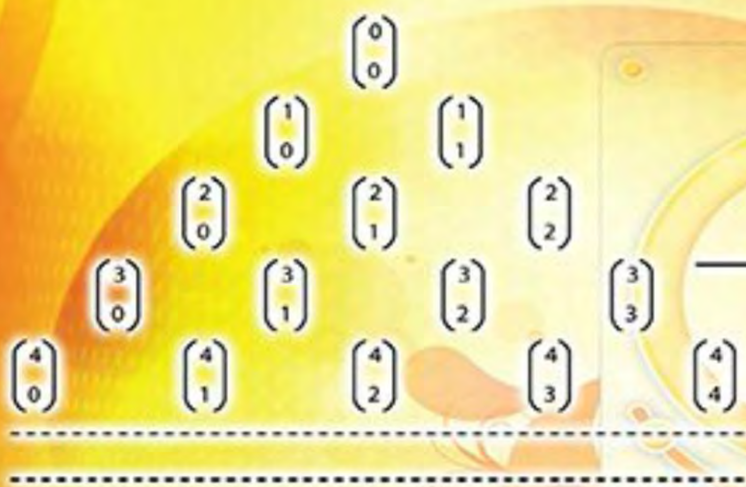
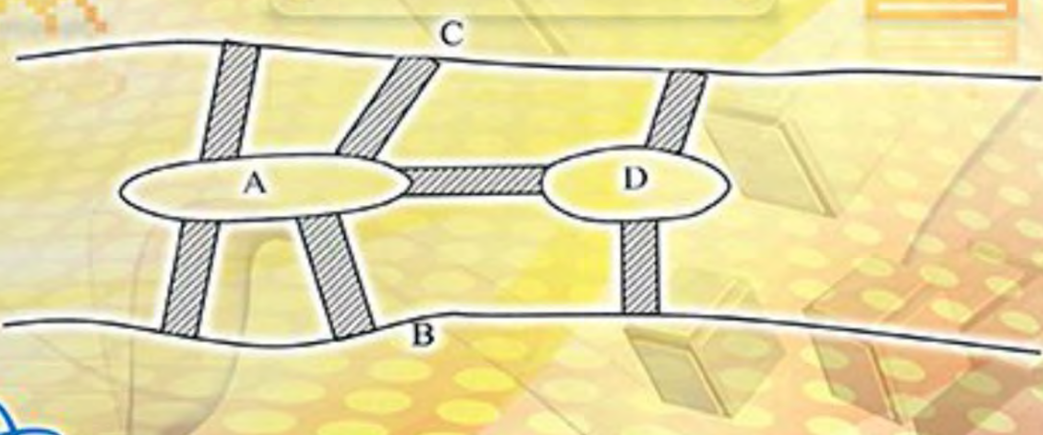
คู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติม
คณิตศาสตร์ เล่ม ๔
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔-๖

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑





กระทรวงศึกษาธิการ
สสวท
๑๓๖.-

คู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติม
คณิตศาสตร์ เล่ม ๔
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔ - ๖

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑

จัดทำโดย
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

ISBN 978 - 974 - 01 - 9533 - 7
พิมพ์ครั้งที่หนึ่ง ๕,๐๐๐ เล่ม
พ.ศ. ๒๕๕๔

องค์การค้าของ สกสค. จัดพิมพ์จำหน่าย
พิมพ์ที่โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว
๒๒๔๙ ถนนลาดพร้าว วังทองหลาง กรุงเทพมหานคร

ประกาศสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน
เรื่อง อนุญาตให้ใช้สื่อการเรียนรู้ในสถานศึกษา

ด้วยสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน ได้มอบหมายให้สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีจัดทำโครงสร้างหลักสูตรรายวิชาเพิ่มเติม และจัดทำคู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม ๔ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔-๖ สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐานได้พิจารณาแล้ว อนุญาตให้ใช้ในสถานศึกษาได้

ประกาศ ณ วันที่ ๑๕ ธันวาคม พ.ศ. ๒๕๕๓

(นายชินภัทร ภูมิรัตน)
เลขาธิการคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน

คำนำ

คู่มือครู รายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม ๔ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔-๖ นี้ สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีจัดทำขึ้น สำหรับให้ครูผู้สอนเลือกใช้ประกอบการเรียนการสอนควบคู่กับหนังสือเรียน ตามโครงสร้างหลักสูตรรายวิชาเพิ่มเติม โดยให้พิจารณาเทียบเคียงกับหลักสูตรของสถานศึกษา เพื่อเป็นแนวทางในการสอนคณิตศาสตร์ และการออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้ ให้ผู้เรียนสามารถนำความรู้ไปใช้แก้ปัญหา และพัฒนาทักษะการเรียนรู้นำไปสู่ทักษะการคิดวิเคราะห์ สังเคราะห์ ตามความสามารถและความแตกต่างระหว่างบุคคลของผู้เรียนได้ ในการจัดทำคู่มือครูเล่มนี้ได้รับความร่วมมือจากคณาจารย์ ผู้ทรงคุณวุฒิ ผู้เชี่ยวชาญด้านคณิตศาสตร์จากสถาบันต่างๆ ทั้งภาครัฐและเอกชนเป็นอย่างดี

สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน หวังเป็นอย่างยิ่งว่าหนังสือเล่มนี้ จะเป็นประโยชน์ต่อการจัดการเรียนรู้ เพื่อประยุกต์ใช้พัฒนาการเรียนรู้ของผู้เรียนได้อย่างเหมาะสม ขอขอบคุณสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ตลอดจนบุคคลและหน่วยงานที่มีส่วนเกี่ยวข้องในการจัดทำหนังสือไว้ ณ โอกาสนี้

(นายชินภัทร ภูมิรัตน)
เลขาธิการคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน
๑๕ ธันวาคม ๒๕๕๓

คำชี้แจง

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้รับมอบหมายจากกระทรวงศึกษาธิการ ให้พัฒนาหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ ของกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ กลุ่มสาระการเรียนรู้วิทยาศาสตร์ รวมทั้งสาระการออกแบบและเทคโนโลยี และสาระเทคโนโลยีสารสนเทศและการสื่อสารในกลุ่มสาระการเรียนรู้การงานอาชีพและเทคโนโลยี ตลอดจนจัดทำสื่อการเรียนรู้ตามหลักสูตรดังกล่าว

คู่มือครูเล่มนี้จัดทำขึ้นสำหรับใช้ประกอบการสอนควบคู่กับหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔ – ๖ เล่ม ๔ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ เพื่อให้ครูผู้สอนใช้เป็นแนวทางในการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ให้ผู้เรียนบรรลุตามมาตรฐานการเรียนรู้ที่กำหนดไว้ ซึ่งในแต่ละบทประกอบด้วย ผลการเรียนรู้ที่กำหนดให้สอดคล้องกับมาตรฐานการเรียนรู้ สาระสำคัญของเนื้อหาพร้อมข้อเสนอแนะ และ กิจกรรมเสนอแนะเพิ่มเติมเกี่ยวกับการจัดการเรียนการสอน เพื่อเป็นประโยชน์ในการเตรียมการสอน และเพื่อให้การสอนบรรลุตามผลการเรียนรู้ที่กำหนดไว้ นอกจากนี้ยังมีตัวอย่างแบบทดสอบประจำบทและเฉลยตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท ซึ่งจะช่วยให้ผู้สอนได้แนวคิดในการออกแบบแบบทดสอบที่เหมาะสมต่อไป โดยในส่วนที่เป็นการเฉลยแบบฝึกหัดนั้นจะไม่เฉลยวิธีทำโดยละเอียดทุกข้อแต่จะเสนอแนะเพียงแนวคิดไว้ให้ ในข้อที่ไม่ซับซ้อนจะเฉลยเฉพาะคำตอบ อย่างไรก็ตามสำหรับแบบฝึกหัดที่ต้องการคำตอบ “ถูก” หรือ “ผิด” ครูผู้สอนควรให้ผู้เรียนแสดงความคิดเห็นหรือให้เหตุผลเพิ่มเติมในระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนด้วย

ในการจัดทำคู่มือครูเล่มนี้ สสวท. ได้รับความร่วมมืออย่างดียิ่งจากคณะอาจารย์จากโรงเรียนและมหาวิทยาลัย สสวท. จึงขอขอบคุณทุกท่านไว้ ณ ที่นี้ และหวังเป็นอย่างยิ่งว่าคู่มือครูเล่มนี้จะเป็นประโยชน์สำหรับครูผู้สอนคณิตศาสตร์ ให้สามารถนำไปใช้ หรือปรับใช้ให้เหมาะสมกับศักยภาพของผู้เรียน

หากมีข้อเสนอแนะใดที่จะทำให้คู่มือครูเล่มนี้สมบูรณ์ยิ่งขึ้นโปรดแจ้ง สสวท. ทราบด้วย จักขอบคุณยิ่ง

(นางพรพรรณ ไวทยางกูร)
ผู้อำนวยการ
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

เวลาเรียนโดยประมาณ
รายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔ – ๖ เล่ม ๔
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑

บทที่	สาระการเรียนรู้	จำนวนชั่วโมง
1	จำนวนเชิงซ้อน	22
2	ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น	18
3	ความน่าจะเป็น	40
		80

หมายเหตุ จำนวนชั่วโมงที่กำหนดไว้ในแต่ละบทได้รวมเวลาที่ใช้ในการทำกิจกรรมการเรียนการสอนที่เสริมสร้างทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ตลอดจนการวัดและการประเมินผลด้วย ซึ่งผู้สอนอาจลดหรือเพิ่มเวลาได้ตามความเหมาะสม

สารบัญ

	หน้า
บทที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน	
ผลการเรียนรู้	1
สาระสำคัญ	1
ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการสอน	7
ตัวอย่างกิจกรรมที่ส่งเสริมทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์	27
การวัดและการประเมินผลระหว่างเรียน	35
ตัวอย่างแบบทดสอบ	35
เฉลยตัวอย่างแบบทดสอบ	36
เฉลยแบบฝึกหัด	
แบบฝึกหัด 1.1	38
แบบฝึกหัด 1.2	39
แบบฝึกหัด 1.3	42
แบบฝึกหัด 1.4	44
แบบฝึกหัด 1.5	54
แบบฝึกหัด 1.6	59
แบบฝึกหัด 1.7	77
บทที่ 2 ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น	
ผลการเรียนรู้	81
สาระสำคัญ	82
ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการสอน	88
ตัวอย่างกิจกรรมที่ส่งเสริมทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์	93
การวัดและการประเมินผลระหว่างเรียน	128
ตัวอย่างแบบทดสอบ	128
เฉลยตัวอย่างแบบทดสอบ	130

หน้า

เฉลยแบบฝึกหัด	
แบบฝึกหัด 2.1	132
แบบฝึกหัด 2.2	136
แบบฝึกหัด 2.4	138
แบบฝึกหัด 2.5	140
บทที่ 3 ความน่าจะเป็น	
ผลการเรียนรู้	142
สาระสำคัญ	142
ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการสอน	145
ตัวอย่างกิจกรรมที่ส่งเสริมทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์	156
การวัดและการประเมินผลระหว่างเรียน	164
ตัวอย่างแบบทดสอบ	165
เฉลยตัวอย่างแบบทดสอบ	166
เฉลยแบบฝึกหัด	
แบบฝึกหัด 3.1	171
แบบฝึกหัด 3.2 ก	175
แบบฝึกหัด 3.2 ข	177
แบบฝึกหัด 3.2 ค	179
แบบฝึกหัด 3.3	180
แบบฝึกหัด 3.4	182
แบบฝึกหัด 3.5 ก	184
แบบฝึกหัด 3.5 ข	185

บทที่ 1

จำนวนเชิงซ้อน

(22 ชั่วโมง)

วิวัฒนาการของจำนวนในระบบจำนวนจริง แสดงให้เห็นว่า จำนวนต่าง ๆ เกิดขึ้นจากความจำเป็นของมนุษย์ในการที่จะแก้ปัญหาต่าง ๆ จำนวนใหม่ ๆ ที่เกิดขึ้น นอกจากจะทำให้แก้ปัญหาตามต้องการได้แล้ว ยังก่อให้เกิดความรู้และทฤษฎีใหม่ ๆ อีกด้วย บทนี้จะกล่าวถึงการสร้างจำนวนเชิงซ้อน สมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน รากที่สองของจำนวนเชิงซ้อน กราฟและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน และสมการพหุนาม

สาระสำคัญ ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการสอน ตัวอย่างกิจกรรมการเรียนการสอน และการวัดและการประเมินผลที่นำเสนอ มีไว้เพื่อเป็นตัวอย่างในการจัดการเรียนการสอน การนำเข้าสู่บทเรียน การสอนหรือการฝึกทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ให้ผู้เรียนมีคุณธรรม จริยธรรม และค่านิยมที่ดีงามต่อคณิตศาสตร์ ซึ่งผู้สอนสามารถเลือกหรือปรับใช้ได้ตามความเหมาะสม ในบทเรียนนี้มุ่งให้ผู้เรียนบรรลุผลการเรียนรู้ดังนี้

ผลการเรียนรู้

1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อนเขียนกราฟและหาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนได้
2. หารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก
3. แก้สมการพหุนามตัวแปรเดียวที่มีสัมประสิทธิ์และดีกรีเป็นจำนวนเต็ม

สาระสำคัญ

1. จำนวนเชิงซ้อน คือ คู่อันดับ (a, b) เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง และกำหนดการเท่ากัน การบวก และการคูณของจำนวนเชิงซ้อน ดังนี้

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน (a, b) และ (c, d)

1. การเท่ากัน $(a, b) = (c, d)$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$
2. การบวก $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
3. การคูณ $(a, b)\cdot(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

อาจแทน $(a, b) \cdot (c, d)$ ด้วย $(a, b)(c, d)$ ก็ได้

เซตของจำนวนเชิงซ้อนเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ C

2. สำหรับจำนวนเชิงซ้อน $z = (a, b)$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง เรียก a ว่าส่วนจริง (real part) ของ z และแทนด้วย Re(z) เรียก b ว่าส่วนจินตภาพ (imaginary part) ของ z และแทนด้วย Im(z) นอกจากนี้ยังสามารถกำหนดสัญลักษณ์ของจำนวนเชิงซ้อนในรูป $a + bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงได้

3. สมบัติที่เกี่ยวข้องกับการบวกและการคูณของจำนวนเชิงซ้อน

ถ้า z_1, z_2 และ z_3 เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้วจะได้ว่า

1) $z_1 + z_2$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน และ z_1z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน (สมบัติปิด)

2) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ และ $z_1z_2 = z_2z_1$ (สมบัติการสลับที่)

3) $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ และ $z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3$ (สมบัติการเปลี่ยนหมู่)

4) $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$ (สมบัติการแจกแจง)

4. (0, 0) เป็นเอกลักษณ์การบวกในระบบจำนวนเชิงซ้อน

5. ตัวผกผันการบวกของจำนวนเชิงซ้อน z เขียนแทนด้วย $-z$ เมื่อ $z = (a, b)$ จะได้ $-z = (-a, -b)$ หรือ $z = a + bi$ จะได้ $-z = -a - bi$

6. $z - w = z + (-w)$ สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z, w ใด ๆ

7. (1, 0) เป็นเอกลักษณ์การคูณในระบบจำนวนเชิงซ้อน

8. ตัวผกผันการคูณของ z เขียนแทนด้วย z^{-1}

เมื่อ $z = a + bi$ จะได้ $z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$ เมื่อ a และ b ไม่เป็นศูนย์

9. $z \div w = zw^{-1}$ สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z, w ใด ๆ ซึ่ง $w \neq (0, 0)$ และเขียนแทน $z \div w$ ด้วย $\frac{z}{w}$

10. ให้ $z = a + bi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะเรียกจำนวนเชิงซ้อน $a - bi$ ว่าเป็นสังยุค (conjugate) ของ z และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\overline{z}$ นั่นคือ $\overline{z} = \overline{a + bi} = a - bi$

11. สมบัติของสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน

ให้ z, z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า

1) $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ และ $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$

2) $\overline{\overline{z}} = z$

3) ถ้า $z \neq 0$ แล้ว $\frac{1}{\overline{z}} = \overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$

4) $\overline{z_1 + z_2} \;=\; \overline{z_1} + \overline{z_2}$

5) $\overline{z_1 - z_2} \;=\; \overline{z_1} - \overline{z_2}$

6) $\overline{z_1 z_2} \;=\; \overline{z_1}\ \overline{z_2}$

7) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} \;=\; \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ เมื่อ $z_2 \neq 0$

12. กำหนดจำนวนเชิงซ้อน $z = x + yi$ และให้

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ จะได้ว่ารากที่สองของ z คือ

$$\begin{cases} \pm\left(\sqrt{\frac{r+x}{2}} + \sqrt{\frac{r-x}{2}}\, i\right) & \text{เมื่อ } y \geq 0 \\ \pm\left(\sqrt{\frac{r+x}{2}} - \sqrt{\frac{r-x}{2}}\, i\right) & \text{เมื่อ } y < 0 \end{cases}$$

13. ค่าสัมบูรณ์ (absolute value หรือ modulus) ของจำนวนเชิงซ้อน $a + bi$ คือ จำนวนจริง $\sqrt{a^2 + b^2}$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $|a + bi|$

14. สมบัติของค่าสัมบูรณ์

ให้ z, z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า

1) $|z|^2 = z\overline{z}$

2) $|z| \;=\; |-z| \;=\; |\overline{z}|$

3) ถ้า $z \neq 0$ แล้ว $\left|\frac{1}{z}\right| \;=\; \frac{1}{|z|}$

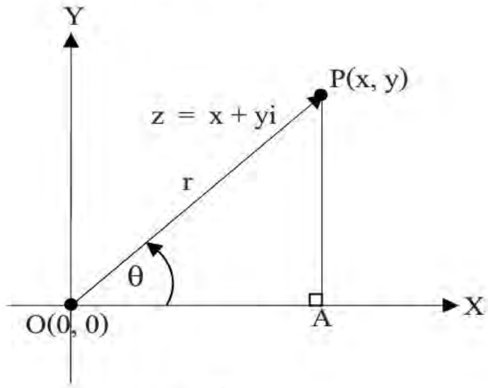
4) $|z_1 z_2| \;=\; |z_1||z_2|$

5) $|z_1 + z_2| \;\leq\; |z_1| + |z_2|$

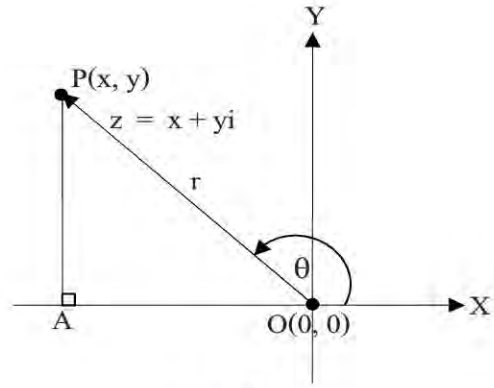
6) $|z_1 - z_2| \;\geq\; |z_1| - |z_2|$

15. จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

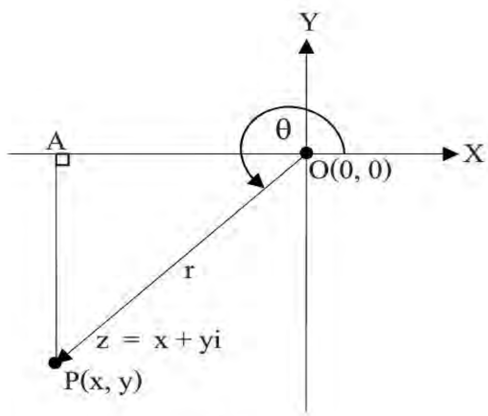
ถ้า $z = x + yi \neq 0$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะสามารถเขียนแทน z ด้วยเวกเตอร์บนระนาบจากจุด O(0, 0) ไปยังจุด P(x, y) ได้ดังนี้



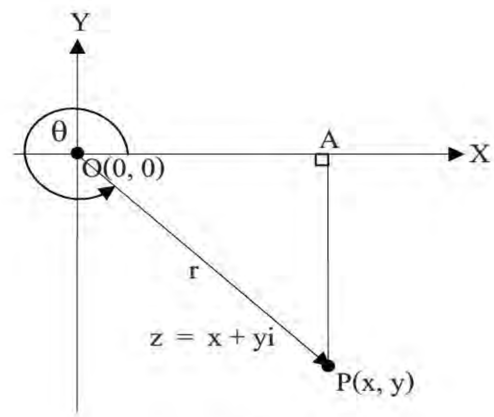
จตุภาคที่ 1



จตุภาคที่ 2



จตุภาคที่ 3



จตุภาคที่ 4

ถ้า $z = x + yi \neq 0$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน และ $r = |\overline{OP}|$ แทนระยะทางระหว่างจุดกำเนิด O กับ P จะได้ความสัมพันธ์ดังนี้ $x = r\cos\theta$ และ $y = r\sin\theta$ นอกจากนี้ยังได้ความสัมพันธ์ที่ทำให้หา r และ θ จาก x และ y ดังนี้ $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ และ $\tan\theta = \frac{y}{x}$ เมื่อ $x \neq 0$ ดังนั้น จึงอาจเขียนจำนวนเชิงซ้อน z ได้ในรูปใหม่เป็น $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เรียกรูปแบบการเขียนจำนวนเชิงซ้อนที่เขียนในรูป $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ว่าเป็นรูปเชิงขั้ว (polar form) ของ z และเรียก θ ว่า อาร์กิวเมนต์ (argument) ของ z หรือ $\theta = \arg(z)$

สังเกตว่า เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ $\cos(\theta + 2n\pi) = \cos\theta$ และ $\sin(\theta + 2n\pi) = \sin\theta$ ดังนั้น $\cos(\theta + 2n\pi) + i\sin(\theta + 2n\pi) = \cos\theta + i\sin\theta$ แสดงว่า ถ้า θ เป็นอาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อน z แล้ว $\theta + 2n\pi$ เป็นอาร์กิวเมนต์ของ z ด้วย สำหรับทุกจำนวนเต็ม n

นอกจากนั้น ถ้า $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ และ $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า $z_1 = z_2$ ก็ต่อเมื่อ $r_1 = r_2$ และ $\theta_1 - \theta_2 = 2n\pi$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

16. ให้ $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ และ $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ โดยที่ $z_2 \neq 0$ แล้ว

1) $z_1z_2 = r_1r_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\right]$

2) $\dfrac{1}{z_2} = \dfrac{1}{r_2}(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)$

3) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\right]$

4) $\overline{z_1} = r_1\left[\cos(-\theta_1)+i\sin(-\theta_1)\right]$

17. ทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์ (De Moivre's Theorem)

ถ้า $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว และ n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว $z^n = r^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]$

18. ถ้า $w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ แล้วรากที่ n ของ w มีทั้งหมด n รากที่แตกต่างกัน คือ

$z = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\dfrac{\theta+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\dfrac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]$ เมื่อ $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

19. **ทฤษฎีบทหลักมูลของพีชคณิต** (Fundamental Theorem of Algebra)

ถ้า p(x) เป็นพหุนามที่มีดีกรีมากกว่าศูนย์แล้ว สมการ $p(x) = 0$ จะมีคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนอย่างน้อยหนึ่งคำตอบ

20. ถ้า p(x) เป็นพหุนามดีกรี n เมื่อ $n \geq 1$ แล้วสมการ $p(x) = 0$ จะมีคำตอบทั้งหมด n คำตอบ เมื่อนับคำตอบที่ซ้ำกันด้วย

21. **ทฤษฎีบทตัวประกอบ** (Factor Theorem)

กำหนด p(x) เป็นพหุนามดีกรี n เมื่อ $n \geq 1$ จะได้ว่าพหุนาม p(x) มี $x - c$ เป็นตัวประกอบ ก็ต่อเมื่อ $p(c) = 0$

22. **ทฤษฎีบทตัวประกอบจำนวนตรรกยะ** (Rational Factor Theorem)

กำหนด p(x) เป็นพหุนามในรูป $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $a_n \neq 0$

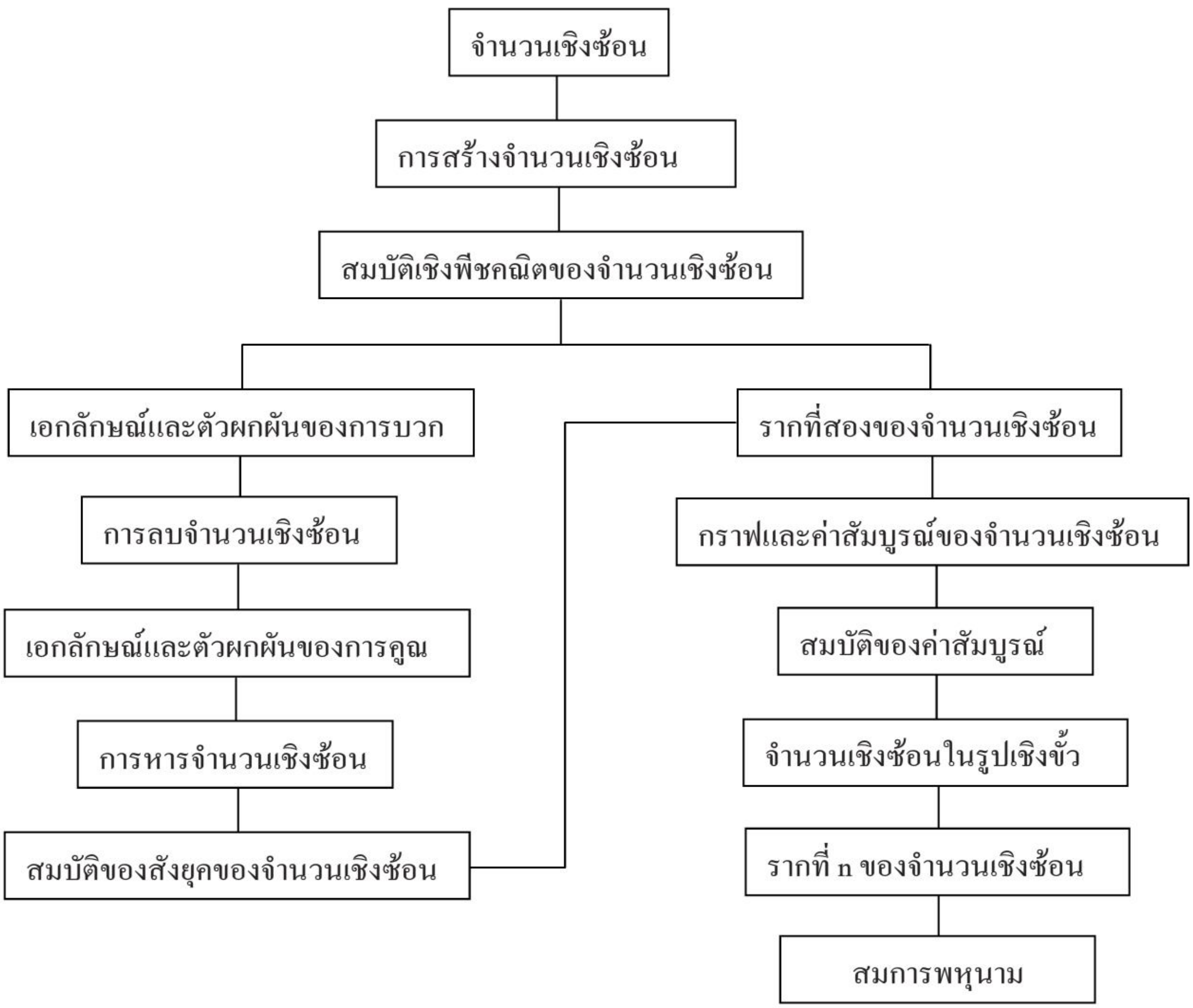
ถ้า $x - \frac{k}{m}$ เป็นตัวประกอบของพหุนาม $p(x)$ โดยที่ m และ k เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $m \neq 0$ และ ห.ร.ม. ของ m และ k คือ 1 แล้ว m หาร a_n ลงตัว และ k หาร a_0 ลงตัว

23. **ทฤษฎีบท** ถ้าจำนวนเชิงซ้อน z เป็นคำตอบของสมการพหุนาม

$$p(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

โดยที่สัมประสิทธิ์ $a_1, \ldots, a_n$ เป็นจำนวนจริง แล้วสังยุค $\bar{z}$ จะเป็นคำตอบของสมการพหุนามนี้ด้วย

ผู้สอนอาจจัดลำดับเนื้อหาดังนี้



ความรู้เพิ่มเติมสำหรับครู

การนำเสนอความรู้เกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อนในรูปของเซตของคู่อันดับของจำนวนจริงอาจสร้างปัญหาให้ผู้สอนในเรื่องที่มีการกล่าวว่า เซตของจำนวนจริงเป็นสับเซตของเซตของจำนวนเชิงซ้อน เพราะเมื่อ a เป็นจำนวนจริง a จะไม่ใช่สมาชิกของเซตของจำนวนเชิงซ้อนเพราะ a ไม่ใช่คู่อันดับ ปัญหานี้เมื่อศึกษาคณิตศาสตร์ในระดับสูงขึ้น นักคณิตศาสตร์ถือว่าเมื่อมีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง f จาก R ไปทั่วถึงสับเซต V ของเซตของจำนวนเชิงซ้อน เมื่อ $V = \{(x, y) \in R \times R \mid y = 0\}$ โดยที่ $f(a+b) = f(a) + f(b)$ และ $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง แล้วจะเรียกว่า R และ V เป็นเซตที่สมสัณฐานกัน (isomorphic) ซึ่งฟังก์ชัน f ดังกล่าวคือ ฟังก์ชันที่นิยามดังนี้

$$f(x) = (x, 0)$$

จะเห็นว่าเมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง

$$\begin{aligned} f(a+b) &= (a+b, 0) \\ &= (a, 0) + (b, 0) \\ &= f(a) + f(b) \\ f(a \cdot b) &= (a \cdot b, 0) \\ &= (a, 0) \cdot (b, 0) \\ &= f(a) \cdot f(b) \end{aligned}$$

ดังนั้น การกล่าวว่าเซตของจำนวนจริงเป็นสับเซตของเซตของจำนวนเชิงซ้อนจึงเป็นคำกล่าวแทนคำกล่าวว่า เซตของจำนวนเชิงซ้อนมีสับเซตที่สมสัณฐานกับเซตของจำนวนจริง

ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการสอน

จำนวนเชิงซ้อน

1. ผู้สอนอาจนำเข้าสู่บทเรียนตามหนังสือเรียน หรืออาจยกตัวอย่างการหาคำตอบของสมการ $x^2 = 1$ พบว่า x เป็น -1 หรือ 1 ก็ได้ ซึ่งผู้เรียนเคยเรียนมาแล้ว หลังจากนั้นผู้สอนยกตัวอย่างการหา x เมื่อกำหนด $x^2 = -1$ ถามผู้เรียนว่า ในระบบจำนวนจริงมีจำนวนใดหรือไม่ที่ยกกำลังสองแล้วเป็นจำนวนลบ ผู้เรียนจะตอบได้ว่า ไม่มีจำนวนจริงใดเลยที่ยกกำลังสองแล้วได้จำนวนลบ เพื่อให้มีคำตอบของสมการ $x^2 = -1$ จำเป็นต้องสร้างจำนวนขึ้นใหม่ เรียกจำนวนที่สร้างใหม่นี้ว่า จำนวนเชิงซ้อน

2. ผู้สอนให้บทนิยามจำนวนเชิงซ้อน การเท่ากัน การบวก และการคูณ จำนวนเชิงซ้อนในรูป (a, b) แล้วยกตัวอย่างหรือกำหนดจำนวนเชิงซ้อนให้เพื่อหาคำตอบที่ต้องการ เช่น

(1) กำหนดให้ $(3a, -b) = (3, 1)$ จงหา a และ b

จาก	$(3a, -b)$	$=$	$(3, 1)$
จะได้	$3a$	$=$	3
	a	$=$	1
และ	$-b$	$=$	1
	b	$=$	-1

(2) จงหาผลบวกและผลคูณของจำนวนเชิงซ้อน $(-1, 5)$ และ $(2, -3)$

$$(-1, 5) + (2, -3) = (-1 + 2, 5 - 3)$$
$$= (1, 2)$$

และ
$$(-1, 5) \cdot (2, -3) = ((-1)2 - 5(-3), (-1)(-3) + 5(2))$$
$$= (-2 + 15, 3 + 10)$$
$$= (13, 13)$$

(3) จงหา a, b เมื่อกำหนด

ก. $(a, -3b) + (-4b, 2a) = (-2, 1)$

จะได้ $a - 4b = -2$

$2a - 3b = 1$

แก้สมการ จะได้ $a = 2$ และ $b = 1$

ข. $(a, b)(3, -4) = (5, 2)$

จะได้ $3a + 4b = 5$

$-4a + 3b = 2$

แก้สมการ จะได้ $a = \frac{7}{25}$ และ $b = \frac{26}{25}$

3. ผู้สอนแสดงให้เห็นว่าจำนวนเชิงซ้อนในรูป (a, b) อาจเขียนให้อยู่ในรูป $a + bi$ ตามขั้นตอนในหนังสือเรียน หลังจากนั้นผู้สอนอาจกำหนดจำนวนเชิงซ้อนในรูป (a, b) ให้ผู้เรียนเขียนให้อยู่ในรูป $a + bi$

4. ผู้สอนบอกผู้เรียนว่า จำนวนเชิงซ้อนประกอบด้วยส่วนจริงและส่วนจินตภาพ กล่าวคือ สำหรับจำนวนเชิงซ้อนในรูป (a, b) หรือในรูป $a + bi$ เรียก a ว่าส่วนจริง และเรียก b ว่าส่วนจินตภาพ

ผู้สอนบอกผู้เรียนว่า จำนวนเชิงซ้อน (a, b) เมื่อ $b = 0$ เรียกว่าจำนวนจริง เช่น (3, 0), (–7, 0) ซึ่งก็คือ 3 และ –7

และจำนวนเชิงซ้อน (0, b) เมื่อ $b \neq 0$ เรียกว่า จำนวนจินตภาพแท้ เช่น 3i เป็นจำนวนจินตภาพแท้ ให้ผู้เรียนยกตัวอย่างจำนวนจินตภาพแท้อีก 2 หรือ 3 จำนวน

ผู้สอนยกตัวอย่างจำนวนต่าง ๆ เมื่อเอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนเชิงซ้อน แล้วถามว่าเป็นจำนวนชนิดใดตามตารางข้างล่างนี้

	จำนวนเชิงซ้อน	จำนวนจินตภาพแท้	จำนวนจริง	จำนวนตรรกยะ	จำนวนอตรรกยะ	จำนวนเต็ม
$-1-i$	✓					
5	✓		✓	✓		✓
$-7i$	✓	✓				
$\sqrt{3}$	✓		✓		✓	
$2+i$	✓					

5. ผู้สอนอาจให้ผู้เรียนหาค่าของ i^n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก เช่น ให้หาค่าของ i^{112} และ i^{151} ซึ่งผู้เรียนควรหาได้ดังนี้

(1) $i^{112} = (i^2)^{56} = (-1)^{56} = 1$

(2) $i^{151} = i^{150}i = (i^2)^{75}i = (-1)^{75}i = -i$

เอกลักษณ์และตัวผกผันการบวก

1. ผู้สอนทบทวนสมบัติของระบบจำนวนจริงเกี่ยวกับการบวก
2. ผู้สอนถามว่า ในระบบจำนวนเชิงซ้อน เอกลักษณ์การบวกคือจำนวนใด
   ถ้าผู้เรียนยังตอบไม่ได้ ผู้สอนให้ผู้เรียนหาผลบวกของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

   (2, –3) + (0, 0) , (0, 0) + (2, –3)

   (–4, 5) + (0, 0) , (0, 0) + (–4, 5)

   (0, 0) + (1, 4) , (1, 4) + (0, 0)

   (0, 0) + (–5, –2) , (–5, –2) + (0, 0)

   ซึ่งผู้เรียนควรจะได้ข้อสรุปว่า (0, 0) เป็น “เอกลักษณ์การบวก” ในระบบจำนวนเชิงซ้อน

3. ผู้สอนถามความหมายของ "ตัวผกผันการบวก" ของจำนวนเชิงซ้อน (a, b) ซึ่งผู้เรียนควรตอบได้ว่า หมายถึง จำนวนเชิงซ้อนที่บวกกับจำนวนเชิงซ้อน (a, b) แล้วได้จำนวนเชิงซ้อน (0, 0)

ผู้สอนยกจำนวนเชิงซ้อนหลาย ๆ จำนวน เช่น (–1, 3) , (2, –5) , (–2, –1) ให้ผู้เรียนหาตัวผกผันการบวกของจำนวนเชิงซ้อนดังกล่าว

ผู้สอนให้ผู้เรียนสังเกตว่า จำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้กับตัวผกผันการบวกที่หาได้มีอะไรที่แตกต่างกันบ้าง ผู้เรียนควรตอบได้ว่าส่วนจริงและส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อนที่เป็นตัวผกผันการบวกนั้นเป็นจำนวนตรงข้ามกับส่วนจริงและส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้ตามลำดับ กล่าวคือตัวผกผันการบวกของจำนวนเชิงซ้อน (a, b) คือ (–a, –b)

4. ผู้สอนแสดงการหาเอกลักษณ์และตัวผกผันการบวกของจำนวนเชิงซ้อนตามขั้นตอนในหนังสือเรียน

เอกลักษณ์และตัวผกผันการคูณ

1. ผู้สอนทบทวนสมบัติของระบบจำนวนจริงเกี่ยวกับการคูณ

2. ผู้สอนถามว่า ในระบบจำนวนเชิงซ้อน เอกลักษณ์การคูณคือจำนวนใด ถ้าผู้เรียนยังตอบไม่ได้ ผู้สอนให้ผู้เรียนหาผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

$$(1, 3)(1, 0) \quad , \quad (1, 0)(1, 3)$$
$$(-1, -2)(1, 0) \quad , \quad (1, 0)(-1, -2)$$
$$(2, -3)(1, 0) \quad , \quad (1, 0)(2, -3)$$
$$(-2, 3)(1, 0) \quad , \quad (1, 0)(-2, 3)$$

ซึ่งผู้เรียนควรได้ข้อสรุปว่า (1, 0) เป็น "เอกลักษณ์การคูณ" ของจำนวนเชิงซ้อน

3. ผู้สอนถามความหมายของตัวผกผันการคูณในระบบจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งผู้เรียนควรจะตอบได้ว่า "ตัวผกผันการคูณ" ของจำนวนเชิงซ้อนหมายถึงจำนวนเชิงซ้อนที่คูณกับจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้แล้วได้เอกลักษณ์การคูณ คือ จำนวนเชิงซ้อน (1, 0)

ผู้สอนและผู้เรียนช่วยกันหาตัวผกผันการคูณตามวิธีการในหนังสือเรียน

ผู้สอนให้ผู้เรียนฝึกหาตัวผกผันการคูณของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

$$(3,\ 2)\ ,\ (-4,\ 3)\ ,\ -1-5i\ ,\ 4-2i$$

ผู้เรียนควรหาได้ว่า

ตัวผกผันการคูณของ $(3, 2)$ คือ $\left(\frac{3}{13}, \frac{-2}{13}\right)$

ตัวผกผันการคูณของ $(-4, 3)$ คือ $\left(\frac{-4}{25}, \frac{-3}{25}\right)$

ตัวผกผันการคูณของ $-1-5i$ คือ $\frac{-1}{26} + \frac{5}{26}i$

ตัวผกผันการคูณของ $4-2i$ คือ $\frac{4}{20} + \frac{2}{20}i$

ผู้สอนถามผู้เรียนว่าทำอย่างไรจึงจะทราบว่าตัวผกผันการคูณที่หาได้นั้นถูกต้อง

ผู้เรียนควรตอบได้ว่า เมื่อนำจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้คูณกับตัวผกผันการคูณของจำนวนเชิงซ้อนนั้น จะได้จำนวนเชิงซ้อน $(1, 0)$

ผู้สอนให้ผู้เรียนตรวจสอบจำนวนที่หาได้เหล่านั้นตามที่ผู้เรียนตอบมา

การลบและการหารจำนวนเชิงซ้อน

1. ผู้สอนให้บทนิยามการลบและการหารตามหนังสือเรียน

2. ผู้สอนให้ผู้เรียนฝึกหาผลลบและผลหารของ $5 + 3i$ และ $4 - 2i$ เช่น

(1) $(5 + 3i) - (4 - 2i) = 1 + 5i$

(2) $$\frac{5+3i}{4-2i} = (5 + 3i)\left(\frac{4}{20}+\frac{2}{20}i\right) = \frac{7}{10}+\frac{11}{10}i$$

3. ผู้สอนอาจให้ผู้เรียนหาผลบวก ผลลบ ผลคูณและผลหารของจำนวนเชิงซ้อนที่มีหลาย ๆ จำนวน เช่น จงหา $(3, 5)[(2, 1) + (4, -2)]$

วิธีทำ $$(3, 5)[(2, 1) + (4, -2)] = (3, 5)(6, -1) = (23, 27)$$

หรือ $$(3, 5)[(2, 1) + (4, -2)] = (3, 5)(2, 1) + (3, 5)(4, -2) = (1, 13) + (22, 14) = (23, 27)$$

4. ผู้สอนให้บทนิยามสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนตามหนังสือเรียน แล้วให้ผู้เรียนหาสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้ เช่น $4 + 3i$, $2 - i$, $(-3, 1)$, $(-5, -3)$ แล้วให้ผู้เรียนหาผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้กับสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนนั้น ซึ่งผู้เรียนควรสรุปได้ว่าผลคูณเป็นจำนวนจริง

