือ $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FE} = \bar{f} - \bar{e} - \bar{d}$

หรือ $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = \bar{a} + \bar{b} + 2\bar{c}$

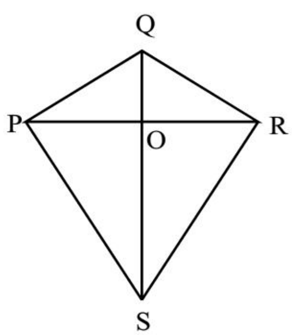
หรือ $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FE} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} - \bar{e} - \bar{d}$

$\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA} = -\bar{c} - \bar{f}$ หรือ $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DA} = \bar{d} + \bar{e} - \bar{f}$

หรือ $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = -2\bar{c} - \bar{b} - \bar{a}$

หรือ $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \bar{d} + \bar{e} - \bar{c} - \bar{b} - \bar{a}$

2.

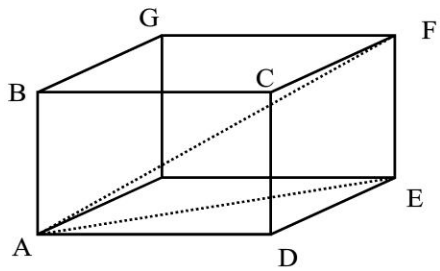


1) $\overrightarrow{PQ} + (\overrightarrow{QS} + \overrightarrow{SP}) = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \bar{0}$

2) $(\overrightarrow{OR} - \overrightarrow{QS}) + \overrightarrow{RO} = -\overrightarrow{QS} + (\overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RO}) = -\overrightarrow{QS} = \overrightarrow{SQ}$

3) $(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}) - \overrightarrow{SR} = \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{SR} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{PS}$

3.



1) $\overrightarrow{BA}$

2) $\overrightarrow{DA}$

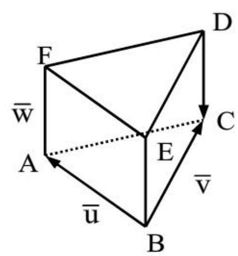
3) เช่น $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GB}$

4. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = -\bar{u} + \bar{v} - \bar{w}$

$\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AD} = \bar{w} + (-\bar{u} + \bar{v} - \bar{w}) = -\bar{u} + \bar{v}$

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \bar{v} - \bar{w}$

$\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \bar{w} - \bar{u} + \bar{v}$



แบบฝึกหัด 3.2 ค

1. 1) $\bar{u} = \bar{v}$ ดังนั้น $\bar{u}$ มีทิศทางเดียวกับ $\bar{v}$ และมีขนาดเท่ากัน

2) $\bar{u} = -\frac{1}{3}\bar{w}$ ดังนั้น $\bar{u}$ มีทิศทางตรงข้ามกับ $\bar{w}$ และขนาดของ $\bar{w}$ เป็น 3 เท่าของขนาดของ $\bar{u}$

2. $3\bar{w} = (3a + 12b)\ \bar{u} + (6a + 3b + 3)\ \bar{v}$

$2\bar{s} = (2b - 4a + 4)\ \bar{u} + (4a - 6b - 2)\ \bar{v}$

เนื่องจาก $3\bar{w} = 2\bar{s}$

ดังนั้น $3a + 12b = 2b - 4a + 4$

$7a + 10b = 4$ ---------- (1)

และ $6a + 3b + 3 = 4a - 6b - 2$

$2a + 9b = -5$ ---------- (2)

แก้ระบบสมการ (1) และ (2) ได้ $a = 2$ และ $b = -1$

3. 4) $2\overrightarrow{AE} = \bar{u} + \bar{v}$ เป็นจริง 6) $\overrightarrow{AE} = \frac{\bar{u}}{2} - \frac{\bar{w}}{2}$ เป็นจริง

4. $\overrightarrow{AX} = \frac{1}{2}\bar{b}$

$\overrightarrow{AZ} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GZ} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}) + \frac{1}{3}\overrightarrow{GF} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH}) + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} = \bar{a} + \bar{c} + \frac{1}{3}\bar{b}$

$\overrightarrow{EY} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FY} = \overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HA} = \bar{a} - \frac{1}{2}\bar{c}$

$\overrightarrow{XZ} = \overrightarrow{XD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FZ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FG}$

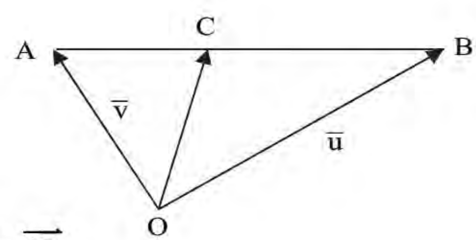
$= \frac{1}{2}\bar{b} + \bar{a} + \bar{c} - \frac{2}{3}\bar{b} = \bar{a} - \frac{1}{6}\bar{b} + \bar{c}$

5. $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

$= \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA})$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$

6.