5. ผู้สอนให้ผู้เรียนหาผลคูณของ $a + bi$ และ $a - bi$ แล้วสรุปให้ได้ว่าผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนกับสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนนั้นเป็นจำนวนจริง ผู้สอนแนะนำว่าจากข้อสรุปนี้ นำไปใช้ในการหาผลหารของจำนวนเชิงซ้อนได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

$$\frac{5+3i}{4-2i} = \frac{5+3i}{4-2i}\cdot\frac{4+2i}{4+2i} = \frac{7}{10}+\frac{11}{10}i$$

6. ผู้สอนให้ผู้เรียนหาผลหารของจำนวนเชิงซ้อน เช่น $\frac{3+2i}{2+5i}$ และ $\frac{4+3i}{2-i}$ โดยใช้สังยุคของจำนวนเชิงซ้อน

7. ในหนังสือเรียนหน้า 10 ได้แสดงการพิสูจน์เกี่ยวกับสมบัติของสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนข้อ 1, 3, 4, 7 ไว้ และให้ผู้เรียนพิสูจน์ข้อที่เหลือด้วยตนเอง แต่ถ้าผู้เรียนมีปัญหาในการพิสูจน์ผู้สอนอาจแสดงการพิสูจน์ได้ดังนี้

2) ให้ $z = a + bi$

จะได้ $\overline{z} = a - bi$

และ $\overline{\overline{z}} = a + bi$

$= z$

5) ให้ z_1, z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $z_1 = a + bi$ และ $z_2 = c + di$ จะได้

$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di)$$
$$= (a - c) + (b - d)i$$

นั่นคือ $\overline{(z_1 - z_2)} = (a - c) - (b - d)i$

และ $\overline{z_1} - \overline{z_2} = (a - bi) - (c - di)$

$= (a - c) - (b - d)i$

ดังนั้น $\overline{(z_1 - z_2)} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

6) ให้ z_1, z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $z_1 = a + bi$ และ $z_2 = c + di$ จะได้

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

นั่นคือ $\overline{z_1 \cdot z_2} = (ac - bd) - (ad + bc)i$

และ $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (a - bi)(c - di)$

$= (ac - bd) - (ad + bc)i$

ดังนั้น $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

รากที่สองของจำนวนเชิงซ้อน

1. ผู้สอนทบทวนการหารากที่สองของจำนวนจริงบวกใด ๆ เช่น จงหารากที่สองของ 1, 2, 9, 16

ผู้สอนอาจถามผู้เรียนว่า เราสามารถหารากที่สองของจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ ได้หรือไม่ ผู้เรียนควรบอกว่าได้ ผู้สอนแสดงการหารากที่สองของจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ ตามตัวอย่างในหนังสือเรียน แล้วให้ผู้เรียนช่วยกันสรุปการหารากที่สองของจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ ดังที่กล่าวมา ผู้สอนให้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับการหารากที่สองของจำนวนเชิงซ้อน $z = x + yi$ โดยมีข้อสังเกตว่า ในกรณีที่ $y = 0$ แต่ $x \neq 0$ แล้วรากที่

สองของ z คือ $\pm\sqrt{x}$ เมื่อ $x > 0$ นั่นคือรากที่สองของ z เป็นจำนวนจริงสองจำนวน หรือ $\pm\sqrt{-x}\ i$ เมื่อ $x < 0$ นั่นคือรากที่สองของ z เป็นจำนวนจินตภาพสองจำนวน

ผู้สอนอาจยกตัวอย่างการหารากที่สองของจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ โดยอาศัยทฤษฎีบทเกี่ยวกับการหารากที่สองของจำนวนเชิงซ้อน ตัวอย่างดังนี้

จงหารากที่สองของ $5 + 12i$

วิธีทำ ให้ $z = 5 + 12i$ เมื่อเทียบกับ $x + yi$ จะได้ $x = 5$ และ $y = 12$

และ $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$

เนื่องจาก $y \geq 0$ จะได้รากที่สองของ z คือ $\pm\left(\sqrt{\frac{r+x}{2}} + \sqrt{\frac{r-x}{2}}\ i\right)$

จาก $12 > 0$ จะได้รากที่สองของ $5 + 12i$ คือ

$$\pm\left(\sqrt{\frac{13+5}{2}} + \sqrt{\frac{13-5}{2}}i\right) = \pm\left(\sqrt{\frac{18}{2}} + \sqrt{\frac{8}{2}}i\right) = \pm\ (3 + 2i)$$

ดังนั้นรากที่สองของ $5 + 12i$ คือ $3 + 2i$ และ $-3 - 2i$

2. ผู้สอนยกตัวอย่างที่ 2 ในหนังสือเรียนหน้า 15 แล้วผู้สอนตรวจสอบความเข้าใจของผู้เรียน โดยผู้สอนอาจถามว่า สมการพหุนามกำลังสองในรูป $ax^2 + bx + c = 0$ เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ โดยที่ $a \neq 0$ จะมีคำตอบของสมการเป็นจำนวนจริงเมื่อใด และเป็นจำนวนเชิงซ้อนเมื่อใดผู้เรียนควรบอกได้ว่า คำตอบของสมการจะเป็นจำนวนจริงเมื่อ $b^2 - 4ac \geq 0$ และคำตอบของสมการไม่เป็นจำนวนจริงเมื่อ $b^2 - 4ac < 0$ ผู้สอนควรเน้นว่า การหาคำตอบของสมการพหุนามกำลังสองในรูป $ax^2 + bx + c = 0$ เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนจริง โดยที่ $a \neq 0$ โดยใช้สูตร

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{หรือ} \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{|b^2 - 4ac|}i}{2a}$$

ผู้เรียนจะใช้สูตรนี้ได้ เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนจริงเท่านั้น เช่นในการหาคำตอบของสมการพหุนาม $x^2 + 2 + 3i = 0$ จะไม่สามารถใช้สูตรดังกล่าวในการหาคำตอบของสมการพหุนามได้ เพราะ $2 + 3i$ ไม่ใช่จำนวนจริง

3. ผู้สอนนำสนทนากับผู้เรียนว่า วิธีการหารากที่สองของจำนวนเชิงซ้อนนอกจากสามารถหาได้โดยอาศัยทฤษฎีบท หรือการหาคำตอบของสมการพหุนามโดยใช้สูตรข้างต้นแล้ว ยังสามารถใช้วิธีการแยกตัวประกอบได้ ดังเช่น

จงหารากที่สองของ -4

วิธีทำ ให้

$$\begin{aligned} z^2 &= -4 \\ z^2 + 4 &= 0 \\ z^2 - (2i)^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$(z - 2i)(z + 2i) = 0$$

จะได้ $z - 2i = 0$

$$z = 2i$$

หรือ $z + 2i = 0$

$$z = -2i$$

ดังนั้น รากที่สองของ -4 คือ $-2i$ และ $2i$

กราฟและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

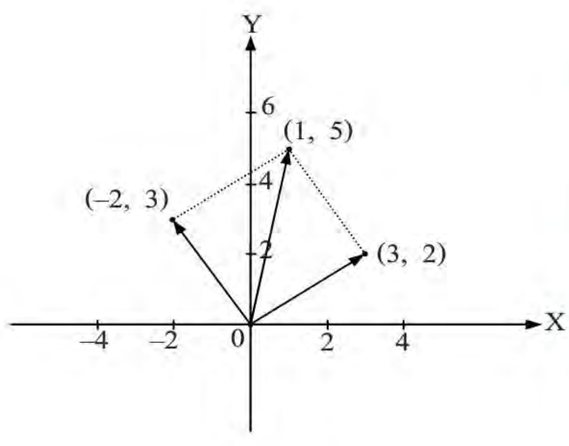
1. ผู้สอนให้ผู้เรียนแทนจำนวนเชิงซ้อนด้วยจุดและเวกเตอร์บนระนาบเชิงซ้อนเช่นเดียวกับในหนังสือเรียน

2. ผู้สอนให้บทนิยามค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

3. ผู้สอนถามผู้เรียนว่าการหาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน $2 + 3i$ เป็นการหาระยะทางจากจุดใดไปจุดใด ซึ่งผู้เรียนควรตอบได้ว่า เป็นการหาระยะทางจากจุด (0, 0) ถึงจุด (2, 3)

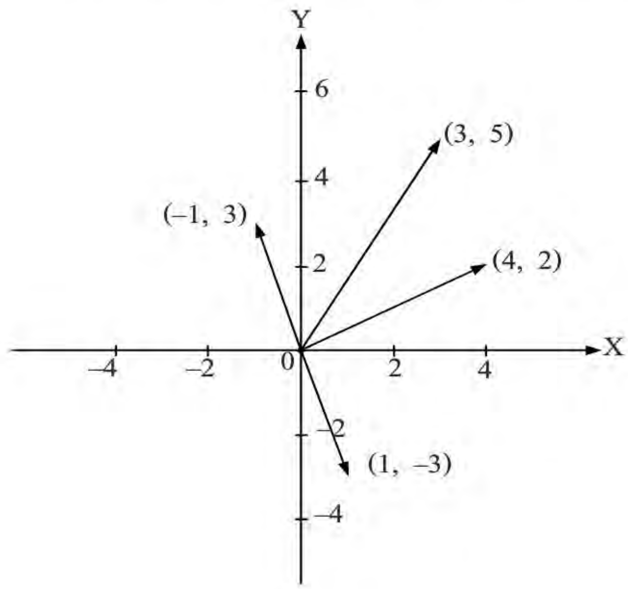
4. การหาผลบวกและผลต่างของจำนวนเชิงซ้อน 2 จำนวน อาจอาศัยกราฟได้เช่นเดียวกับการหาผลบวกและผลต่างของเวกเตอร์ เพราะจำนวนเชิงซ้อน $a + bi$ อาจแทนด้วยเวกเตอร์ที่มีจุด (0, 0) เป็นจุดเริ่มต้น และจุด (a, b) เป็นจุดสิ้นสุด เช่น

(1) การหาผลบวกของ $3 + 2i$ และ $-2 + 3i$ หาผลบวกโดยอาศัยกราฟ จะได้



ผลบวกคือ เวกเตอร์ที่มีจุด (0, 0) เป็นจุดเริ่มต้น และมีจุด (1, 5) เป็นจุดสิ้นสุด ซึ่งก็คือจำนวนเชิงซ้อน (1, 5) หรือ $1 + 5i$ นั่นเอง

(2) การหาผลต่างของจำนวนเชิงซ้อน เช่น $(4 + 2i) - (1 - 3i)$ จะได้



ผลต่างก็คือ เวกเตอร์ที่มีจุด (0, 0) เป็นจุดเริ่มต้น และมีจุด (3, 5) เป็นจุดสิ้นสุด ซึ่งก็คือจำนวนเชิงซ้อน (3, 5) หรือ $3 + 5i$

5. ผู้สอนยกตัวอย่างที่สอดคล้องกับทฤษฎีบทเกี่ยวกับสมบัติของค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน เช่น

1) กำหนดให้ $z = 3 + 4i$ จงแสดงว่า $|z| = |-z| = |\overline{z}|$

จาก $z = 3 + 4i$ ดังนั้น $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$-z = -3 - 4i$ ดังนั้น $|-z| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$

$\overline{z} = 3 - 4i$ ดังนั้น $|\overline{z}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$

ดังนั้น $|z| = |-z| = |\overline{z}|$

2) กำหนดให้ $z_1 = -1 - 2i$ และ $z_2 = 3 + 2i$ จงแสดงว่า $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

ดังนั้น
$$
\begin{aligned}
|z_1 - z_2| &= |(-1 - 2i) - (3+2i)| \\
&= |-4 - 4i| \\
&= \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} \\
&= \sqrt{32} \\
|z_1| - |z_2| &= \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} - \sqrt{3^2 + 2^2} \\
&= \sqrt{5} - \sqrt{13}
\end{aligned}
$$

เพราะว่า $\sqrt{32} \geq \sqrt{5} - \sqrt{13}$ ดังนั้น $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

6. ในหนังสือเรียนหน้า 20 ได้แสดงการพิสูจน์สมบัติของค่าสัมบูรณ์ข้อ 1 และ 2 เท่านั้น สำหรับข้อที่เหลือละไว้ให้ผู้เรียนพิสูจน์ด้วยตนเอง ถ้าผู้เรียนมีปัญหาในการพิสูจน์ ผู้สอนอาจแสดงการพิสูจน์ได้ดังนี้

3) ให้ $z = a+bi$ และ $z \neq 0$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{z} &= \frac{1}{a+bi} \\
&= \frac{1}{a+bi}\cdot\frac{a-bi}{a-bi} \\
&= \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{bi}{a^2+b^2} \\
\left|\frac{1}{z}\right| &= \left|\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{bi}{a^2+b^2}\right| \\
&= \sqrt{\frac{a^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{b^2}{(a^2+b^2)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{a^2+b^2}{(a^2+b^2)^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \\
&= \frac{1}{|z|}
\end{aligned}
$$

4) จาก

$$
\begin{aligned}
|z_1\cdot z_2|^2 &= (z_1\cdot z_2)(\overline{z_1\cdot z_2}) \\
&= (z_1\cdot z_2)(\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}) \\
&= (z_1\cdot\overline{z_1})(z_2\cdot\overline{z_2}) \\
&= |z_1|^2\cdot|z_2|^2 \\
&= \left(|z_1||z_2|\right)^2
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $|z_1\cdot z_2| = |z_1||z_2|$

ก่อนที่จะพิสูจน์สมบัติของค่าสัมบูรณ์ข้อ 5 $|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$ และข้อ 6 $|z_1-z_2| \ge |z_1|-|z_2|$ จะแสดงการพิสูจน์ทฤษฎีบทนำ เพื่อจะนำไปใช้ในการพิสูจน์สมบัติของค่าสัมบูรณ์ดังกล่าว

ทฤษฎีบทนำ 1 ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $z = a+bi$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริง แล้ว $a \le |z|$

พิสูจน์ ให้ $z = a+bi$

เนื่องจาก $a \le \sqrt{a^2}$

$\le \sqrt{a^2+b^2} = |z|$

ดังนั้น $a \le |z|$

ทฤษฎีบทนำ 2 ถ้า z_1, z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $z_1 = a+bi$ และ $z_2 = c+di$ แล้ว

$z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} \le 2\left|z_1\overline{z_2}\right|$

พิสูจน์ พิจารณา

$$z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} = (a+bi)(c-di)+(c+di)(a-bi)$$
$$= ac - adi + bci + bd + ac - bci + adi + bd$$
$$= 2ac + 2bd$$
$$= 2(ac+bd)$$
$$2z_1\overline{z_2} = 2(a+bi)(c-di)$$
$$= 2(ac+bd) + 2(bc-ad)i$$
$$2\left|z_1\overline{z_2}\right| = 2\sqrt{(ac+bd)^2+(bc-ad)^2}$$

นั่นคือ $2(ac+bd) \le 2\sqrt{(ac+bd)^2+(bc-ad)^2}$ (ทฤษฎีบทนำ 1)

ดังนั้น $z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} \le 2\left|z_1\overline{z_2}\right|$

ต่อไปนี้เป็นการพิสูจน์สมบัติของค่าสัมบูรณ์ข้อ 5 และข้อ 6

5) $|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$

พิสูจน์ จาก

$$|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)\left(\overline{z_1+z_2}\right)$$
$$= (z_1+z_2)\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}\right)$$
$$= z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2}$$
$$= |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + |z_2|^2$$
$$\le |z_1|^2 + 2\left|z_1\overline{z_2}\right| + |z_2|^2 \qquad \text{(ทฤษฎีบทนำ 2)}$$

เนื่องจาก

$$|z_1|^2 + 2\left|z_1\overline{z_2}\right| + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2|z_1|\left|\overline{z_2}\right| + |z_2|^2$$
$$= |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2$$
$$= \left(|z_1|+|z_2|\right)^2$$

ดังนั้น

$$|z_1+z_2|^2 \le (|z_1|+|z_2|)^2$$
$$|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$$

6) $|z_1-z_2| \ge |z_1|-|z_2|$

พิสูจน์ จาก

$$|z_1-z_2|^2 = (z_1-z_2)(\overline{z_1-z_2})$$
$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 - z_2\overline{z_1} - z_1\overline{z_2}$$
$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 - \left(z_2\overline{z_1} + z_1\overline{z_2}\right)$$
$$\ge |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\left|z_1\overline{z_2}\right| \qquad \text{(ทฤษฎีบทนำ 2)}$$

เนื่องจาก

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\left|z_1\overline{z_2}\right| = |z_1|^2 - 2|z_1|\left|\overline{z_2}\right| + |z_2|^2$$
$$= |z_1|^2 - 2|z_1||z_2| + |z_2|^2$$
$$= \left(|z_1|-|z_2|\right)^2$$

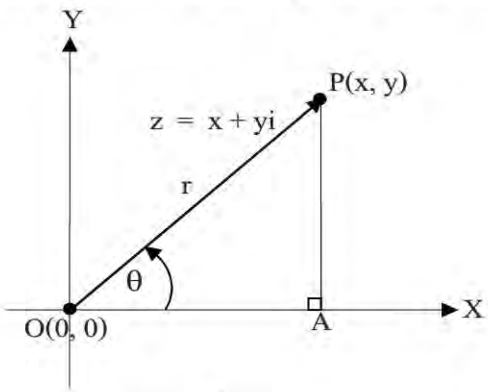
ดังนั้น

$$|z_1-z_2|^2 \ge \left(|z_1|-|z_2|\right)^2$$
$$|z_1-z_2| \ge |z_1|-|z_2|$$

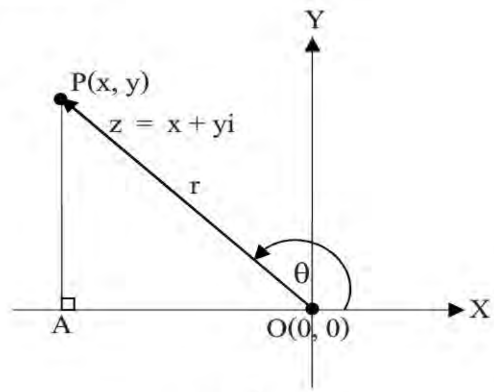
จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

1. ผู้สอนทบทวนฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก และค่าของฟังก์ชันโคไซน์ ฟังก์ชันไซน์ และฟังก์ชันแทนเจนต์ของมุมต่างๆ

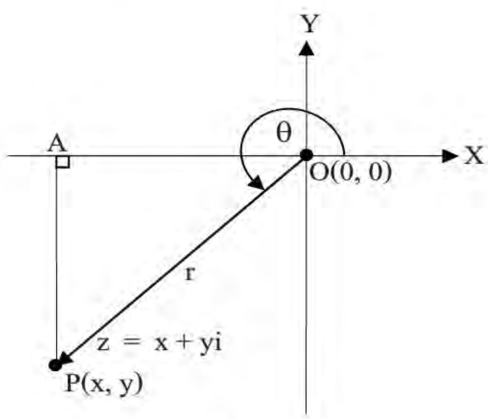
2. ผู้สอนแสดงการเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้วโดยเริ่มต้นจากการเขียน $z = x + yi \neq 0$ ด้วยเวกเตอร์บนระนาบจากจุด O(0, 0) ไปยังจุด P(x, y) ได้ดังนี้



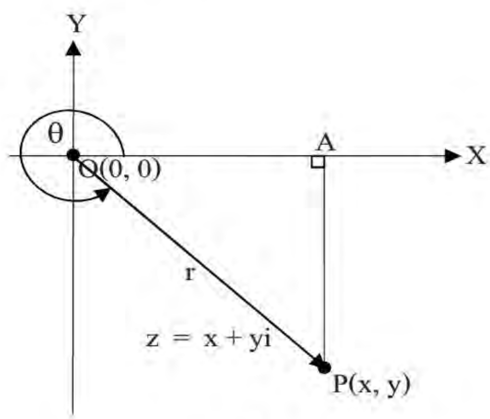
จตุภาคที่ 1



จตุภาคที่ 2



จตุภาคที่ 3



จตุภาคที่ 4

เมื่อวัดขนาดของมุม POX ได้ θ หน่วย โดยวัดทวนเข็มนาฬิกาจากแกน X ทางด้านบวกไปยัง $\overrightarrow{OP}$ และ $r = |\overrightarrow{OP}|$ แทนระยะห่างระหว่างจุดกำเนิด O กับ P

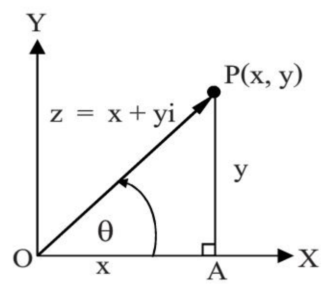
ผู้สอนควรอธิบายว่า พิจารณา θ เมื่อ $0 < \theta < 2\pi$ ผู้สอนให้ผู้เรียนพิจารณารูปสามเหลี่ยมมุมฉาก OAP เมื่อ $|\overrightarrow{OP}| = r$ ว่า $\frac{OA}{OP}$ หรือ $\frac{x}{r}$ คือ ฟังก์ชันตรีโกณมิติใดของ θ เพื่อให้ได้ข้อสรุปว่า $x = r\cos\theta$ และพิจารณาว่า $\frac{AP}{OP}$ หรือ $\frac{y}{r}$ คือ ฟังก์ชันตรีโกณมิติใดของ θ เพื่อให้ได้ข้อสรุปว่า $y = r\sin\theta$ ดังนั้น $z = x + yi$ สามารถเขียนในรูปใหม่เป็น $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

ตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงว่า $x = r\cos\theta$ และ $y = r\sin\theta$

ในกรณีที่จุด P(x, y) อยู่ในจตุภาคที่ 2

ให้	$A\hat{O}P$	=	α
นั่นคือ	α	=	$\pi - \theta$
จาก	$-x$	=	$r \cos \alpha$
	$-x$	=	$r \cos (\pi - \theta)$
	$-x$	=	$-r \cos \theta$
ดังนั้น	x	=	$r \cos \theta$
จาก	y	=	$r \sin \alpha$
จาก	y	=	$r \sin (\pi - \theta)$
ดังนั้น	y	=	$r \sin \theta$

ในกรณีที่จุด P(x, y) อยู่ในจตุภาคที่ 3 และ 4 จะได้ $x = r \cos \theta$ และ $y = r \sin \theta$ เช่นเดียวกับที่แสดงข้างต้น



เมื่อกำหนดจำนวนเชิงซ้อนในรูป $x + yi$ แล้วให้เขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว $r (\cos \theta + i \sin \theta)$ สิ่งที่ต้องหาคือ r และ θ ซึ่งจะหาได้จากสูตร

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z| \quad \text{และ} \quad \tan \theta = \frac{y}{x} \quad \text{เมื่อ } x \neq 0$$

การเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูป $z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$ เป็นการเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้วของ z และเรียก θ ว่าอาร์กิวเมนต์ของ z อาจเขียนแทนด้วย arg(z) ผู้สอนถามผู้เรียนว่า เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ $\cos (\theta + 2n\pi)$ เป็นเท่าใด ผู้เรียนควรตอบว่า $\cos (\theta + 2n\pi)$ เท่ากับ $\cos \theta$ และ $\sin (\theta + 2n\pi)$ เป็นเท่าใด ผู้เรียนควรตอบว่า $\sin (\theta + 2n\pi)$ เท่ากับ $\sin \theta$ แล้วผู้เรียนควรสรุปให้ได้ว่า $\cos (\theta + 2n\pi) + i\sin (\theta + 2n\pi) = \cos \theta + i \sin \theta$

3. ผู้สอนอาจถามผู้เรียน ดังนี้

กำหนด $z_1 = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ และ $z_2 = r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ ต่างเป็นรูปเชิงขั้วซึ่ง $z_1, z_2 \neq 0$ และ $z_1 = z_2$ เมื่อใด ผู้เรียนควรตอบได้ว่า $z_1 = z_2$ ก็ต่อเมื่อ $r_1 = r_2$ และ $\theta_1 - \theta_2 = 2n\pi$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม แล้วผู้สอนถามผู้เรียนต่อไปว่า ถ้ามีจำนวนเต็ม n และ $r_1 = r_2 \neq 0$ ที่ทำให้ $\theta_1 - \theta_2 \neq 2n\pi$ แล้ว $z_1 = z_2$ หรือไม่ ผู้เรียนควรตอบได้ว่า $z_1 \neq z_2$

ผู้สอนยกตัวอย่างเพื่อให้ผู้เรียนเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้วในกรณีที่ $z \neq 0$ ได้ เช่น จงเขียน $z = -3-3i$ ในรูปเชิงขั้ว

วิธีทำ ให้ $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นรูปเชิงขั้วของ $-3-3i$

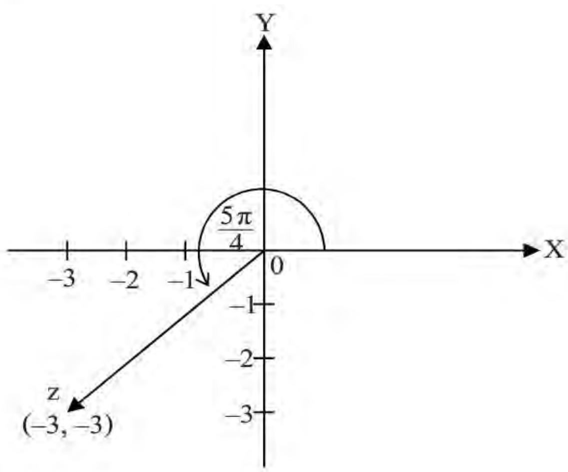
จะได้ $r = \sqrt{(-3)^2+(-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

เนื่องจาก $\tan\theta = \frac{-3}{-3} = 1$ และ $(-3,-3)$ คือ เป็นจุดอยู่ในจตุภาคที่ 3

จึงได้ว่า θ ที่ทำให้ $\tan\theta = 1$ คือ $\frac{5\pi}{4}$

ดังนั้นรูปเชิงขั้วของ $-3-3i$ คือ $3\sqrt{2}\,[\cos(\frac{5\pi}{4}+2k\pi) + i\sin(\frac{5\pi}{4}+2k\pi)]$

เมื่อ $k \in I$ ดังรูป



ผู้สอนถามผู้เรียนว่า สำหรับกรณีที่ $z = 0$ สามารถเขียน z ในรูปเชิงขั้วได้หรือไม่ ผู้เรียนควรตอบว่าได้ ซึ่ง $z = 0$ เขียนในรูปเชิงขั้วได้ คือ $0(\cos\theta + i\sin\theta)$ และผู้เรียนควรบอกได้ว่า θ เป็นจำนวนใดก็ได้

4. ผู้สอนทบทวนสูตรการหาโคไซน์ และไซน์ของผลบวกและผลต่างของมุม ดังนี้

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

5. ผู้สอนอาจแสดงการพิสูจน์ทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ตามข้อเสนอแนะต่อไปนี้

การแสดงการพิสูจน์ทฤษฎีบทและข้อสรุปต่าง ๆ ของจำนวนเชิงซ้อน บางครั้งไม่สามารถแสดงการพิสูจน์โดยตรงได้ จึงใช้วิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (Principle of Mathematical Induction) ซึ่งวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์นั้นมีใจความดังนี้

"ถ้า $P(n)$ เป็นประพจน์ที่เกี่ยวข้องกับจำนวนนับ n โดยที่ $P(n)$ มีสมบัติดังนี้

1. $P(1)$ เป็นจริง

และ 2. ถ้า $P(k)$ เป็นจริงแล้ว $P(k+1)$ เป็นจริงสำหรับทุก ๆ จำนวนนับ k

แล้วประพจน์ $P(n)$ จะเป็นจริงสำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n"

ในหนังสือเรียนไม่ได้แสดงการพิสูจน์ทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์ ซึ่งการพิสูจน์ต้องอาศัยวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ถ้าผู้เรียนสงสัยผู้สอนอาจอธิบายการพิสูจน์ได้ดังนี้

ทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์ 

ถ้า $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

จะได้ $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

พิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ

"ถ้า $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ แล้ว $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$"

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง เพราะถ้า $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ แล้ว

$z^1 = r^1(\cos 1\theta + i\sin 1\theta)$

ให้ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ ถ้า $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ แล้ว $z^k = r^k(\cos k\theta + i\sin k\theta)$ สำหรับทุก $k \in I^+$ ต้องแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

พิจารณา
$$
\begin{aligned}
z^{k+1} &= z^k \cdot z \\
&= [r^k(\cos k\theta + i\sin k\theta)][r(\cos\theta + i\sin\theta)] \\
&= (r^k \cdot r)[\cos(k\theta+\theta) + i\sin(k\theta+\theta)] \\
&= r^{k+1}[\cos(k+1)\theta + i\sin(k+1)\theta]
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุกค่าของ n ที่เป็นจำนวนเต็มบวก นั่นคือ ถ้า $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ แล้ว $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ โดยที่ $n \in I^+$

6. ผู้สอนยกตัวอย่างการหา z^n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกโดยใช้ทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์ เช่น จงเขียน $(\sqrt{3}-i)^5$ ในรูป $x+yi$ เมื่อ $x, y \in R$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sqrt{3}-i$ เขียนในรูปเชิงขั้วได้ดังนี้ $2(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6})$

จากทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{3}-i)^5 &= 2^5\,[\cos(5(\frac{11\pi}{6})) + i\sin(5(\frac{11\pi}{6}))] \\
&= 32\,[\cos\frac{55\pi}{6} + i\sin\frac{55\pi}{6}] \\
&= 32\,[\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}] \\
&= 32\,(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i) \\
&= -16\sqrt{3} - 16i
\end{aligned}
$$

7. ผู้สอนและผู้เรียนช่วยกันพิจารณาทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์ โดยขยายจาก n ที่เป็นจำนวนเต็มบวก เป็น n เป็นจำนวนเต็ม ซึ่งผู้สอนควรให้ผู้เรียนสรุปให้ได้ว่า ทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนเต็ม ดังนี้

ถ้า $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \neq 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มแล้ว $z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$

ผู้สอนอาจยกตัวอย่าง การหา z^n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม เช่น

จงเขียน $(\sqrt{3}+i)^{-5}$ ในรูป $x+yi$ เมื่อ $x, y \in R$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sqrt{3}+i$ เขียนในรูปเชิงขั้วได้ดังนี้ $2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

จากทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์ จะได้ว่า

จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{3}+i)^{-5} &= 2^{-5}\,[\cos(-5(\frac{\pi}{6})) + i\sin(-5(\frac{\pi}{6}))] \\
&= \frac{1}{32}\,[\cos(-\frac{5\pi}{6}) + i\sin(-\frac{5\pi}{6})] \\
&= \frac{1}{32}\,[\cos\frac{5\pi}{6} - i\sin\frac{5\pi}{6}] \\
&= \frac{1}{32}\,(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i) \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{64} - \frac{1}{64}i
\end{aligned}
$$

รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน

1. ผู้สอนทบทวนทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์ และนำสนทนากับผู้เรียนถึงประโยชน์ของทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์

2. ประโยชน์ของทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์นอกจากใช้ในการหาค่าของจำนวนเชิงซ้อนในรูปเลขยกกำลัง และการหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน แล้วยังสามารถนำไปใช้พิสูจน์ทฤษฎีบทตรีโกณมิติได้ เช่น

1) จงพิสูจน์ว่า $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ และ $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

จากทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์กล่าวว่า $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ และ $n \in I^+$

จะได้ $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

จาก $(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= \cos^2\theta - \sin^2\theta + i(2\sin\theta\cos\theta)$

และจากทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์ จะได้ $(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$

ดังนั้น $\cos^2\theta - \sin^2\theta + i(2\sin\theta\cos\theta) = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$

จะได้ $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ และ $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

2) จงพิสูจน์ว่า $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ และ $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

จาก $(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta)$

$= \cos^3\theta + 3i\sin\theta\cos^2\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta - i\sin^3\theta)$

$= \cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta + i(3\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta)$

$= \cos^3\theta - 3(1-\cos^2\theta)\cos\theta + i[3\sin\theta(1-\sin^2\theta) - \sin^3\theta]$

$= \cos^3\theta - 3\cos\theta + 3\cos^3\theta + i(3\sin\theta - 3\sin^3\theta - \sin^3\theta)$

$= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta + i(3\sin\theta - 4\sin^3\theta)$

และจากทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์ จะได้ $(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$

ดังนั้น $4\cos^3\theta - 3\cos\theta + i(3\sin\theta - 4\sin^3\theta) = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$

จะได้ $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ และ $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

3. ผู้สอนยกตัวอย่างที่ 1, 2 และ 3 ในหนังสือเรียนหน้า 33 – 35 ผู้สอนและผู้เรียนช่วยกันสรุปทฤษฎีบท ถ้า $w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ แล้วรากที่ n ของ w มีทั้งหมด n รากที่แตกต่างกัน คือ

$$z = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right] \quad \text{เมื่อ } k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

4. ผู้สอนอาจสอนเพิ่มเติมโดยการยกตัวอย่างเพื่อให้ผู้เรียนสามารถหารากที่ n ของ z ได้รวดเร็ว ดังนี้

จงหารากที่ 4 ของ $-8 + 8\sqrt{3}i$

วิธีทำ ให้ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นรากที่ 4 ของ $-8 + 8\sqrt{3}i$

ดังนั้น $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i = 16\left[\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right]$

โดยทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์ จะได้ $r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta) = 16\left[\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right]$

ดังนั้น $r^4 = 16$ และ $4\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ เมื่อ $k \in I$

จึงได้ว่า $r = 2$ และ $\theta = \frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}$ เมื่อ $k \in I$

ฉะนั้น $z = 2\left[\cos(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2})+i\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2})\right]$ เมื่อ $k \in I$

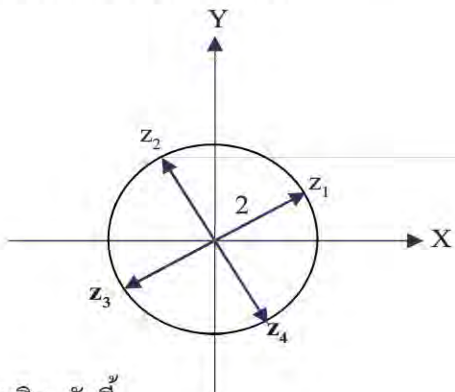
เมื่อ $k = 0$ จะได้ $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

เมื่อ $k = 1$ จะได้ $z_2 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

เมื่อ $k = 2$ จะได้ $z_3 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

เมื่อ $k = 3$ จะได้ $z_4 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

เขียนแผนภาพของรากที่ 4 ของ $-8 + 8\sqrt{3}i$ ได้ดังนี้



ผู้สอนควรถามผู้เรียนเพิ่มเติม ดังนี้

1) ค่าสัมบูรณ์ของแต่ละรากเป็นเท่าใด
2) ถ้ารากแต่ละรากแทนได้ด้วยเวกเตอร์ที่มีจุดสิ้นสุดอยู่บนวงกลมเดียวกัน อยากทราบว่าวงกลมนี้รัศมียาวเท่าใด และจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดใด
3) ผลต่างระหว่างอาร์กิวเมนต์ของรากสองรากที่อยู่ติดกันเป็นเท่าใด

ผู้เรียนควรตอบคำถามข้างต้น ได้ว่า

1) ค่าสัมบูรณ์ของแต่ละรากเท่ากับ 2
2) รากแต่ละรากแทนได้ด้วยเวกเตอร์ที่มีจุดสิ้นสุดอยู่บนวงกลมที่มีรัศมียาว 2 หน่วย และวงกลมมีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด
3) ผลต่างระหว่างอาร์กิวเมนต์ของรากสองรากที่อยู่ติดกัน คือ $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ หรือ 90°

5. ผู้สอนและผู้เรียนช่วยกันพิจารณาจนได้ข้อสรุปว่า สามารถหารากที่ n ที่แตกต่างกันทั้งหมดของ w ได้รวดเร็วโดยมีขั้นตอน ดังนี้

ขั้นที่ 1 หา z_1

ขั้นที่ 2 หาผลต่างของอาร์กิวเมนต์ของราก ซึ่งคือ $\frac{2\pi}{n}$

ขั้นที่ 3 หา $z_2, z_3, \ldots, z_n$ โดยนำผลต่างที่หาได้ในขั้นที่ 2 บวกกับอาร์กิวเมนต์ของรากก่อนหน้า ไปเรื่อยๆ จนครบ n ราก

6. รากที่ n ของ 1

เนื่องจาก $1 = \cos 0 + i\sin 0$

ดังนั้นรากที่ n ของ 1 คือ $\cos\left(\frac{0+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{0+2k\pi}{n}\right)$

หรือ $\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$ เมื่อ $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$

จะได้รากที่ n ของ 1 คือ $1, \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}, \cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n}, \ldots, \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}$

ถ้าให้ $\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} = a$

จะได้ $\cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n} = a^2$

$\cos\frac{6\pi}{n} + i\sin\frac{6\pi}{n} = a^3$

$\vdots \qquad \vdots$

$\cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n} = a^{n-1}$

ดังนั้น รากที่ n ของ 1 คือ $1, a, a^2, \ldots, a^{n-1}$ เมื่อ $a = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$

หรือ $1, a, a^2, \ldots, a^{n-1}$ เป็นคำตอบของสมการ $x^n - 1 = 0$

และเนื่องจาก $x^n - 1$ แยกตัวประกอบได้เป็น $(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1)$

ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่า $a, a^2, a^3, \ldots, a^{n-1}$ เป็นคำตอบของสมการ $x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1 = 0$

สมการพหุนาม

1. ผู้สอนทบทวนสมการพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง และทบทวนการหาคำตอบของสมการพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริงที่คำตอบของสมการอาจไม่เป็นจำนวนจริง เช่น $x^2 + 1 = 0$, $x^2 + x + 1 = 0$ จากนั้นผู้สอนให้ทฤษฎีบทหลักมูลของพีชคณิตเพื่อยืนยันว่าสมการพหุนามจะมีคำตอบเป็นจำนวนเชิงซ้อนเสมอ แล้วผู้สอนยกตัวอย่างที่ 1 ในหนังสือเรียนหน้า 38 โดยผู้สอนควรให้ผู้เรียนสังเกตคำตอบของสมการ $x^4 + 2x^2 - 8 = 0$ ซึ่งเป็นสมการพหุนามที่มีดีกรี 4 จะมีคำตอบทั้งหมด 4 คำตอบ แล้วผู้สอนจึงให้ทฤษฎีบท

ถ้า $p(x)$ เป็นพหุนามดีกรี $n \geq 1$ แล้วสมการ $p(x) = 0$ จะมีคำตอบทั้งหมด n คำตอบ (นับคำตอบที่ซ้ำกันด้วย)

2. ผู้สอนทบทวนทฤษฎีบทตัวประกอบและทฤษฎีบทตัวประกอบจำนวนตรรกยะ แล้วผู้สอนยกตัวอย่างที่ 2 ในหนังสือเรียนหน้า 39 ซึ่งผู้สอนอาจใช้วิธีการหารสังเคราะห์ช่วยในการแยกตัวประกอบดังนี้

จงหารากของสมการ $2x^4 + x^3 - 2x - 1 = 0$

วิธีทำ ให้ $p(x) = 2x^4 + x^3 - 2x - 1$

เนื่องจากจำนวนเต็มที่หาร -1 ลงตัว คือ ± 1

และจำนวนเต็มที่หาร 2 ลงตัว คือ ± 1 , ± 2

ดังนั้น จำนวนตรรกยะ $\frac{k}{m}$ ที่ทำให้ $p\left(\frac{k}{m}\right) = 0$ จะเป็นจำนวนที่อยู่ในกลุ่มของจำนวนต่อไปนี้ คือ $\pm\frac{1}{2}, \pm 1$

พิจารณา
$$\begin{aligned} p(1) &= 2(1)^4 + (1)^3 - 2(1) - 1 \\ &= 2 + 1 - 2 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

และ
$$\begin{aligned} p(-\tfrac{1}{2}) &= 2(-\tfrac{1}{2})^4 + (-\tfrac{1}{2})^3 - 2(-\tfrac{1}{2}) - 1 \\ &= 2(\tfrac{1}{16}) - \tfrac{1}{8} + 2(\tfrac{1}{2}) - 1 \\ &= \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{8} + 1 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

แสดงว่า $x - 1$ และ $x + \frac{1}{2}$ ต่างเป็นตัวประกอบของ $p(x)$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 2 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ & & 2 & 3 & 3 & 1 \\ \hline -\frac{1}{2} & 2 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ & & -1 & -1 & -1 & \\ \hline & 2 & 2 & 2 & 0 & \end{array}$$

ดังนั้น $p(x) = (x + \frac{1}{2})(x - 1)(2x^2 + 2x + 2) = 0$

จะได้ว่า $(x + \frac{1}{2})(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$

ฉะนั้น $x = -\frac{1}{2}$ หรือ $x = 1$ หรือ $x^2 + x + 1 = 0$

พิจารณา $x^2 + x + 1 = 0$ เมื่อเทียบกับ $ax^2 + bx + c = 0$ จะได้ $a = 1$, $b = 1$ และ $c = 1$

เมื่อแทน a, b และ c ลงใน $b^2 - 4ac$ จะได้ $1^2 - 4(1)(1) = -3$

เนื่องจาก $b^2 - 4ac < 0$ จะได้ $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{|b^2 - 4ac|}\, i}{2a}$

จาก $-3 < 0$

นั่นคือ $\quad x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{|-3|}\, i}{2}$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{3}\, i}{2}$$

ดังนั้น คำตอบของสมการพหุนามที่กำหนด คือ $-\frac{1}{2}$, 1, $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

3. ผู้สอนให้ผู้เรียนสังเกตคำตอบของสมการพหุนาม $2x^4 + x^3 - 2x - 1 = 0$ จะเห็นว่าคำตอบของสมการพหุนามที่มีส่วนจินตภาพไม่เท่ากับศูนย์เป็นสังยุคซึ่งกันและกัน คือ $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ แล้วผู้สอนให้ทฤษฎีบท ถ้าจำนวนเชิงซ้อน z เป็นคำตอบของสมการพหุนาม $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$ ที่มีสัมประสิทธิ์ $a_1, \ldots, a_n$ เป็นจำนวนจริงแล้ว $\bar{z}$ จะเป็นคำตอบของสมการพหุนามนี้ด้วย ก่อนที่ผู้สอนและผู้เรียนจะช่วยกันพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ผู้สอนควรทบทวนสมบัติของสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน

ตัวอย่างกิจกรรมที่ส่งเสริมทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

การสอนเรื่อง จำนวนเชิงซ้อนในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔–๖ เล่ม ๔ ของ สสวท. นั้น ผู้สอนอาจพบว่าการเขียนกราฟของจำนวนเชิงซ้อนและการอธิบายเกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อนนั้นเป็นเรื่องยุ่งยาก กิจกรรมต่อไปนี้จะช่วยให้ผู้สอนจัดการเรียนการสอนเรื่องนี้ได้ง่ายขึ้น แต่เนื่องจากสื่อเหล่านี้สร้างจากโปรแกรม The Geometer's Sketchpad ดังนั้นผู้สอนหรือผู้เรียนจะใช้งานสื่อเหล่านี้ได้เมื่อมีเครื่องคอมพิวเตอร์ที่ติดตั้งโปรแกรม The Geometer's Sketchpad แล้วเท่านั้นและผู้ที่จะใช้สื่อนี้ต้องมีความรู้เกี่ยวกับการใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad บ้างพอสมควร

แฟ้มที่ใช้ประกอบการจัดกิจกรรมนี้ บรรจุอยู่ในซีดีรอมซึ่งแนบมากับหนังสือคู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔ – ๖ เล่ม ๔ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ ในโฟลเดอร์ชื่อ บทที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน

กราฟของจำนวนเชิงซ้อน

เนื่องจากจำนวนเชิงซ้อนเขียนอยู่ในรูปของคู่อันดับ (a, b) หรือในรูป a + bi โดย a เป็นส่วนจริง และ b เป็นส่วนจินตภาพ ดังนั้นอาจแทนจำนวนเชิงซ้อนด้วยจุดบนระนาบในระบบพิกัดแกนมุมฉากซึ่งแกนนอนเป็นแกนจริงและแกนตั้งเป็นแกนจินตภาพ

จำนวนเชิงซ้อน a + bi แทนได้ด้วยจุด (a, b) หรือแทนด้วยเวกเตอร์ที่มีจุด(0, 0) เป็นจุดเริ่มต้นและจุด (a, b) เป็นจุดสิ้นสุด

วัตถุประสงค์

เพื่อให้ผู้เรียนสามารถเขียนกราฟของจำนวนเชิงซ้อนได้ โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad

แนวทางการจัดกิจกรรม

1. ให้ผู้เรียนเปิดแบบร่างหน้า 1 **ฝึกเขียนกราฟของจำนวนเชิงซ้อน** จากโฟลเดอร์ **บทที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน** ในแบบร่างหน้านี้จะแสดงระนาบของระบบพิกัดแกนมุมฉากซึ่งแกนนอนเป็นแกนจริง และแกนตั้งเป็นแกนจินตภาพ ซึ่งเรียกว่า ระนาบเชิงซ้อน

2. จำนวนเชิงซ้อน $3 + 2i$ เขียนแทนด้วยจุด (3, 2) บนระนาบเชิงซ้อน ให้ผู้เรียนลงจุดแสดงจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้บนระนาบเชิงซ้อน $2 + 3i$, $4 - 2i$, $-2 + 3i$, $-1 - 2i$, -2, $3i$ และ $-2i$

3. เขียนเวกเตอร์บนระนาบเชิงซ้อนที่มีจุดเริ่มต้นที่จุด (0, 0) และจุดสิ้นสุดที่จุดแทนจำนวนเชิงซ้อนในข้อ 2.