จากรูป กำหนด $\frac{AC}{CB} = \frac{m}{n}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{AB} = -\bar{v} + \bar{u}$

และ $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \bar{v} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$

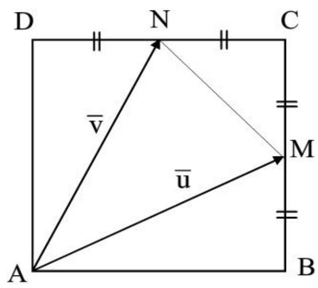
$= \bar{v} + \frac{m}{m+n}(\bar{u} - \bar{v})$ (แทน $\overrightarrow{AB}$ ด้วย $\bar{u} - \bar{v}$)

$= \bar{v} - \frac{m}{m+n}\bar{v} + \frac{m}{m+n}\bar{u}$

$= \frac{n}{m+n}\bar{v} + \frac{m}{m+n}\bar{u}$

$= \frac{1}{m+n}(n\bar{v} + m\bar{u})$

7.



จาก $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$

$\overrightarrow{AB} = \bar{u} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

$\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \bar{u}$

และ $\bar{u} = \bar{v} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CM}$

$= \bar{v} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

$= \bar{v} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \bar{u}$

$\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} = 2\bar{u} - \bar{v}$

$\overrightarrow{AB} = \frac{4}{3}\bar{u} - \frac{2}{3}\bar{v}$

หรือ $\overrightarrow{AB} = \bar{u} + \overrightarrow{MB}$

$= \bar{u} + \overrightarrow{CM}$

$= \bar{u} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{NM}$

$= \bar{u} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + (\bar{u} - \bar{v})$

$\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} = 2\bar{u} - \bar{v}$

$\overrightarrow{AB} = \frac{4}{3}\bar{u} - \frac{2}{3}\bar{v}$

แบบฝึกหัด 3.3 ก

1. 1) $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 3-(-2) \\ 2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{BA} = \begin{bmatrix} -2-3 \\ 1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \end{bmatrix}$

2) $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} -1-0 \\ 4-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{BA} = \begin{bmatrix} 0-(-1) \\ 0-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$

3) $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} -1-(-2) \\ 2-(-8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{BA} = \begin{bmatrix} -2-(-1) \\ -8-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -10 \end{bmatrix}$

4) $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 2-1 \\ -1-(-1) \\ 0-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{BA} = \begin{bmatrix} 1-2 \\ -1-(-1) \\ 2-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

5) $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} -1-7 \\ 8-3 \\ 3-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{BA} = \begin{bmatrix} 7-(-1) \\ 3-8 \\ 1-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix}$

6) $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 0-1 \\ 0-1 \\ 0-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{BA} = \begin{bmatrix} 1-0 \\ 1-0 \\ -1-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

2. 1) $\bar{a} - 5\bar{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-15 \\ 3-20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 \\ -17 \end{bmatrix}$

2) นิเสธของ $\bar{a} - 5\bar{b} = -\begin{bmatrix} -16 \\ -17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 17 \end{bmatrix}$

3) $2\bar{c} - \bar{d} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 13 \end{bmatrix}$

4) นิเสธของ $2\bar{c} - \bar{d} = -\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ -13 \end{bmatrix}$

3. 1)
$$\begin{aligned} \bar{u} + \bar{v} &= \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a+c \\ b+d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c+a \\ d+b \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\ &= \bar{v} + \bar{u} \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} \lambda(\bar{u} + \bar{v}) &= \lambda\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}\right) \\ &= \lambda\begin{bmatrix} a+c \\ b+d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda a + \lambda c \\ \lambda b + \lambda d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda c \\ \lambda d \end{bmatrix} \\ &= \lambda\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \lambda\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \\ &= \lambda\bar{u} + \lambda\bar{v} \end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned} \lambda(\mu\bar{v}) &= \lambda\left(\mu\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}\right) \\ &= \lambda\left(\begin{bmatrix} \mu c \\ \mu d \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} \lambda(\mu c) \\ \lambda(\mu d) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (\lambda\mu)c \\ (\lambda\mu)d \end{bmatrix} \\ &= (\lambda\mu)\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \\ &= (\lambda\mu)\bar{v} \end{aligned}$$

4)
$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)\bar{u} &= (\lambda + \mu)\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda a + \mu a \\ \lambda b + \mu b \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu a \\ \mu b \end{bmatrix} \\ &= \lambda\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \mu\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\ &= \lambda\bar{u} + \mu\bar{u} \end{aligned}$$

5) $$(\bar{u}+\bar{v})+\bar{w} = \left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a+c \\ b+d \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a+c)+e \\ (b+d)+f \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a+(c+e) \\ b+(d+f) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix} c+e \\ d+f \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}\right)$$

$$= \bar{u}+(\bar{v}+\bar{w})$$

4. ให้ $\bar{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, $\bar{v} = \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$, $\bar{w} = \begin{bmatrix} g \\ h \\ i \end{bmatrix}$

1) $$\bar{u}+\bar{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a+d \\ b+e \\ c+f \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} d+a \\ e+b \\ f+c \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$= \bar{v}+\bar{u}$$