4. ให้ผู้เรียนเปิดหน้า 2 **สำรวจกราฟของจำนวนเชิงซ้อน** ในแบบร่างหน้านี้จะแสดงพารามิเตอร์ a และพารามิเตอร์ b ซึ่ง $a = 2$ และ $b = 3$ และกราฟของจำนวนเชิงซ้อน $2 + 3i$

5. ให้ผู้เรียนลากตัวเลื่อน a และตัวเลื่อน b แล้วสังเกตการเปลี่ยนแปลงของกราฟของจำนวนเชิงซ้อน

คำถาม เมื่อ a และ b เปลี่ยนแปลงกราฟของจำนวนเชิงซ้อนเปลี่ยนแปลงอย่างไร

การบวกจำนวนเชิงซ้อน

การบวกจำนวนเชิงซ้อนทางพีชคณิตทำได้เช่นเดียวกับการบวกจำนวนจริงและอาศัยข้อตกลงว่า $i^2 = -1$ ซึ่งจะหาผลบวกของจำนวนเชิงซ้อน $a + bi$ กับ $c + di$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}(a + bi) + (c + di) &= (a + c) + (bi + di) \\ &= (a + c) + (b + d)i\end{aligned}$$

หลังจากผู้เรียนเรียนเรื่อง การบวกจำนวนเชิงซ้อนทางพีชคณิตแล้ว ผู้สอนอาจให้ผู้เรียนทำกิจกรรมสำรวจการบวกจำนวนเชิงซ้อนทางเรขาคณิตดังต่อไปนี้

วัตถุประสงค์

เพื่อให้ผู้เรียนสำรวจผลบวกของจำนวนเชิงซ้อนโดยใช้ความรู้พื้นฐานทางเรขาคณิต

แนวทางการจัดกิจกรรม

1. ให้ผู้เรียนเปิดแบบร่างหน้า 3 **การบวกจำนวนเชิงซ้อน** ในแบบร่างหน้านี้จะแสดงระนาบเชิงซ้อนที่ประกอบด้วยแกนจริงและแกนจินภาพ ซึ่งได้ทำการสแนพจุดไว้ให้แล้ว
2. สร้างเวกเตอร์ที่แทนด้วยจำนวนเชิงซ้อน 2 จำนวน
3. วัดพิกัดแบบ (x, y) ของจุดสิ้นสุดของเวกเตอร์ที่แสดงจำนวนเชิงซ้อนทั้งสองนั้น
4. บวกจำนวนเชิงซ้อนทั้งสองโดยการบวกแบบเวกเตอร์
5. ผลบวกของจำนวนเชิงซ้อนทั้งสองคือเวกเตอร์ผลลัพธ์
6. วัดพิกัดของจุดสิ้นสุดของเวกเตอร์ผลลัพธ์แล้วพิจารณาความสัมพันธ์ของพิกัดของเวกเตอร์ผลลัพธ์และเวกเตอร์สองเวกเตอร์ที่นำมาบวกกัน
7. เปลี่ยนแปลงเวกเตอร์ตั้งต้นทั้งสองแล้วสังเกตการเปลี่ยนแปลงของเวกเตอร์ที่เป็นผลลัพธ์

คำถาม จงหาผลบวกของจำนวนเชิงซ้อน (a, b) + (c , d)

การคูณจำนวนเชิงซ้อนด้วยสเกลาร์

วัตถุประสงค์

เพื่อให้ผู้เรียนสำรวจผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนด้วยสเกลาร์

แนวทางการจัดกิจกรรม

1. ให้ผู้เรียนเปิดแบบร่างหน้า 4 **คูณจำนวนเชิงซ้อนด้วยสเกลาร์** ในแบบร่างหน้านี้จะแสดงระนาบจำนวนเชิงซ้อนที่มีแกนจริงและแกนจินตภาพ ซึ่งได้ทำการสแนพจุดไว้ให้แล้ว
2. ลงจุดอิสระในระนาบเชิงซ้อน 1 จุด
3. สร้างเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุด (0, 0) และจุดสิ้นสุดที่จุดอิสระที่ลงไว้ ในข้อ 2
4. วัดพิกัดที่หนึ่ง (x) และพิกัดที่สอง (y) ของจุดสิ้นสุดของเวกเตอร์
5. สร้างพารามิเตอร์ c และให้ c มีค่าเป็น 2
6. คำนวณค่า c * x และ c * y
7. ลงจุดค่าที่คำนวณไว้
8. สร้างเวกเตอร์จากจุด (0, 0) มายังจุดที่คำนวณได้
9. ลากตัวเลื่อน c เพื่อเปลี่ยนแปลงค่าสเกลาร์ และสังเกตการเปลี่ยนแปลงของจำนวนเชิงซ้อนที่เป็นผลคูณ

คำถาม เมื่อเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ c ผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนมีการเปลี่ยนแปลงอย่างไร

การคูณจำนวนเชิงซ้อนด้วย i

เนื่องจาก $i^2 = -1$ ดังนั้นถ้าคูณจำนวนเชิงซ้อน $a + bi$ ด้วย i ก็จะได้ $ai + bi^2$ หรือ $-b + ai$

วัตถุประสงค์

เพื่อให้ผู้เรียนสำรวจผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ กับ i

แนวทางการจัดกิจกรรม

1. ให้ผู้เรียนเปิดแบบร่างหน้า 5 **คูณจำนวนเชิงซ้อนด้วย i** ในแบบร่างหน้านี้จะแสดงระนาบจำนวนเชิงซ้อนที่มีแกนจริงและแกนจินตภาพ จำนวนเชิงซ้อน $a + bi$ และกราฟของจำนวนเชิงซ้อน และปุ่มแสดงการคูณของจำนวนเชิงซ้อน
2. คลิกที่ปุ่ม แสดง iz เพื่ออธิบายการคูณจำนวนเชิงซ้อนด้วย i ขั้นที่ 1 (ก่อนที่จะคลิกปุ่มผู้สอนอาจใช้คำถามนำให้ผู้เรียนคิดก่อน)
3. คลิกปุ่มแสดงการแจกแจง iz เพื่ออธิบายการคูณจำนวนเชิงซ้อนด้วย i ขั้นที่ 2 (ก่อนที่จะคลิกปุ่มผู้สอนอาจใช้คำถามนำให้ผู้เรียนคิดก่อน)
4. คลิกปุ่มผลสำเร็จ 1 เพื่ออธิบายผลคูณจำนวนเชิงซ้อนด้วย i (ก่อนที่จะคลิกปุ่มผู้สอนอาจใช้คำถามนำให้ผู้เรียนคิดก่อน)
5. คลิกปุ่มผลสำเร็จ 2 เพื่อสรุปผลคูณจำนวนเชิงซ้อนด้วย i (ก่อนที่จะคลิกปุ่มผู้สอนอาจใช้คำถามนำให้ผู้เรียนคิดก่อน)
6. คลิกปุ่มเลื่อนกราฟ iz เพื่อสำรวจกราฟของผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนด้วย i

คำถาม 1) ผลคูณของจำนวนเชิงซ้อน iz และจำนวนเชิงซ้อน z มีความสัมพันธ์กันอย่างไร

2) กราฟของผลคูณของจำนวนเชิงซ้อน iz และกราฟของจำนวนเชิงซ้อน z มีความ สัมพันธ์กันอย่างไร

3) ถ้าจำนวนเชิงซ้อนที่อยู่ในรูป (a, b) คูณด้วย i ผลคูณจะได้จำนวนเชิงซ้อนใด

4) ให้แสดงเหตุผลสนับสนุนว่าเวกเตอร์ (a, b) ตั้งฉากกับเวกเตอร์ (–b, a) เสมอในทิศทวนเข็มนาฬิกา

การคูณจำนวนเชิงซ้อน

การคูณจำนวนเชิงซ้อนทางพีชคณิตซึ่งอาศัยสมบัติการแจกแจงและ $i^2 = -1$ ซึ่งจะหาผลคูณของจำนวนเชิงซ้อน $a + bi$ กับ $c + di$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &= ac + (ad + bc)i + bdi^2 \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i\end{aligned}$$

หลังจากผู้เรียน เรียนเรื่องกราฟและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนแล้ว ผู้สอนอาจให้ผู้เรียนทำกิจกรรมสำรวจหาผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนโดยใช้เรขาคณิตเป็นพื้นฐานตามกิจกรรมต่อไปนี้

วัตถุประสงค์

เพื่อให้ผู้เรียนสำรวจผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนโดยแสดงจำนวนเชิงซ้อนด้วยเวกเตอร์ในระนาบเชิงซ้อน

แนวทางการจัดกิจกรรม

1. ให้ผู้เรียนเปิดแฟ้ม หน้า 6 **การคูณจำนวนเชิงซ้อน** ในหน้านี้จะมีจำนวนเชิงซ้อน w และ z แสดงอยู่ในรูปเวกเตอร์ในระนาบเชิงซ้อน โดยที่จำนวนเชิงซ้อน w เป็นผลรวมของเวกเตอร์ a และเวกเตอร์ bi (w = a + bi) ซึ่งสามารถแทนจำนวนเชิงซ้อนด้วยเวกเตอร์ได้ เนื่องจากกราฟของจำนวนเชิงซ้อนเมื่อเทียบกับจุดกำเนิดจะมีทั้งความยาวและทิศทาง

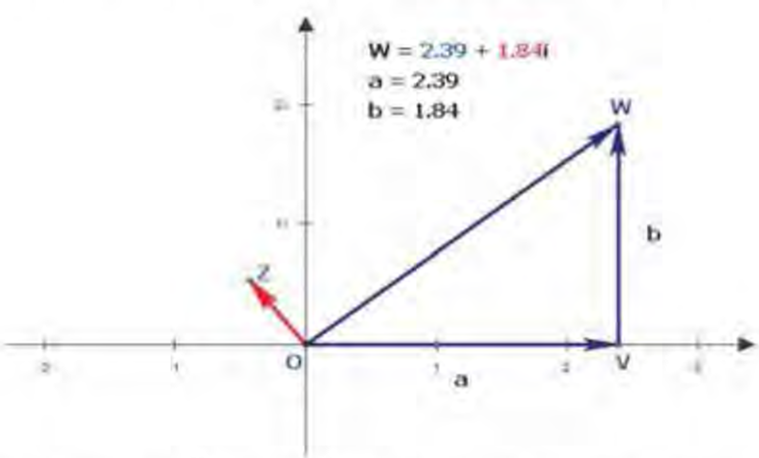
เมื่อ $w = a + bi$ หาผลคูณของจำนวนเชิงซ้อน z กับจำนวนเชิงซ้อน w จะได้ $zw = z(a + bi) = za + z\,bi$ จากผลคูณดังกล่าว ถ้าพิจารณาโดยใช้ความรู้เรื่องเวกเตอร์และกราฟของจำนวนเชิงซ้อนจะพบว่าการคูณ z ด้วย w จะประกอบด้วยขั้นตอนย่อย ๆ ดังนี้

ขั้นที่ 1 คูณเวกเตอร์ z ด้วยค่าสเกลาร์ a จะได้ za

ขั้นที่ 2 คูณเวกเตอร์ z ด้วย i จะได้ zi

ขั้นที่ 3 คูณเวกเตอร์ zi ด้วยค่าสเกลาร์ b จะได้ bzi

ขั้นที่ 4 บวกเวกเตอร์ za ด้วยเวกเตอร์ zbi จะได้ za + zbi



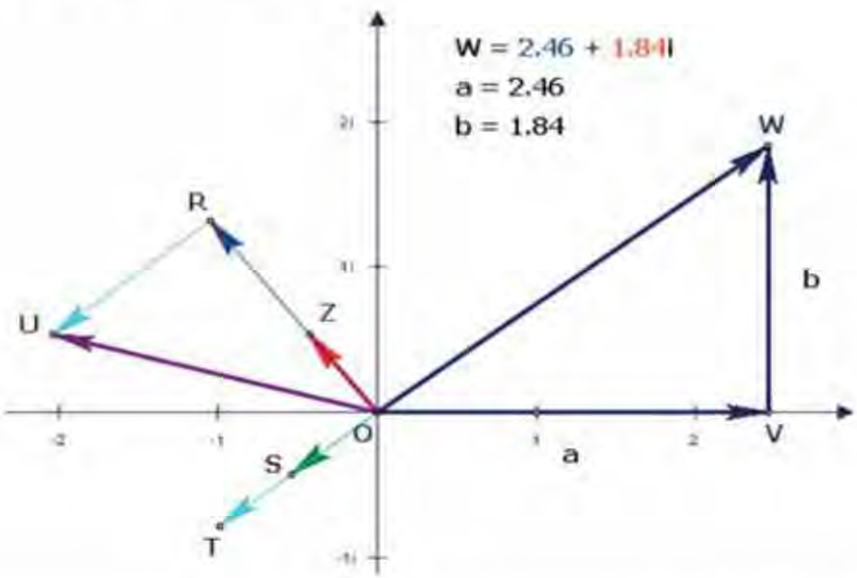
2. ในแบบร่างนี้ได้สร้างเครื่องมือกำหนดเองไว้ สำหรับการคูณ z ด้วย w ซึ่งเครื่องมือในกล่องเครื่องมือกำหนดเองที่ใช้มีดังนี้

(1) เครื่องมือกำหนดเอง *คูณสเกลาร์ (a + bi) * c* ใช้เครื่องมือนี้สำหรับการคูณจำนวนเชิงซ้อน (เวกเตอร์)ด้วยค่าสเกลาร์ โดยคลิกที่หัวเวกเตอร์แล้วตามด้วยค่าสเกลาร์ที่ต้องการ

(2) เครื่องมือกำหนดเอง *คูณด้วย i* *(a + bi) * i* ใช้เครื่องมือนี้สำหรับการคูณจำนวนเชิงซ้อน (เวกเตอร์) ด้วย i โดยคลิกที่หัวเวกเตอร์

(3) เครื่องมือกำหนดเอง *บวกจำนวนเชิงซ้อน* ใช้เครื่องมือนี้สำหรับการบวกจำนวนเชิงซ้อนสองจำนวน(บวกเวกเตอร์สองเวกเตอร์)และแสดงผลลัพธ์เป็นจำนวนเชิงซ้อน(เวกเตอร์) โดยคลิกที่หัวของเวกเตอร์ทั้งสอง

3. คูณเวกเตอร์ z ด้วยสเกลาร์ a จากค่าที่วัดไว้ ได้ผลคูณเป็นเวกเตอร์ R
4. คูณเวกเตอร์ z ด้วย i ได้ผลคูณเป็นเวกเตอร์ S
5. คูณเวกเตอร์ S ด้วยสเกลาร์ b จากค่าที่วัดไว้ ได้ผลคูณเป็นเวกเตอร์ T
6. ระบุเวกเตอร์ OR เพื่อเลื่อนขนานเวกเตอร์ T
7. เลื่อนขนานเวกเตอร์ T ไปตามทิศทางของเวกเตอร์ OR
8. บวกเวกเตอร์ R กับเวกเตอร์ T ได้ผลลัพธ์เป็นเวกเตอร์ U ดังรูป
9. สแนพจุด แล้วลากเวกเตอร์ w ให้เท่ากับ 3 + 2i และวัดพิกัดที่หนึ่งและพิกัดที่สองของจุด z แล้วสังเกตการเปลี่ยนแปลงของเวกเตอร์ U



คำถาม 1) zw แทนด้วยเวกเตอร์ใดในรูปข้างต้น เพราะเหตุใด ถ้าตอบได้ให้ทำข้อ 2) ถ้าตอบไม่ได้ให้ตอบคำถามต่อไปนี้ และตอบอยู่ในรูป a , b และ w และ z

1.1) จำนวนเชิงซ้อน R เท่ากับเท่าใด 1.2) จำนวนเชิงซ้อน S เท่ากับเท่าใด

1.3) จำนวนเชิงซ้อน T เท่ากับเท่าใด 1.4) จำนวนเชิงซ้อน U เท่ากับเท่าใด

2) ให้หาจำนวนเชิงซ้อน zw เมื่อ z และ w เป็นจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

2.1) $z = -1 + i,\ w = 3 + 2i$ 2.2) $z = 2 + i,\ w = -1 - 2i$

2.3) $z = 2 - 3i,\ w = -1 + 2i$ 2.4) $z = -2 - 3i,\ w = -1 - i$

จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

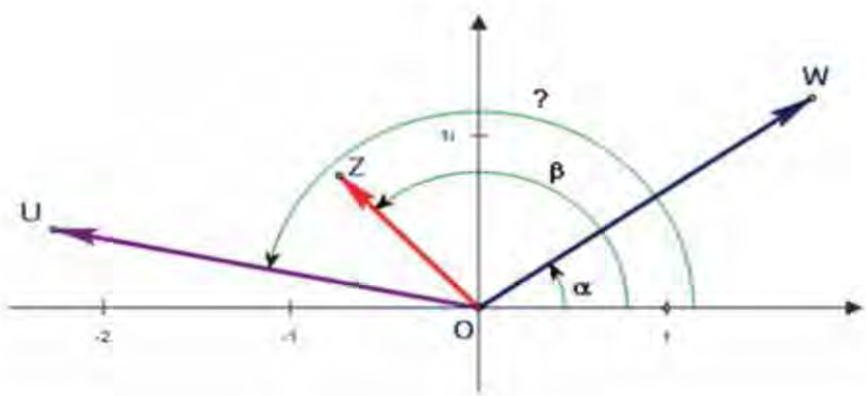
หลังจากผู้เรียน เรียนเรื่องอากิวเมนต์ และผู้สอนแนะนำจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้วแล้ว ผู้สอนอาจใช้กิจกรรมสำรวจจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้วโดยใช้เรขาคณิตเป็นพื้นฐานตามกิจกรรมต่อไปนี้

วัตถุประสงค์

เพื่อให้ผู้เรียนสำรวจจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้วโดยใช้เรขาคณิตเป็นพื้นฐาน

แนวทางการจัดกิจกรรม

1. ผู้สอนอาจใช้แบบร่างหน้าเดียวกันกับกิจกรรมก่อนหน้า โดยซ่อนเวกเตอร์อื่นที่ไม่เกี่ยวข้อง
2. คำนวณหาขนาดของเวกเตอร์ z และขนาดของเวกเตอร์ w และขนาดของเวกเตอร์ zw
3. ให้ผู้เรียนลาก w หรือ z ไป-มา แล้วสังเกตความสัมพันธ์ของขนาดของเวกเตอร์ทั้งสาม
4. วัดมุมของเวกเตอร์ z และมุมของเวกเตอร์ w และมุมของเวกเตอร์ zw จากแกนจริง
5. ให้ผู้เรียนลาก w หรือ z ไป-มา แล้วสังเกตความสัมพันธ์ของมุมทั้งสาม



คำถาม 1) ขนาดของเวกเตอร์ z ขนาดของเวกเตอร์ w และขนาดของเวกเตอร์ zw มีความสัมพันธ์กันอย่างไร

2) มุมของเวกเตอร์ z มุมของเวกเตอร์ w และมุมของเวกเตอร์ zw มีความสัมพันธ์กันอย่างไร

3) ถ้า $w = |w|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ และ $z = |z|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ แล้ว zw เป็นเท่าใด

4) ถ้าเขียนจำนวนเชิงซ้อน z และจำนวนเชิงซ้อน w ในรูปเชิงขั้ว $|w|$ และ $|z|$ แทนด้วยค่าใด

ตัวอย่างคำตอบกิจกรรมที่ส่งเสริมทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

ผู้สอนควรเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้ค้นหาคำตอบอย่างเต็มความสามารถ และบางคำถามอาจมีคำตอบได้หลากหลาย ดังนั้นผู้เรียนไม่จำเป็นต้องได้คำตอบเหมือนกัน

กราฟของจำนวนเชิงซ้อน

จากกราฟของจำนวนเชิงซ้อน $a + bi$ บนระนาบเชิงซ้อนที่มีแกน X เป็นแกนจริง และแกน Y เป็นแกนจินตภาพ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนบวก กราฟของจำนวนเชิงซ้อน $a + bi$ จะอยู่จตุภาคที่ 1

เมื่อ a เป็นจำนวนลบ แต่ b เป็นจำนวนบวก กราฟของจำนวนเชิงซ้อน $a + bi$ จะอยู่จตุภาคที่ 2

เมื่อ a และ b เป็นจำนวนลบ กราฟของจำนวนเชิงซ้อน $a + bi$ จะอยู่จตุภาคที่ 3

เมื่อ a เป็นจำนวนบวก แต่ b เป็นจำนวนลบ กราฟของจำนวนเชิงซ้อน $a + bi$ จะอยู่จตุภาคที่ 4

การบวกจำนวนเชิงซ้อน

ผลบวกของจำนวนเชิงซ้อน (a , b) กับ (c, d) เป็นดังนี้ $(a , b) + (c, d) = (a + c) + (b + d)$

การคูณจำนวนเชิงซ้อนด้วยสเกลาร์

เมื่อเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ c ผลคูณของ $c * (a , b)$ จะเปลี่ยนเป็น c เท่าของจำนวนเชิงซ้อน (a , b)

การคูณจำนวนเชิงซ้อนด้วย i

1) ถ้าจำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$ คูณด้วย i ผลคูณจะเป็นจำนวนเชิงซ้อน $z = -b + ai$

2) กราฟผลคูณของจำนวนเชิงซ้อน iz และกราฟของจำนวนเชิงซ้อน z จะตั้งฉากกันในทิศทวนเข็มนาฬิกา

3) ถ้าจำนวนเชิงซ้อน $z = (a , b)$ คูณด้วย i ผลคูณจะเป็นจำนวนเชิงซ้อน $z = (-b , a)$

4) เหตุผลของคำถามนี้ขึ้นอยู่กับคำตอบของผู้เรียน เช่น ผู้เรียนอาจจะตอบว่ากราฟของจำนวนเชิงซ้อน $z = (a , b)$ และกราฟของจำนวนเชิงซ้อน $z = (-b , a)$ มีผลคูณของความชันเป็น -1

การคูณจำนวนเชิงซ้อน

1) zw แทนด้วยเวกเตอร์ OU

1.1) az	1.2) z
1.3) bz	1.4) bz

2) 2.1) $-5 + i$ 2.2) $-5i$

2.3) $4 + 7i$ 2.4) $-1 + 5i$

จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

1) $|zw| = |z| \cdot |w|$

2) ผลบวกของมุมของ w และมุมของ z คือขนาดของมุมของ zw

3) ถ้า $w = |w|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ และ $z = |z|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ แล้ว

$zw = |zw|(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$

4) $|w|$ และ $|z|$ แทนด้วย r

การวัดและการประเมินผลระหว่างเรียน

การประเมินผลระหว่างเรียนเป็นการวัดผลการเรียนรู้เพื่อปรับปรุงและพัฒนาการเรียนการสอน และตรวจสอบว่าผู้เรียนแต่ละคนมีความรู้ความเข้าใจในเรื่องที่เรียนมากน้อยเพียงใด ซึ่งในที่นี้จะกล่าวถึงตัวอย่างการประเมินผลด้านความรู้โดยผู้สอนอาจใช้วิธีการประเมินดังนี้

1. สังเกตจากการถาม–ตอบ และการเข้าร่วมกิจกรรม
2. ทำแบบฝึกหัด
3. ทดสอบ

จากผลการประเมินหากพบว่ามีผู้เรียนไม่ผ่านเกณฑ์ที่ผู้สอนกำหนดไว้ ผู้สอนอาจสอนเสริม หรือให้ผู้เรียนศึกษาจากหนังสือเรียนหรืออาจให้ผู้เรียนที่มีผลการเรียนรู้ผ่านเกณฑ์แล้วช่วยสอนหลังจากนั้นจึงให้ทำข้อที่ทำผิดอีกครั้ง หรือใช้วิธีการสอบโดยมีผู้สอนเป็นผู้ซักถามจนกว่าจะผ่านเกณฑ์

ตัวอย่างแบบทดสอบ

1. จงหา $(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}i) + (\frac{2}{3} + \frac{1}{5}i)$

2. จงหา $(-\frac{5}{9} + \frac{3}{5}i) - (\frac{4}{3} - \frac{1}{6}i)$

3. จงหา $(-3 - 2i)(5 + 6i)$

4. จงหา $\frac{-1-3i}{-2-10i}$

5. จงหา a และ b เมื่อกำหนดให้ $3a + 4bi = (1 + i)^2$

6. จงหา $(i^8+4)(i^6+2)(i^4+1)(i^2-1)(i^{-3}-2)(i^{-1}-2)$

7. จงหาเซตคำตอบของสมการ $(x-3)^2 = -10$

8. จงหาเซตคำตอบของสมการ $x^2+4x+7 = 0$

9. จงหาเซตคำตอบของสมการ $6x^2+x+2 = 0$

10. จงเขียน $1-\sqrt{3}i$ ให้อยู่ในรูปเชิงขั้ว

11. จงหา $(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)^5$

12. จงหารากที่สามของ $8i$

13. จงหาเซตคำตอบของสมการ $x^5-32 = 0$

เฉลยตัวอย่างแบบทดสอบ

1. $\frac{7}{6}+\frac{19}{20}i$

2. $-\frac{17}{9}+\frac{23}{30}i$

3. $-3-28i$

4. $\frac{4}{13}-\frac{1}{26}i$

5.
$$\begin{aligned}
3a + 4bi &= (1+i)^2 \\
&= 1 + 2i + i^2 \\
&= 1 + 2i - 1 \\
&= 2i \\
3a &= 0 \\
a &= 0 \\
4b &= 2 \\
b &= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $a = 0$ และ $b = \frac{1}{2}$

6. $(i^8+4)(i^6+2)(i^4+1)(i^2-1)(i^{-3}-2)(i^{-1}-2)$

$= ((i^2)^4+4)((i^2)^3+2)((i^2)^2+1)(i^2-1)(\frac{1}{i^3}-2)(\frac{1}{i}-2)$

$= ((-1)^4+4)((-1)^3+2)((-1)^2+1)(-1-1)(-\frac{1}{i}-2)(\frac{1}{i}-2)$

$= (1+4)(-1+2)(1+1)(-2)(-\frac{1}{i^2}-\frac{2}{i}+\frac{2}{i}+4)$

$= 5\times 1\times 2\times(-2)(1+4)$

$= -100$

7. เซตคำตอบของสมการ $(x-3)^2 = -10$ คือ $\{3+\sqrt{10}\,i,\ 3-\sqrt{10}\,i\}$

8. เซตคำตอบของสมการ $x^2+4x+7 = 0$ คือ $\{-2+\sqrt{3}\,i,\ -2-\sqrt{3}\,i\}$

9. เซตคำตอบของสมการ $6x^2+x+2 = 0$ คือ $\{\frac{-1+\sqrt{47}\,i}{12},\ \frac{-1-\sqrt{47}\,i}{12}\}$

10. ให้ $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นรูปเชิงขั้วของ $1-\sqrt{3}i$

จะได้ $r = \sqrt{4} = 2$

เนื่องจาก $\tan\theta = -\sqrt{3}$ และ $(1, -\sqrt{3})$ เป็นจุดอยู่ในจตุภาคที่ 4

จึงได้ว่า θ ที่ทำให้ $\tan\theta = -\sqrt{3}$ คือ $\frac{5\pi}{3}$

ดังนั้น รูปเชิงขั้วของ $1-\sqrt{3}i$ คือ $2\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3}+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{3}+2k\pi\right)\right]$ เมื่อ $k\in I$

11. เพราะว่า $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ เขียนในรูปเชิงขั้วได้ดังนี้ $1[\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}]$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)^5 &= [1(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}]^5\\ &= 1^5[\cos 5(\frac{11\pi}{6})+i\sin 5(\frac{11\pi}{6})]\\ &= 1(\cos\frac{55\pi}{6}+i\sin\frac{55\pi}{6})\\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\end{aligned}$$

12. ให้ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นรากที่สามของ $8i$

ดังนั้น $z^3 = 8i = 8(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

โดยทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์ จะได้ $r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = 8(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

ดังนั้น $r^3 = 8$ และ $3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ เมื่อ $k\in I$

$r = 2$ และ $\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$ เมื่อ $k\in I$

นั่นคือ $z = 2[\cos(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3})]$ เมื่อ $k \in I$

เมื่อ $k = 0$ จะได้ $z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}+i$

$k = 1$ จะได้ $z_2 = 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}) = -\sqrt{3}+i$

$k = 2$ จะได้ $z_3 = 2(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) = -2i$

ดังนั้น รากที่สามของ 8i คือ $\sqrt{3}+i$, $-\sqrt{3}+i$ และ $-2i$

13. จาก $x^5 - 32 = 0$

นั่นคือ $x^5 = 32$

ให้ $x = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นรากที่ห้าของ 32

โดยทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์ จะได้ $r^5(\cos 5\theta + i\sin 5\theta) = 32(\cos 0 + i\sin 0)$

ดังนั้น $r^5 = 32$ และ $5\theta = 2k\pi$ เมื่อ $k \in I$

$r = 2$ และ $\theta = \frac{2k\pi}{5}$ เมื่อ $k \in I$

นั่นคือ $x = 2(\cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5})$

เมื่อ $k = 0$ จะได้ $x_1 = 2(\cos 0 + i\sin 0) = 2$

$k = 1$ จะได้ $x_2 = 2(\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\,i$

$k = 2$ จะได้ $x_3 = 2(\cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5}) = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\,i$

$k = 3$ จะได้ $x_4 = 2(\cos\frac{6\pi}{5} + i\sin\frac{6\pi}{5}) = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} - \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\,i$

$k = 4$ จะได้ $x_5 = 2(\cos\frac{8\pi}{5} + i\sin\frac{8\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5}-1}{2} - \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\,i$

เฉลยแบบฝึกหัด

แบบฝึกหัด 1.1

1.

	Re (z)	Im (z)
$2 + 3i$	2	3
$4 + 5i$	4	5
$\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
-4	-4	0
$3i$	0	3
$\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$	$\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}$

2. 1) $a = 2, \quad b = -2$

   2) $a = 3, \quad b = 2$ หรือ $a = 2, \quad b = 3$

   3) $a = 5, \quad b = 0$

   4) $a = \frac{2}{3}, \quad b = -\frac{1}{3}$

3. 1) $6 - 8i$ 2) $-6 - 2i$

   3) $7 - 3\sqrt{2}i$ 4) $4 + 2i$

   5) $6 - 4i$ 6) $-4 + 6i$

   7) $-1 + 11i$ 8) -1

   9) $1 + 2i$ 10) $-3 + 4i$

   11) $-\sqrt{2} - 2i$ 12) $-\sqrt{6} - 3i$

4. $a = \frac{1}{29}, \qquad b = -\frac{17}{29}$

แบบฝึกหัด 1.2

1. 1) $15 + 8i$ 2) $-8i$

   3) $-2 + 16i$ 4) $2i$

   5) 5 6) $-4 + 19i$

2. 1) $2 + i$ 2) $-3 - 2i$

   3) $-4 + 7i$ 4) $-4 - 7i$

   5) $-4 - 7i$ 6) $-1 + i$

   7) $-1 - i$ 8) $-1 - i$

3. 1) $2 + 4i$ 2) 20

3) 4 4) $8 - 16i$

5) $-8i$ 6) 8

7) $\frac{1}{10}(1+2i)$ 8) $-4-2i$

4. 1) $\frac{7}{17}-\frac{6}{17}i$ 2) i

3) $\frac{7}{2}-\frac{1}{2}i$ 4) $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

5) $\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i$ 6) $\frac{3}{20}+\frac{1}{20}i$

5. 1) $\frac{6}{5}+\frac{8}{5}i$ 2) $\frac{5}{2}-\frac{3}{2}i$

3) $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ 4) $\frac{4}{17}+\frac{1}{17}i$

5) $\frac{3}{65}+\frac{43}{130}i$ 6) $2-2i$

7) $1-i$

6. 1) ให้ $z = a + bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง

$$\begin{aligned}
\overline{iz} &= \overline{i(a+bi)} \\
&= \overline{-b+ai} \\
&= -b-ai \\
-i\overline{z} &= -i\,(a-bi) \\
&= -ai+bi^2 \\
&= -b-ai
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\overline{iz} = -i\overline{z}$

2) ให้ $z = a + bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง

จะได้ $iz = -b + ai$

นั่นคือ $\mathrm{Im}(iz) = a$ และ $\mathrm{Re}(z) = a$

ดังนั้น $\mathrm{Im}(iz) = \mathrm{Re}(z)$

3) ให้ $z = a + bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง

จะได้ $iz = -b + ai$

นั่นคือ $\mathrm{Re}(iz) = -b$ และ $\mathrm{Im}(z) = b$ จะได้ $-\mathrm{Im}(z) = -b$

ดังนั้น $\mathrm{Re}(iz) = -\mathrm{Im}(z)$

7. จะพิสูจน์ว่า ถ้า z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่ง $z_1z_2 = 0$ แล้ว $z_1 = 0$ หรือ $z_2 = 0$

ให้ z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$ เมื่อ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริง

จะแสดงว่าถ้า $z_1z_2 = 0$ และ $z_1 \neq 0$ แล้ว $z_2 = 0$

ให้ $z_1z_2 = 0$

นั่นคือ $(a + bi)(c + di) = 0$

จะได้ $(ac - bd) + (ad + bc)i = 0$

นั่นคือ $ac - bd = 0$ และ $ad + bc = 0$

ดังนั้น $ac = bd$ และ $ad = -bc$ ---------- (1)

ให้ $z_1 \neq 0$ ซึ่งแบ่งได้เป็นสามกรณีดังนี้

กรณีที่ 1 $a \neq 0$ และ $b \neq 0$

เมื่อแทน a และ b ลงใน (1) จาก $ac = bd$ ดังนั้น $c = 0$ และ $d = 0$

ดังนั้น $z_2 = 0$

กรณีที่ 2 $a = 0$ และ $b \neq 0$

เมื่อแทน a และ b ลงใน (1) จาก $ac = bd$ จะได้ $0 = bd$ ดังนั้น $d = 0$

และจาก $ad = -bc$ จะได้ $0 = -bc$ ดังนั้น $c = 0$

ดังนั้น $z_2 = 0$

กรณีที่ 3 $a \neq 0$ และ $b = 0$

เมื่อแทน a และ b ลงใน (1) จาก $ac = bd$ จะได้ $ac = 0$ ดังนั้น $c = 0$

และจาก $ad = -bc$ จะได้ $ad = 0$ ดังนั้น $d = 0$

ดังนั้น $z_2 = 0$

จากทั้งสามกรณี จะได้ $z_2 = 0$

ดังนั้น ถ้า $z_1z_2 = 0$ แล้ว $z_1 = 0$ หรือ $z_2 = 0$

หมายเหตุ เมื่อ p, q และ r เป็นประพจน์ใด ๆ ประพจน์ $p \rightarrow (q \vee r)$ สมมูลกับประพจน์ $(p \wedge \sim q) \rightarrow r$ โดยที่ p แทน $z_1z_2 = 0$, q แทน $z_1 \neq 0$ และ r แทน $z_2 = 0$

แบบฝึกหัด 1.3

1. รากที่สองของ $-16i$

ให้ $z = -16i$ เมื่อเทียบกับ $x+yi$ จะได้ $x = 0$ และ $y = -16$

และ $r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-16)^2} = 16$

เนื่องจาก $y < 0$ ดังนั้นรากที่สองของ $-16i$ คือ

$$\pm\left(\sqrt{\frac{16}{2}} - \sqrt{\frac{16}{2}}i\right) = \pm(\sqrt{8} - \sqrt{8}i) = \pm(2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i)$$

ดังนั้นรากที่สองของ $-16i$ คือ $2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$ และ $-2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$

รากที่สองของ $5+12i$

ให้ $z = 5+12i$ เมื่อเทียบกับ $x+yi$ จะได้ $x = 5$ และ $y = 12$

และ $r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{5^2+12^2} = 13$

เนื่องจาก $y > 0$ ดังนั้นรากที่สองของ $5+12i$ คือ $\pm\left(\sqrt{\frac{13+5}{2}} + \sqrt{\frac{13-5}{2}}i\right) = \pm(3+2i)$

ดังนั้นรากที่สองของ $5+12i$ คือ $3+2i$ และ $-3-2i$

รากที่สองของ $3 + 4i$

ให้ $z = 3+4i$ เมื่อเทียบกับ $x+yi$ จะได้ $x = 3$ และ $y = 4$

และ $r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{3^2+4^2} = 5$

เนื่องจาก $y > 0$ ดังนั้นรากที่สองของ $3+4i$ คือ $\pm\left(\sqrt{\frac{5+3}{2}} + \sqrt{\frac{5-3}{2}}i\right) = \pm(2+i)$

ดังนั้นรากที่สองของ $3+4i$ คือ $2+i$ และ $-2-i$

รากที่สองของ $8 - 6i$

ให้ $z = 8-6i$ เมื่อเทียบกับ $x+yi$ จะได้ $x = 8$ และ $y = -6$

และ $r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{8^2+(-6)^2} = 10$

เนื่องจาก $y < 0$ ดังนั้นรากที่สองของ $8-6i$ คือ $\pm\left(\sqrt{\frac{10+8}{2}} - \sqrt{\frac{10-8}{2}}i\right) = \pm(3-i)$

ดังนั้นรากที่สองของ $8-6i$ คือ $3-i$ และ $-3+i$

รากที่สองของ $1 - 2\sqrt{2}\,i$

ให้ $z = 1-2\sqrt{2}i$ เมื่อเทียบกับ $x+yi$ จะได้ $x = 1$ และ $y = -2\sqrt{2}$

และ $r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1^2+(-2\sqrt{2})^2} = 3$

เนื่องจาก $y < 0$ ดังนั้นรากที่สองของ $1-2\sqrt{2}i$ คือ $\pm\left(\sqrt{\frac{3+1}{2}} - \sqrt{\frac{3-1}{2}}i\right) = \pm(\sqrt{2}-i)$

ดังนั้นรากที่สองของ $1-2\sqrt{2}i$ คือ $\sqrt{2}-i$ และ $-\sqrt{2}+i$

2. 1) เซตคำตอบคือ $\{2i, -2i\}$

   2) เซตคำตอบคือ $\{4\sqrt{3}i, -4\sqrt{3}i\}$

   3) เซตคำตอบคือ $\{1+\sqrt{39}i,\ 1-\sqrt{39}i\}$

   4) เซตคำตอบคือ $\left\{-\frac{1}{2}+\frac{7}{2}i, -\frac{1}{2}-\frac{7}{2}i\right\}$

   5) เซตคำตอบคือ $\left\{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{23}}{2}i, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{23}}{2}i\right\}$

   6) เซตคำตอบคือ $\left\{-\frac{3}{8}+\frac{\sqrt{151}}{8}i,\ -\frac{3}{8}-\frac{\sqrt{151}}{8}i\right\}$

   7) เซตคำตอบคือ $\left\{-\frac{5}{4}+\frac{\sqrt{71}}{4}i,\ -\frac{5}{4}-\frac{\sqrt{71}}{4}i\right\}$

   8) เซตคำตอบคือ $\left\{\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{2}}{3}i, \frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}i\right\}$

   9) เซตคำตอบคือ $\{1+\sqrt{7}i,\ 1-\sqrt{7}i\}$

   10) เซตคำตอบคือ $\{1+\sqrt{2},\ 1-\sqrt{2}\}$

   11) เซตคำตอบคือ $\{2+i, 2-i\}$

   12) เซตคำตอบคือ $\{3,\ -2\}$

   13) เซตคำตอบคือ $\left\{-\frac{5}{6}+\frac{\sqrt{217}}{6},\ -\frac{5}{6}-\frac{\sqrt{217}}{6}\right\}$

   14) เซตคำตอบคือ $\left\{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i\right\}$

   15) เซตคำตอบคือ $\left\{-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i,\ -\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i\right\}$

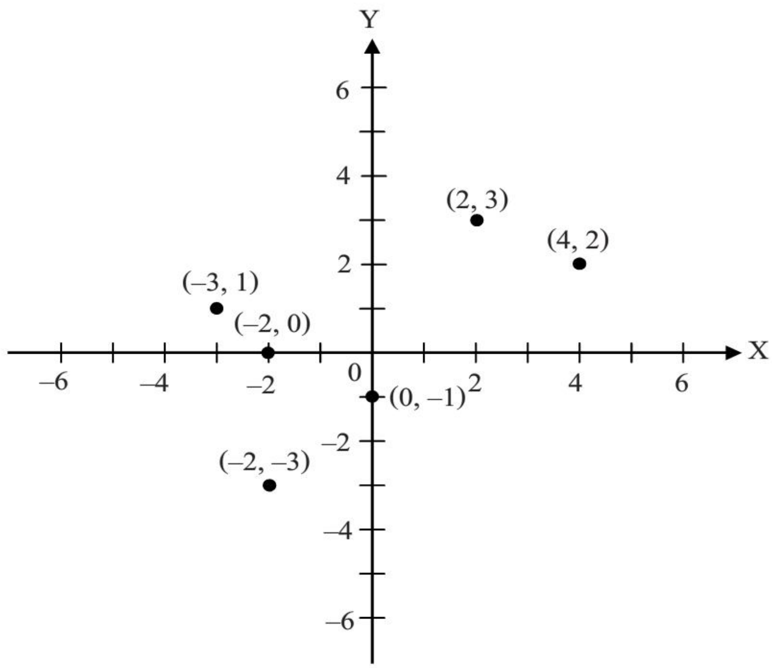
   16) เซตคำตอบคือ $\left\{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i,\ -\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\right\}$

   17) เซตคำตอบคือ $\{-1+7i, -1-7i\}$

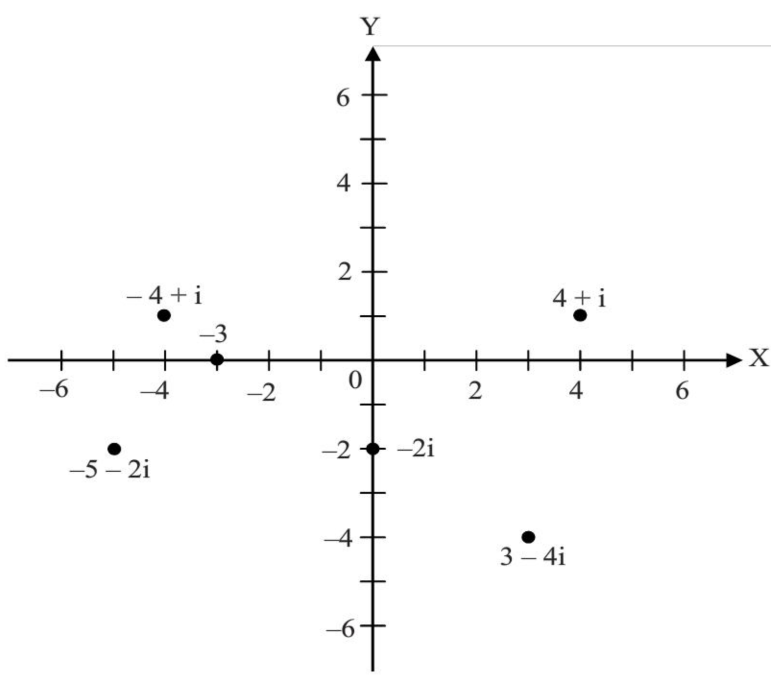
   18) เซตคำตอบคือ $\{-1+\sqrt{3}i, -1-\sqrt{3}i\}$

แบบฝึกหัด 1.4

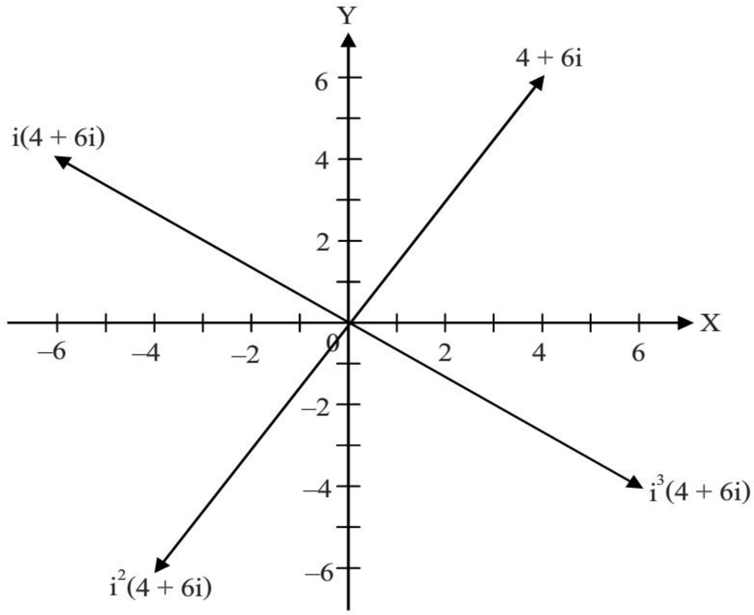
1. 1)



2)



2.



3. จำนวนเชิงซ้อนที่แทนด้วยจุด A คือ (3,1) หรือ $3 + i$

จำนวนเชิงซ้อนที่แทนด้วยจุด B คือ (0,2) หรือ $2i$

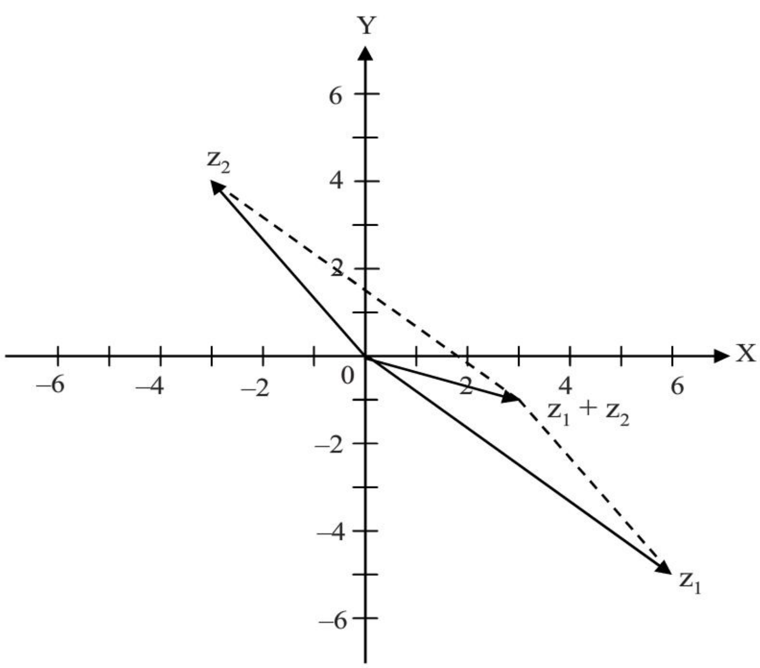
จำนวนเชิงซ้อนที่แทนด้วยจุด C คือ (– 3, – 4) หรือ $-3 - 4i$

จำนวนเชิงซ้อนที่แทนด้วยจุด D คือ (2, –2) หรือ $2 - 2i$

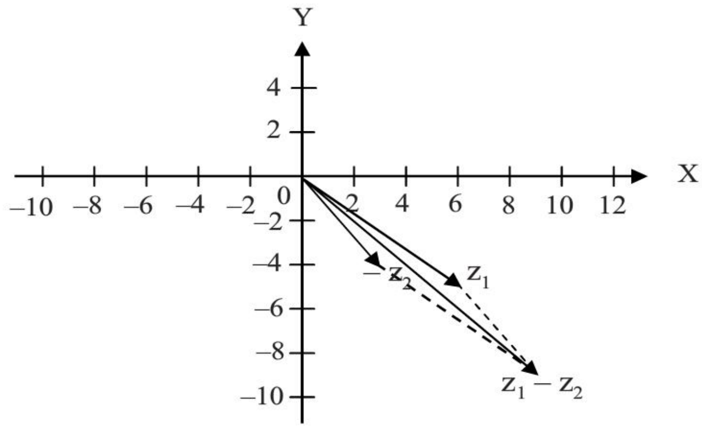
จำนวนเชิงซ้อนที่แทนด้วยจุด E คือ (– 3,0) หรือ -3

จำนวนเชิงซ้อนที่แทนด้วยจุด F คือ (–1, –1) หรือ $-1 - i$

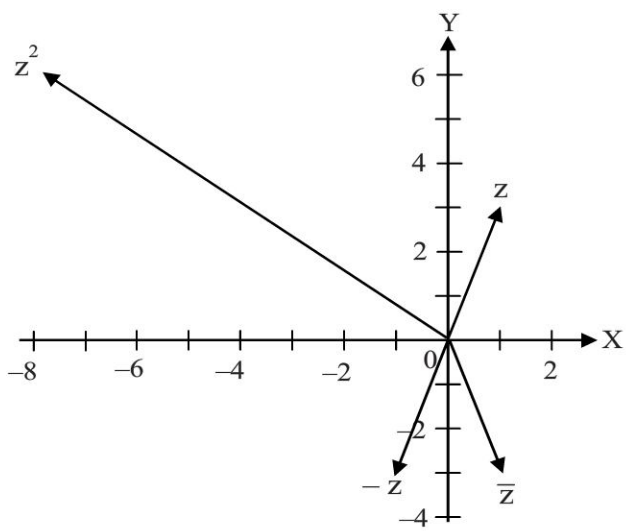
4. 1)

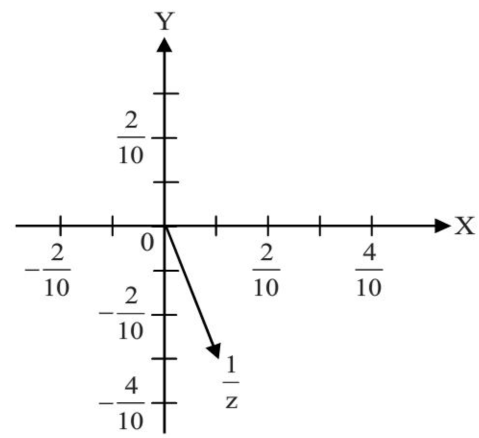


2)

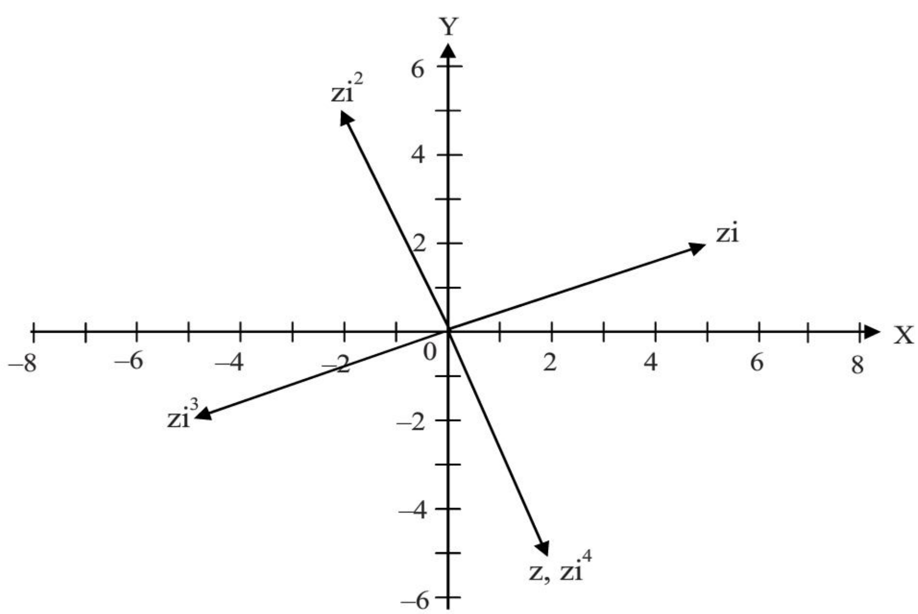


5.





6.



7. $|1-\sqrt{3}i| = 2$ $\qquad$ $|\sqrt{2}-3i| = \sqrt{11}$

$|4+3i| = 5$ $\qquad$ $|-5+12i| = 13$

$|\sqrt{5}+2\sqrt{3}i| = \sqrt{17}$ $\qquad$ $|-\sqrt{3}-i| = 2$

$|-3-4i| = 5$ $\qquad$ $|4i| = 4$

8. ให้ $z_1 = a+bi$ และ $z_2 = c+di$ เมื่อ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริง

$$\begin{aligned}
|z_1-z_2|^2+|z_1+z_2|^2 &= |(a+bi)-(c+di)|^2+|(a+bi)+(c+di)|^2 \\
&= |(a-c)+(b-d)i|^2+|(a+c)+(b+d)i|^2 \\
&= [(a-c)^2+(b-d)^2]+[(a+c)^2+(b+d)^2] \\
&= 2a^2+2c^2+2b^2+2d^2 \\
&= 2(a^2+b^2)+2(c^2+d^2) \\
&= 2|z_1|^2+2|z_2|^2
\end{aligned}$$

9. ให้ $z = a+bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง

จะได้ $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$$\begin{aligned}
\sqrt{z\bar{z}} &= \sqrt{(a+bi)(a-bi)} \\
&= \sqrt{a^2-b^2i^2} \\
&= \sqrt{a^2+b^2}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$

10. ให้ $z = c+di$ และ $a = e+fi$ เมื่อ c, d, e และ f เป็นจำนวนจริง

$$\begin{aligned}
|z-a|^2 &= |(c+di)-(e+fi)|^2 \\
&= |(c-e)+(d-f)i|^2 \\
&= (c-e)^2+(d-f)^2 \\
(z-a)(\bar{z}-\bar{a}) &= [(c+di)-(e+fi)][(c-di)-(e-fi)] \\
&= [(c-e)+(d-f)i][(c-e)-(d-f)i] \\
&= (c-e)^2-(d-f)^2i^2 \\
&= (c-e)^2+(d-f)^2
\end{aligned}$$

ดังนั้น $|z-a|^2 = (z-a)(\bar{z}-\bar{a})$

11. ให้ $z = a + bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง

จะได้ $\bar{z} = a - bi$

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi)$$
$$= a^2 + b^2$$
$$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi)$$
$$= 2a$$

ดังนั้น $z\bar{z}$ และ $z + \bar{z}$ เป็นจำนวนจริง เมื่อ z เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ

12. ให้ $z = x + yi$, $a = u + vi$ เมื่อ x, y, u และ v เป็นจำนวนจริง

จะได้ $\bar{z} = x - yi$, $\bar{a} = u - vi$

$$(z - a)(\bar{z} - \bar{a}) = (x + yi - u - vi)(x - yi - u + vi)$$
$$= [(x - u) + (y - v)i][(x - u) - (y - v)i]$$
$$= (x - u)^2 - ((y - v)i)^2$$
$$= (x - u)^2 + (y - v)^2 = k^2$$

จากรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม คือ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

โดยที่จุดศูนย์กลางของวงกลม คือ (h, k) รัศมียาว r

ดังนั้น $(x - u)^2 + (y - v)^2 = k^2$ คือสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางวงกลมอยู่ที่จุด (u, v) คือ จุด a และรัศมียาว k หน่วย

13. $|1 + zi| = |1 - zi|$ ก็ต่อเมื่อ z เป็นจำนวนจริง

จะแสดง (1) ถ้า $|1 + zi| = |1 - zi|$ แล้ว z เป็นจำนวนจริง

และ (2) ถ้า z เป็นจำนวนจริง แล้ว $|1 + zi| = |1 - zi|$

จะแสดง (1) โดยใช้วิธีแย้งสลับที่ ($p \to q$ สมมูลกับ $\sim q \to \sim p$)

นั่นคือ จะแสดงว่า ถ้า z ไม่เป็นจำนวนจริง แล้ว $|1 + zi| \neq |1 - zi|$

ให้ z ไม่เป็นจำนวนจริง ดังนั้น $z = a + bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงที่ $b \neq 0$

จะได้ $|1 + zi| = |1 + (a + bi)i| = |1 - b + ai| = \sqrt{a^2 + (1 - b)^2}$

$|1 - zi| = |1 - (a + bi)i| = |1 + b - ai| = \sqrt{a^2 + (1 + b)^2}$

ดังนั้น $|1 + zi| \neq |1 - zi|$

นั่นคือ ถ้า z ไม่เป็นจำนวนจริงแล้ว $|1 + zi| \neq |1 - zi|$

หรือ ถ้า $|1 + zi| = |1 - zi|$ แล้ว z เป็นจำนวนจริง

จะแสดง (2) ให้ z เป็นจำนวนจริง

จะได้ $|1 + zi| = \sqrt{1^2 + z^2} = \sqrt{1 + z^2}$

$|1-zi| \;=\; \sqrt{1^2+(-z)^2} \;=\; \sqrt{1+z^2}$

ดังนั้น $|1+zi| \;=\; |1-zi|$

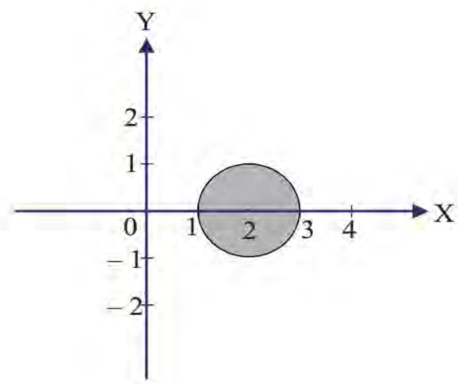
นั่นคือ ถ้า z เป็นจำนวนจริงแล้ว $|1+zi| = |1-zi|$

จาก (1) และ (2) สรุปได้ว่า $|1+zi| = |1-zi|$ ก็ต่อเมื่อ z เป็นจำนวนจริง

14. 1) $|z-2| \le 1$

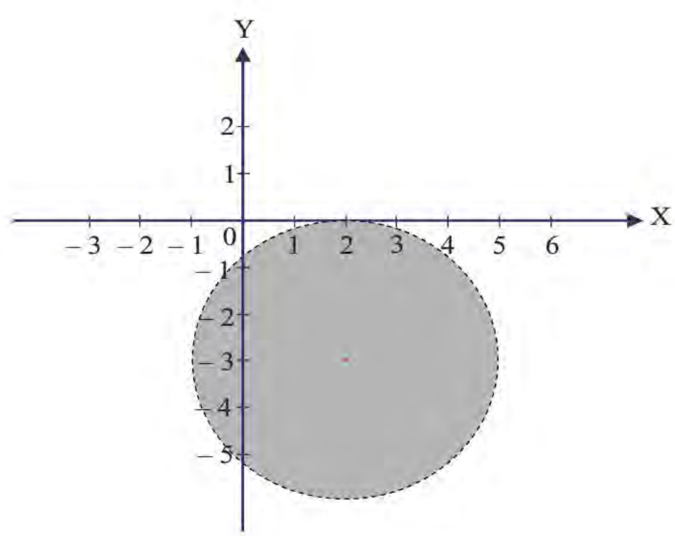
$|z-2|$ คือ ระยะทางจากจุด (2, 0) ไปยัง z

ดังนั้น เซตของจุดทั้งหมดในระนาบเชิงซ้อน ซึ่งสอดคล้องอสมการ $|z-2| \le 1$ ก็คือเซตของจุดที่อยู่ภายในวงกลม (รวมจุดบนเส้นรอบวง) ที่มีจุดศูนย์กลางที่ (2, 0) และรัศมียาว 1 หน่วย



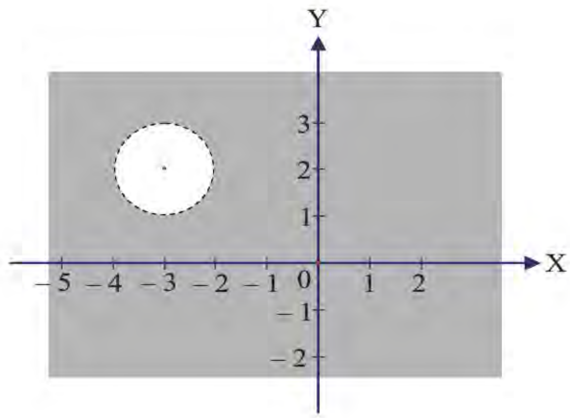
2) $|z-2+3i| < 3$

$|z-2+3i|$ คือ ระยะทางจากจุด (2, –3) ไปยัง z ดังนั้น เซตของจุดทั้งหมดในระนาบเชิงซ้อน ซึ่งสอดคล้องอสมการ $|z-2+3i| < 3$ ก็คือ เซตของจุดที่อยู่ภายในวงกลม (ไม่รวมจุดบนเส้นรอบวง) ที่มีจุดศูนย์กลางที่ (2, –3) และรัศมียาว 3 หน่วย

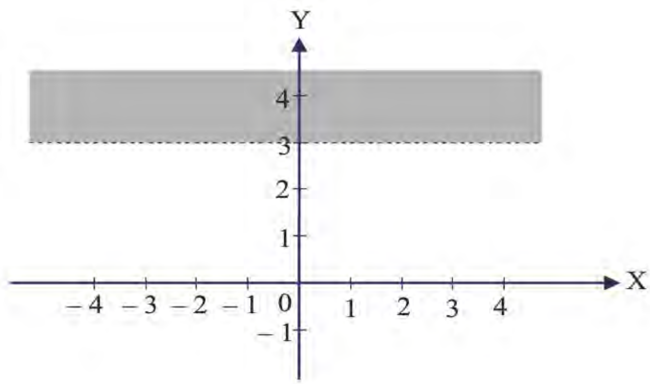


3) $|z+3-2i| > 1$

$|z+3-2i|$ คือ ระยะทางจากจุด $(-3, 2)$ ไปยัง z ดังนั้น เซตของจุดทั้งหมดในระนาบเชิงซ้อนซึ่งสอดคล้องอสมการ $|z+3-2i| > 1$ ก็คือ เซตของจุดที่อยู่ภายนอกวงกลม (ไม่รวมจุดบนเส้นรอบวง) ที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(-3, 2)$ และรัศมียาว 1 หน่วย



4) $\operatorname{Im} z > 3$



5) $\operatorname{Im}(i + \bar{z}) = 4$

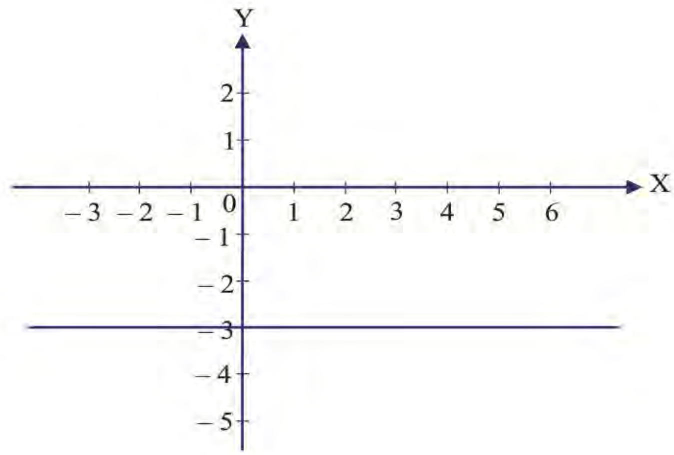
ให้ $z = a + bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง

$$i + \bar{z} = i + a - bi = a + (1-b)i$$

$$\operatorname{Im}(i + \bar{z}) = 1 - b$$

จาก $\operatorname{Im}(i + \bar{z}) = 4$ จะได้ $1 - b = 4$

$$b = -3$$



6) $|z+i|+|z-i| = 2$ ให้ $z = x + yi$ เมื่อ x และ y เป็นจำนวนจริง

จะได้ $|x + (y+1)i| + |x + (y-1)i| = 2$

$$\sqrt{x^2+(y+1)^2} + \sqrt{x^2+(y-1)^2} = 2 \qquad \text{..................*}$$

$$\sqrt{x^2+(y+1)^2} = 2 - \sqrt{x^2+(y-1)^2}$$

$$x^2+(y+1)^2 = 4 - 4\sqrt{x^2+(y-1)^2} + x^2+(y-1)^2$$

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2} = 1 - y$$

$$x^2+(y-1)^2 = (1-y)^2 \quad \text{โดยที่ } 1-y \geq 0$$

ดังนั้น จะได้ $x = 0$ และ $y \leq 1$

ตรวจสอบค่า $x = 0$ และ $y \leq 1$ ในสมการ *

กรณีที่ 1 ถ้า $x = 0$ และ $-1 \leq y \leq 1$

$$\sqrt{0+(y+1)^2} + \sqrt{0+(y-1)^2} = |y+1| + |y-1|$$
$$= (y+1)+(-y+1)$$
$$= 2$$

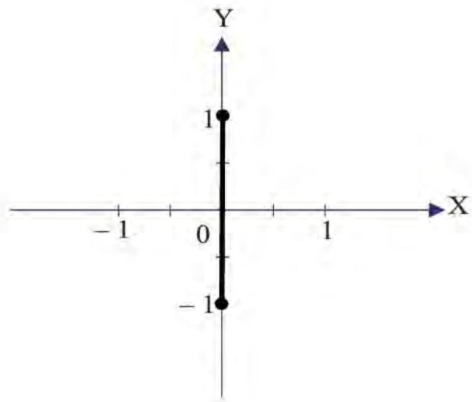
ดังนั้น $x = 0$ และ $-1 \leq y \leq 1$ สอดคล้องกับสมการ $\sqrt{x^2+(y+1)^2} + \sqrt{x^2+(y-1)^2} = 2$

กรณีที่ 2 ถ้า $x = 0$ และ $y < -1$

$$\sqrt{0+(y+1)^2} + \sqrt{0+(y-1)^2} = |y+1| + |y-1|$$
$$= (-y-1)+(-y+1)$$
$$= -2y$$

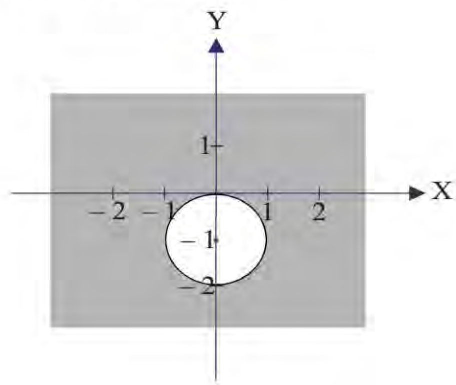
ดังนั้น $x = 0$ และ $y < -1$ ไม่สอดคล้องกับสมการ $\sqrt{x^2+(y+1)^2} + \sqrt{x^2+(y-1)^2} = 2$

จากกรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 จะได้ว่าจำนวนเชิงซ้อน $z = x+yi$ ที่ทำให้ $|z+i|+|z-i| = 2$ คือจำนวนเชิงซ้อน $z = x+yi$ ที่มี $x = 0$ และ $-1 \leq y \leq 1$ และเขียนกราฟได้ดังนี้

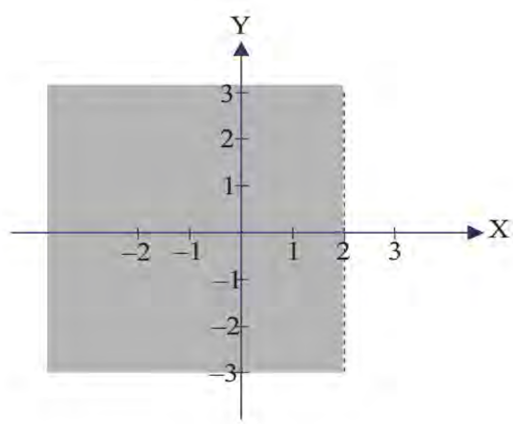


7) $|z+i| \geq 1$

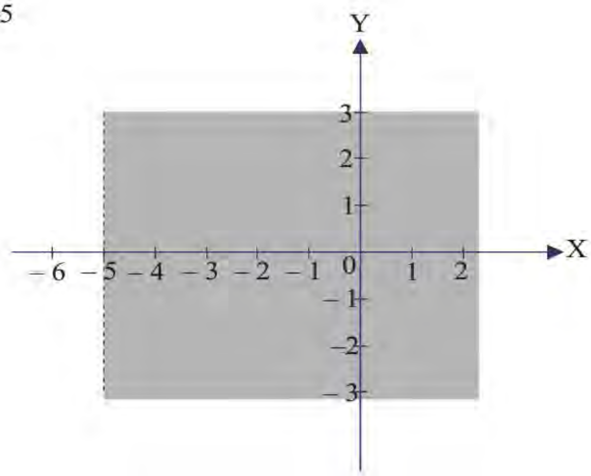
$|z+i|$ คือ ระยะทางจากจุด $(0, -1)$ ไปยัง z ดังนั้น เซตของจุดทั้งหมดในระนาบเชิงซ้อนซึ่งสอดคล้องอสมการ $|z+i| \geq 1$ ก็คือ เซตของจุดที่อยู่ภายนอกวงกลม (รวมจุดบนเส้นรอบวง) ที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(0, -1)$ และรัศมียาว 1 หน่วย



8) $\mathrm{Re}(z) < 2$



9) $\mathrm{Re}(z-i) > -5$



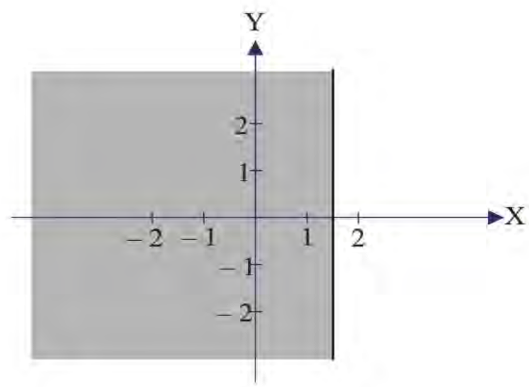
10) $|z-3| \geq |z|$

ให้ $z = x+yi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง จากอสมการที่กำหนดจะได้

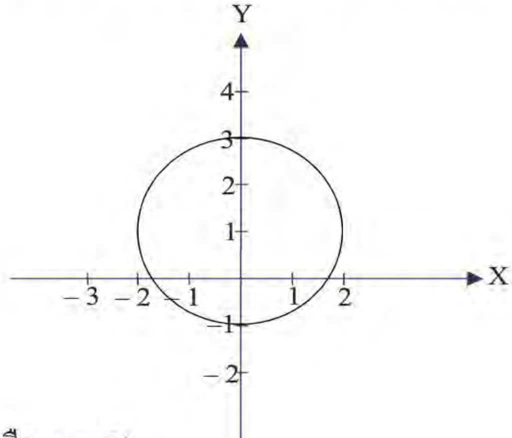
$$\sqrt{(x-3)^2+y^2} \geq \sqrt{x^2+y^2}$$

$$(x-3)^2+y^2 \geq x^2+y^2$$

แก้อสมการจะได้ $x \leq \frac{3}{2}$



15. $|z-i|$ คือ ระยะทางจากจุด (0, 1) ไปยัง z ดังนั้น เซตของจุดทั้งหมดในระนาบเชิงซ้อนซึ่งสอดคล้องสมการ $|z-i| = 2$ ก็คือ เซตของจุดที่อยู่บนวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ (0, 1) และรัศมียาว 2 หน่วย



จากกราฟ z ที่มี $|z|$ มากที่สุดคือ $z = 3i$

แบบฝึกหัด 1.5

1. ให้ $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นรูปเชิงขั้วของ $1+\sqrt{3}i$

   จะได้ $r = \sqrt{1+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

   เนื่องจาก $\tan\theta = \sqrt{3}$ และ $(1, \sqrt{3})$ เป็นจุดอยู่ในจตุภาคที่ 1

   จึงได้ว่า θ ที่ทำให้ $\tan\theta = \sqrt{3}$ คือ $\frac{\pi}{3}$

   ดังนั้น รูปเชิงขั้วของ $1+\sqrt{3}i$ คือ $2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)\right]$ เมื่อ $k \in I$

   ให้ $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นรูปเชิงขั้วของ $1-i$

   จะได้ $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

   เนื่องจาก $\tan\theta = -\frac{1}{1} = -1$ และ $(1,-1)$ เป็นจุดอยู่ในจตุภาคที่ 4

   จึงได้ว่า θ ที่ทำให้ $\tan\theta = -1$ คือ $\frac{7\pi}{4}$

   ดังนั้น รูปเชิงขั้วของ $1-i$ คือ $\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{4}+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{4}+2k\pi\right)\right]$ เมื่อ $k \in I$

   ให้ $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นรูปเชิงขั้วของ $-2\sqrt{3}+2i$

   จะได้ $r = \sqrt{12+4} = 4$

   เนื่องจาก $\tan\theta = \frac{2}{-2\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ และ $(-2\sqrt{3}, 2)$ เป็นจุดอยู่ในจตุภาคที่ 2

   จึงได้ว่า θ ที่ทำให้ $\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ คือ $\frac{5\pi}{6}$

   ดังนั้น รูปเชิงขั้วของ $-2\sqrt{3}+2i$ คือ $4\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right)\right]$ เมื่อ $k \in I$

   ให้ $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นรูปเชิงขั้วของ $-4-4i$

   จะได้ $r = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$

   เนื่องจาก $\tan\theta = \frac{-4}{-4} = 1$ และ $(-4, -4)$ เป็นจุดอยู่ในจตุภาคที่ 3

   จึงได้ว่า θ ที่ทำให้ $\tan\theta = 1$ คือ $\frac{5\pi}{4}$

   ดังนั้น รูปเชิงขั้วของ $-4-4i$ คือ $4\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}+2k\pi\right)\right]$ เมื่อ $k \in I$

   ให้ $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นรูปเชิงขั้วของ $12-12\sqrt{3}i$

   จะได้ $r = \sqrt{144+432} = 24$

   เนื่องจาก $\tan\theta = \frac{-12\sqrt{3}}{12} = -\sqrt{3}$ และ $(12, -12\sqrt{3})$ เป็นจุดอยู่ในจตุภาคที่ 4

   จึงได้ว่า θ ที่ทำให้ $\tan\theta = -\sqrt{3}$ คือ $\frac{5\pi}{3}$

ดังนั้น รูปเชิงขั้วของ $12-12\sqrt{3}i$ คือ $24\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3}+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{3}+2k\pi\right)\right]$ เมื่อ $k \in I$

ให้ $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นรูปเชิงขั้วของ $-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}$

จะได้ $r = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

เนื่องจาก $\tan\theta = \dfrac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = -1$ และ $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ เป็นจุดอยู่ในจตุภาคที่ 2

จึงได้ว่า θ ที่ทำให้ $\tan\theta = -1$ คือ $\frac{3\pi}{4}$

ดังนั้น รูปเชิงขั้วของ $-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}$ คือ $\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right)\right]$ เมื่อ $k \in I$

2. 1) $-\frac{3}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4}i$

2) $-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}i$

3) $(\sqrt{3}-i)^7$

เพราะว่า $\sqrt{3}-i$ เขียนในรูปเชิงขั้วได้เป็น $2(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6})$

จากทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์ จะได้

$$\begin{aligned}(\sqrt{3}-i)^7 &= 2^7(\cos\frac{77\pi}{6}+i\sin\frac{77\pi}{6}) \\ &= 128(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}) \\ &= 128(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}) \\ &= -64\sqrt{3}+64i\end{aligned}$$

4) $(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^5$

เพราะว่า $\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ เขียนในรูปเชิงขั้วได้เป็น $2(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$

จากทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์ จะได้

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^5 &= 2^5(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}) \\ &= 32(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i) \\ &= -16\sqrt{2}-16\sqrt{2}i\end{aligned}$$

5) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^{100}$

เพราะว่า $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$ เขียนในรูปเชิงขั้วได้เป็น $\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$

จากทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์ จะได้

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^{100} = 1^{100}(\cos\frac{100\pi}{6}+i\sin\frac{100\pi}{6})$$

$$= -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

6) $(-i)^7 = i$

7) $\frac{(1-i)^6}{(-1-i)^4}$

เพราะว่า $1-i$ เขียนในรูปเชิงขั้วได้เป็น $\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4})$

และ $-1-i$ เขียนในรูปเชิงขั้วได้เป็น $\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4})$

จากทฤษฎีของเดอมัวฟวร์ จะได้

$$\frac{(1-i)^6}{(-1-i)^4} = \frac{\sqrt{2}^6(\cos\frac{42\pi}{4}+i\sin\frac{42\pi}{4})}{\sqrt{2}^4(\cos\frac{20\pi}{4}+i\sin\frac{20\pi}{4})}$$

$$= \frac{2(0+i)}{-1+0}$$

$$= -2i$$

8) $12+12\sqrt{3}i$

9) $-4+4i$

10) $(-\sqrt{3}+i)^3(2\sqrt{3}+2i)^5$

เพราะว่า $-\sqrt{3}+i$ เขียนในรูปเชิงขั้วได้เป็น $2(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6})$

และ $2\sqrt{3}+2i$ เขียนในรูปเชิงขั้วได้เป็น $4(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$

จากทฤษฎีของเดอมัวฟวร์ จะได้

$$(-\sqrt{3}+i)^3(2\sqrt{3}+2i)^5 = 2^3(\cos\frac{15\pi}{6}+i\sin\frac{15\pi}{6})4^5(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6})$$

$$= 8192(0+i)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)$$

$$= 8192(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)$$

$$= -4096-4096\sqrt{3}i$$

3. 1) เพราะว่า $1-\sqrt{3}i$ เขียนในรูปเชิงขั้วได้เป็น $2(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3})$

และ $r(\cos\theta + i\sin\theta) = 1-\sqrt{3}i$

จะได้ $r = 2$ และ $\theta = \frac{5\pi}{3}+2n\pi$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

แต่ $2\pi \le \theta \le 6\pi$ ดังนั้น θ คือ $\frac{11\pi}{3}$ และ $\frac{17\pi}{3}$

2) เพราะว่า $-1-i$ เขียนในรูปเชิงขั้วได้เป็น $\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4})$

และ $r(\cos\theta + i\sin\theta) = -1-i$

จะได้ $r = \sqrt{2}$ และ $\theta = \frac{5\pi}{4}+2n\pi$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

แต่ $6\pi \le \theta \le 7\pi$ ดังนั้น ไม่มี θ ที่ $6\pi \le \theta \le 7\pi$ ที่สอดคล้องสมการนี้

3) เพราะว่า $-1-i$ เขียนในรูปเชิงขั้วได้เป็น $\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4})$

และ $r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) = -1-i$

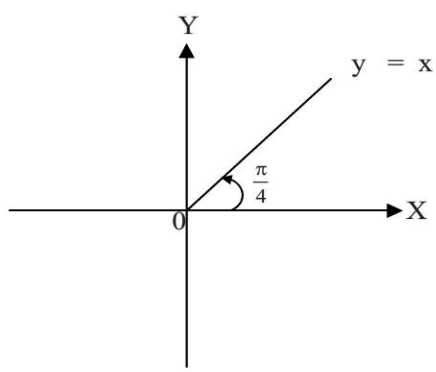
จะได้ $r^2 = \sqrt{2}$ ดังนั้น $r = \sqrt[4]{2}$