2) $$\lambda(\bar{u}+\bar{v}) = \lambda\left(\begin{bmatrix} a+d \\ b+e \\ c+f \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda a+\lambda d \\ \lambda b+\lambda e \\ \lambda c+\lambda f \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \lambda d \\ \lambda e \\ \lambda f \end{bmatrix}$$

$$= \lambda\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}+\lambda\begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$$

$$= \lambda\bar{u}+\lambda\bar{v}$$

3) $\lambda(\mu\overline{v})$

$$= \lambda\left(\mu\begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}\right) = \lambda\begin{bmatrix} \mu d \\ \mu e \\ \mu f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda(\mu d) \\ \lambda(\mu e) \\ \lambda(\mu f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda\mu)d \\ (\lambda\mu)e \\ (\lambda\mu)f \end{bmatrix} = (\lambda\mu)\begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = (\lambda\mu)\overline{v}$$

4) $(\lambda+\mu)\overline{u}$

$$= (\lambda+\mu)\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda+\mu)a \\ (\lambda+\mu)b \\ (\lambda+\mu)c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a+\mu a \\ \lambda b+\mu b \\ \lambda c+\mu c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu a \\ \mu b \\ \mu c \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \mu\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \lambda\overline{u}+\mu\overline{u}$$

5) $(\overline{u}+\overline{v})+\overline{w}$

$$= \left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} g \\ h \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+d \\ b+e \\ c+f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g \\ h \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a+d)+g \\ (b+e)+h \\ (c+f)+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+(d+g) \\ b+(e+h) \\ c+(f+i) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d+g \\ e+h \\ f+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g \\ h \\ i \end{bmatrix}\right) = \overline{u}+(\overline{v}+\overline{w})$$

จาก 1) – 5) แสดงว่า สมบัติทั้งห้าข้อในข้อ 3 เป็นจริงในสามมิติ

5. 1) เวกเตอร์ที่ขนานกันคือ $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-8\\-4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}6\\3\end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix}7\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}8\\0\end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\-4\\-2\end{bmatrix}$

แบบฝึกหัด 3.3 ข

1. 1) $\overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \bar{i}+4\bar{j}$

2) $\overrightarrow{OS} = \begin{bmatrix}1\\3\\-4\end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \bar{i}+3\bar{j}-4\bar{k}$

3) $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix}-4-3\\1-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-7\\-1\end{bmatrix} = -7\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+(-1)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = -7\bar{i}-\bar{j}$

4) $\overrightarrow{CD} = \begin{bmatrix}1-(-3)\\-2-4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\-6\end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}-6\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = 4\bar{i}-6\bar{j}$

5) $\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix}3-1\\2-(-1)\\6-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = 2\bar{i}+3\bar{j}+4\bar{k}$

6) $\overrightarrow{MN} = \begin{bmatrix}-1-0\\-1-1\\2-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\-2\\1\end{bmatrix} = -1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = -\bar{i}-2\bar{j}+\bar{k}$

2. 1) $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = i + 2j$ $\qquad$ $\begin{bmatrix}3\\-4\end{bmatrix} = 3\bar{i} - 4\bar{j}$

$$|\bar{i} + 2\bar{j}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$|3\bar{i} - 4\bar{j}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

$\begin{bmatrix}-1\\-4\end{bmatrix} = -\bar{i} - 4\bar{j}$ $\qquad$ $\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} = 3\bar{i} + 2\bar{j}$

$$|-\bar{i} - 4\bar{j}| = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

$$|3\bar{i} + 2\bar{j}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

2) $\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix} = \bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}$

$$|\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{11}$$

$\begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix} = 3\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$

$$|3\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$$

$\begin{bmatrix}-4\\0\\-1\end{bmatrix} = -4\bar{i} - \bar{k}$

$$|-4\bar{i} - \bar{k}| = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$

3) $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix}5-1\\7-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix} = 4\bar{i} + 5\bar{j}$

$$|4\bar{i} + 5\bar{j}| = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{16+25} = \sqrt{41}$$

4) $\overrightarrow{RS} = \begin{bmatrix} -1-7 \\ 3-4 \\ 5-1 \end{bmatrix}$ $\quad |-8\bar{i}-\bar{j}+4\bar{k}| = \sqrt{(-8)^2+(-1)^2+4^2}$

$= \begin{bmatrix} -8 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ $\quad = \sqrt{64+1+16}$

$= -8\bar{i}-\bar{j}+4\bar{k}$ $\quad = \sqrt{81} = 9$

3. 1) $x\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix}$

$x + 3y = 7$ ------ (1)

$2x + 4y = 8$ ------ (2)

(1) × 2, $2x + 6y = 14$ ------ (3)

(3) – (2), $2y = 6$

$y = 3$

$x = -2$

ดังนั้น $x = -2,\quad y = 3$

2) $x\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

$x - y = 3$ ---- (1)

$3x + y = 2$ ---- (2)

(1) + (2), $4x = 5$

$x = \frac{5}{4}$

$y = -\frac{7}{4}$

ดังนั้น $x = \frac{5}{4},\quad y = -\frac{7}{4}$

3) $x\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$

$x + 3y + z = 3$ ----------- (1)

$x + 2y + z = 7$ ----------- (2)

$3x + y + 2z = -1$ ----------- (3)

(1) – (2), $y = -4$

(3) – 2 × (2), $x - 3y = -15$

$x - 3(-4) = -15$

$x = -27$

ดังนั้น $z = 3 - (-27) - 3(-4)$

$z = 42$

ดังนั้น $x = -27,\quad y = -4,\quad z = 42$

4. 1) $\bar{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$|\bar{u}| = \sqrt{2^2+1^2}$

$= \sqrt{5}$

ดังนั้น เวกเตอร์ 1 หน่วย ที่มีทิศทางเดียวกันกับ $\bar{u}$ คือ $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2\sqrt{5}}{5}\bar{i}+\frac{\sqrt{5}}{5}\bar{j}$

2) $\bar{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$

$|\bar{a}| = \sqrt{1^2+(-3)^2+(-1)^2} = \sqrt{11}$

ดังนั้น เวกเตอร์ 1 หน่วย ที่มีทิศทางเดียวกันกับ $\bar{a}$ คือ $\frac{1}{\sqrt{11}}\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{11}}{11}\bar{i}-\frac{3\sqrt{11}}{11}\bar{j}-\frac{\sqrt{11}}{11}\bar{k}$

3) $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} -4-1 \\ 5-(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 8 \end{bmatrix}$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-5)^2+8^2} = \sqrt{89}$

ดังนั้น เวกเตอร์ 1 หน่วย ที่มีทิศทางเดียวกันกับ $\overrightarrow{AB}$ คือ $\frac{1}{\sqrt{89}}\begin{bmatrix} -5 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{-5\sqrt{89}}{89}\bar{i}+\frac{8\sqrt{89}}{89}\bar{j}$

4) $\overrightarrow{QC} = \begin{bmatrix} 0-1 \\ -3-5 \\ 1-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -8 \\ -7 \end{bmatrix}$

$|\overrightarrow{QC}| = \sqrt{(-1)^2+(-8)^2+(-7)^2} = \sqrt{114}$

ดังนั้นเวกเตอร์1หน่วย ที่มีทิศทางเดียวกันกับ $\overrightarrow{QC}$ คือ $\frac{1}{\sqrt{114}}\begin{bmatrix} -1 \\ -8 \\ -7 \end{bmatrix} = -\frac{\sqrt{114}}{114}\bar{i}-\frac{8\sqrt{114}}{114}\bar{j}-\frac{7\sqrt{114}}{114}\bar{k}$

5. 1) $\frac{8\sqrt{5}}{5}\bar{i}+\frac{4\sqrt{5}}{5}\bar{j}$ หรือ $-(\frac{8\sqrt{5}}{5}\bar{i}+\frac{4\sqrt{5}}{5}\bar{j})$

2) $\frac{4\sqrt{11}}{11}\bar{i}-\frac{12\sqrt{11}}{11}\bar{j}-\frac{4\sqrt{11}}{11}\bar{k}$ หรือ $-(\frac{4\sqrt{11}}{11}\bar{i}-\frac{12\sqrt{11}}{11}\bar{j}-\frac{4\sqrt{11}}{11}\bar{k})$

3) $-\frac{20\sqrt{89}}{89}\bar{i}+\frac{32\sqrt{89}}{89}\bar{j}$ หรือ $-(-\frac{20\sqrt{89}}{89}\bar{i}+\frac{32\sqrt{89}}{89}\bar{j})$

4) $-\frac{4\sqrt{114}}{114}\bar{i}-\frac{32\sqrt{114}}{114}\bar{j}-\frac{28\sqrt{114}}{114}\bar{k}$ หรือ $-(-\frac{4\sqrt{114}}{114}\bar{i}-\frac{32\sqrt{114}}{114}\bar{j}-\frac{28\sqrt{114}}{114}\bar{k})$

6. 1) $\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} 3-2 \\ 5-5 \\ -1-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$

$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{1^2+(-4)^2} = \sqrt{17}$

ดังนั้น โคไซน์แสดงทิศทางของ $\overrightarrow{PQ}$ คือ $\frac{\sqrt{17}}{17}, 0, \frac{-4\sqrt{17}}{17}$

2) $\overrightarrow{RS} = \begin{bmatrix} 2-(-1) \\ -4-4 \\ 7-(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -8 \\ 9 \end{bmatrix}$

$|\overrightarrow{RS}| = \sqrt{3^2+(-8)^2+9^2} = \sqrt{154}$

ดังนั้น โคไซน์แสดงทิศทางของ $\overrightarrow{RS}$ คือ $\frac{3\sqrt{154}}{154}, \frac{-8\sqrt{154}}{154}, \frac{9\sqrt{154}}{154}$

3) $\overrightarrow{TV} = \begin{bmatrix} 4-(-3) \\ 2-1 \\ 8-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}$

$|\overrightarrow{TV}| = \sqrt{7^2+1^2+8^2} = \sqrt{114}$

ดังนั้น โคไซน์แสดงทิศทางของ $\overrightarrow{TV}$ คือ $\frac{7\sqrt{114}}{114}, \frac{\sqrt{114}}{114}, \frac{8\sqrt{114}}{114}$

7. 1) $\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} -2-1 \\ 0-4 \\ 1-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$

$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(-3)^2+(-4)^2+(-2)^2} = \sqrt{29}$

โคไซน์แสดงทิศทางของ $\overrightarrow{PQ}$ คือ $-\frac{3\sqrt{29}}{29}, -\frac{4\sqrt{29}}{29}, -\frac{2\sqrt{29}}{29}$