เนื่องจาก $0 \le \theta \le 2\pi$ ทำให้ $0 \le 2\theta \le 4\pi$

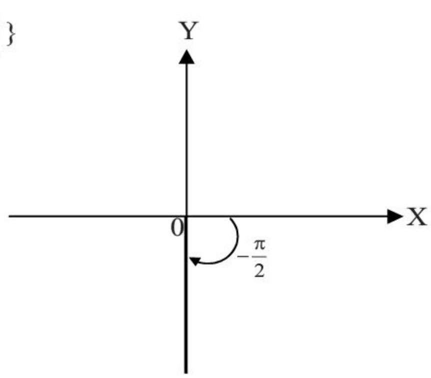
ดังนั้น $2\theta = \frac{5\pi}{4}$ หรือ $2\theta = \frac{13\pi}{4}$

$\theta = \frac{5\pi}{8}$ หรือ $\theta = \frac{13\pi}{8}$

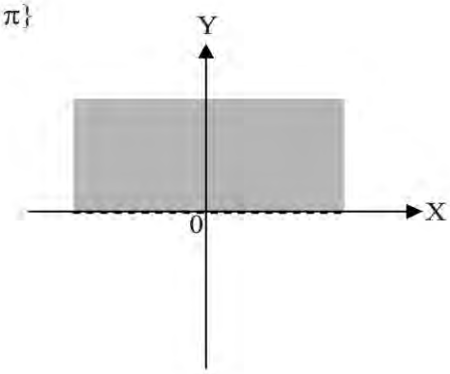
4. 1) $\{z \mid \arg(z) = \frac{\pi}{4}\}$



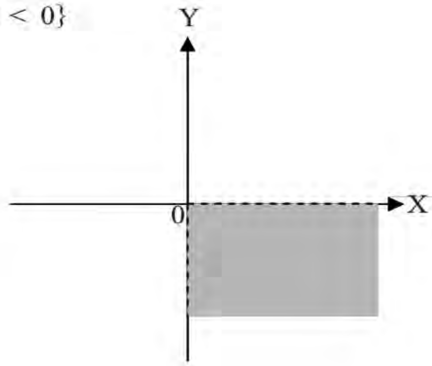
2) $\{z \mid \arg(z) = -\frac{\pi}{2}\}$



3) $\{z \mid 0 < \arg(z) < \pi\}$



4) $\{z \mid -\frac{\pi}{2} < \arg(z) < 0\}$



5. ให้ $z = a + bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง จะได้ $\bar{z} = a - bi$

จาก $z = a + bi$ จะได้ $\tan\theta = \frac{b}{a}$

ดังนั้น ค่าหนึ่งของ $\arg(z)$ คือ $\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

และ $\bar{z} = a - bi$ จะได้ $\tan\theta = -\frac{b}{a}$

ดังนั้น ค่าหนึ่งของ $\arg(\bar{z})$ คือ $\arctan\left(-\frac{b}{a}\right)$

$$\begin{aligned}
\arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \arctan\left(-\frac{b}{a}\right) &= \arctan\left(\frac{\frac{b}{a} + (-\frac{b}{a})}{1 - (\frac{b}{a})(-\frac{b}{a})}\right) \\
&= \arctan 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\arg(z) + \arg(\bar{z}) = 0 + 2n\pi$

$= 2n\pi$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

แบบฝึกหัด 1.6

1. เนื่องจาก $i = 1(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

ถ้าให้ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นรากที่ 3 ของ i

โดยทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์ จะได้ $r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = (\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

ดังนั้น $r^3 = 1$ และ $3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ เมื่อ $k \in I$

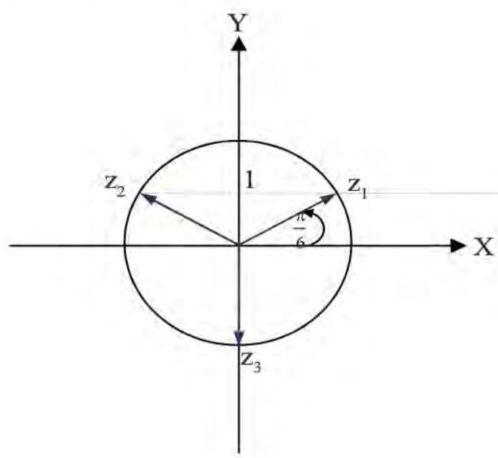
จึงได้ว่า $r = 1$ และ $\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$ เมื่อ $k \in I$

ฉะนั้น $z = \left[\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3})\right]$ เมื่อ $k \in I$

เมื่อ $k = 0$ จะได้ $z_1 = (\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

เมื่อ $k = 1$ จะได้ $z_2 = (\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

เมื่อ $k = 2$ จะได้ $z_3 = (\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) = -i$



ถ้าให้ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นรากที่ 3 ของ $8(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

โดยทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์ จะได้ $r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = 8(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

ดังนั้น $r^3 = 8$ และ $3\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ เมื่อ $k \in I$

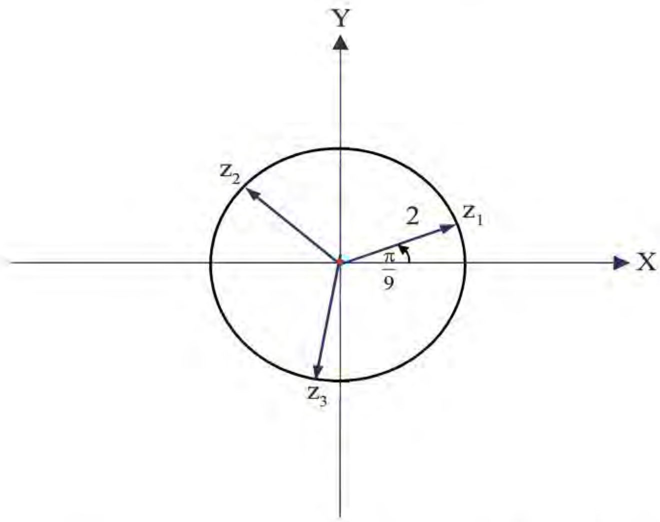
จึงได้ว่า $r = 2$ และ $\theta = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$ เมื่อ $k \in I$

ฉะนั้น $z = 2\left[\cos(\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3})\right]$ เมื่อ $k \in I$

เมื่อ $k = 0$ จะได้ $z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9})$

เมื่อ $k = 1$ จะได้ $z_2 = 2(\cos\frac{7\pi}{9} + i\sin\frac{7\pi}{9})$

เมื่อ $k = 2$ จะได้ $z_3 = 2(\cos\frac{13\pi}{9} + i\sin\frac{13\pi}{9})$



ถ้าให้ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นรากที่ 3 ของ $27(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})$

โดยทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์ จะได้ $r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = 27(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})$

ดังนั้น $r^3 = 27$ และ $3\theta = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$ เมื่อ $k \in I$

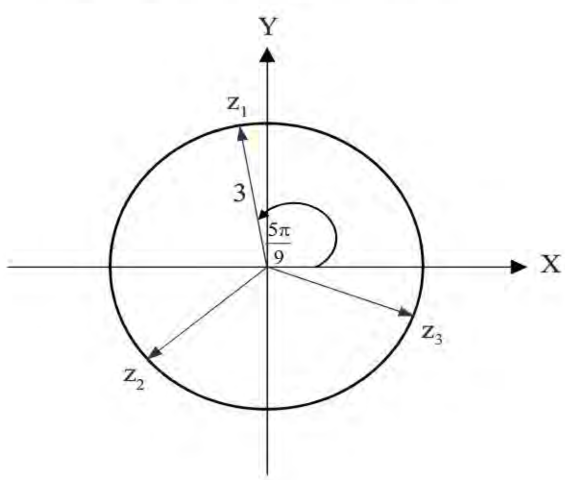
จึงได้ว่า $r = 3$ และ $\theta = \frac{5\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$ เมื่อ $k \in I$

ฉะนั้น $z = 3\left[\cos(\frac{5\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{5\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3})\right]$ เมื่อ $k \in I$

เมื่อ $k = 0$ จะได้ $z_1 = 3(\cos\frac{5\pi}{9} + i\sin\frac{5\pi}{9})$

เมื่อ $k = 1$ จะได้ $z_2 = 3(\cos\frac{11\pi}{9} + i\sin\frac{11\pi}{9})$

เมื่อ $k = 2$ จะได้ $z_3 = 3(\cos\frac{17\pi}{9} + i\sin\frac{17\pi}{9})$



เนื่องจาก $-8i = 8(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$

ถ้าให้ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นรากที่ 3 ของ $-8i$

โดยทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์ จะได้ $r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = 8(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$

ดังนั้น $r^3 = 8$ และ $3\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ เมื่อ $k \in I$

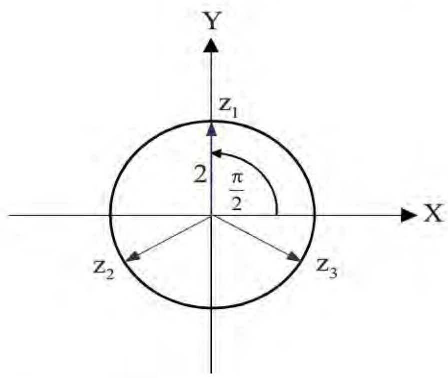
จึงได้ว่า $r = 2$ และ $\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}$ เมื่อ $k \in I$

ฉะนั้น $z = 2\left[\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3})\right]$ เมื่อ $k \in I$

เมื่อ $k = 0$ จะได้ $z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 2i$

เมื่อ $k = 1$ จะได้ $z_2 = 2(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}) = -\sqrt{3} - i$

เมื่อ $k = 2$ จะได้ $z_3 = 2(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}) = \sqrt{3} - i$



เนื่องจาก $27i = 27(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

ให้ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นรากที่ 3 ของ $27i$

โดยทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์ จะได้ $r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = 27(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

ดังนั้น $r^3 = 27$ และ $3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ เมื่อ $k \in I$

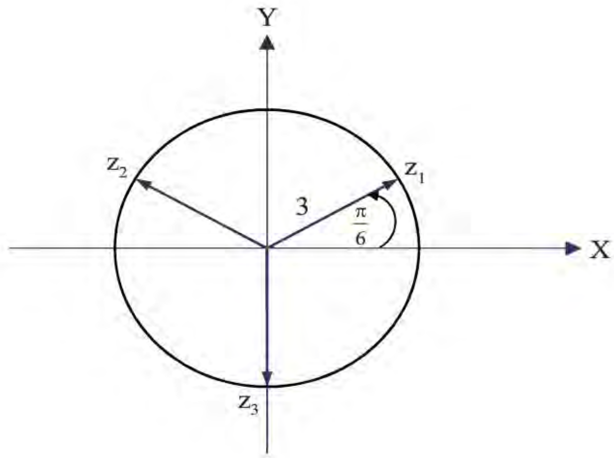
จึงได้ว่า $r = 3$ และ $\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$ เมื่อ $k \in I$

ฉะนั้น $z = 3\left[\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3})\right]$ เมื่อ $k \in I$

เมื่อ $k = 0$ จะได้ $z_1 = 3(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

เมื่อ $k = 1$ จะได้ $z_2 = 3(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

เมื่อ $k = 2$ จะได้ $z_3 = 3(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) = -3i$



เนื่องจาก $-64 = 64(\cos\pi + i\sin\pi)$

ให้ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นรากที่ 3 ของ -64

โดยทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์ จะได้ $r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = 64(\cos\pi + i\sin\pi)$

ดังนั้น $r^3 = 64$ และ $3\theta = \pi + 2k\pi$ เมื่อ $k \in I$

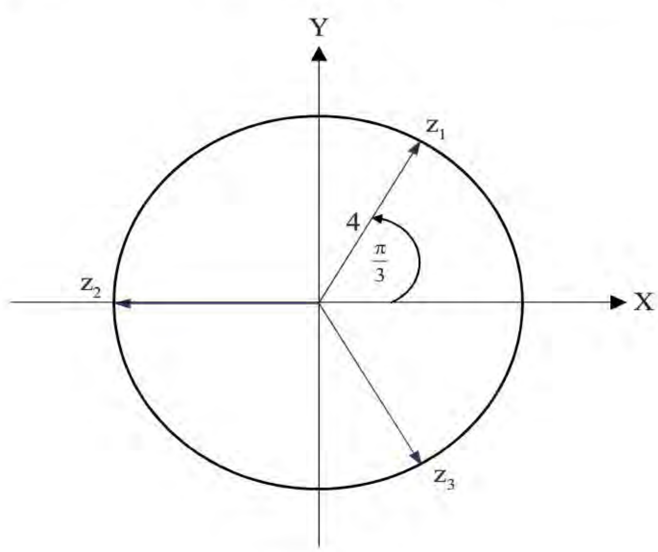
จึงได้ว่า $r = 4$ และ $\theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$ เมื่อ $k \in I$

จะนั้น $z = 4\left[\cos(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3})\right]$ เมื่อ $k \in I$

เมื่อ $k = 0$ จะได้ $z_1 = 4(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 2 + 2\sqrt{3}i$

เมื่อ $k = 1$ จะได้ $z_2 = 4(\cos\pi + i\sin\pi) = -4$

เมื่อ $k = 2$ จะได้ $z_3 = 4(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}) = 2 - 2\sqrt{3}i$



เนื่องจาก $1 + \sqrt{3}i = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

ให้ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นรากที่ 3 ของ $1 + \sqrt{3}i$

โดยทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์ จะได้ $r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

ดังนั้น $r^3 = 2$ และ $3\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ เมื่อ $k \in I$

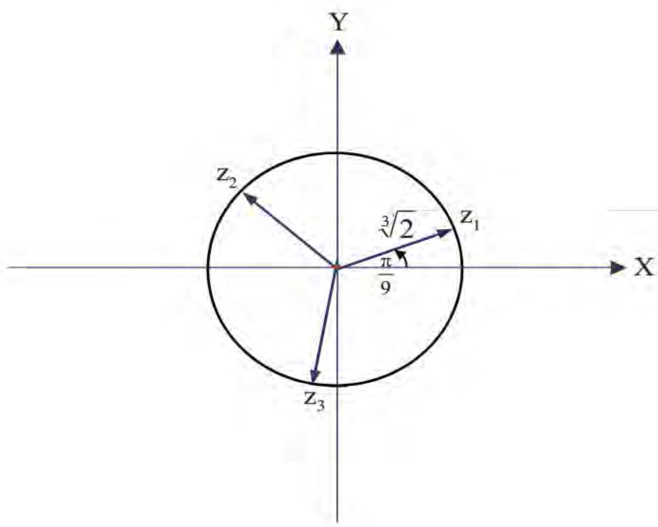
จึงได้ว่า $r = \sqrt[3]{2}$ และ $\theta = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$ เมื่อ $k \in I$

ฉะนั้น $z = \sqrt[3]{2}\left[\cos(\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3})\right]$ เมื่อ $k \in I$

เมื่อ $k = 0$ จะได้ $z_1 = \sqrt[3]{2}(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9})$

เมื่อ $k = 1$ จะได้ $z_2 = \sqrt[3]{2}(\cos\frac{7\pi}{9} + i\sin\frac{7\pi}{9})$

เมื่อ $k = 2$ จะได้ $z_3 = \sqrt[3]{2}(\cos\frac{13\pi}{9} + i\sin\frac{13\pi}{9})$



เนื่องจาก $-2\sqrt{3} + 2i = 4(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$

ให้ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นรากที่ 3 ของ $-2\sqrt{3} + 2i$

โดยทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์ จะได้ $r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = 4(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$

ดังนั้น $r^3 = 4$ และ $3\theta = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ เมื่อ $k \in I$

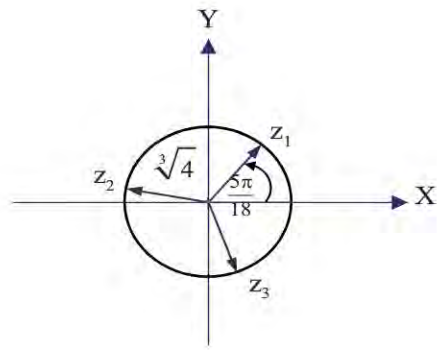
จึงได้ว่า $r = \sqrt[3]{4}$ และ $\theta = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$ เมื่อ $k \in I$

ฉะนั้น $z = \sqrt[3]{4}\left[\cos(\frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3})\right]$ เมื่อ $k \in I$

เมื่อ $k = 0$ จะได้ $z_1 = \sqrt[3]{4}(\cos\frac{5\pi}{18} + i\sin\frac{5\pi}{18})$

เมื่อ $k = 1$ จะได้ $z_2 = \sqrt[3]{4}(\cos\frac{17\pi}{18} + i\sin\frac{17\pi}{18})$

เมื่อ $k = 2$ จะได้ $z_3 = \sqrt[3]{4}(\cos\frac{29\pi}{18} + i\sin\frac{29\pi}{18})$



เนื่องจาก $2-2\sqrt{3}i \;=\; 4(\cos\frac{5\pi}{3} \;+\; i\sin\frac{5\pi}{3})$

ให้ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นรากที่ 3 ของ $2-2\sqrt{3}i$

โดยทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์ จะได้ $r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) \;=\; 4(\cos\frac{5\pi}{3} \;+\; i\sin\frac{5\pi}{3})$

ดังนั้น $r^3 = 4$ และ $3\theta = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$ เมื่อ $k \in I$

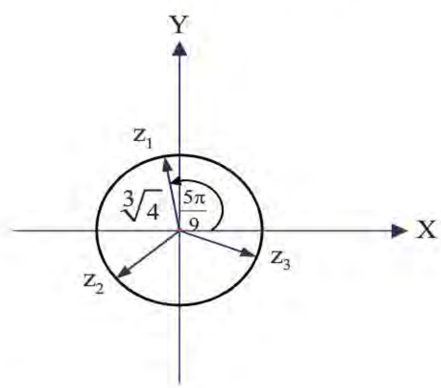
จึงได้ว่า $r = \sqrt[3]{4}$ และ $\theta = \frac{5\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$ เมื่อ $k \in I$

ฉะนั้น $z = \sqrt[3]{4}\left[\cos(\frac{5\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{5\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3})\right]$ เมื่อ $k \in I$

เมื่อ $k = 0$ จะได้ $z_1 \;=\; \sqrt[3]{4}(\cos\frac{5\pi}{9} + i\sin\frac{5\pi}{9})$

เมื่อ $k = 1$ จะได้ $z_2 \;=\; \sqrt[3]{4}(\cos\frac{11\pi}{9} + i\sin\frac{11\pi}{9})$

เมื่อ $k = 2$ จะได้ $z_3 \;=\; \sqrt[3]{4}(\cos\frac{17\pi}{9} + i\sin\frac{17\pi}{9})$



เนื่องจาก $\sqrt{3} - i \;=\; 2(\cos\frac{11\pi}{6} \;+\; i\sin\frac{11\pi}{6})$

ให้ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นรากที่ 3 ของ $\sqrt{3} - i$

โดยทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์ จะได้ $r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) \;=\; 2(\cos\frac{11\pi}{6} \;+\; i\sin\frac{11\pi}{6})$

ดังนั้น $r^3 = 2$ และ $3\theta = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$ เมื่อ $k \in I$

65

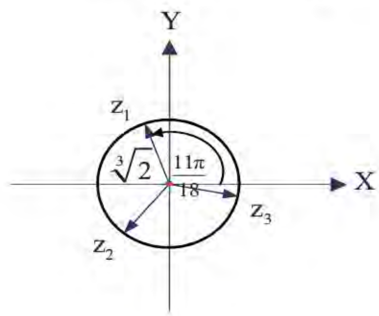
จึงได้ว่า $r = \sqrt[3]{2}$ และ $\theta = \frac{11\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$ เมื่อ $k \in I$

ฉะนั้น $z = \sqrt[3]{2}\left[\cos(\frac{11\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{11\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3})\right]$ เมื่อ $k \in I$

เมื่อ $k = 0$ จะได้ $z_1 = \sqrt[3]{2}(\cos\frac{11\pi}{18} + i\sin\frac{11\pi}{18})$

เมื่อ $k = 1$ จะได้ $z_2 = \sqrt[3]{2}(\cos\frac{23\pi}{18} + i\sin\frac{23\pi}{18})$

เมื่อ $k = 2$ จะได้ $z_3 = \sqrt[3]{2}(\cos\frac{35\pi}{18} + i\sin\frac{35\pi}{18})$



2. เนื่องจาก $1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$

ให้ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นรากที่ 2 ของ 1

โดยทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์ จะได้ $r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) = \cos 0 + i\sin 0$

ดังนั้น $r^1 = 1$ และ $2\theta = 0 + 2k\pi$ เมื่อ $k \in I$

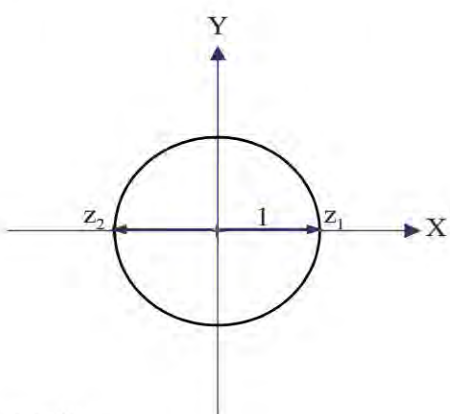
จึงได้ว่า $r = 1$ และ $\theta = k\pi$ เมื่อ $k \in I$

ฉะนั้น $z = 1(\cos k\pi + i\sin k\pi)$ เมื่อ $k \in I$

เมื่อ $k = 0$ จะได้ $z_1 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$

เมื่อ $k = 1$ จะได้ $z_2 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$

แสดงแผนภาพได้ดังนี้



เนื่องจาก $1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$

ให้ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นรากที่ 4 ของ 1

โดยทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์ จะได้ $r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta) = \cos 0 + i\sin 0$

ดังนั้น $r^4 = 1$ และ $4\theta = 0 + 2k\pi$ เมื่อ $k \in I$

จึงได้ว่า $r = 1$ และ $\theta = \frac{k\pi}{2}$ เมื่อ $k \in I$

ฉะนั้น $z = \cos\frac{k\pi}{2} + i\sin\frac{k\pi}{2}$ เมื่อ $k \in I$

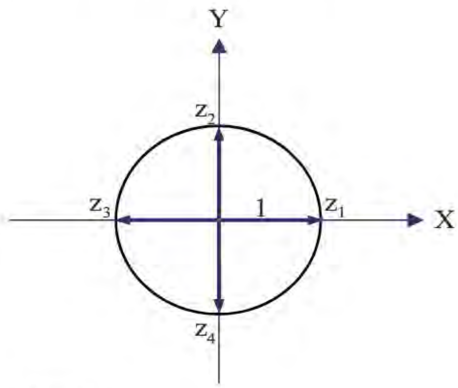
เมื่อ $k = 0$ จะได้ $z_1 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$

เมื่อ $k = 1$ จะได้ $z_2 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$

เมื่อ $k = 2$ จะได้ $z_3 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$

เมื่อ $k = 3$ จะได้ $z_4 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$

แสดงแผนภาพได้ดังนี้



เนื่องจาก $1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$

ให้ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นรากที่ 5 ของ 1

โดยทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์ จะได้ $r^5(\cos 5\theta + i\sin 5\theta) = \cos 0 + i\sin 0$

ดังนั้น $r^5 = 1$ และ $5\theta = 0 + 2k\pi$ เมื่อ $k \in I$

จึงได้ว่า $r = 1$ และ $\theta = \frac{2k\pi}{5}$ เมื่อ $k \in I$

ฉะนั้น $z = \cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5}$ เมื่อ $k \in I$

เมื่อ $k = 0$ จะได้ $z_1 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$

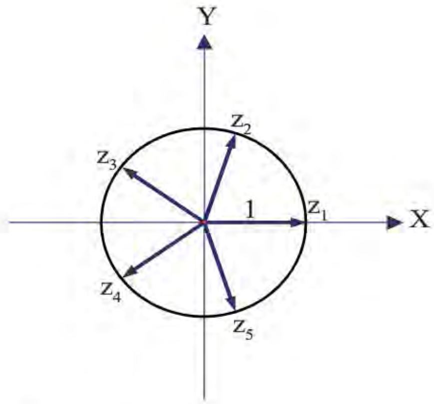
เมื่อ $k = 1$ จะได้ $z_2 = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$

เมื่อ $k = 2$ จะได้ $z_3 = \cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5}$

เมื่อ $k = 3$ จะได้ $z_4 = \cos\frac{6\pi}{5} + i\sin\frac{6\pi}{5}$

เมื่อ $k = 4$ จะได้ $z_5 = \cos\frac{8\pi}{5} + i\sin\frac{8\pi}{5}$

แสดงแผนภาพได้ดังนี้



เนื่องจาก $1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$

ให้ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นรากที่ 6 ของ 1

โดยทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์ จะได้ $r^6(\cos 6\theta + i\sin 6\theta) = \cos 0 + i\sin 0$

ดังนั้น $r^6 = 1$ และ $6\theta = 0 + 2k\pi$ เมื่อ $k \in I$

จึงได้ว่า $r = 1$ และ $\theta = \frac{k\pi}{3}$ เมื่อ $k \in I$

ฉะนั้น $z = \cos\frac{k\pi}{3} + i\sin\frac{k\pi}{3}$ เมื่อ $k \in I$

เมื่อ $k = 0$ จะได้ $z_1 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$

เมื่อ $k = 1$ จะได้ $z_2 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

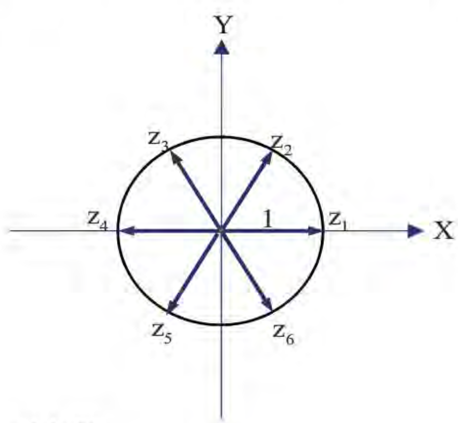
เมื่อ $k = 2$ จะได้ $z_3 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

เมื่อ $k = 3$ จะได้ $z_4 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$

เมื่อ $k = 4$ จะได้ $z_5 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

เมื่อ $k = 5$ จะได้ $z_6 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

แสดงแผนภาพได้ดังนี้



เนื่องจาก $1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$

ให้ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นรากที่ 8 ของ 1

โดยทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์ จะได้ $r^8(\cos 8\theta + i\sin 8\theta) = \cos 0 + i\sin 0$

ดังนั้น $r^8 = 1$ และ $8\theta = 0 + 2k\pi$ เมื่อ $k \in I$

จึงได้ว่า $r = 1$ และ $\theta = \frac{k\pi}{4}$ เมื่อ $k \in I$

ฉะนั้น $z = \cos\frac{k\pi}{4} + i\sin\frac{k\pi}{4}$ เมื่อ $k \in I$

เมื่อ $k = 0$ จะได้ $z_1 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$

เมื่อ $k = 1$ จะได้ $z_2 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

เมื่อ $k = 2$ จะได้ $z_3 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$

เมื่อ $k = 3$ จะได้ $z_4 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

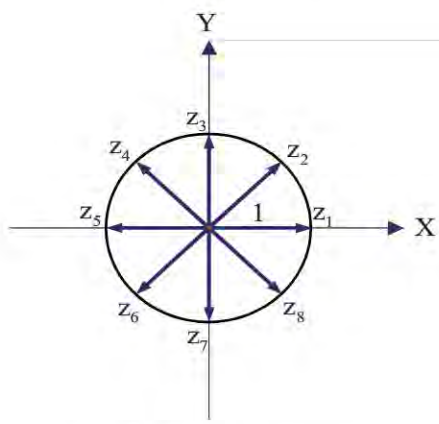
เมื่อ $k = 4$ จะได้ $z_5 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$

เมื่อ $k = 5$ จะได้ $z_6 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

เมื่อ $k = 6$ จะได้ $z_7 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$

เมื่อ $k = 7$ จะได้ $z_8 = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

แสดงแผนภาพได้ดังนี้



ให้ $a + bi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่งเป็นรากที่ 2 ของ i

ดังนั้น $i = (a + bi)^2 = (a^2 - b^2) + 2abi$

จะได้ $a^2 - b^2 = 0$ และ $2ab = 1$

$(a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 = 0 + 1 = 1$ หรือ $a^2 + b^2 = 1$

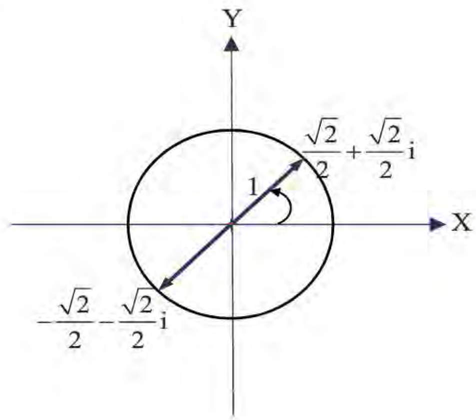
จาก $a^2 - b^2 = 0$ และ $a^2 + b^2 = 1$

จะได้ $2a^2 = 1$ และ $2b^2 = 1$

$a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ และ $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$

แต่เพราะ $2ab = 1$ ทำให้ได้ $\sqrt{i} = \pm(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}i}{2})$

แสดงแผนภาพได้ดังนี้



เนื่องจาก $i \ = \ 1(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

ให้ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นรากที่ 4 ของ i

โดยทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์ จะได้ $r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta) \ = \ \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$

ดังนั้น $r^4 = 1$ และ $4\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ เมื่อ $k \in I$

จึงได้ว่า $r = 1$ และ $\theta = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$ เมื่อ $k \in I$

ฉะนั้น $z = \left[\cos(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2})\right]$ เมื่อ $k \in I$

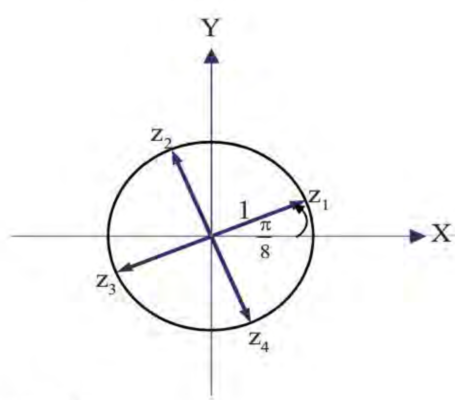
เมื่อ $k = 0$ จะได้ $z_1 \ = \ \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$

เมื่อ $k = 1$ จะได้ $z_2 \ = \ \cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8}$

เมื่อ $k = 2$ จะได้ $z_3 \ = \ \cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}$

เมื่อ $k = 3$ จะได้ $z_4 \ = \ \cos\frac{13\pi}{8} + i\sin\frac{13\pi}{8}$

แสดงแผนภาพได้ดังนี้



เนื่องจาก $i \ = \ 1(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

ให้ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นรากที่ 5 ของ i

โดยทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์ จะได้ $r^5(\cos 5\theta + i\sin 5\theta) = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$

ดังนั้น $r^5 = 1$ และ $5\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ เมื่อ $k \in I$

จึงได้ว่า $r = 1$ และ $\theta = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}$ เมื่อ $k \in I$

ฉะนั้น $z = \left[\cos(\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}) + i\sin(\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5})\right]$ เมื่อ $k \in I$

เมื่อ $k = 0$ จะได้ $z_1 = \cos\frac{\pi}{10} + i\sin\frac{\pi}{10}$

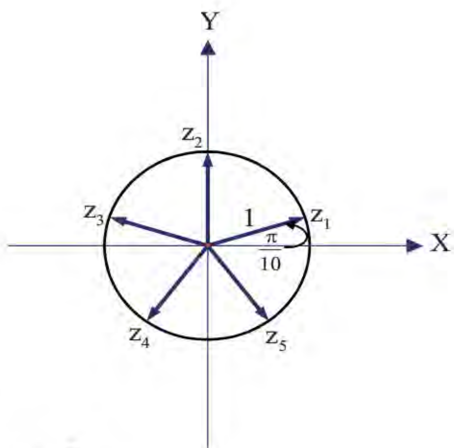
เมื่อ $k = 1$ จะได้ $z_2 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$

เมื่อ $k = 2$ จะได้ $z_3 = \cos\frac{9\pi}{10} + i\sin\frac{9\pi}{10}$

เมื่อ $k = 3$ จะได้ $z_4 = \cos\frac{13\pi}{10} + i\sin\frac{13\pi}{10}$

เมื่อ $k = 4$ จะได้ $z_5 = \cos\frac{17\pi}{10} + i\sin\frac{17\pi}{10}$

แสดงแผนภาพได้ดังนี้



เนื่องจาก $i = 1(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

ให้ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นรากที่ 6 ของ i

โดยทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์ จะได้ $r^6(\cos 6\theta + i\sin 6\theta) = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$

ดังนั้น $r^6 = 1$ และ $6\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ เมื่อ $k \in I$

จึงได้ว่า $r = 1$ และ $\theta = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}$ เมื่อ $k \in I$

ฉะนั้น $z = \left[\cos(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3})\right]$ เมื่อ $k \in I$

เมื่อ $k = 0$ จะได้ $z_1 = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$

เมื่อ $k = 1$ จะได้ $z_2 = \cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}$

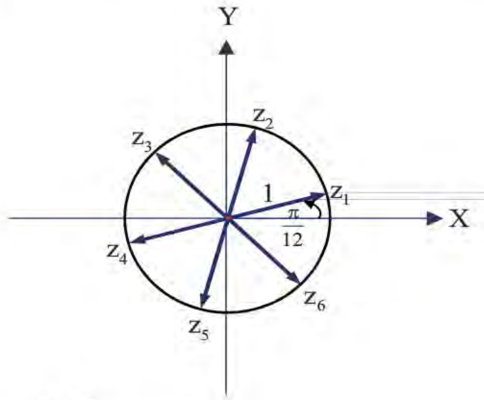
เมื่อ $k = 2$ จะได้ $z_3 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

เมื่อ $k = 3$ จะได้ $z_4 = \cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}$

เมื่อ $k = 4$ จะได้ $z_5 = \cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}$

เมื่อ $k = 5$ จะได้ $z_6 = \cos\frac{21\pi}{12} + i\sin\frac{21\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

แสดงแผนภาพได้ดังนี้



เนื่องจาก $i = 1(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

ให้ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นรากที่ 8 ของ i

โดยทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์ จะได้ $r^8(\cos 8\theta + i\sin 8\theta) = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$

ดังนั้น $r^8 = 1$ และ $8\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ เมื่อ $k \in I$

จึงได้ว่า $r = 1$ และ $\theta = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4}$ เมื่อ $k \in I$

ฉะนั้น $z = \left[\cos(\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4})\right]$ เมื่อ $k \in I$

เมื่อ $k = 0$ จะได้ $z_1 = \cos\frac{\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{16}$

เมื่อ $k = 1$ จะได้ $z_2 = \cos\frac{5\pi}{16} + i\sin\frac{5\pi}{16}$

เมื่อ $k = 2$ จะได้ $z_3 = \cos\frac{9\pi}{16} + i\sin\frac{9\pi}{16}$

เมื่อ $k = 3$ จะได้ $z_4 = \cos\frac{13\pi}{16} + i\sin\frac{13\pi}{16}$

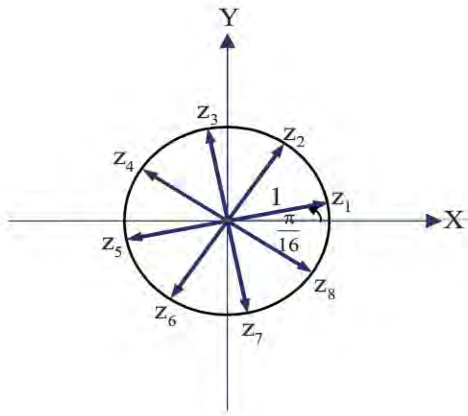
เมื่อ $k = 4$ จะได้ $z_5 = \cos\frac{17\pi}{16} + i\sin\frac{17\pi}{16}$

เมื่อ $k = 5$ จะได้ $z_6 = \cos\frac{21\pi}{16} + i\sin\frac{21\pi}{16}$

เมื่อ $k = 6$ จะได้ $z_7 = \cos\frac{25\pi}{16} + i\sin\frac{25\pi}{16}$

เมื่อ $k = 7$ จะได้ $z_8 = \cos\frac{29\pi}{16} + i\sin\frac{29\pi}{16}$

แสดงแผนภาพได้ดังนี้



3. เนื่องจาก $2+2\sqrt{3}i \;=\; 4\,(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

ให้ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นรากที่ 4 ของ $2+2\sqrt{3}i$

โดยทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์ จะได้ $r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta) \;=\; 4\,(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

ดังนั้น $r^4 = 4$ และ $4\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ เมื่อ $k \in I$

จึงได้ว่า $r = \sqrt{2}$ และ $\theta = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$ เมื่อ $k \in I$

ฉะนั้น $z = \sqrt{2}\left[\cos(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2})\right]$ เมื่อ $k \in I$

เมื่อ $k = 0$ จะได้ $z_1 \;=\; \sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$

เมื่อ $k = 1$ จะได้ $z_2 \;=\; \sqrt{2}\,(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12})$

เมื่อ $k = 2$ จะได้ $z_3 \;=\; \sqrt{2}\,(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12})$

เมื่อ $k = 3$ จะได้ $z_4 \;=\; \sqrt{2}\,(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12})$

4. เนื่องจาก $2-2\sqrt{3}i \;=\; 4\,(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})$

ให้ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นรากที่ 5 ของ $2-2\sqrt{3}i$

โดยทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์ จะได้ $r^5(\cos 5\theta + i\sin 5\theta) \;=\; 4\,(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})$

ดังนั้น $r^5 = 4$ และ $5\theta = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$ เมื่อ $k \in I$

จึงได้ว่า $r = \sqrt[5]{4}$ และ $\theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{5}$ เมื่อ $k \in I$

ฉะนั้น $z = \sqrt[5]{4}\left[\cos(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{5}) + i\sin(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{5})\right]$ เมื่อ $k \in I$

เมื่อ $k = 0$ จะได้ $z_1 = \sqrt[5]{4}\ (\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

เมื่อ $k = 1$ จะได้ $z_2 = \sqrt[5]{4}\ (\cos\frac{11\pi}{15} + i\sin\frac{11\pi}{15})$

เมื่อ $k = 2$ จะได้ $z_3 = \sqrt[5]{4}\ (\cos\frac{17\pi}{15} + i\sin\frac{17\pi}{15})$

เมื่อ $k = 3$ จะได้ $z_4 = \sqrt[5]{4}\ (\cos\frac{23\pi}{15} + i\sin\frac{23\pi}{15})$

เมื่อ $k = 4$ จะได้ $z_5 = \sqrt[5]{4}\ (\cos\frac{29\pi}{15} + i\sin\frac{29\pi}{15})$

5. 1) จาก $z^4 = 1+\sqrt{3}i$

ให้ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นรากที่ 4 ของ $1+\sqrt{3}i$

แต่ $z^4 = 1+\sqrt{3}i = 2\ (\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

โดยทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์

จะได้ $r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta) = 2\ (\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

ดังนั้น $r^4 = 2$ และ $4\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ เมื่อ $k \in I$

จึงได้ว่า $r = \sqrt[4]{2}$ และ $\theta = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$ เมื่อ $k \in I$

ฉะนั้น $z = \sqrt[4]{2}\left[\cos(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2})\right]$ เมื่อ $k \in I$

เมื่อ $k = 0$ จะได้ $z_1 = \sqrt[4]{2}\ (\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$

เมื่อ $k = 1$ จะได้ $z_2 = \sqrt[4]{2}\ (\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12})$

เมื่อ $k = 2$ จะได้ $z_3 = \sqrt[4]{2}\ (\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12})$

เมื่อ $k = 3$ จะได้ $z_4 = \sqrt[4]{2}\ (\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12})$

ดังนั้น จำนวนเชิงซ้อนที่สอดคล้องสมการ $z^4 = 1+\sqrt{3}i$ คือ $\sqrt[4]{2}\ (\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$, $\sqrt[4]{2}\ (\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12})$, $\sqrt[4]{2}\ (\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12})$ และ $\sqrt[4]{2}\ (\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12})$

2) จาก $z^5 + i = 0$ จะได้ $z^5 = -i$

ให้ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นรากที่ 5 ของ $-i$

แต่ $z^5 = -i = 1(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$

โดยทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์

จะได้ $r^5(\cos 5\theta + i\sin 5\theta) = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$

ดังนั้น $r^5 = 1$ และ $5\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ เมื่อ $k \in I$

จึงได้ว่า $r = 1$ และ $\theta = \frac{3\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}$ เมื่อ $k \in I$

ฉะนั้น $z = \left[\cos(\frac{3\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5}) + i\sin(\frac{3\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5})\right]$ เมื่อ $k \in I$