2) $\bar{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

$|\bar{a}| = \sqrt{3^2+4^2+2^2} = \sqrt{29}$

โคไซน์แสดงทิศทางของ $\bar{a}$ คือ $\frac{3\sqrt{29}}{29}, \frac{4\sqrt{29}}{29}, \frac{2\sqrt{29}}{29}$

3) $\overrightarrow{OR} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

$|\overrightarrow{OR}| = \sqrt{5^2+2^2} = \sqrt{29}$

โคไซน์แสดงทิศทางของ $\overrightarrow{OR}$ คือ $\frac{5\sqrt{29}}{29}, 0, \frac{2\sqrt{29}}{29}$

จะได้ว่า $\overrightarrow{PQ}$ และ $\bar{a}$ ขนานกัน โดยมีทิศทางตรงกันข้าม

แบบฝึกหัด 3.4

1. 1) $\bar{u} \cdot \bar{v} = 10$ 2) $\bar{u} \cdot \bar{v} = 5$
   3) $\bar{u} \cdot \bar{v} = 1$ 4) $\bar{u} \cdot \bar{v} = -3$

2. 1) $\theta = 0^\circ$ 2) $\theta = 90^\circ$
   3) $\theta = 90^\circ$ 4) $\theta = 132^\circ\ 20'$

3. 1) 10 2) 40
   3) 22 4) –4

4. 1) –52 2) 94
   3) 80 4) –66

5. 1) มุมแหลม หรือมุมขนาด 0° 2) มุมฉาก
   3) มุมป้าน หรือมุมตรง

6. 1) เวกเตอร์ตั้งฉากซึ่งกันและกัน 2) เวกเตอร์ตั้งฉากซึ่งกันและกัน
   3) เวกเตอร์ไม่ตั้งฉากซึ่งกันและกัน 4) เวกเตอร์ไม่ตั้งฉากซึ่งกันและกัน

7. 1) –1, 4 2) $m = -3-\sqrt{10},\quad \sqrt{10}-3$

8.
$$\begin{aligned}
|\bar{u}-\bar{v}|^2 &= (\bar{u}-\bar{v})\cdot(\bar{u}-\bar{v}) \\
&= \bar{u}\cdot\bar{u} - 2\bar{u}\cdot\bar{v} + \bar{v}\cdot\bar{v} \\
&= |\bar{u}|^2 - 2\bar{u}\cdot\bar{v} + |\bar{v}|^2 \\
|\bar{u}+\bar{v}|^2 &= (\bar{u}+\bar{v})\cdot(\bar{u}+\bar{v}) \\
&= \bar{u}\cdot\bar{u} + 2\bar{u}\cdot\bar{v} + \bar{v}\cdot\bar{v} \\
&= |\bar{u}|^2 + 2\bar{u}\cdot\bar{v} + |\bar{v}|^2
\end{aligned}$$

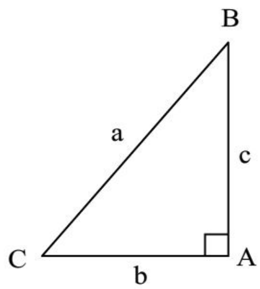
9. เนื่องจาก $\bar{u}$ ตั้งฉากกับ $\bar{v}$ โดยที่ $\bar{u} \neq \bar{0}$, $\bar{v} \neq \bar{0}$ ดังนั้น $\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$

$$|\bar{u}+\bar{v}|^2 = |\bar{u}|^2 + 2\bar{u}\cdot\bar{v} + |\bar{v}|^2$$
$$= |\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2$$

10. เนื่องจาก $\bar{u}$ ตั้งฉากกับ $\bar{v}$ โดยที่ $\bar{u} \neq \bar{0}$, $\bar{v} \neq \bar{0}$ ดังนั้น $\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$

$$|\bar{u}-\bar{v}|^2 = |\bar{u}|^2 - 2\bar{u}\cdot\bar{v} + |\bar{v}|^2$$
$$= |\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2$$

11.



จาก $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$

$$|\overrightarrow{BC}|^2 = (|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}|)^2$$
$$= |\overrightarrow{BA}|^2 + 2 \times \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + |\overrightarrow{AC}|^2$$

เพราะว่า $\overrightarrow{BA}$ ตั้งฉากกับ $\overrightarrow{AC}$ จะได้ $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

ทำให้ $|\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{BA}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2$

ดังนั้น $a^2 = c^2 + b^2$

12. จาก $|\bar{u}| = 5$, $|\bar{v}| = 3$, $|\bar{u}+\bar{v}| = 4$

$$|\bar{u}+\bar{v}|^2 = |\bar{u}|^2 + 2\bar{u}\cdot\bar{v} + |\bar{v}|^2$$
$$16 = 25 + 2\bar{u}\cdot\bar{v} + 9$$
$$7 = 25 + 2\bar{u}\cdot\bar{v}$$
$$2\bar{u}\cdot\bar{v} = -18$$
$$|\bar{u}-\bar{v}|^2 = |\bar{u}|^2 - 2\bar{u}\cdot\bar{v} + |\bar{v}|^2$$
$$= 25 + 18 + 9$$
$$|\bar{u}-\bar{v}|^2 = 52$$
$$|\bar{u}-\bar{v}| = 2\sqrt{13} \approx 2(3.605) \approx 7.21$$

13. กำหนดให้ $|\bar{u}| = |\bar{w}|$, $|\bar{u}-\bar{v}| = |\bar{v}+\bar{w}|$, มุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ มีขนาด $\frac{\pi}{5}$ เรเดียน และมุมระหว่าง $\bar{v}$ และ $\bar{w}$ มีขนาด θ เรเดียน

จะได้ $|\bar{u}-\bar{v}|^2 = |\bar{v}+\bar{w}|^2$

$$|\bar{u}|^2 - 2\bar{u}\cdot\bar{v} + |\bar{v}|^2 = |\bar{v}|^2 + 2\bar{v}\cdot\bar{w} + |\bar{w}|^2$$
$$|\bar{u}|^2 - 2\bar{u}\cdot\bar{v} + |\bar{v}|^2 = |\bar{v}|^2 + 2\bar{v}\cdot\bar{w} + |\bar{w}|^2$$
$$-2\bar{u}\cdot\bar{v} = 2\bar{v}\cdot\bar{w} \quad (\text{เพราะว่า } |\bar{u}| = |\bar{w}|)$$

$$|\bar{u}||\bar{v}|\cos\frac{\pi}{5} = -|\bar{v}||\bar{w}|\cos\theta$$

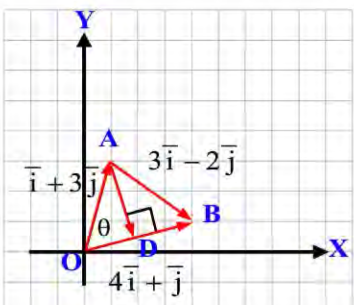
$$\cos\frac{\pi}{5} = -\cos\theta$$

$$\cos(\pi-\frac{\pi}{5}) = \cos\theta$$

$$\theta = \frac{4\pi}{5}$$

ดังนั้น มุมระหว่าง $\bar{v}$ และ $\bar{w}$ มีขนาด $\frac{4\pi}{5}$ เรเดียน

14. กำหนดให้ $\overrightarrow{OA} = \bar{i} + 3\bar{j}$, $\overrightarrow{OB} = 4\bar{i}+\bar{j}$, มุมระหว่าง $\overrightarrow{OA}$ และ $\overrightarrow{OB}$ มีขนาด θ และ $\overrightarrow{AD}$ ตั้งฉากกับ $\overrightarrow{OB}$



$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}|\,|\overrightarrow{OB}|\cos\theta$$

$$(\bar{i}+3\bar{j})\cdot(4\bar{i}+\bar{j}) = (\sqrt{10})(\sqrt{17})\cos\theta$$

$$4+3 = (\sqrt{10})(\sqrt{17})\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{7}{(\sqrt{10})(\sqrt{17})}$$

จาก $\cos\theta = \dfrac{|\overrightarrow{OD}|}{|\overrightarrow{OA}|}$

$$\frac{7}{(\sqrt{10})(\sqrt{17})} = \frac{|\overrightarrow{OD}|}{\sqrt{10}}$$

$$|\overrightarrow{OD}| = \frac{7}{\sqrt{17}}$$

$$|\overrightarrow{AD}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 - |\overrightarrow{OD}|^2$$

$$= 10 - \frac{49}{17}$$

$$= \frac{121}{17}$$

$$|\overrightarrow{AD}| = \frac{11}{\sqrt{17}}$$

พื้นที่รูปสามเหลี่ยม OAD $= \frac{1}{2} \times$ ฐาน $\times$ สูง

$= \frac{1}{2} \times \left|\overrightarrow{OD}\right| \times \left|\overrightarrow{AD}\right|$

$= \frac{1}{2} \times \frac{7}{\sqrt{17}} \times \frac{11}{\sqrt{17}}$

$= \frac{77}{34}$

≈ 2.27

ดังนั้น พื้นที่รูปสามเหลี่ยม OAD ประมาณ 2.27 ตารางหน่วย

แบบฝึกหัด 3.5

1\. 1) $\bar{u} = 2\bar{i} + 3\bar{k}, \quad \bar{v} = i + 2\bar{i} - k$

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -6\bar{i} + 5\bar{j} + 4\bar{k} \qquad \bar{v} \times \bar{u} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6\bar{i} - 5\bar{j} - 4\bar{k}$$

2) $\bar{u} = \bar{i} + \bar{j} - \bar{k}, \quad \bar{v} = \bar{j}$

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \bar{i} + \bar{k} \qquad \bar{v} \times \bar{u} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\bar{i} - \bar{k}$$

3) $\bar{u} = 2\bar{i} + 7\bar{j}, \quad \bar{v} = 5\bar{i} + 4\bar{j} - 3\bar{k}$

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 7 & 0 \\ 5 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -21\bar{i} + 6\bar{j} - 27\bar{k} \qquad \bar{v} \times \bar{u} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 5 & 4 & -3 \\ 2 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 21\bar{i} - 6\bar{j} + 27\bar{k}$$

2\. $\bar{u} = 5\bar{i} - 3\bar{j} + 4\bar{k}, \quad \bar{v} = \bar{j} - \bar{k}$

1) $\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 5 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\bar{i} + 5\bar{j} + 5\bar{k}$

2) $\left|\bar{u} \times \bar{v}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (5)^2 + (5)^2} = \sqrt{51}$