เมื่อ $k = 0$ จะได้ $z_1 = \cos\frac{3\pi}{10} + i\sin\frac{3\pi}{10}$

เมื่อ $k = 1$ จะได้ $z_2 = \cos\frac{7\pi}{10} + i\sin\frac{7\pi}{10}$

เมื่อ $k = 2$ จะได้ $z_3 = \cos\frac{11\pi}{10} + i\sin\frac{11\pi}{10}$

เมื่อ $k = 3$ จะได้ $z_4 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$

เมื่อ $k = 4$ จะได้ $z_5 = \cos\frac{19\pi}{10} + i\sin\frac{19\pi}{10}$

ดังนั้น จำนวนเชิงซ้อนที่สอดคล้องสมการ $z^5 + i = 0$ คือ $\cos\frac{3\pi}{10} + i\sin\frac{3\pi}{10}$, $\cos\frac{7\pi}{10} + i\sin\frac{7\pi}{10}$, $\cos\frac{11\pi}{10} + i\sin\frac{11\pi}{10}$, $-i$ และ $\cos\frac{19\pi}{10} + i\sin\frac{19\pi}{10}$

3) จาก $z^7 - 1 = 0$ จะได้ $z^7 = 1$

ให้ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นรากที่ 7 ของ 1

แต่ $z^7 = 1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$

โดยทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์

จะได้ $r^7(\cos 7\theta + i\sin 7\theta) = \cos 0 + i\sin 0$

ดังนั้น $r^7 = 1$ และ $7\theta = 0 + 2k\pi$ เมื่อ $k \in I$

จึงได้ว่า $r = 1$ และ $\theta = \frac{2k\pi}{7}$ เมื่อ $k \in I$

ฉะนั้น $z = \cos\frac{2k\pi}{7} + i\sin\frac{2k\pi}{7}$ เมื่อ $k \in I$

เมื่อ $k = 0$ จะได้ $z_1 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$

เมื่อ $k = 1$ จะได้ $z_2 = \cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}$

เมื่อ $k = 2$ จะได้ $z_3 = \cos\frac{4\pi}{7} + i\sin\frac{4\pi}{7}$

เมื่อ $k = 3$ จะได้ $z_4 = \cos\frac{6\pi}{7} + i\sin\frac{6\pi}{7}$

เมื่อ $k = 4$ จะได้ $z_5 = \cos\frac{8\pi}{7} + i\sin\frac{8\pi}{7}$

เมื่อ $k = 5$ จะได้ $z_6 = \cos\frac{10\pi}{7} + i\sin\frac{10\pi}{7}$

เมื่อ $k = 6$ จะได้ $z_7 = \cos\frac{12\pi}{7} + i\sin\frac{12\pi}{7}$

ดังนั้น จำนวนเชิงซ้อนที่สอดคล้องสมการ $z^7 - 1 = 0$ คือ 1, $\cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}$, $\cos\frac{4\pi}{7} + i\sin\frac{4\pi}{7}$, $\cos\frac{6\pi}{7} + i\sin\frac{6\pi}{7}$, $\cos\frac{8\pi}{7} + i\sin\frac{8\pi}{7}$, $\cos\frac{10\pi}{7} + i\sin\frac{10\pi}{7}$ และ $\cos\frac{12\pi}{7} + i\sin\frac{12\pi}{7}$

4) จาก $z^8+4+4i = 0$ จะได้ $z^8 = -4-4i$

ให้ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นรากที่ 8 ของ $-4-4i$

แต่ $z^8 = -4-4i = 4\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})$

โดยทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์

จะได้ $r^8(\cos 8\theta + i\sin 8\theta) = 4\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})$

ดังนั้น $r^8 = 4\sqrt{2}$ และ $8\theta = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ เมื่อ $k \in I$

จึงได้ว่า $r = \sqrt[8]{32}$ และ $\theta = \frac{5\pi}{32} + \frac{k\pi}{4}$ เมื่อ $k \in I$

ฉะนั้น $z = \sqrt[8]{32}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{32} + \frac{k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{32} + \frac{k\pi}{4}\right)\right]$ เมื่อ $k \in I$

เมื่อ $k = 0$ จะได้ $z_1 = \sqrt[8]{32}(\cos\frac{5\pi}{32} + i\sin\frac{5\pi}{32})$

เมื่อ $k = 1$ จะได้ $z_2 = \sqrt[8]{32}(\cos\frac{13\pi}{32} + i\sin\frac{13\pi}{32})$

เมื่อ $k = 2$ จะได้ $z_3 = \sqrt[8]{32}(\cos\frac{21\pi}{32} + i\sin\frac{21\pi}{32})$

เมื่อ $k = 3$ จะได้ $z_4 = \sqrt[8]{32}(\cos\frac{29\pi}{32} + i\sin\frac{29\pi}{32})$

เมื่อ $k = 4$ จะได้ $z_5 = \sqrt[8]{32}(\cos\frac{37\pi}{32} + i\sin\frac{37\pi}{32})$

เมื่อ $k = 5$ จะได้ $z_6 = \sqrt[8]{32}(\cos\frac{45\pi}{32} + i\sin\frac{45\pi}{32})$

เมื่อ $k = 6$ จะได้ $z_7 = \sqrt[8]{32}(\cos\frac{53\pi}{32} + i\sin\frac{53\pi}{32})$

เมื่อ $k = 7$ จะได้ $z_8 = \sqrt[8]{32}(\cos\frac{61\pi}{32} + i\sin\frac{61\pi}{32})$

ดังนั้น จำนวนเชิงซ้อนที่สอดคล้องสมการ $z^8+4+4i = 0$ คือ $\sqrt[8]{32}(\cos\frac{5\pi}{32} + i\sin\frac{5\pi}{32})$, $\sqrt[8]{32}(\cos\frac{13\pi}{32} + i\sin\frac{13\pi}{32})$, $\sqrt[8]{32}(\cos\frac{21\pi}{32} + i\sin\frac{21\pi}{32})$, $\sqrt[8]{32}(\cos\frac{29\pi}{32} + i\sin\frac{29\pi}{32})$, $\sqrt[8]{32}(\cos\frac{37\pi}{32} + i\sin\frac{37\pi}{32})$, $\sqrt[8]{32}(\cos\frac{45\pi}{32} + i\sin\frac{45\pi}{32})$, $\sqrt[8]{32}(\cos\frac{53\pi}{32} + i\sin\frac{53\pi}{32})$ และ $\sqrt[8]{32}(\cos\frac{61\pi}{32} + i\sin\frac{61\pi}{32})$

5) จาก $z^8+1 = 0$ จะได้ $z^8 = -1$

ให้ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นรากที่ 8 ของ -1

แต่ $z^8 = -1 = 1(\cos\pi + i\sin\pi)$

โดยทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์

จะได้ $r^8(\cos 8\theta + i\sin 8\theta) = \cos\pi + i\sin\pi$

ดังนั้น $r^8 = 1$ และ $8\theta = \pi + 2k\pi$ เมื่อ $k \in I$

จึงได้ว่า $r = 1$ และ $\theta = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$ เมื่อ $k \in I$

ฉะนั้น $z = \cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}\right)$ เมื่อ $k \in I$

เมื่อ $k = 0$ จะได้ $z_1 = \cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}$

เมื่อ $k = 1$ จะได้ $z_2 = \cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}$

เมื่อ $k = 2$ จะได้ $z_3 = \cos\frac{5\pi}{8}+i\sin\frac{5\pi}{8}$

เมื่อ $k = 3$ จะได้ $z_4 = \cos\frac{7\pi}{8}+i\sin\frac{7\pi}{8}$

เมื่อ $k = 4$ จะได้ $z_5 = \cos\frac{9\pi}{8}+i\sin\frac{9\pi}{8}$

เมื่อ $k = 5$ จะได้ $z_6 = \cos\frac{11\pi}{8}+i\sin\frac{11\pi}{8}$

เมื่อ $k = 6$ จะได้ $z_7 = \cos\frac{13\pi}{8}+i\sin\frac{13\pi}{8}$

เมื่อ $k = 7$ จะได้ $z_8 = \cos\frac{15\pi}{8}+i\sin\frac{15\pi}{8}$

ดังนั้น จำนวนเชิงซ้อนที่สอดคล้องสมการ $z^8 + 1 = 0$ คือ $\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}$, $\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}$, $\cos\frac{5\pi}{8}+i\sin\frac{5\pi}{8}$, $\cos\frac{7\pi}{8}+i\sin\frac{7\pi}{8}$, $\cos\frac{9\pi}{8}+i\sin\frac{9\pi}{8}$, $\cos\frac{11\pi}{8}+i\sin\frac{11\pi}{8}$, $\cos\frac{13\pi}{8}+i\sin\frac{13\pi}{8}$ และ $\cos\frac{15\pi}{8}+i\sin\frac{15\pi}{8}$

6) จาก $z^9 + 1 = 0$ จะได้ $z^9 = -1$

ให้ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นรากที่ 9 ของ -1

แต่ $z^9 = -1 = 1(\cos\pi + i\sin\pi)$

โดยทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์

จะได้ $r^9(\cos 9\theta + i\sin 9\theta) = \cos\pi + i\sin\pi$

ดังนั้น $r^9 = 1$ และ $9\theta = \pi + 2k\pi$ เมื่อ $k \in I$

จึงได้ว่า $r = 1$ และ $\theta = \frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{9}$ เมื่อ $k \in I$

ฉะนั้น $z = \cos\left(\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{9}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{9}\right)$ เมื่อ $k \in I$

เมื่อ $k = 0$ จะได้ $z_1 = \cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}$

เมื่อ $k = 1$ จะได้ $z_2 = \cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

เมื่อ $k = 2$ จะได้ $z_3 = \cos\frac{5\pi}{9}+i\sin\frac{5\pi}{9}$

เมื่อ $k = 3$ จะได้ $z_4 = \cos\frac{7\pi}{9}+i\sin\frac{7\pi}{9}$

เมื่อ $k = 4$ จะได้ $z_5 = \cos\pi+i\sin\pi = -1$

เมื่อ $k = 5$ จะได้ $z_6 = \cos\frac{11\pi}{9}+i\sin\frac{11\pi}{9}$

เมื่อ $k = 6$ จะได้ $z_7 = \cos\frac{13\pi}{9}+i\sin\frac{13\pi}{9}$

เมื่อ $k = 7$ จะได้ $z_8 = \cos\frac{15\pi}{9} + i\sin\frac{15\pi}{9} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

เมื่อ $k = 8$ จะได้ $z_9 = \cos\frac{17\pi}{9} + i\sin\frac{17\pi}{9}$

ดังนั้น จำนวนเชิงซ้อนที่สอดคล้องสมการ $z^9 + 1 = 0$ คือ $\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}$, $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\cos\frac{5\pi}{9} + i\sin\frac{5\pi}{9}$, $\cos\frac{7\pi}{9} + i\sin\frac{7\pi}{9}$, -1, $\cos\frac{11\pi}{9} + i\sin\frac{11\pi}{9}$, $\cos\frac{13\pi}{9} + i\sin\frac{13\pi}{9}$, $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ และ $\cos\frac{17\pi}{9} + i\sin\frac{17\pi}{9}$

แบบฝึกหัด 1.7

1. 1) เซตคำตอบของสมการ $2x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$ คือ $\{-1, \frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{2}}{2}i\}$
   2) เซตคำตอบของสมการ $2x^3 - x + 1 = 0$ คือ $\{-1, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\}$
   3) เซตคำตอบของสมการ $x^4 - x^3 + 7x^2 - 9x - 18 = 0$ คือ $\{-1, 2, 3i, -3i\}$
   4) เซตคำตอบของสมการ $x^4 - 6x^3 + 15x^2 - 22x + 12 = 0$ คือ $\{1, 3, 1 + \sqrt{3}i, 1 - \sqrt{3}i\}$
   5) เซตคำตอบของสมการ $x^4 - 6x^2 - 40 = 0$ คือ $\{\sqrt{10}, -\sqrt{10}, 2i, -2i\}$
   6) เซตคำตอบของสมการ $x^5 + 8x^4 + 24x^3 + 26x^2 - 17x - 42 = 0$ คือ $\{1, -2, -3, -2 + \sqrt{3}i, -2 - \sqrt{3}i\}$

2. ให้ $f(x) = x^5 + 9x^3 - 8x^2 - 72$

   จะได้ $f(-1 + \sqrt{3}i) = (-1 + \sqrt{3}i)^5 + 9(-1 + \sqrt{3}i)^3 - 8(-1 + \sqrt{3}i)^2 - 72$
   $= -16 - 16\sqrt{3}i + 72 + 16 + 16\sqrt{3}i - 72$
   $= 0$

   แสดงว่า $-1 + \sqrt{3}i$ เป็นคำตอบของ $f(x) = 0$

   จะได้ $-1 - \sqrt{3}i$ เป็นคำตอบของ $f(x) = 0$ ด้วย

   แต่ $[x - (-1 + \sqrt{3}i)][x - (-1 - \sqrt{3}i)] = x^2 + 2x + 4$

   และ $x^5 + 9x^3 - 8x^2 - 72 = 0 = (x^2 + 2x + 4)(x^3 - 2x^2 + 9x - 18)$
   $= (x^2 + 2x + 4)(x^2 + 9)(x - 2)$

   นั่นคือ $x^2 + 2x + 4 = 0$ หรือ $x^2 + 9 = 0$ หรือ $x - 2 = 0$

   จาก $x^2 + 9 = 0$

   จะได้ $x = 3i$ หรือ $x = -3i$

   ดังนั้น คำตอบที่เหลือทั้งหมดของสมการนี้คือ $-1 - \sqrt{3}i$, $3i$, $-3i$, 2

3. จากโจทย์ $3, -4, 3+i$ เป็นคำตอบของสมการ จะได้ $3-i$ เป็นคำตอบด้วย

จะได้ $(x-3)(x+4)[x-(3+i)][x-(3-i)] = 0$

$$(x^2+x-12)(x^2-6x+10) = 0$$

$$x^4-5x^3-8x^2+82x-120 = 0$$

$$k[x^4-5x^3-8x^2+82x-120] = 0$$ เมื่อ k เป็นจำนวนจริง ที่ $k \neq 0$

ดังนั้น $k[x^4-5x^3-8x^2+82x-120] = 0$ เมื่อ k เป็นจำนวนจริง ที่ $k \neq 0$ เป็นสมการพหุนามดีกรี 4 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มและมี $3, -4, 3+i$ และ $3-i$ เป็นคำตอบ

4. จากโจทย์ $2-2\sqrt{3}i$ และ $-4i$ เป็นคำตอบของสมการ

จะได้ $2+2\sqrt{3}i$ และ $4i$ เป็นคำตอบของสมการด้วย

$$[x-(2-2\sqrt{3}i)][(x-(2+2\sqrt{3}i)](x+4i)(x-4i) = 0$$

$$(x^2-4x+16)(x^2+16) = 0$$

$$x^4-4x^3+32x^2-64x+256 = 0$$

$$k(x^4-4x^3+32x^2-64x+256) = 0$$ เมื่อ k เป็นจำนวนจริง ที่ $k \neq 0$

ดังนั้น $k(x^4-4x^3+32x^2-64x+256) = 0$ เมื่อ k เป็นจำนวนจริง ที่ $k \neq 0$ เป็นสมการพหุนามดีกรี 4 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มและมี $2+2\sqrt{3}i$, $2-2\sqrt{3}i$, $4i$ และ $-4i$ เป็นคำตอบ

5. จากโจทย์ $-\frac{2}{3}$, $-1+i$, $3+\sqrt{3}i$ เป็นคำตอบของสมการ จะได้ $-1-i$, $3-\sqrt{3}i$ เป็นคำตอบด้วย

จะได้ $(x+\frac{2}{3})[x-(-1+i)][x-(-1-i)][x-(3+\sqrt{3}i)][x-(3-\sqrt{3}i)] = 0$

$$(x+\frac{2}{3})(x^2+2x+2)(x^2-6x+12) = 0$$

$$3x^5-10x^4-2x^3+40x^2+96x+48 = 0$$

$$k(3x^5-10x^4-2x^3+40x^2+96x+48) = 0$$ เมื่อ k เป็นจำนวนจริง ที่ $k \neq 0$

ดังนั้น $k[3x^5-10x^4-2x^3+40x^2+96x+48] = 0$ เมื่อ k เป็นจำนวนจริง ที่ $k \neq 0$ เป็นสมการพหุนามดีกรี 5 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มและมี $-\frac{2}{3}$, $-1+i$, $-1-i$, $3+\sqrt{3}i$ และ $3-\sqrt{3}i$ เป็นคำตอบ

6. ให้ $f(x) = x^2 - x + (i+1)$

$f(i) = i^2 - i + i + 1 = 0$

ดังนั้น i เป็นคำตอบของ $x^2 - x + (i+1) = 0$

$f(-i) = (-i)^2 - (-i) + i + 1$

$= -1 + i + i + 1 = 2i$

ดังนั้น $-i$ ไม่เป็นคำตอบหนึ่งของ $x^2 - x + (i+1) = 0$

สมการพหุนาม $x^2 - x + (i+1) = 0$ มี i เป็นคำตอบ แต่ $-i$ ไม่ใช่คำตอบ ผลนี้ไม่ขัดกับทฤษฎีที่กล่าวไว้ เพราะสมการพหุนาม $x^2 - x + (i+1) = 0$ ไม่ใช่สมการที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง

7. 1) จากโจทย์ $-3, -1, 4$ เป็นคำตอบของ $p(x) = 0$

$p(x) = a(x+3)(x+1)(x-4)$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงที่ $a \neq 0$

$p(x) = a(x^3 - 13x - 12)$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงที่ $a \neq 0$

$p(2) = a(2^3 - 13(2) - 12) = 5$

จะได้ $-30a = 5$

$a = -\frac{1}{6}$

ดังนั้น สมการที่มีสมบัติตามต้องการ คือ $-\frac{1}{6}(x^3 - 13x - 12) = 0$

2) จากโจทย์ $2, 5, -3$ เป็นคำตอบของ $p(x) = 0$

$p(x) = a(x-2)(x-5)(x+3)$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงที่ $a \neq 0$

$p(x) = a(x^3 - 4x^2 - 11x + 30)$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงที่ $a \neq 0$

$p(1) = a(1 - 4 - 11 + 30) = -4$

จะได้ $16a = -4$

$a = -\frac{1}{4}$

ดังนั้น สมการที่มีสมบัติตามต้องการ คือ $-\frac{1}{4}(x^3 - 4x^2 - 11x + 30) = 0$

8. 1) ดีกรีต่ำสุด คือ 4

2) ดีกรีต่ำสุด คือ 2

3) ดีกรีต่ำสุด คือ 4

4) ดีกรีต่ำสุด คือ 6

9. ให้ $p(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 28x + 52$

จาก $(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$

และ $p(x) = (x^2 - 6x + 13)(x^2 + 4x + 4)$

แสดงว่า -2 เป็นคำตอบซ้ำ 2 ครั้งของ $p(x) = 0$

ดังนั้น คำตอบที่เหลืออีก 2 คำตอบ คือ คำตอบของสมการพหุนามดีกรีสอง $x^2 - 6x + 13 = 0$

เนื่องจาก $x^2 - 6x + 13 = [x - (3+2i)][x - (3-2i)]$

ดังนั้น คำตอบที่เหลือของ $p(x) = 0$ คือ $3 + 2i,\ 3 - 2i$

10. ให้ $p(x) = x^5 + 9x^4 + 33x^3 + 55x^2 + 42x + 12$

จาก $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

และ $p(x) = (x^3 + 3x^2 + 3x + 1)(x^2 + 6x + 12)$

แสดงว่า -1 เป็นคำตอบซ้ำ 3 ครั้งของ $p(x) = 0$

ดังนั้น คำตอบที่เหลืออีก 2 คำตอบ คือ คำตอบของสมการพหุนามดีกรีสอง $x^2 + 6x + 12 = 0$

เนื่องจาก $x^2 + 6x + 12 = [x - (-3 + \sqrt{3}i)][x - (-3 - \sqrt{3}i)]$

ดังนั้น คำตอบที่เหลือของ $p(x) = 0$ คือ $-3 + \sqrt{3}i, -3 - \sqrt{3}i$

11. จากโจทย์ $1 + i$ เป็นคำตอบของสมการ จะได้ $1 - i$ เป็นคำตอบด้วย

เนื่องจาก $(x - (1+i))(x - (1-i)) = x^2 - 2x + 2$

และ $x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 22x + 12 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 - 5x + 6)$

ดังนั้น คำตอบที่เหลือคือคำตอบของสมการพหุนามดีกรีสอง $x^2 - 5x + 6 = 0$

เนื่องจาก $x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$

ดังนั้น คำตอบทั้งหมดของสมการพหุนามนี้ คือ $2, 3, 1 - i, 1 + i$

บทที่ 2

ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

(18 ชั่วโมง)

ทฤษฎีกราฟเป็นเรื่องที่สำคัญในสาระการเรียนรู้วิยุตคณิต (discrete mathematics) ซึ่งเริ่มต้นจากความพยายามในการตอบปัญหา ปัญหาหนึ่งซึ่งรู้จักกันดี คือปัญหาสะพานเคอนิกส์เบิร์ก (Königsberg – bridge problem) ปัญหามีอยู่ว่าเกาะ 2 เกาะ อยู่กลางแม่น้ำพรีเกล (Pregel) ในเมืองเคอนิกส์เบิร์กและมีสะพาน 7 สะพานเชื่อมระหว่างเกาะกับแผ่นดิน ชาวเมืองต่างพากันสงสัยว่าจะสามารถเดินข้ามสะพานทั้ง 7 สะพานโดยเดินผ่านแต่ละสะพานเพียงครั้งเดียวเท่านั้นและกลับมาที่จุดเริ่มต้นได้หรือไม่

กราฟที่จะศึกษานี้ ไม่ได้หมายถึงกราฟของความสัมพันธ์หรือกราฟของฟังก์ชัน แต่เป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ซึ่งใช้สำหรับจำลองปัญหาบางอย่างด้วยแผนภาพที่ประกอบด้วยจุดยอด และเส้นที่เชื่อมระหว่างจุดยอดสองจุด ตัวอย่างเช่น แผนภาพที่แสดงเส้นทางของรถไฟฟ้า BTS แผนภาพที่แสดงถนนที่เชื่อมเมืองต่าง ๆ แผนภาพแสดงโครงสร้างทางเคมีของสารประกอบไฮโดรคาร์บอน วงจรไฟฟ้า เป็นต้น วิชาที่ศึกษาเกี่ยวกับสมบัติต่าง ๆ ของกราฟ เรียกว่า ทฤษฎีกราฟ (graph theory) ปัจจุบันทฤษฎีกราฟมีการประยุกต์ใช้อย่างกว้างขวางในศาสตร์แขนงต่าง ๆ เช่น วิทยาศาสตร์ สังคมศาสตร์ เศรษฐศาสตร์ เป็นต้น แต่สำหรับในบทเรียนนี้จะกล่าวถึงเนื้อหาเพียงบางส่วนในทฤษฎีกราฟเท่านั้นซึ่งจะประกอบด้วย หัวข้อต่าง ๆ ดังนี้ กราฟ ดีกรีของจุดยอด แนวเดิน กราฟออยเลอร์ และการประยุกต์ของกราฟ

สาระสำคัญ ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการสอน ตัวอย่างกิจกรรมการเรียนการสอน การวัดและการประเมินผลที่นำเสนอ มีไว้เพื่อเป็นตัวอย่างในการจัดการเรียนการสอน การนำเข้าสู่บทเรียน การสอนหรือการฝึกทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ เพื่อให้ผู้เรียนมีความรู้ ความสามารถทางคณิตศาสตร์และมีคุณธรรม จริยธรรม และค่านิยมที่ดีงามต่อคณิตศาสตร์ ซึ่งผู้สอนสามารถเลือกหรือปรับใช้ได้ตามความเหมาะสม ในบทเรียนนี้มุ่งให้ผู้เรียนบรรลุผลการเรียนรู้ดังนี้

ผลการเรียนรู้

1. เขียนกราฟเมื่อกำหนดจุดยอด(vertex) และเส้นเชื่อม (edge) ให้ได้
2. ระบุได้ว่ากราฟที่กำหนดให้เป็นกราฟออยเลอร์หรือไม่
3. นำความรู้เรื่องกราฟไปใช้แก้ปัญหาบางประการได้

สาระสำคัญ

สาระสำคัญในบทเรียนนี้ มีดังต่อไปนี้

1. กราฟ G ประกอบด้วยเซตจำกัด 2 เซต คือ

1.1 เซตที่ไม่เป็นเซตว่างของจุดยอด(vertex) แทนด้วยสัญลักษณ์ V(G)

1.2 เซตของเส้นเชื่อม(edge) ที่เชื่อมระหว่างจุดยอด แทนด้วยสัญลักษณ์ E(G)

2. เส้นเชื่อมตั้งแต่ 2 เส้นที่เชื่อมระหว่างจุดยอดคู่เดียวกันเรียกว่า **เส้นเชื่อมขนาน** (parallel edges)

3. เส้นเชื่อมที่เชื่อมจุดยอดเพียงจุดเดียวเรียกว่า **วงวน** (loop)

4. จุดยอด u และ จุดยอด v ของกราฟเป็น **จุดยอดประชิด** (adjacent vertices) ก็ต่อเมื่อมีเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดทั้งสอง

5. เส้นเชื่อม e ของกราฟ**เกิดกับ** (incident) จุดยอด v ถ้าจุดยอด v เป็นจุดปลายจุดหนึ่งของเส้นเชื่อม e

6. **ดีกรี** (degree) ของจุดยอด v ในกราฟ คือ จำนวนครั้งทั้งหมดที่เส้นเชื่อมเกิดกับจุดยอด v ใช้สัญลักษณ์ deg v แทนดีกรีของจุดยอด v

7. **ทฤษฎีบท 1** ผลรวมของดีกรีของจุดยอดทุกจุดในกราฟเท่ากับสองเท่าของจำนวนเส้นเชื่อมในกราฟ

8. จุดยอดที่มีดีกรีเป็นจำนวนคู่ เรียกว่า **จุดยอดคู่** (even vertex)

9. จุดยอดที่มีดีกรีเป็นจำนวนคี่ เรียกว่า **จุดยอดคี่** (odd vertex)

10. **ทฤษฎีบท 2** ทุกกราฟจะมีจุดยอดคี่เป็นจำนวนคู่

11. ให้ u และ v เป็นจุดยอดของกราฟ **แนวเดิน u – v** (u – v walk) คือลำดับจำกัดของจุดยอดและเส้นเชื่อมสลับกัน $u = u_0, e_1, u_1, e_2, u_2, \ldots, u_{n-1}, e_n, u_n = v$ โดยเริ่มต้นที่จุดยอด u และสิ้นสุดที่จุดยอด v และแต่ละเส้นเชื่อม e_i จะเกิดกับจุดยอด u_{i-1} และ u_i เมื่อ $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$

12. กราฟ G เรียกว่า **กราฟเชื่อมโยง**(connected graph) ก็ต่อเมื่อสำหรับจุดยอด u และ v ที่เป็นจุดยอดต่างกันในกราฟ G จะมีแนวเดิน u – v

13. **วงจร** (circuit) คือ แนวเดินที่เส้นเชื่อมทั้งหมดแตกต่างกัน โดยมีจุดเริ่มต้นและจุดสุดท้ายเป็นจุดยอดเดียวกัน

14. **วงจรออยเลอร์** (Euler circuit) คือ วงจรที่ผ่านจุดยอดทุกจุดและเส้นเชื่อมทุกเส้นของกราฟ

15. กราฟที่มีวงจรออยเลอร์ เรียกว่า **กราฟออยเลอร์** (Eulerian graph)

16. **ทฤษฎีบท 3** กำหนดให้ G เป็นกราฟเชื่อมโยง G จะเป็นกราฟออยเลอร์ ก็ต่อเมื่อ จุดยอดทุกจุดของ G เป็นจุดยอดคู่

17. **ค่าน้ำหนัก** (weight) ของเส้นเชื่อม e ในกราฟ คือ จำนวนที่ไม่เป็นจำนวนลบที่กำหนดไว้บนเส้นเชื่อม e

18. **กราฟถ่วงน้ำหนัก** (weighted graph) คือ กราฟที่เส้นเชื่อมทุกเส้นมีค่าน้ำหนัก

19. **วิถี** (path) คือ แนวเดินในกราฟที่จุดยอดทั้งหมดแตกต่างกัน

20. **วิถีที่สั้นที่สุด** (shortest path) จากจุดยอด A ถึงจุดยอด Z ในกราฟถ่วงน้ำหนัก คือวิถี $A-Z$ ที่ผลรวมของค่าน้ำหนักของเส้นเชื่อมทุกเส้นในวิถี $A-Z$ น้อยที่สุด

21. **วัฏจักร** (cycle) คือ วงจรที่ไม่มีจุดยอดซ้ำกัน ยกเว้นจุดเริ่มต้นและจุดสุดท้าย

22. **ต้นไม้** (tree) คือ กราฟเชื่อมโยงที่ไม่มีวัฏจักร

23. **กราฟย่อย** (subgraph) ของกราฟ G คือกราฟที่ประกอบด้วยจุดยอดและเส้นเชื่อมใน G กล่าวคือ กราฟ H เป็นกราฟย่อยของกราฟ G ถ้า $V(H) \subset V(G)$ และ $E(H) \subset E(G)$

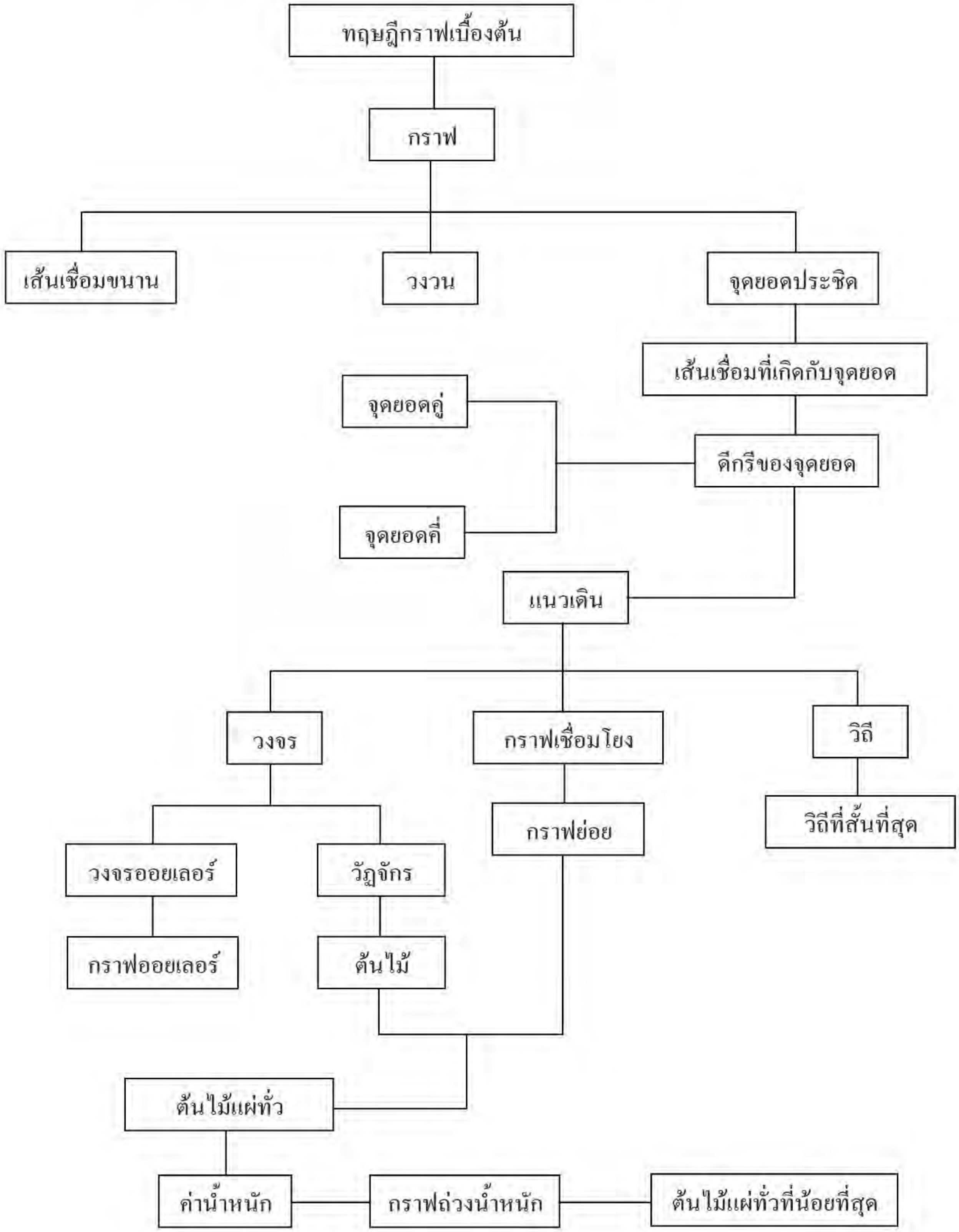
24. **ต้นไม้แผ่ทั่ว** (spanning tree) คือ ต้นไม้ซึ่งเป็นกราฟย่อยของกราฟเชื่อมโยง G ที่บรรจุจุดยอดทุกจุดของ G

25. **ต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุด** (minimal spanning tree) คือต้นไม้แผ่ทั่วที่มีผลรวมของค่าน้ำหนักของแต่ละเส้นเชื่อมน้อยที่สุด

หมายเหตุ ศัพท์ที่กล่าวถึงข้างต้นเป็นศัพท์ที่ใช้ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 4 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6 ของ สสวท. แต่หนังสือพจนานุกรมศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน พิมพ์ครั้งที่ 10 พ.ศ. 2553 ได้บัญญัติศัพท์บางคำใหม่ดังนี้

วัฏจักร บัญญัติศัพท์ใหม่เป็น วง
ต้นไม้ บัญญัติศัพท์ใหม่เป็น กราฟต้นไม้
ต้นไม้แผ่ทั่ว บัญญัติศัพท์ใหม่เป็น กราฟต้นไม้แบบแผ่ทั่ว
ต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุด บัญญัติศัพท์ใหม่เป็น กราฟต้นไม้แบบแผ่ทั่วที่น้อยที่สุด

สำหรับบทเรียนนี้ผู้สอนอาจจัดลำดับของเนื้อหาได้ดังแผนภาพ



ความรู้เพิ่มเติมสำหรับครู

การหาต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดจะแนะนำให้ผู้สอนรู้จัก 2 วิธี คือวิธีของครูสคัล และพริม

ขั้นตอนวิธีของครูสคัล (Kruskal's algorithm)

โจเซฟ เบอร์นาร์ด ครูสคัล (Joseph Bernard Kruskal) ได้เสนอวิธีการหาต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุด เมื่อปี ค.ศ. 1956 ซึ่งมีขั้นตอนการหาง่าย ๆ ดังนี้

1. เลือกเส้นเชื่อมที่มีน้ำหนักน้อยที่สุดมาหนึ่งเส้น ให้เส้นเชื่อมดังกล่าวเป็นกิ่งหนึ่งของต้นไม้แผ่ทั่วที่ต้องการหา
2. เลือกเส้นเชื่อมที่มีน้ำหนักน้อยที่สุดเส้นถัดไปซึ่งยังไม่เคยถูกเลือก และไม่ก่อให้เกิดวัฏจักรเมื่อรวมเส้นเชื่อมนี้เข้าเป็นส่วนหนึ่งของต้นไม้แผ่ทั่วที่ต้องการหา
3. เลือกเส้นเชื่อมต่อไปตามเงื่อนไขในขั้นตอนที่ 2 ไปเรื่อย ๆ จนกว่าจะเลือกเส้นเชื่อมได้เป็นจำนวน $n-1$ เส้น โดยที่ n คือจำนวนจุดยอดในกราฟ

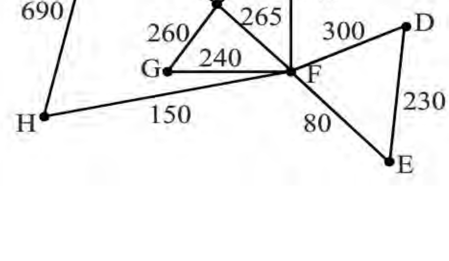
ขั้นตอนวิธีของพริม (Prim's algorithm)

ในปี ค.ศ. 1959 โรเบิร์ต พริม (Robert Prim) ได้เสนอวิธีการหาต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดอีกวิธีหนึ่ง ดังนี้

1. เลือกจุดยอดของกราฟมาหนึ่งจุด เป็นจุดเริ่มต้นของต้นไม้แผ่ทั่ว
2. เลือกเส้นเชื่อมที่มีน้ำหนักน้อยที่สุดซึ่งยังไม่เคยถูกเลือก ที่ติดกับจุดยอดของต้นไม้แผ่ทั่วที่หาได้ก่อนหน้านี้ และไม่ก่อให้เกิดวัฏจักรเมื่อรวมเส้นเชื่อมนี้เป็นส่วนหนึ่งของต้นไม้แผ่ทั่วที่ต้องการหา (นั่นคือเส้นเชื่อมที่เลือกมานี้ต้องติดกับจุดยอดของต้นไม้ที่หาได้เพียงจุดยอดเดียวเท่านั้น)
3. เลือกเส้นเชื่อมต่อไปตามเงื่อนไขในขั้นตอนที่ 2 ไปเรื่อย ๆ จนกว่าจะเลือกเส้นเชื่อมเป็นจำนวน $n-1$ เส้น โดยที่ n คือจำนวนจุดยอดในกราฟ

จากขั้นตอนวิธีของครูสคัล และพริมข้างต้น เพื่อให้ผู้สอนเกิดความเข้าใจขอยกตัวอย่างดังนี้

ตัวอย่างที่ 1 จากกราฟเชื่อมโยงแสดงค่าน้ำหนักที่กำหนดให้ จงหาต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดโดยใช้วิธีของครูสคัล



วิธีทำ

ขั้นที่ 1 เลือกเส้นเชื่อมที่มีน้ำหนักน้อยที่สุด คือ BC มีน้ำหนัก 70

ขั้นที่ 2 เลือกเส้นเชื่อมที่มีน้ำหนักน้อยที่สุดถัดไป คือ EF มีน้ำหนัก 80

ขั้นที่ 3 เลือกเส้นเชื่อมที่มีน้ำหนักน้อยที่สุดถัดไป คือ FH มีน้ำหนัก 150

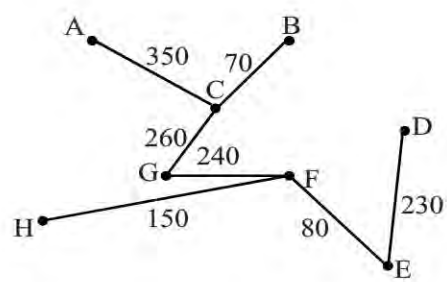
ขั้นที่ 4 เลือกเส้นเชื่อมที่มีน้ำหนักน้อยที่สุดถัดไป คือ DE มีน้ำหนัก 230

ขั้นที่ 5 เลือกเส้นเชื่อมที่มีน้ำหนักน้อยที่สุดถัดไป คือ GF มีน้ำหนัก 240

ขั้นที่ 6 เลือกเส้นเชื่อมที่มีน้ำหนักน้อยที่สุดถัดไป คือ CG มีน้ำหนัก 260

ขั้นที่ 7 เลือกเส้นเชื่อมที่มีน้ำหนักน้อยที่สุดถัดไป คือ AC มีน้ำหนัก 350

ตามขั้นตอนวิธีของครูสคัลจะได้ต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุด ดังรูป



หมายเหตุ ไม่เลือกเส้นเชื่อม CF ที่มีน้ำหนัก 265 เพราะจะเกิดวัฏจักร CFGC

ไม่เลือกเส้นเชื่อม DF ที่มีน้ำหนัก 300 เพราะจะเกิดวัฏจักร DEFD

ไม่เลือกเส้นเชื่อม BF ที่มีน้ำหนัก 340 เพราะจะเกิดวัฏจักร BCGFB

ไม่เลือกเส้นเชื่อม AH ที่มีน้ำหนัก 690 เพราะจะเกิดวัฏจักร AHFGCA

ขั้นตอนวิธีของครูสคัลใช้ได้ในกรณีของกราฟขนาดเล็ก แต่เมื่อกราฟขนาดใหญ่ไม่สะดวกที่ต้องเลือกเส้นเชื่อมที่มีน้ำหนักน้อยที่สุดตามลำดับค่าน้ำหนักที่เพิ่มขึ้น และไม่ให้เกิดวัฏจักร ดังนั้น เพื่อแก้ไขปัญหานี้ มีการใช้ขั้นตอนวิธีของพริม ซึ่งแตกต่างจากวิธีของครูสคัลในการหาต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุด โดยใช้การต่อเส้นเชื่อมออกจากจุดยอดที่เลือก ด้วยจุดยอดและเส้นเชื่อมที่เหลืออยู่ ครั้งละหนึ่งจุดยอด และหนึ่งเส้นเชื่อม เพื่อให้เห็นชัดเจนจะใช้ขั้นตอนวิธีของพริมกับกราฟในตัวอย่างที่ 1 ดังต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 2 จงใช้ขั้นตอนวิธีของพริมหาต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดของกราฟเชื่อมโยงในตัวอย่างที่ 1

วิธีทำ

ขั้นที่ 1 เลือกจุดยอด เช่น จุดยอด A

ขั้นที่ 2 เลือกเส้นเชื่อม AC ที่มีน้ำหนัก 350

ขั้นที่ 3 เลือกเส้นเชื่อม BC ที่มีน้ำหนัก 70

ขั้นที่ 4 เลือกเส้นเชื่อม CG ที่มีน้ำหนัก 260

ขั้นที่ 5 เลือกเส้นเชื่อม GF ที่มีน้ำหนัก 240

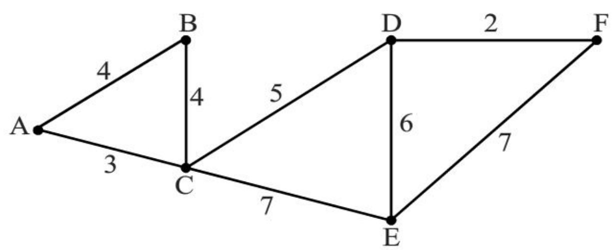
ขั้นที่ 6 เลือกเส้นเชื่อม FE ที่มีน้ำหนัก 80

ขั้นที่ 7 เลือกเส้นเชื่อม FH ที่มีน้ำหนัก 150

ขั้นสุดท้าย เลือกจุดยอด D ได้เส้นเชื่อม ED ที่มีน้ำหนัก 230

ตามขั้นตอนวิธีของพริมจะได้ต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุด เช่นเดียวกับขั้นตอนวิธีของครูสคัล ดังรูปข้างต้น

ตัวอย่างที่ 3 จงใช้ขั้นตอนวิธีของครูสคัลและพริมหาต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุด กำหนดให้เริ่มต้นที่ จุดยอด A สำหรับขั้นตอนวิธีของพริม



วิธีทำ

ตามขั้นตอนวิธีของครูสคัล จะเพิ่มเส้นเชื่อมตามลำดับ ของวิธีที่ 1 หรือวิธีที่ 2 ดังนี้

วิธีที่ 1 DF, AC, AB, CD, DE

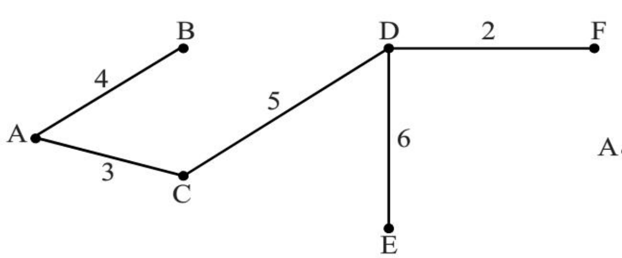
วิธีที่ 2 DF, AC, BC, CD, DE

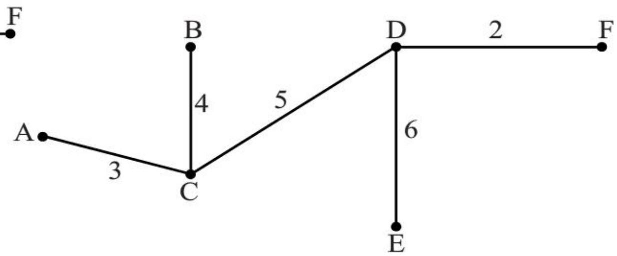
ตามขั้นตอนวิธีของพริม ซึ่งกำหนดให้เริ่มที่จุดยอด A จะเพิ่มเส้นเชื่อมตามลำดับได้ 2 วิธี ดังนี้

วิธีที่ 1 AC, AB, CD, DF, DE

วิธีที่ 2 AC, CB, CD, DF, DE

จะเห็นได้ว่าตามวิธีการทั้งของครูสคัลและพริม จะได้ต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดสองกราฟที่ไม่ซ้ำกัน

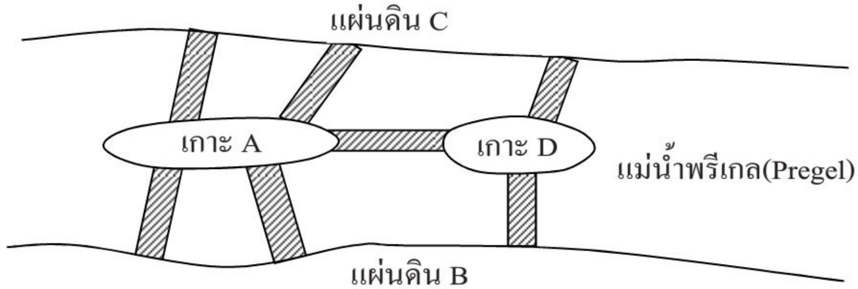




ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการสอน

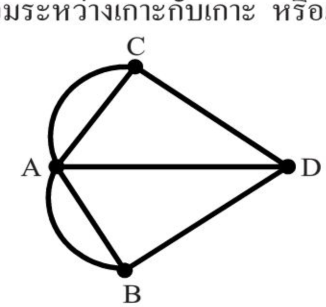
1. เรื่องกราฟเป็นเนื้อหาใหม่ซึ่งผู้เรียนไม่เคยเรียนมาก่อน ดังนั้นในการเริ่มต้นผู้สอนควรกล่าวถึงความเป็นมาให้ผู้เรียนทราบ ดังนี้

ทฤษฎีกราฟ เกิดขึ้นจากความพยายามในการตอบปัญหาต่าง ๆ ปัญหาหนึ่งที่รู้จักกันดีก็คือ ปัญหาสะพานเคอนิกส์เบิร์ก “Königsberg – bridge problem” ในประเทศเยอรมัน ปัญหามีอยู่ว่ามีเกาะ 2 เกาะ อยู่กลางแม่น้ำพรีเกล(Pregel) ในเมืองเคอนิกส์เบิร์กและมีสะพาน 7 สะพาน เชื่อมระหว่างเกาะกับแผ่นดิน ดังรูป



ชาวเมืองต่างพากันสงสัยว่าจะสามารถเดินข้ามสะพานทั้ง 7 สะพาน โดยเดินผ่านแต่ละสะพานเพียงครั้งเดียวเท่านั้นและกลับมาที่จุดเริ่มต้นได้หรือไม่

นักคณิตศาสตร์หลายคนได้พยายามแก้ปัญหานี้ โดยทดลองจนได้คำตอบว่าเป็นไปไม่ได้แต่ไม่มีใครสามารถแสดงข้อพิสูจน์ได้ จนกระทั่งปี ค.ศ. 1736 มีนักคณิตศาสตร์ชาวสวิตเซอร์แลนด์ชื่อ เลออนฮาร์ด ออยเลอร์ (Leonhard Euler) ได้ไขปริศนานี้ด้วยการแปลงปัญหาดังกล่าวเป็นกราฟโดยให้จุดยอดแทนแผ่นดินและเกาะ และเส้นเชื่อมแทนสะพานที่เชื่อมระหว่างเกาะกับเกาะ หรือเกาะกับแผ่นดินดังรูป (1)



รูป (1)

ออยเลอร์ได้ตอบปัญหานี้ว่า เป็นไป**ไม่ได้**ที่จะหาเส้นทางดังกล่าว

ผู้สอนให้ผู้เรียนลองหาคำตอบของปัญหานี้โดยใช้คำถามนำ เช่น

1) จากรูปกราฟที่ใช้แทนปัญหาสะพานเคอนิกส์เบิร์ก ผู้เรียนสามารถใช้ดินสอเขียนกราฟดังกล่าวโดยมีเงื่อนไขว่าต้องไม่ลากซ้ำเส้นที่ลากแล้ว และกลับมาที่จุดเริ่มต้น โดยไม่ยกดินสอได้หรือไม่

ในที่นี้ผู้สอนอาจให้ผู้เรียนได้ลงมือปฏิบัติ 2 วิธี คือ

วิธีที่ 1 ผู้สอนกำหนดจุดยอดแล้วให้ผู้เรียนเขียนกราฟ

วิธีที่ 2 ผู้สอนให้ผู้เรียนใช้ดินสอสีเขียนตามเส้นเชื่อมต่าง ๆ บนรูป (1)

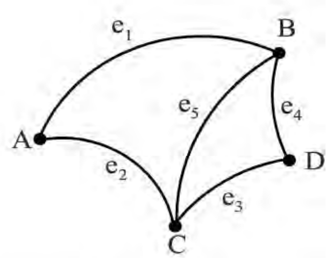
2) ผู้เรียนสามารถนำผลของคำตอบในข้อ 1 มาตอบปัญหาสะพานเคอนิกส์เบิร์กได้หรือไม่

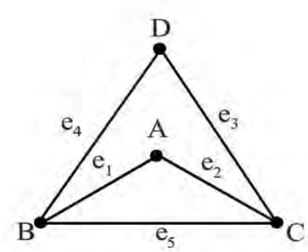
จากนั้นผู้สอนอธิบายแนวทางการตอบปัญหาของออยเลอร์ โดยพิจารณาจากกราฟข้างต้นจะพบว่า เมื่อเริ่มต้นเดินจากจุดยอดใด ๆ จะต้องเดินผ่านทุกเส้นเชื่อมเพียงครั้งเดียว แล้วกลับมาที่จุดเริ่มต้นนั้นเป็นไปไม่ได้ เนื่องจากไม่ว่าจะเริ่มต้นออกจากจุดยอดใดก็ตามเพื่อให้กลับมายังจุดเริ่มต้นนั้นอีกครั้ง จะต้องมีการเดินเข้าจุดยอดนั้นเสมอโดยเส้นเชื่อมที่ต่างกัน ดังนั้นจำนวนเส้นเชื่อมที่ออกจากจุดยอดแต่ละจุดในกราฟต้องเป็นจำนวนคู่ ซึ่งจากกราฟข้างต้นจะพบว่าไม่มีจุดยอดใดเลยที่มีเส้นเชื่อมออกจากจุดยอดเป็นจำนวนคู่

เมื่อผู้เรียนทราบความเป็นมาของทฤษฎีกราฟแล้ว ผู้สอนจึงเริ่มต้นสอนตามลำดับหัวข้อต่างๆ เนื่องจากทฤษฎีกราฟเบื้องต้นมีคำศัพท์ที่ผู้เรียนต้องรู้จักเพิ่มขึ้นมาก ผู้สอนจึงควรยกตัวอย่างให้ผู้เรียนทราบถึงความหมายของคำศัพท์แต่ละคำ

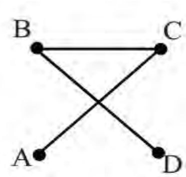
2. เส้นเชื่อม e แทนด้วยสัญลักษณ์ AB หรือ BA หมายถึง เส้นที่เชื่อมระหว่างจุดยอด A และจุดยอด B บทนิยาม

3. ในการเขียนกราฟนั้น จะกำหนดตำแหน่งของจุดยอด ณ ตำแหน่งใด ก็ได้ และจะลากเส้นเชื่อมของกราฟเป็นส่วนของเส้นตรงหรือเส้นโค้งที่มีความยาวเป็นเท่าใดก็ได้ เช่น กราฟต่อไปนี้ ถือว่าเป็นกราฟเดียวกัน

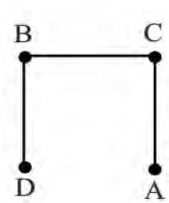




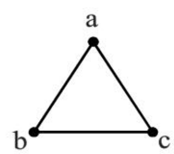
เส้นเชื่อมสองเส้นของกราฟ อาจลากตัดกันได้โดยที่จุดตัดของเส้นเชื่อมทั้งสองไม่ถือว่าเป็นจุดยอดของกราฟ เช่น กราฟ



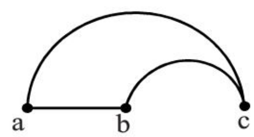
สามารถเขียนโดยมีเส้นเชื่อมไม่ตัดกันได้ดังนี้



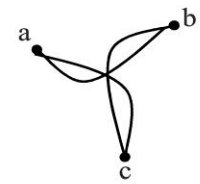
กำหนดกราฟ G เมื่อ V(G) = {a, b, c} และ E(G) = {ab, ac, bc} สามารถเขียนกราฟ G ได้หลายแบบ เช่น รูป (2), (3) หรือ (4)



รูป (2)



รูป (3)



รูป (4)

4. ผู้สอนให้ข้อตกลงเกี่ยวกับดีกรีของจุดยอดที่มีวงวน และดีกรีของจุดยอดที่ไม่มีเส้นเชื่อม ดังนี้

1) 

เส้นเชื่อมที่เกิดกับจุดยอด a ดังรูป ให้ถือว่าเป็น 1 เส้น

จะได้ว่าดีกรีของจุดยอด a คือ 2 ดังนั้นวงวนแต่ละวงวนจะมีดีกรี 2

2) จุดยอดที่ไม่มีเส้นเชื่อม ให้ถือว่า ดีกรีของจุดยอดเป็นศูนย์

5. ผู้สอนควรยกตัวอย่างหลาย ๆ ตัวอย่างเพื่อให้ผู้เรียนหาดีกรีของจุดยอดแต่ละจุดของกราฟที่กำหนดให้ได้ อาจยกตัวอย่างโดยกำหนดดีกรีของจุดยอดแต่ละจุดของกราฟ แล้วให้ผู้เรียนเขียนกราฟ เช่น

จงเขียนกราฟต่อไปนี้

1) กราฟ G_1 เมื่อ $V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$

และ $\deg v_1 = 7$ $\deg v_2 = 6$ $\deg v_3 = 3$ $\deg v_4 = 2$ $\deg v_5 = 2$

$\deg v_6 = 0$ $\deg v_7 = 0$

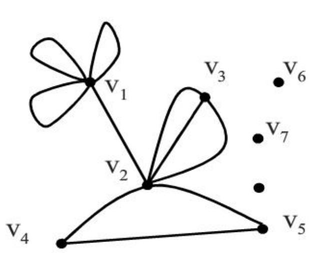
2) กราฟ G_2 เมื่อ $V(G_2) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$

และ $\deg v_1 = 5$ $\deg v_2 = 4$ $\deg v_3 = 3$ $\deg v_4 = 3$ $\deg v_5 = 4$

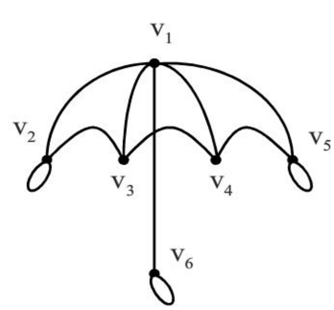
$\deg v_6 = 3$

จะได้ตัวอย่างกราฟ G_1 และ G_2 ดังรูป

G_1 :

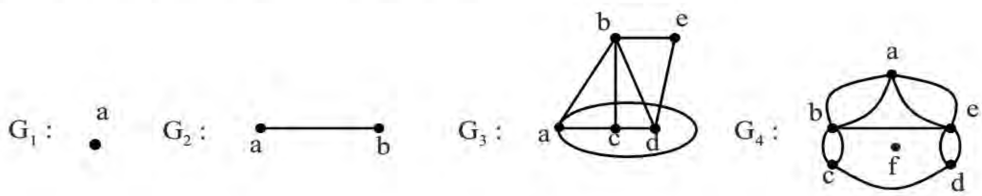


G_2 :



6. ผู้สอนอาจยกตัวอย่างกราฟเพื่อให้ผู้เรียนหาข้อสรุปให้ได้ว่า "ผลรวมของดีกรีของจุดยอดทุกจุดในกราฟเท่ากับสองเท่าของจำนวนเส้นเชื่อมในกราฟ" ดังนี้

จงพิจารณาผลบวกของดีกรีของจุดยอดทุกจุดในกราฟ ว่ามีความสัมพันธ์กับจำนวนเส้นเชื่อมในกราฟอย่างไร เมื่อกำหนดกราฟ G_1, G_2, G_3 และ G_4 ดังรูป



จากกราฟข้างต้นสามารถเขียนตารางแสดงความสัมพันธ์ของผลบวกของดีกรีของจุดยอดทุกจุดในกราฟ และจำนวนเส้นเชื่อมในกราฟ ได้ดังนี้

กราฟ	จำนวนเส้นเชื่อม	ผลบวกของดีกรีของจุดยอดทุกจุดของกราฟ	จำนวนจุดยอดคี่	จำนวนจุดยอดคู่
G_1	0	0	0	1
G_2	1	2	2	0
G_3	8	16	2	3
G_4	10	20	4	2

ผู้สอนอาจตั้งคำถามดังนี้

1) จากตารางข้างต้นสามารถบอกได้หรือไม่ว่า ผลบวกของดีกรีของจุดยอดทุกจุดของกราฟเท่ากับสองเท่าของจำนวนเส้นเชื่อม

2) จากตารางข้างต้นสามารถบอกได้หรือไม่ว่า จุดยอดคี่ของกราฟต้องมีเป็นจำนวนคู่

ผู้สอนให้ทฤษฎีบท 1 และทฤษฎีบท 2 พร้อมการพิสูจน์ และควรเน้นให้ผู้เรียนเข้าใจทฤษฎีบท 1 และ ทฤษฎีบท 2 เพราะทฤษฎีบททั้งสองสามารถนำไปใช้ในการตัดสินใจเพื่อแก้ปัญหาบางปัญหาในชีวิตประจำวันได้ เช่น

ตัวอย่างที่ 1 ผลการสำรวจข้อมูลการใช้โทรศัพท์ของพนักงานในบริษัทดีเด่นซึ่งมีพนักงาน 20 คน ในสัปดาห์ที่ผ่านมาพบว่า มีพนักงาน 15 คน แต่ละคนโทรศัพท์ถึงเพื่อน 5 ครั้ง มีพนักงาน 5 คน

แต่ละคนโทรศัพท์ถึงเพื่อน 3 ครั้ง จงหาจำนวนการใช้โทรศัพท์ของพนักงานในบริษัทดีเด่นตามเงื่อนไขที่โจทย์กำหนด

วิธีทำ แปลงปัญหาเป็นกราฟ โดยให้ จุดยอดแทนพนักงาน เส้นเชื่อมแทนการโทรศัพท์ของพนักงาน จะได้ว่า กราฟมีจุดยอดที่มีดีกรี 5 จำนวน 15 จุด และจุดยอดที่มีดีกรี 3 มีจำนวน 5 จุด จำนวนการใช้โทรศัพท์ของพนักงาน คือจำนวนเส้นเชื่อมทั้งหมดของกราฟ ให้กราฟมีเส้นเชื่อม n เส้น จากทฤษฎีบท 1 ผลรวมของดีกรีของจุดยอดทุกจุดในกราฟเท่ากับสองเท่าของจำนวนเส้นเชื่อมในกราฟ

ดังนั้น $5(15) + 3(5) = 2n$

$75 + 15 = 2n$

$n = 45$

ดังนั้นจำนวนการใช้โทรศัพท์ของพนักงานในบริษัทดีเด่นตามเงื่อนไขที่โจทย์กำหนด คือ 45 ครั้ง

ตัวอย่างที่ 2 จังหวัดหนึ่งมีอำเภออยู่ 17 อำเภอ ต้องการสร้างถนนเชื่อมอำเภอเหล่านี้ โดยให้แต่ละอำเภอมีถนนเชื่อมกับอำเภออื่นอีก 3 สายพอดี จงหาว่าสามารถสร้างถนนตามเงื่อนไขดังกล่าวได้หรือไม่

วิธีทำ แปลงปัญหาเป็นกราฟ โดยให้ จุดยอดแทนอำเภอ เส้นเชื่อมแทนถนน กราฟมีจุดยอด 17 จุด และแต่ละจุดยอดมีดีกรี 3 จะได้ว่า กราฟมีจุดยอดคี่ จำนวน 17 จุด ขัดแย้งกับทฤษฎีบท 2 นั่นคือการสร้างถนนตามเงื่อนไขดังกล่าวไม่สามารถแปลงเป็นกราฟได้ ดังนั้นการสร้างถนนตามเงื่อนไขโจทย์จึงเป็นไปไม่ได้

หมายเหตุ ในการสอนตัวอย่างที่ 1 และ 2 ผู้สอนควรใช้คำถามนำเพื่อให้ผู้เรียนสามารถหาคำตอบได้ด้วยตนเอง โดยอาจตั้งคำถามดังนี้

1) ปัญหาของโจทย์สามารถใช้ความรู้เกี่ยวกับกราฟแก้ปัญหาได้หรือไม่
2) จากข้อ 1 ถ้าได้ จะกำหนดให้จุดยอด และเส้นเชื่อมแทนอะไร
3) คำตอบของปัญหาคือส่วนใดในกราฟ

ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการสอนในบางหัวข้อจะขอนำไปกล่าวถึงพร้อมกับตัวอย่างกิจกรรมที่ส่งเสริมทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ดังต่อไปนี้

ตัวอย่างกิจกรรมที่ส่งเสริมทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

ตัวอย่างกิจกรรมการเรียนการสอนที่นำเสนอในคู่มือครูเล่มนี้ เป็นกิจกรรมที่ผู้สอนสามารถเลือกนำไปใช้ประกอบในการจัดการเรียนรู้แต่ละคาบได้ โดยมีตัวอย่างกิจกรรมดังนี้

ดีกรีของจุดยอด

เมื่อผู้สอนให้ทฤษฎีบท 1 และทฤษฎีบท 2 พร้อมการพิสูจน์ แล้วอาจยกตัวอย่างเหตุการณ์เพื่อให้ผู้เรียนเข้าใจทฤษฎีบท และสามารถนำทฤษฎีบทไปใช้แก้ปัญหาบางปัญหาได้ เช่น

ตัวอย่างที่ 1 อาจารย์วันดีให้ผู้เรียนส่งตัวแทนออกมาหน้าชั้นเรียน 2 กลุ่มๆ ละ 5 คน แล้วให้ผู้เรียนภายในกลุ่มจับมือกัน ดังนี้

กลุ่มที่ 1 นิตยา นิพนธ์ นิภา นิมิต และ นิยม แต่ละคนจับมือกับเพื่อนในกลุ่ม เป็นจำนวน 4, 3, 2, 2 และ 1 ครั้ง ตามลำดับ

กลุ่มที่ 2 อรจิต อรทัย อรนุช อรพรรณ และ อรพิน แต่ละคนจับมือกับเพื่อนในกลุ่ม เป็นจำนวน 4, 3, 2, 1 และ 1 ครั้ง ตามลำดับ

จงพิจารณาว่าผู้เรียนทั้งสองกลุ่มสามารถทำตามคำสั่งของอาจารย์วันดีได้หรือไม่

วิธีทำ พิจารณากลุ่มที่ 1 แปลงปัญหาเป็นกราฟ

โดยให้ จุดยอดแทนผู้เรียน

เส้นเชื่อมแทนการจับมือของผู้เรียนในกลุ่ม

กราฟมีจุดยอด 5 จุด และดีกรีของจุดยอด 4, 3, 2, 2 และ 1

จะได้ว่ากราฟมีจุดยอดคี่เป็นจำนวนคู่ สอดคล้องกับทฤษฎีบท 2

ดังนั้น ผู้เรียนกลุ่มที่ 1 สามารถทำตามคำสั่งของอาจารย์วันดีได้

พิจารณากลุ่มที่ 2 แปลงปัญหาเป็นกราฟ

โดยให้ จุดยอดแทนผู้เรียน

เส้นเชื่อมแทนการจับมือของผู้เรียนในกลุ่ม

กราฟมีจุดยอด 5 จุด และดีกรีของจุดยอด 4, 3, 2, 1 และ 1

จะได้ว่ากราฟมีจุดยอดคี่เป็นจำนวนคี่ ขัดแย้งกับทฤษฎีบท 2

ดังนั้น ผู้เรียนกลุ่มที่ 2 ไม่สามารถทำตามคำสั่งของอาจารย์วันดีได้

จากคำตอบข้างต้นจงหาจำนวนครั้งของการจับมือกันในกลุ่มของผู้เรียนกลุ่มที่ 1

วิธีทำ จำนวนครั้งของการจับมือกันในกลุ่ม คือ จำนวนเส้นเชื่อมในกราฟ

ให้กราฟมีเส้นเชื่อม n เส้น

จากทฤษฎีบท 1 ผลรวมของดีกรีของจุดยอดทุกจุดในกราฟ เท่ากับสองเท่าของจำนวน

เส้นเชื่อมในกราฟ

ดังนั้น $4 + 3 + 2 + 2 + 1 = 2n$

$$12 = 2n$$

$$n = 6$$

ดังนั้น ผู้เรียนกลุ่มที่ 1 มีการจับมือกันในกลุ่ม 6 ครั้ง

ผู้สอนอาจนำตัวอย่างข้างต้นมาจัดเป็นกิจกรรมในชั้นเรียนแล้วให้ผู้เรียนทดลองให้เห็นจริงด้วยตนเอง

ตัวอย่างที่ 2 การแข่งขันฟุตบอลมีทีมสมัครแข่งขัน 10 ทีม ในการจัดแข่งขันครั้งนี้จะจัดการแข่งขันเป็นแบบพบกันหมด จงหาจำนวนครั้งที่จัดการแข่งขัน

วิธีทำ แปลงปัญหาเป็นกราฟ

โดยให้ จุดยอดแทนทีมฟุตบอล

เส้นเชื่อมแทนการแข่งขัน

ทีมฟุตบอล 10 ทีม จัดแข่งขันเป็นแบบพบกันหมด แสดงว่าแต่ละทีมต้องแข่งขันกับทีมอื่น ๆ อีก 9 ทีม นั่นคือแต่ละจุดยอดของกราฟมีดีกรี 9

จำนวนครั้งที่จัดการแข่งขัน คือ จำนวนเส้นเชื่อมในกราฟ

ให้กราฟมีเส้นเชื่อม n เส้น

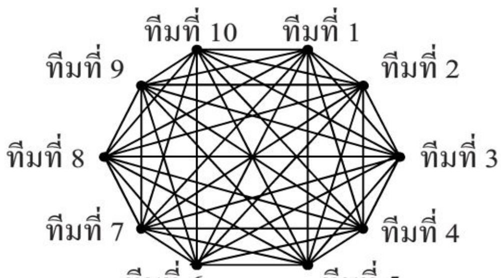
ดังนั้น $9(10) = 2n$

$$90 = 2n$$

$$n = 45$$

ดังนั้น ต้องจัดการแข่งขันฟุตบอล 45 ครั้ง หรือ 45 คู่

ตัวอย่างที่ 2 สามารถเขียนกราฟ ได้ดังรูป



ตัวอย่างข้างต้นผู้สอนอาจให้ผู้เรียนหาคำตอบของปัญหาโดยการนับจำนวนเส้นเชื่อมในกราฟจากการเขียนกราฟก่อน แล้วจึงนำทฤษฎีบท 1 มาใช้แก้ปัญหา เพื่อให้ผู้เรียนมองเห็นคุณค่าของวิชาคณิตศาสตร์

หรือผู้สอนอาจแนะนำแนวคิดในการหาคำตอบของปัญหาให้กับผู้เรียนดังนี้

โยงเส้นเชื่อมจากทีมที่ 1 ไปยังทีมที่ 2 – 10 ได้ 9 เส้น

โยงเส้นเชื่อมจากทีมที่ 2 ไปยังทีมที่ 3 – 10 ได้ 8 เส้น

โยงเส้นเชื่อมจากทีมที่ 3 ไปยังทีมที่ 4 – 10 ได้ 7 เส้น

⋮

โยงเส้นเชื่อมจากทีมที่ 9 ไปยังทีมที่ 10 ได้ 1 เส้น

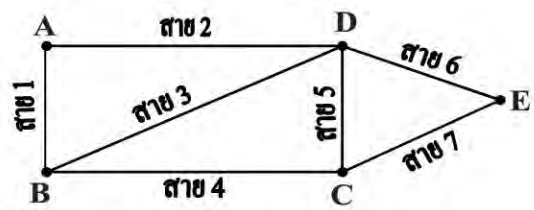
ดังนั้น จำนวนเส้นเชื่อมทั้งหมดในกราฟนี้คือ $9 + 8 + 7 + ... + 1 = 45$

แต่ในกรณีที่มีจำนวนทีมมากผู้สอนไม่จำเป็นให้ผู้เรียนเขียนกราฟ เพราะผู้เรียนสามารถใช้ ทฤษฎีบท 1 ในการหาคำตอบนี้ได้

แนวเดิน

ผู้สอนนำเข้าสู่บทเรียน โดยนำสนทนากับผู้เรียนเรื่องเส้นทางการเดินทางจากบ้านมาโรงเรียน แล้วยกตัวอย่างเหตุการณ์ในชีวิตประจำวัน เช่น

ในอำเภอหนึ่งมีตำบลอยู่ 5 ตำบล ได้แก่ ตำบล A, B, C, D และ E ระหว่างตำบลต่าง ๆ จะมีถนนเชื่อม ซึ่งแสดงแผนผังด้วยกราฟโดยให้ จุดยอดแทนตำบล เส้นเชื่อมแทนถนน ดังรูป



กำหนดเส้นทาง ดังนี้

เส้นทางที่ 1 ตำบล A $\xrightarrow{\text{สาย 1}}$ ตำบล B $\xrightarrow{\text{สาย 1}}$ ตำบล A $\xrightarrow{\text{สาย 2}}$ ตำบล D $\xrightarrow{\text{สาย 5}}$ ตำบล C $\xrightarrow{\text{สาย 5}}$
ตำบล D $\xrightarrow{\text{สาย 5}}$ ตำบล C

เส้นทางที่ 2 ตำบล A $\xrightarrow{\text{สาย 2}}$ ตำบล D $\xrightarrow{\text{สาย 3}}$ ตำบล B

ผู้สอนบอกผู้เรียนว่าเส้นทางดังกล่าวเราสามารถเขียนให้อยู่ในรูปลำดับของจุดยอดและเส้นเชื่อมสลับกันได้ ดังนี้

เส้นทางที่ 1 มีลำดับคือ A, AB, B, BA, A, AD, D, DC, C, CD, D, DC, C

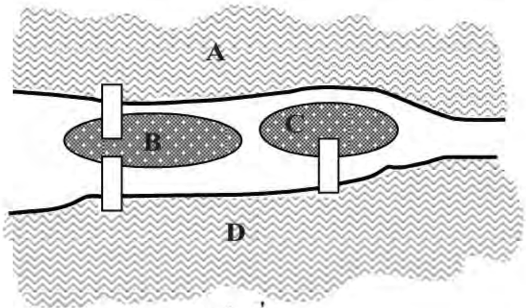
เส้นทางที่ 2 มีลำดับคือ A, AD, D, DB, B

ผู้สอนให้บทนิยามของแนวเดิน ซึ่งผู้เรียนควรบอกได้ว่าเส้นทางที่ 1 และ 2 เป็นแนวเดินในกราฟ ผู้สอนควรชี้ให้ผู้เรียนเห็นว่าแนวเดินคือลำดับของจุดยอดและเส้นเชื่อมสลับกัน และเส้นเชื่อมแต่ละเส้นจะเกิดกับจุดยอดที่อยู่ก่อนหน้าและจุดยอดที่อยู่หลังเส้นเชื่อมนั้น ซึ่งจุดยอด และเส้นเชื่อมในลำดับอาจเกิดขึ้นซ้ำกันได้

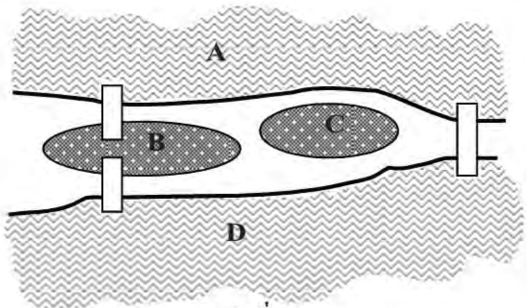
กราฟเชื่อมโยง

ผู้สอนนำเข้าสู่บทเรียนโดยทบทวนบทนิยามของแนวเดิน แล้วยกตัวอย่างเหตุการณ์ เช่น

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดแผนผังของสวนสาธารณะ 2 แห่ง ดังรูป จงพิจารณาว่าสวนสาธารณะแห่งใด สามารถเดินเที่ยวชมบริเวณสวนได้ทุกบริเวณ โดยเริ่มต้นจากตำแหน่งใดก็ได้



แห่งที่ 1



แห่งที่ 2

ผู้สอนควรให้ผู้เรียนบอกเหตุผลประกอบคำตอบ ดังนี้

สวนสาธารณะแห่งที่ 1 สามารถเดินเที่ยวชมบริเวณสวนได้ทุกบริเวณ ไม่ว่าจะเริ่มจากตำแหน่งใด เพราะ

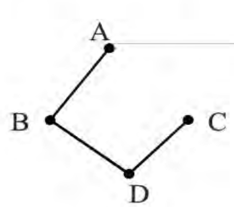
สามารถเดินจากฝั่ง A ไปเกาะ B ได้	สามารถเดินจากฝั่ง A ไปเกาะ C ได้
สามารถเดินจากฝั่ง A ไปฝั่ง D ได้	สามารถเดินจากเกาะ B ไปเกาะ C ได้
สามารถเดินจากเกาะ B ไปฝั่ง D ได้	สามารถเดินจากเกาะ C ไปฝั่ง D ได้

สวนสาธารณะแห่งที่ 2 ไม่สามารถเดินเที่ยวชมบริเวณสวนได้ทุกบริเวณ ไม่ว่าจะเริ่มจากตำแหน่งใดเพราะ

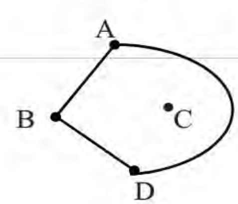
สามารถเดินจากฝั่ง A ไปเกาะ B ได้	ไม่สามารถเดินจากฝั่ง A ไปเกาะ C ได้
สามารถเดินจากฝั่ง A ไปฝั่ง D ได้	ไม่สามารถเดินจากเกาะ B ไปเกาะ C ได้
สามารถเดินจากเกาะ B ไปฝั่ง D ได้	ไม่สามารถเดินจากเกาะ C ไปฝั่ง D ได้

หรือผู้เรียนอาจให้เหตุผลได้อีกเหตุผลหนึ่งว่า จากรูปจะเห็นได้ชัดเจนว่าสวนสาธารณะแห่งที่ 2 ไม่สามารถเดินเที่ยวชมบริเวณสวนได้ทุกบริเวณ เพราะ ไม่มีสะพานเชื่อมเกาะ C

จากนั้นผู้สอนให้บทนิยามของกราฟเชื่อมโยง แล้วใช้ตัวอย่างเหตุการณ์ข้างต้นอธิบายบทนิยามของกราฟเชื่อมโยง โดยให้ผู้เรียนเขียนกราฟ G_1 และ G_2 แทนแผนผังของสวนสาธารณะแห่งที่ 1 และแห่งที่ 2 โดยให้ จุดยอดแทนเกาะ หรือ ฝั่ง เส้นเชื่อมแทนสะพาน ตามลำดับ จะได้กราฟดังรูป



G_1



G_2

ให้ผู้เรียนหาคำตอบได้ด้วยตนเองว่ากราฟ G_1 เป็นกราฟเชื่อมโยงโดยอาศัยการให้เหตุผลประกอบคำตอบจากตัวอย่างเหตุการณ์ข้างต้น

ผู้เรียนต้องบอกได้ว่ากราฟ G_1 เป็นกราฟเชื่อมโยง

เพราะ มีแนวเดิน A – B มีแนวเดิน A – C

มีแนวเดิน A – D มีแนวเดิน B – C

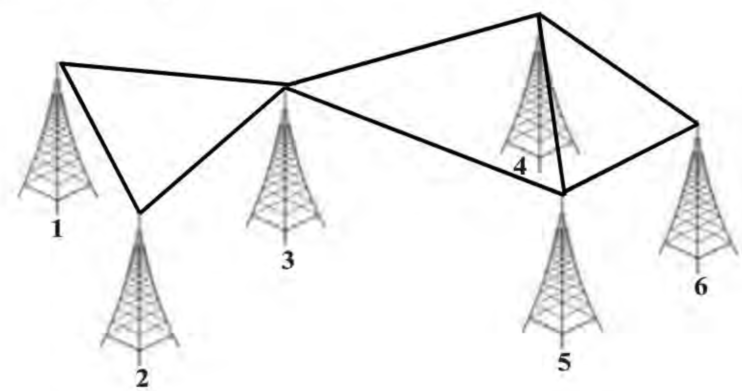
มีแนวเดิน B – D มีแนวเดิน C – D

กราฟ G_2 ไม่เป็นกราฟเชื่อมโยง

เพราะ ไม่มีแนวเดิน A – C ไม่มีแนวเดิน B – C

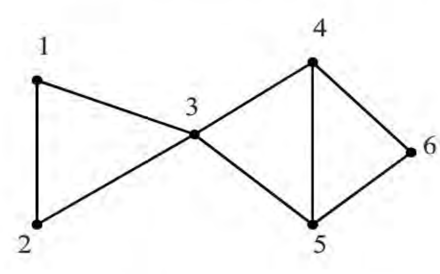
ไม่มีแนวเดิน C – D

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดข่ายงานการเชื่อมโยงระหว่างเสาโทรศัพท์ และสายโทรศัพท์ ดังรูป ถ้าเกิดเหตุการณ์เสาโทรศัพท์ต้นหนึ่งล้มแล้ว จงหาว่าเสาโทรศัพท์ต้นใดเมื่อล้มแล้วจะทำให้การเชื่อมโยงของข่ายงานเสียหายมากที่สุด

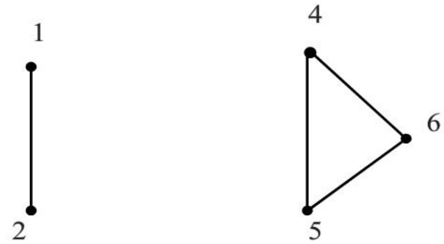


วิธีทำ แปลงปัญหาข้างต้นเป็นกราฟ

โดยให้จุดยอดแทนเสาโทรศัพท์ เส้นเชื่อมแทนสายโทรศัพท์ ดังรูป



จากกราฟ จะพบว่า ถ้าลบจุดยอด 3 ออก เส้นที่เกิดกับจุดยอด 3 จะถูกลบออกด้วย ดังนั้น กราฟที่เกิดจากการลบจุดยอด 3 ออกจะไม่เป็นกราฟเชื่อมโยง ดังรูป

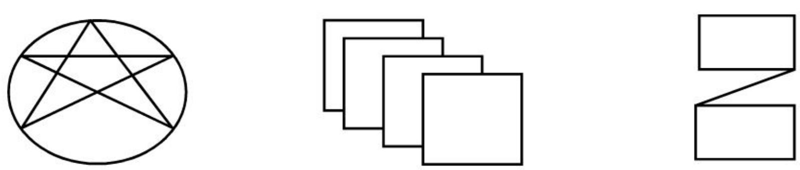


ถ้าลบจุดยอดแต่ละจุด เช่น 1 หรือ 2 หรือ 4 หรือ 5 หรือ 6 ออกจากกราฟ กราฟที่เกิดจากการลบจุดยอดดังกล่าวยังคงเป็นกราฟเชื่อมโยง ดังนั้นเสา 3 จึงเป็นเสาโทรศัพท์ที่สำคัญที่สุดเพราะถ้าเสา 3 ล้มจะทำความเสียหายมากกว่าเสาโทรศัพท์ต้นอื่น

กราฟออยเลอร์

1. ผู้สอนแนะนำกราฟออยเลอร์ โดยอาจให้ผู้เรียนเล่นเกมวาดรูปได้หรือไม่ ดังนี้

จงหาว่ารูปใดสามารถใช้ดินสอวาดโดยไม่ลากซ้ำเส้นเดิม แล้วกลับมาที่จุดเริ่มต้นโดยไม่ยกดินสอได้ เมื่อกำหนดรูป ดังนี้



รูป (1) รูป (2) รูป (3)

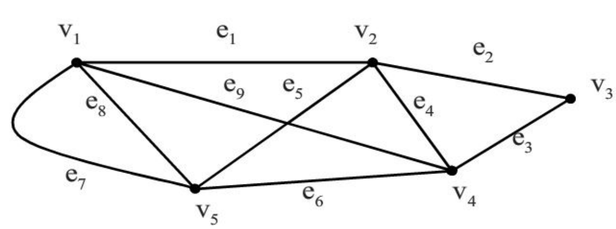
จะพบว่ารูป (1) สามารถวาดรูปได้ตามเงื่อนไขดังกล่าว

จากนั้นผู้สอนสุ่มผู้เรียนออกมา 5 คน วาดรูป (1) บนกระดานดำ แล้วชี้ให้ผู้เรียนเห็นว่า แต่ละคนจะมีวิธีการวาดรูปเหมือนกันหรือต่างกันได้

2. ผู้สอนอาจยกตัวอย่างเพื่อนำเข้าสู่บทนิยามของวงจร เช่น

กำหนดกราฟ G ดังรูป

G :



จงหาว่าแนวเดินในข้อใดเป็นแนวเดินที่มีเส้นเชื่อมแตกต่างกัน โดยมีจุดเริ่มต้นและจุดสุดท้ายเป็นจุดยอดเดียวกัน

1) $v_5,\ e_6,\ v_4,\ e_3,\ v_3,\ e_2,\ v_2,\ e_5,\ v_5,\ e_5,\ v_2$

2) $v_2,\ e_2,\ v_3,\ e_3,\ v_4,\ e_4,\ v_2,\ e_5,\ v_5,\ e_6,\ v_4,\ e_4,\ v_2$

3) $v_1,\ e_7,\ v_5,\ e_6,\ v_4,\ e_4,\ v_2,\ e_1,\ v_1,\ e_7,\ v_5,\ e_8,\ v_1$

4) $v_1,\ e_1,\ v_2,\ e_2,\ v_3,\ e_3,\ v_4,\ e_4,\ v_2,\ e_5,\ v_5,\ e_8,\ v_1$

5) $v_1,\ e_1,\ v_2,\ e_2,\ v_3,\ e_3,\ v_4,\ e_4,\ v_2,\ e_5,\ v_5,\ e_8,\ v_1,\ e_9,\ v_4,\ e_6,\ v_5,\ e_7,\ v_1$

ผู้เรียนควรบอกได้ว่า

แนวเดินในข้อ 1) ไม่เป็นไปตามเงื่อนไขโจทย์ เพราะในแนวเดินมีเส้นเชื่อม e_5 ซ้ำกันโดยมีจุดเริ่มต้นและจุดสุดท้ายเป็นจุดยอดที่ต่างกัน