3) จาก $|\bar{u}| = \sqrt{25+9+16} = \sqrt{50}$

และ $|\bar{v}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

เนื่องจาก $|\bar{u}\times\bar{v}| = |\bar{u}||\bar{v}|\sin\theta$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{51}}{\sqrt{100}}$$

$$\sin\theta = 0.714$$

3. ให้ $\bar{u} = a\bar{i}+b\bar{j}+c\bar{k}$ และ $\bar{v} = d\bar{i}+e\bar{j}+f\bar{k}$

จะแสดงว่า $(\bar{u}-\bar{v})\times(\bar{u}+\bar{v}) = (2\bar{u})\times\bar{v}$

$\bar{u}-\bar{v} = (a-d)\bar{i}+(b-e)\bar{j}+(c-f)\bar{k}$ และ $\bar{u}+\bar{v} = (a+d)\bar{i}+(b+e)\bar{j}+(c+f)\bar{k}$

$$(\bar{u}-\bar{v})\times(\bar{u}+\bar{v}) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a-d & b-e & c-f \\ a+d & b+e & c+f \end{vmatrix}$$

$$= [(b-e)(c+f)-(b+e)(c-f)]\bar{i} - [(a-d)(c+f) - (a+d)(c-f)]\bar{j} + [(a-d)(b+e)-(a+d)(b-e)]\bar{k}$$

$$= [bc+bf-ec-ef-(bc-ef+ec-bf)]\bar{i} - [ac-dc-df + af-(ac-df+dc-af)]\bar{j} + [ab+ae-db-de - (ab-ae+db-de)]\bar{k}$$

$$= 2(bf-ec)\bar{i} - 2(af-dc)\bar{j} + 2(ae-db)\bar{k}$$

$$2\bar{u}\times\bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2a & 2b & 2c \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

$$= (2bf-2ec)\bar{i} - (2af-2dc)\bar{j} + (2ae-2bd)\bar{k}$$

$$= 2(bf-ec)\bar{i} - 2(af-dc)\bar{j} + 2(ae-db)\bar{k}$$

ดังนั้น $(\bar{u}-\bar{v})\times(\bar{u}+\bar{v}) = (2\bar{u})\times\bar{v}$

หรือ จะแสดงว่า $(\bar{u}-\bar{v})\times(\bar{u}+\bar{v}) = (2\bar{u})\times\bar{v}$ โดยใช้สมบัติของผลคูณเชิงเวกเตอร์

$$(\bar{u}-\bar{v})\times(\bar{u}+\bar{v}) = (\bar{u}-\bar{v})\times\bar{u} + (\bar{u}-\bar{v})\times\bar{v}$$

$$= (\bar{u}\times\bar{u})-(\bar{v}\times\bar{u}) + (\bar{u}\times\bar{v})-(\bar{v}\times\bar{v})$$

$$= \bar{0}-(\bar{v}\times\bar{u}) + (\bar{u}\times\bar{v})-\bar{0}$$

$$= -(\bar{v}\times\bar{u}) + (\bar{u}\times\bar{v})$$

$$= (\bar{u}\times\bar{v}) + (\bar{u}\times\bar{v})$$

$$= 2(\bar{u}\times\bar{v}) = (2\bar{u})\times\bar{v}$$

ดังนั้น $(\bar{u}-\bar{v})\times(\bar{u}+\bar{v}) = (2\bar{u})\times\bar{v}$

4. 1) $(\bar{u}\cdot\bar{v})\cdot\bar{r}$ ไม่มีความหมาย เพราะตามบทนิยามของผลคูณเชิงสเกลาร์ สิ่งที่นำมาคูณกันทั้งสองสิ่งต้องเป็นเวกเตอร์ แต่ $\bar{u}\cdot\bar{v}$ เป็นสเกลาร์

2) $(\bar{u}\cdot\bar{v})\bar{r}$ มีความหมายเป็นเวกเตอร์

3) $(\bar{u}\times\bar{v})\times\bar{r}$ มีความหมายเป็นเวกเตอร์

4) $(\bar{u}\cdot\bar{v})\times\bar{r}$ ไม่มีความหมาย เพราะตามบทนิยามของผลคูณเชิงเวกเตอร์ สิ่งที่นำมาคูณกันทั้งสองสิ่งต้องเป็นเวกเตอร์ แต่ $\bar{u}\cdot\bar{v}$ เป็นสเกลาร์

5) $\bar{u}\cdot(\bar{v}\times\bar{r})$ มีความหมายเป็นสเกลาร์

5. $\bar{u} = 2\bar{i}-\bar{j}+\bar{k}$ $\qquad$ $\bar{v} = -\bar{i}+\bar{j}-2\bar{k}$

$$|\bar{u}\cdot\bar{v}| = |-2-1-2| = 5$$

$$\bar{u}\times\bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\bar{k}$$

$$= \bar{i}+3\bar{j}+\bar{k}$$

เวกเตอร์ขนาด 1 หน่วย ที่มีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ $\bar{u}\times\bar{v}$

คือ $\dfrac{1}{\sqrt{1+9+1}}(i+3\bar{j}+\bar{k}) = \dfrac{1}{\sqrt{11}}(\bar{i}+3\bar{j}+\bar{k})$

ดังนั้น เวกเตอร์ขนาด 5 หน่วย ที่มีทิศทางตั้งฉากกับระนาบที่ประกอบด้วย

$\bar{u}$ และ $\bar{v}$ คือ $\dfrac{5\sqrt{11}}{11}(\bar{i}+3\bar{j}+\bar{k})$ และ $-\dfrac{5\sqrt{11}}{11}(\bar{i}+3\bar{j}+\bar{k})$

6. พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน PORS = $|\overrightarrow{PO}\times\overrightarrow{PS}|$

$$\overrightarrow{PO}\times\overrightarrow{PS} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}\bar{k}$$

$$= -8\bar{i}-12\bar{j}+9\bar{k}$$

$$|\overrightarrow{PO}\times\overrightarrow{PS}| = \sqrt{(-8)^2+(-12)^2+9^2}$$

$$= 17$$

รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน PORS มีพื้นที่ 17 ตารางหน่วย

7. พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC $= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 8-0 \\ 8-2 \\ -2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix} = 8\bar{i}+6\bar{j}-4\bar{k}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 9-0 \\ 12-2 \\ 6-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 10 \\ 4 \end{bmatrix} = 9\bar{i}+10\bar{j}+4\bar{k}$$

ดังนั้น $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 8 & 6 & -4 \\ 9 & 10 & 4 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 10 & 4 \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} 8 & -4 \\ 9 & 4 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 9 & 10 \end{vmatrix}\bar{k}$$

$$= (24+40)\bar{i} - (32+36)\bar{j} + (80-54)\bar{k}$$

$$= 64\bar{i} - 68\bar{j} + 26\bar{k}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{64^2+68^2+26^2}$$

$$= \sqrt{9396}$$

$$= 18\sqrt{29}$$

ดังนั้น สามเหลี่ยม ABC มีพื้นที่ $\frac{1}{2}\times 18\sqrt{29} = 9\sqrt{29}$ ตารางหน่วย

8. 1) ปริมาตรของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานทรงตันเท่ากับ $|\bar{u}\cdot(\bar{v}\times\bar{r})|$

$$\bar{v}\times\bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\bar{k}$$

$$= \bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$$

ดังนั้น $|\bar{u}\cdot(\bar{v}\times\bar{r})| = |(\bar{i}+\bar{k})\cdot(\bar{i}-\bar{j}+\bar{k})|$

$$= |(1)(1)+0(-1)+(1)(1)|$$

$$= |2|$$

$$= 2$$

ดังนั้น ทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานมีปริมาตร 2 ลูกบาศก์หน่วย

2) ปริมาตรของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานทรงตันเท่ากับ $\left|\bar{u}\cdot(\bar{v}\times\bar{r})\right|$

$$\bar{v}\times\bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\bar{k}$$

$$= (-2\ -1)\bar{i} - (2-1)\bar{j} + (1+1)\bar{k}$$

$$= -3\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$$

ดังนั้น $\left|\bar{u}\cdot(\bar{v}\times\bar{r})\right| = \left|(2\bar{i}+3\bar{j}-4\bar{k})\cdot(-3\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k})\right|$

$$= \left|-6-3-8\right|$$

$$= \left|-17\right|$$

$$= 17$$

ดังนั้น ทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานมีปริมาตร 17 ลูกบาศก์หน่วย

คณะกรรมการดำเนินการจัดทำคู่มือครู รายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔ – ๖ เล่ม ๓ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑

นายประสาท สอ้านวงศ์	ข้าราชการบำนาญ
นางสาวสิริพร ทิพย์คง	มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
นางสาวจำเริญ เจียวหวาน	โรงเรียนมหิดลวิทยานุสรณ์
นางสาวราตรี คำเทียนทอง	ข้าราชการบำนาญ
นางสาวจินตนา อารยะรังสฤษฏิ์	ข้าราชการบำนาญ
นางมยุรี สาลีวงศ์	โรงเรียนสตรีสิริเกศ
นายดนัย ยังคง	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นายสมนึก บุญพาไสว	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางชมัยพร ตั้งตน	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวอลงกรณ์ ตั้งสงวนธรรม	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวนวลจันทร์ ผมอุดทา	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวศศิวรรณ เมลืองนนท์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นายอนุชิต อารมณ์สาวะ	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวปฐมาภรณ์ อวชัย	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

คณะบรรณาธิการ

นายประสาท สอ้านวงศ์	นางสาวจำเริญ เจียวหวาน
นางสาวสิริพร ทิพย์คง	นางสาวราตรี คำเทียนทอง

ผู้จัดพิมพ์ต้นฉบับ

นางสาวปิยาภรณ์ ทองมาก	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

พิมพ์ที่โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว นายสมมาตร์ มีศิลป์ ผู้พิมพ์และผู้โฆษณา พ.ศ. 2556

คำสำคัญในการสืบค้น

คำสำคัญในการสืบค้น

สสวท

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

ศึกษาภัณฑ์พาณิชย์
พิมพ์ที่โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว
นายสันติภาพ อินทรพัฒน์ ผู้พิมพ์โฆษณา
๕๔๐๐๐๒๕

องค์การค้าของ สกสค.
www.suksapan.or.th