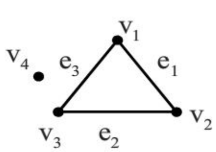
แนวเดินในข้อ 2) และ 3) ไม่เป็นไปตามเงื่อนไขโจทย์ เพราะในแนวเดินมีเส้นเชื่อม e_4 และ e_7 ซ้ำกันตามลำดับ

แนวเดินในข้อ 4) และ 5) เป็นไปตามเงื่อนไขโจทย์

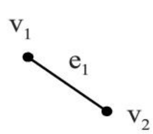
ผู้สอนให้บทนิยามวงจร ผู้เรียนควรบอกได้ว่า แนวเดินในข้อ 4) และ 5) เป็นวงจร จากนั้นผู้สอนอาจถามต่อว่าวงจรในข้อ 4) และ 5) ข้อใด ที่เป็นวงจรที่ผ่านจุดยอดทุกจุดและเส้นเชื่อมทุกเส้นของกราฟ G ผู้เรียนควรบอกได้ว่าแนวเดินในข้อ 5) เป็นวงจรตามเงื่อนไขดังกล่าว ผู้สอนจึงให้บทนิยามของวงจรออยเลอร์ แล้วผู้เรียนควรบอกได้ว่าแนวเดินในข้อ 5) เป็นวงจรออยเลอร์ในกราฟ G เพราะเป็นวงจรที่ประกอบด้วยจุดยอดทุกจุด และเส้นเชื่อมทุกเส้นของกราฟ

3. ผู้สอนทบทวนการหาวงจรในกราฟ แล้วยกตัวอย่างเพื่อนำเข้าสู่บทนิยามของกราฟออยเลอร์ เช่น

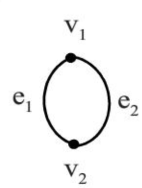
ตัวอย่างที่ 1 กำหนดกราฟ G_1 ถึง G_5 ดังรูป จงหาวงจรที่ประกอบด้วยเส้นเชื่อมทั้งหมดของกราฟ แต่ละกราฟ



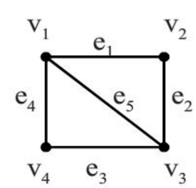
G_1



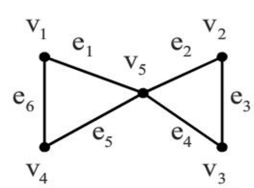
G_2



G_3



G_4



G_5

ผู้สอนควรให้ผู้เรียนบอกเหตุผลประกอบคำตอบ ดังนี้

กราฟ G_1 สามารถหาวงจรที่ประกอบด้วยเส้นเชื่อมทั้งหมดของกราฟได้ วงจรหนึ่งที่เป็นไปได้มีแนวเดินคือ $v_1,\ e_1,\ v_2,\ e_2,\ v_3,\ e_3,\ v_1$

กราฟ G_2 ไม่สามารถหาวงจรที่ประกอบด้วยเส้นเชื่อมทั้งหมดของกราฟได้ เพราะมีเส้นเชื่อม e_1 ซ้ำกัน

กราฟ G_3 สามารถหาวงจรที่ประกอบด้วยเส้นเชื่อมทั้งหมดของกราฟได้ วงจรหนึ่งที่เป็นไปได้มีแนวเดินคือ $v_1,\ e_1,\ v_2,\ e_2,\ v_1$

กราฟ G_4 ไม่สามารถหาวงจรที่ประกอบด้วยเส้นเชื่อมทั้งหมดของกราฟได้ เพราะมีเส้นเชื่อมเส้นใดเส้นหนึ่งในกราฟซ้ำกัน

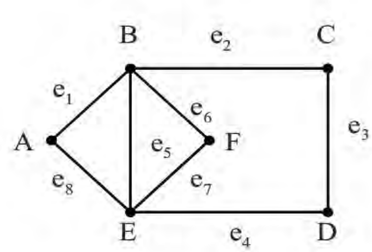
กราฟ G_5 สามารถหาวงจรที่ประกอบด้วยเส้นเชื่อมทั้งหมดของกราฟได้ วงจรหนึ่งที่เป็นไปได้มีแนวเดินคือ $v_1, e_1, v_5, e_2, v_2, e_3, v_3, e_4, v_5, e_5, v_4, e_6, v_1$

ผู้สอนควรชี้ให้ผู้เรียนเห็นว่าในการหาวงจรที่ประกอบด้วยเส้นเชื่อมทั้งหมดของกราฟ G_1, G_3 และ G_5 อาจหาวงจรดังกล่าวได้มากกว่าหนึ่งแบบ จากนั้นจึงให้บทนิยามของกราฟออยเลอร์ แล้วผู้เรียนควรบอกได้ว่ากราฟ G_3 และ กราฟ G_5 เป็นกราฟออยเลอร์ เพราะสามารถหาวงจรออยเลอร์ได้ แต่กราฟ G_1 ไม่เป็นกราฟออยเลอร์ เพราะไม่สามารถหาวงจรออยเลอร์ได้ ผู้สอนควรชี้ให้ผู้เรียนเห็นว่าการที่กราฟ G_1 สามารถหาวงจรที่ประกอบด้วยเส้นเชื่อมทั้งหมดของกราฟ แต่ไม่ครบทุกจุดยอดของกราฟได้นั้นเนื่องมาจากกราฟ G_1 ไม่เป็นกราฟเชื่อมโยง

ผู้เรียนควรบอกลักษณะเฉพาะของกราฟออยเลอร์ได้ว่า กราฟ G จะเป็นกราฟออยเลอร์ ก็ต่อเมื่อกราฟ G เป็นกราฟเชื่อมโยง และ จุดยอดทุกจุดของกราฟ G เป็นจุดยอดคู่ โดยดูจากกราฟ G_3 และ G_5 ในตัวอย่างข้างต้น หรือชี้ให้ผู้เรียนเห็นว่าการหาวงจรออยเลอร์ที่ประกอบด้วยเส้นเชื่อมทั้งหมดของกราฟเชื่อมโยง เป็นปัญหาเช่นเดียวกับการลากเส้นไปตามแผนภาพของกราฟเชื่อมโยง โดยไม่ซ้ำเส้นเชื่อมเดิมแล้วต้องกลับมา ณ จุดเริ่มต้นดังเดิม โดยไม่ยกดินสอ ซึ่งจะเห็นว่าเมื่อเริ่มต้นออกจากจุดยอดใด ๆ จะต้องมีการเดินเข้าจุดยอดนั้นเสมอโดยเส้นเชื่อมที่ต่างกัน ดังนั้นจำนวนเส้นเชื่อมที่เกิดกับจุดยอดแต่ละจุดของกราฟต้องเป็นจำนวนคู่ นั่นคือจุดยอดทุกจุดของกราฟต้องเป็นจุดยอดคู่ จากนั้นจึงให้ทฤษฎีบท 3

ผู้สอนอาจยกตัวอย่างการหาวงจรออยเลอร์ของกราฟโดยใช้การพิสูจน์ทฤษฎีบท 3 โดยยกตัวอย่างเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นในชีวิตประจำวัน เช่น

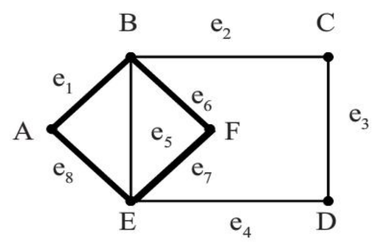
ตัวอย่างที่ 2 กำหนดกราฟแสดงเส้นทาง ที่ตำรวจสายตรวจคนหนึ่งต้องขับรถตรวจดูความเรียบร้อยบนถนนทุกสาย โดยให้จุดยอดแทนแยกของถนน เส้นเชื่อมแทนถนน ดังรูป จงหาเส้นทางที่ตำรวจคนนี้ขับรถผ่านถนนทุกสายเพียงครั้งเดียว แล้วกลับมา ณ จุดเริ่มต้นดังเดิม เมื่อกำหนดให้ตำรวจคนนี้เริ่มต้นที่จุด A



วิธีทำ การหาเส้นทางที่ตำรวจคนนี้ขับรถผ่านถนนทุกสายเพียงครั้งเดียว แล้วกลับมา ณ จุดเริ่มต้นดังเดิม คือการหาวงจรออยเลอร์ของกราฟ

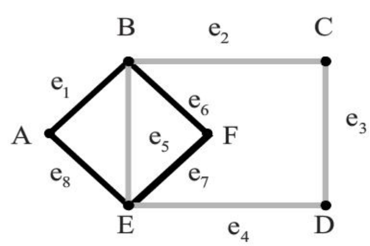
พิจารณากราฟจากโจทย์เป็นกราฟเชื่อมโยง และจุดยอดทุกจุดของกราฟเป็นจุดยอดคู่ จึงเป็นกราฟออยเลอร์ นั่นคือสามารถหาวงจรออยเลอร์ของกราฟได้

ในการหาวงจรออยเลอร์เราจะใช้วิธีที่ปรากฏในการพิสูจน์ทฤษฎีบท 3 ดังนี้ โจทย์กำหนดให้เริ่มต้นที่จุดยอด A สร้างวงจรที่มีจุดเริ่มต้น และจุดสุดท้ายที่จุดยอด A จะได้ วงจร C_1 : A, e_1, B, e_6, F, e_7, E, e_8, A ดังรูป 1 (แสดงวงจร C_1 ด้วยเส้นทึบ)



รูป 1

วงจร C_1 ยังผ่านไม่ครบทุกเส้นเชื่อมของกราฟ เลือกจุดยอดบนวงจร C_1 ที่มีเส้นเชื่อมที่เกิดกับจุดยอดนั้นซึ่งไม่อยู่บนวงจร C_1 ซึ่งมีจุดยอด B และ E สมมติเลือกจุดยอด B สร้างวงจรในกราฟที่เหลือ โดยมีจุดเริ่มต้น และจุดสุดท้ายที่จุดยอด B จะได้ วงจร P_1 : B, e_2, C, e_3, D, e_4, E, e_5, B ดังรูป 2 (แสดงวงจร P_1 ด้วยเส้นสีเทา)



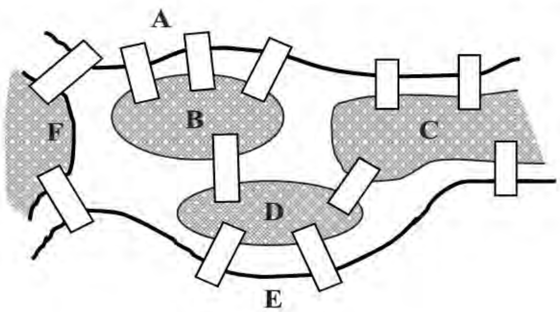
รูป 2

นำวงจร C_1 ต่อกับวงจร P_1 ที่จุดยอด B (การนำวงจร C_1 ต่อกับวงจร P_1 ที่จุดยอด B ให้เริ่มต้นที่จุดยอด A ในวงจร C_1 เดินไปตามเส้นทึบ เมื่อพบจุดยอด B ให้เดินไปตามเส้นสีเทา จนพบกับจุดยอด B แล้วเดินไปตามเส้นทึบในวงจร C_1 จนกลับไปที่จุดยอด A) จะได้วงจร C_2 เป็นวงจรที่ยาวขึ้น คือ C_2: A, e_1, B, e_2, C, e_3, D, e_4, E, e_5, B, e_6, F, e_7, E, e_8, A จะได้ว่าวงจร C_2 ผ่านเส้นเชื่อมทุกเส้นของกราฟ จึงเป็นวงจรออยเลอร์ของกราฟ

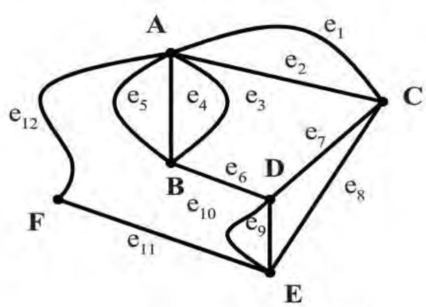
ดังนั้น เส้นทางหนึ่งที่เป็นไปได้ที่ตำรวจคนนี้จะขับรถโดยผ่านถนนทุกสายเพียงครั้งเดียว แล้วกลับมาที่จุดเริ่มต้นดังเดิมมีแนวเดินคือ A, e_1, B, e_2, C, e_3, D, e_4, E, e_5, B, e_6, F, e_7, E, e_8, A

จากตัวอย่างข้างต้น เป็นปัญหาเดียวกับปัญหาของคนกวาดถนน พนักงานเก็บค่าน้ำประปา พนักงานเก็บค่าไฟ รถเก็บขยะ บุรุษไปรษณีย์ เป็นต้น

ตัวอย่างที่ 3 ช่างทาสีคนหนึ่งอยู่ที่ฝั่ง A เขาต้องการทาสีสะพานทั้ง 12 สะพาน ดังรูป ให้เสร็จภายใน 1 วัน แล้วกลับมาที่ฝั่ง A ตามเดิม โดยเขาวางแผนจะใช้เวลาในการเดินทางระหว่างสะพานและทาสีสะพานประมาณ 8 ชั่วโมง แต่สีที่ใช้ทาสะพานจะแห้งเมื่อทาไปแล้วประมาณ 3 ชั่วโมง ถ้าผู้เรียนเป็นช่างทาสีจะมีวิธีการทาสีสะพานอย่างไรเพื่อให้งานแล้วเสร็จภายใน 1 วัน แล้วกลับไปที่ฝั่ง A ตามเดิม (กำหนดให้ช่วงเวลาทำงาน 1 วันของช่างทาสี คือ 08.00 – 17.00 น.)



วิธีทำ เนื่องจากต้องทาสีสะพานทุกสะพาน และเมื่อทาสีสะพานแล้วไม่สามารถเดินข้ามสะพานที่ทาสีได้ และเมื่อทาสีทุกสะพานแล้วต้องกลับไปที่จุดเริ่มต้นดังเดิม ปัญหานี้สามารถแก้ปัญหาโดยการแปลงปัญหาเป็นกราฟ แล้วหาวงจรออยเลอร์ โดยให้จุดยอดแทนเกาะ หรือฝั่ง เส้นเชื่อมแทนสะพาน ดังรูป



เนื่องจากจุดยอดทุกจุดของกราฟเป็นจุดยอดคู่ จึงเป็นกราฟออยเลอร์ นั่นคือสามารถหาวงจรออยเลอร์ของกราฟได้

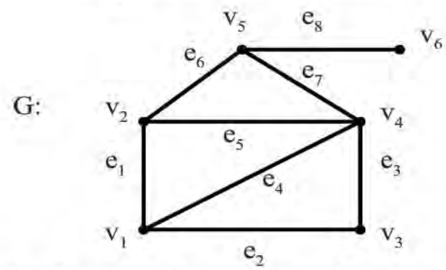
จะได้วงจรออยเลอร์หนึ่งที่เป็นไปได้ มีแนวเดินคือ A, e_1, C, e_2, A, e_3, B, e_4, A, e_5, B, e_6, D, e_7, C, e_8, E, e_9, D, e_{10}, E, e_{11}, F, e_{12}, A

ดังนั้นช่างทาสีควรทาสีโดยใช้เส้นทาง มีแนวเดินคือ A, e_1, C, e_2, A, e_3, B, e_4, A, e_5, B, e_6, D, e_7, C, e_8, E, e_9, D, e_{10}, E, e_{11}, F, e_{12}, A

การประยุกต์ของกราฟ

วิถี

ผู้สอนอาจยกตัวอย่างเพื่อนำเข้าสู่บทนิยามวิถี เช่น กำหนดกราฟ G ดังรูป



จงหาว่าแนวเดินในข้อใด เป็นแนวเดินในกราฟ G ที่มีจุดยอดทั้งหมดแตกต่างกัน

1) $v_1, e_1, v_2, e_5, v_4, e_5, v_2, e_6, v_5$

2) $v_1, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_1$

3) $v_1, e_1, v_2, e_6, v_5, e_8, v_6$

ผู้เรียนควรบอกได้ว่า

แนวเดินในข้อ 1) ไม่เป็นไปตามเงื่อนไขโจทย์ เพราะแนวเดินมีจุดยอด v_2 ซ้ำกัน

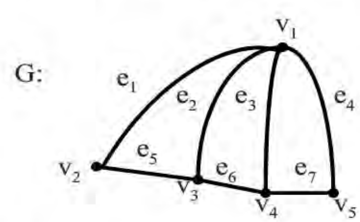
แนวเดินในข้อ 2) ไม่เป็นไปตามเงื่อนไขโจทย์ เพราะแนวเดินมีจุดยอด v_1 ซ้ำกัน

แนวเดินในข้อ 3) เป็นไปตามเงื่อนไขโจทย์

ผู้สอนให้บทนิยามของวิถี แล้วผู้เรียนควรบอกได้ว่า แนวเดินในข้อ 3) เป็นวิถีในกราฟ G

ต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุด

1. ผู้สอนอาจยกตัวอย่างเพื่อนำเข้าสู่บทนิยามของวัฏจักร เช่น กำหนดกราฟ G ดังรูป



จงหาว่าวงจรในข้อใดเป็นวงจรที่ไม่มีจุดยอดซ้ำกัน ยกเว้นจุดเริ่มต้นและจุดสุดท้าย

1) $v_1, e_1, v_2, e_5, v_3, e_2, v_1, e_3, v_4, e_7, v_5, e_4, v_1$

2) $v_1, e_1, v_2, e_5, v_3, e_6, v_4, e_7, v_5, e_4, v_1$

ผู้เรียนควรบอกได้ว่า

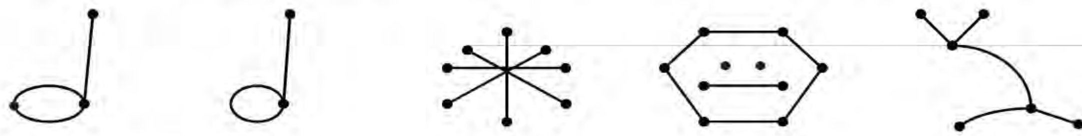
วงจรในข้อ 1) ไม่เป็นไปตามเงื่อนไขโจทย์ เพราะวงจรมีจุดยอด v_1 ซ้ำอยู่ในตำแหน่งที่ไม่ใช่จุดเริ่มต้นและจุดสุดท้าย

วงจรในข้อ 2) เป็นไปตามเงื่อนไขโจทย์

ผู้สอนให้บทนิยามของวัฏจักร แล้วผู้เรียนควรบอกได้ว่า วงจรในข้อ 2) เป็นวัฏจักรในกราฟ G

2. ผู้สอนนำเข้าสู่บทเรียนโดยทบทวนบทนิยามของกราฟเชื่อมโยงแล้วผู้สอนอาจยกตัวอย่างเพื่อแนะนำต้นไม้ ดังนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงหาว่ากราฟใดเป็นกราฟเชื่อมโยงที่ไม่มีวัฏจักร เมื่อกำหนดกราฟ ต่อไปนี้



G_1 G_2 G_3 G_4 G_5

ผู้สอนควรให้ผู้เรียนบอกเหตุผลประกอบคำตอบ ดังนี้

กราฟ G_1 ไม่เป็นไปตามเงื่อนไขโจทย์ เพราะกราฟ G_1 มีวัฏจักร

กราฟ G_2 ไม่เป็นไปตามเงื่อนไขโจทย์ เพราะกราฟ G_2 มีวัฏจักร

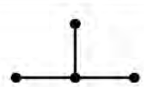
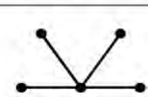
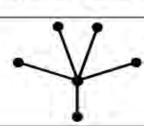
กราฟ G_3 ไม่เป็นไปตามเงื่อนไขโจทย์ เพราะกราฟ G_3 ไม่เป็นกราฟเชื่อมโยง

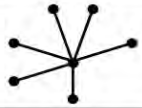
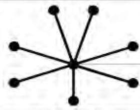
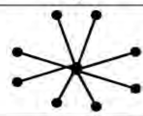
กราฟ G_4 ไม่เป็นไปตามเงื่อนไขโจทย์ เพราะกราฟ G_4 ไม่เป็นกราฟเชื่อมโยง และ มีวัฏจักร

กราฟ G_5 เป็นไปตามเงื่อนไขโจทย์

จากนั้นจึงให้บทนิยามของต้นไม้ ผู้เรียนควรบอกได้ว่ากราฟ G_5 เรียกว่าต้นไม้ แล้วให้ผู้เรียนสรุปข้อสังเกตที่ว่า ต้นไม้ไม่มีเส้นเชื่อมขนานและไม่มีวงวน เนื่องจากต้นไม้คือกราฟเชื่อมโยงที่ไม่มีวัฏจักร

ผู้สอนอาจยกตัวอย่างดังตารางต่อไปนี้ เพื่อให้ผู้เรียนสรุปข้อสังเกตที่ว่า ต้นไม้ที่มีจุดยอด n จุด จะมีเส้นเชื่อม $n-1$ เส้น

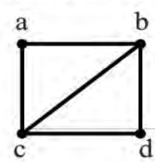
ต้นไม้	จำนวนจุดยอด	จำนวนเส้นเชื่อม
	1	0
	2	1
	3	2
	4	3
	5	4
	6	5

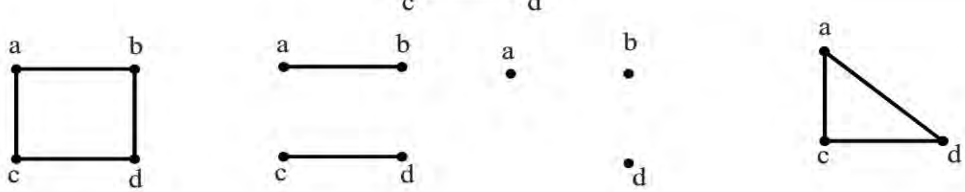
ต้นไม้	จำนวนจุดยอด	จำนวนเส้นเชื่อม
	7	6
	8	7
	9	8
. . .	. . .	. . .

3. ผู้สอนอาจยกตัวอย่างเพื่อให้ผู้เรียนเข้าใจบทนิยามของกราฟย่อย ดังนี้

ตัวอย่างที่ 2 กราฟ H_1, H_2, H_3 และ H_4 กราฟใดเป็นกราฟย่อยของกราฟ G

G :





H_1 H_2 H_3 H_4

จากกราฟ G ซึ่งมี $V(G) = \{a, b, c, d\}$ $E(G) = \{ab, ac, bd, cd, cb\}$

เนื่องจาก $V(H_1) = \{a, b, c, d\}$ $E(H_1) = \{ab, ac, bd, cd\}$

จะได้ว่า H_1 เป็นกราฟย่อยของ G

เนื่องจาก $V(H_2) = \{a, b, c, d\}$ $E(H_2) = \{ab, cd\}$

H_2 เป็นกราฟย่อยของ G

เนื่องจาก $V(H_3) = \{a, b, d\}$ $E(H_3) = \varnothing$

H_3 เป็นกราฟย่อยของ G

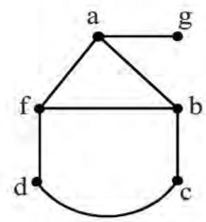
เนื่องจาก $ad \in E(H_4)$ แต่ $ad \notin E(G)$

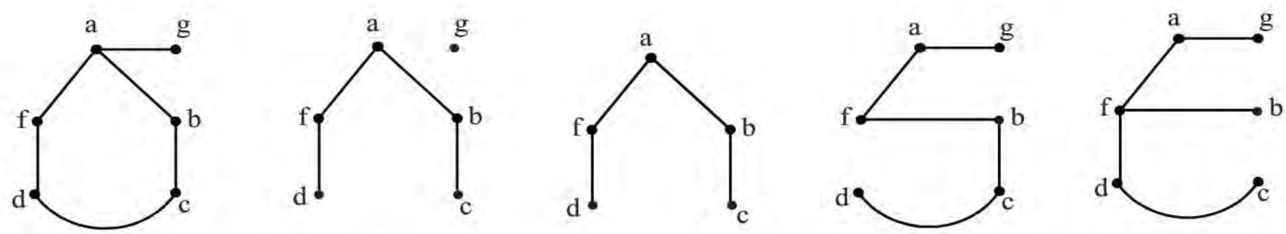
H_4 ไม่เป็นกราฟย่อยของ G

4. ผู้สอนทบทวนบทนิยามของต้นไม้ และกราฟย่อย แล้วอาจยกตัวอย่าง เพื่อแนะนำต้นไม้แผ่ทั่ว ดังนี้

ตัวอย่างที่ 3 กราฟ H_1, H_2, H_3, H_4 และ H_5 กราฟใดเป็นกราฟย่อยของกราฟ G ที่บรรจุจุดยอดทุกจุดของกราฟ G ที่เป็นต้นไม้

G :





H_1 H_2 H_3 H_4 H_5

ผู้สอนควรให้ผู้เรียนบอกเหตุผลประกอบคำตอบ ดังนี้

กราฟ H_1 เป็นกราฟย่อยของ G ที่บรรจุจุดยอดทุกจุดของ G แต่ไม่เป็นต้นไม้ เพราะมีวัฏจักร

กราฟ H_2 เป็นกราฟย่อยของ G ที่บรรจุจุดยอดทุกจุดของ G แต่ไม่เป็นต้นไม้ เพราะไม่เป็นกราฟเชื่อมโยง

กราฟ H_3 เป็นกราฟย่อยของ G และเป็นต้นไม้ แต่ไม่บรรจุจุดยอดทุกจุดของ G

กราฟ H_4 และ H_5 เป็นกราฟย่อยที่บรรจุจุดยอดทุกจุดของ G และเป็นต้นไม้

ผู้สอนให้บทนิยามของต้นไม้แผ่ทั่ว ผู้เรียนควรบอกได้ว่ากราฟ H_4 และ H_5 เป็นต้นไม้แผ่ทั่วของกราฟ G ผู้สอนควรให้ข้อสังเกตว่ากราฟแผ่ทั่วของกราฟ G อาจมีมากกว่าหนึ่งแบบได้ ตัวอย่างต้นไม้แผ่ทั่ว

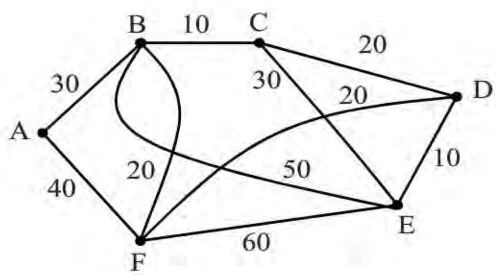
ผู้สอนให้บทนิยามของต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุด แล้วยกตัวอย่างเหตุการณ์เพื่อให้ผู้เรียนสามารถนำการหาต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดไปใช้แก้ปัญหาการเชื่อมโยง เช่น ตัวอย่างต้นไปม้แผ่นทั่วที่น้อยที่สุด

ตัวอย่างที่ 4 ปัญหาการวางสายโทรศัพท์

บริษัทรับเหมาติดตั้งโทรศัพท์แห่งหนึ่ง ต้องการวางสายโทรศัพท์เชื่อมระหว่างหมู่บ้าน A, B, C, D, E และ F โดยจะวางสายไปตามถนน ถ้าค่าใช้จ่ายในการวางสายโทรศัพท์ขึ้นอยู่กับความยาวของสายโทรศัพท์ บริษัทนี้จะวางสายโทรศัพท์อย่างไรให้เสียค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด เมื่อกำหนดตารางแสดงระยะทาง (กิโลเมตร) ของถนนที่เชื่อมระหว่างหมู่บ้าน ดังนี้

หมู่บ้าน	A	B	C	D	E	F
A	-	30	-	-	-	40
B	30	-	10	-	50	20
C	-	10	-	20	30	-
D	-	-	20	-	10	20
E	-	50	30	10	-	60
F	40	20	-	20	60	-

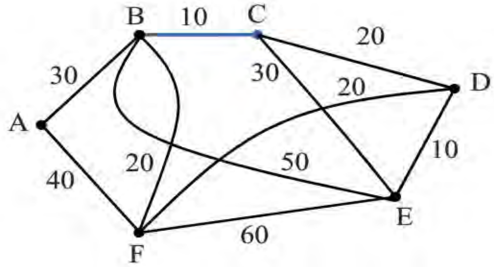
วิธีทำ แปลงปัญหาข้างต้นเป็นกราฟถ่วงน้ำหนัก
โดยให้ จุดยอดแทนหมู่บ้าน เส้นเชื่อมแทนถนน และค่าน้ำหนักของเส้นเชื่อม
คือระยะของถนนระหว่างหมู่บ้าน ดังรูป



เนื่องจากต้นไม้แผ่ทั่วของกราฟจะประกอบด้วยจุดยอดทุกจุดของกราฟ และมีวิถีระหว่างทุก ๆ คู่ของจุดยอดในต้นไม้ ดังนั้นคำตอบของปัญหานี้ คือการหาต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดของกราฟ พิจารณาขั้นตอนในแต่ละขั้นตอนเส้นที่เลือกจะใช้เส้นสีเทา

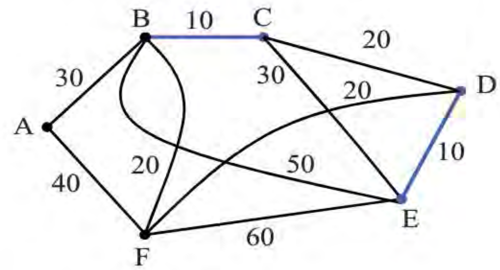
ขั้นที่ 1 จัดลำดับของเส้นเชื่อมโดยเรียงค่าน้ำหนักของเส้นเชื่อมจากน้อยไปมาก
จะได้ 10, 10, 20, 20, 20, 30, 30, 40, 50, 60

ขั้นที่ 2 เลือกเส้นเชื่อมที่มีค่าน้ำหนักของเส้นเชื่อมน้อยที่สุด ดังรูป (1)



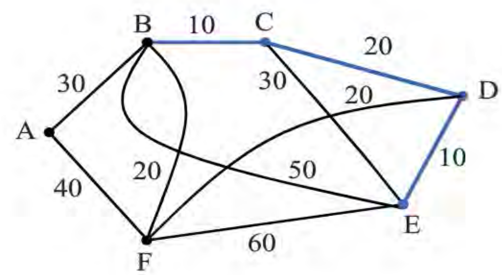
รูป (1)

ขั้นที่ 3 เลือกเส้นเชื่อมที่มีค่าน้ำหนักของเส้นเชื่อมน้อยที่สุดจากเส้นเชื่อมที่เหลือ และไม่ทำให้เกิดวัฏจักรเมื่อรวมเส้นเชื่อมนี้เข้าเป็นส่วนหนึ่งของต้นไม้แผ่ทั่วที่ต้องการ ดังรูป (2)



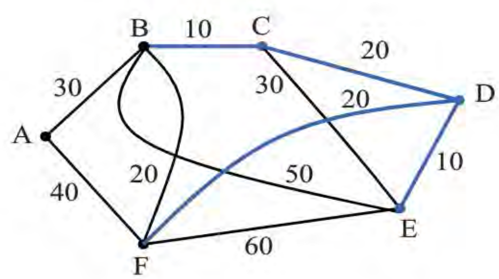
รูป (2)

ขั้นที่ 4 ดำเนินการตามขั้นที่ 3 ดังรูป (3)



รูป (3)

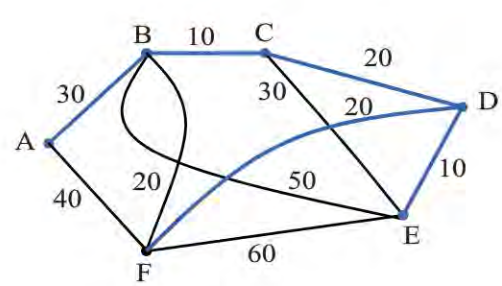
ขั้นที่ 5 ดำเนินการตามขั้นที่ 3 ดังรูป (4)



รูป (4)

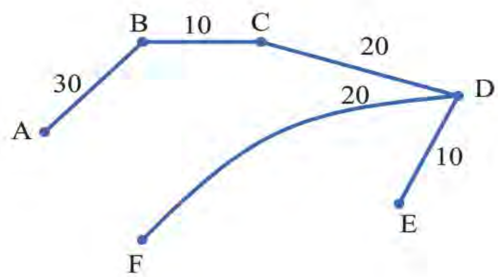
ขั้นที่ 6 ดำเนินการตามขั้นที่ 3 จะพบว่าเส้นเชื่อมที่เหลือที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุด คือ เส้นเชื่อม BF ซึ่งมีค่าน้ำหนักของเส้นเชื่อม 20 ไม่สามารถเลือกได้เพราะทำให้เกิดวัฏจักร ดังนั้นจะต้องเลือกเส้นเชื่อมที่มีค่าน้ำหนักของเส้นเชื่อม 30 ซึ่งมี 2 เส้น คือ เส้นเชื่อม AB และ CE เส้นเชื่อม CE ไม่สามารถเลือกได้เพราะทำให้เกิดวัฏจักร

ดังนั้นเลือกเส้นเชื่อม AB ดังรูป (5)



รูป (5)

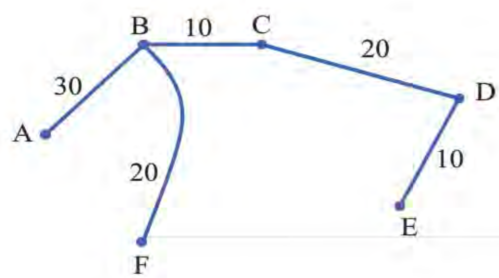
จะเห็นว่าไม่สามารถเลือกเส้นเชื่อมที่เหลือได้อีกเนื่องจากทำให้เกิดวัฏจักร จึงสิ้นสุดขั้นตอน ได้ต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดที่มีผลรวมของค่าน้ำหนักของเส้นเชื่อม 10 + 10 + 20 + 20 + 30 = 90 ดังรูป (6)



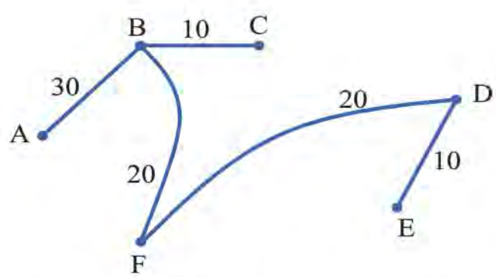
รูป (6)

ดังนั้นบริษัทรับเหมาแห่งนี้ต้องวางสายโทรศัพท์ตามถนน ดังรูป (6) ซึ่งมีระยะทาง 90 กิโลเมตร จึงจะเสียค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด

ผู้สอนควรให้ข้อสังเกตว่าต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดของกราฟในตัวอย่างข้างต้นอาจมีได้มากกว่า 1 แบบ เช่น



หรือ



ผู้สอนควรกระตุ้นให้ผู้เรียนสรุปได้ว่าขั้นตอนการหาต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุด มีหลักการคือการเลือกเส้นเชื่อมที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุดจากกราฟถ่วงน้ำหนักที่เป็นกราฟเชื่อมโยงติดต่อกันเพื่อสร้างต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดของกราฟ เส้นเชื่อมที่เลือกต้องไม่ทำให้เกิดวัฏจักร และขั้นตอนวิธีสิ้นสุดเมื่อเลือกเส้นเชื่อมครบ n – 1 เส้น เมื่อ n เป็นจำนวนจุดยอดของกราฟ

ตัวอย่างที่ 4 ผู้สอนอาจเสนอแนะวิธีการหาคำตอบ โดยพิจารณาจากตาราง ดังนี้

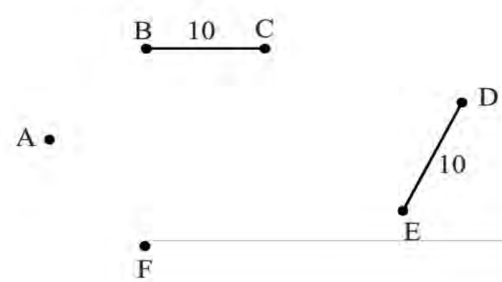
หมู่บ้าน	A	B	C	D	E	F
A	-	30	-	-	-	40
B	30	-	10	-	50	20
C	-	10	-	20	30	-
D	-	-	20	-	10	20
E	-	50	30	10	-	60
F	40	20	-	20	60	-

เนื่องจากตารางข้างต้นเป็นตารางที่สมมาตรตามแนวเส้นทแยงมุม ดังนั้นสามารถเลือกพิจารณาค่าน้ำหนักที่อยู่เหนือหรือใต้เส้นทแยงมุม ซึ่งในที่นี้ขอเลือกพิจารณาค่าน้ำหนักที่อยู่เหนือเส้นทแยงมุม

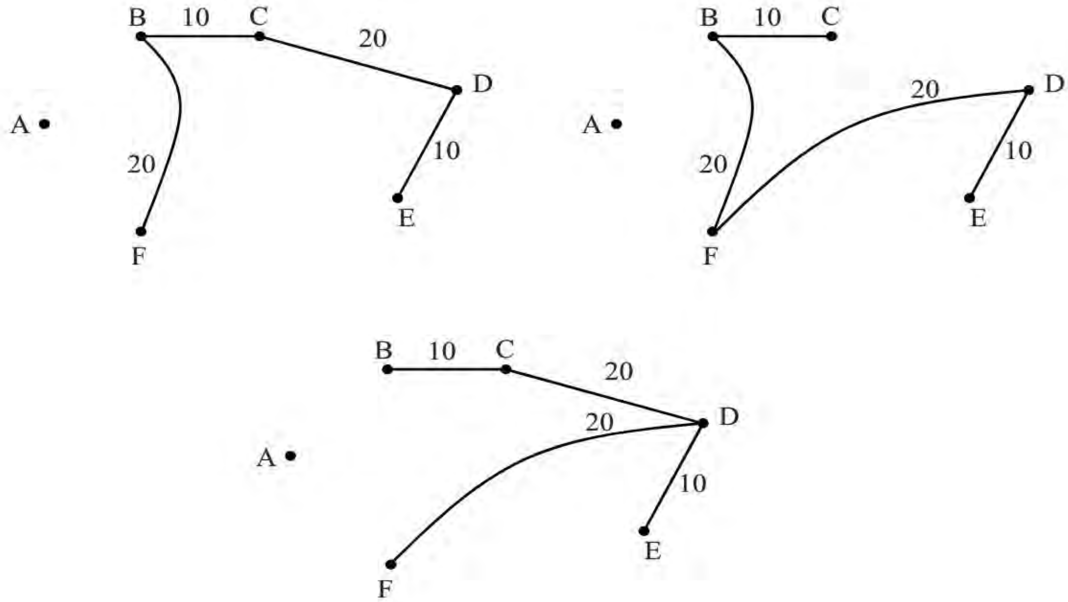
หมู่บ้าน	A	B	C	D	E	F
A	-	30	-	-	-	40
B	30	-	10	-	50	20
C	-	10	-	20	30	-
D	-	-	20	-	10	20
E	-	50	30	10	-	60
F	40	20	-	20	60	-

การหาต้นไม้แผ่ทั่ว ซึ่งพิจารณาจากตารางโดยไม่ต้องแปลงปัญหาเป็นกราฟ ทำได้ดังนี้

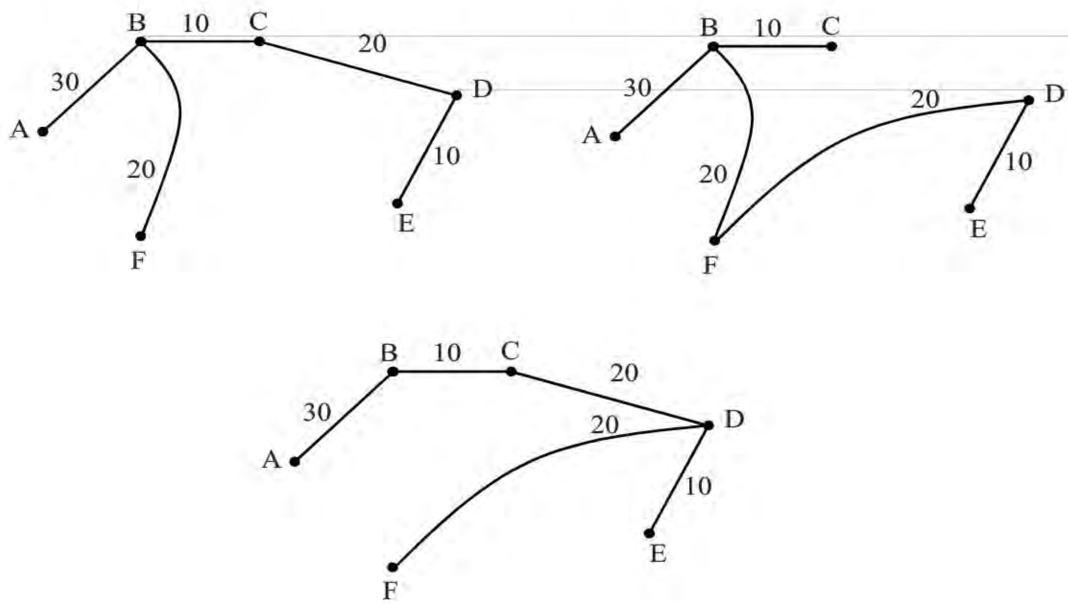
1. เขียนตำแหน่งของทุกจุดยอดที่ใช้แทนหมู่บ้าน
2. พิจารณาค่าน้ำหนักที่แทนระยะทางระหว่างหมู่บ้าน ที่น้อยที่สุดในที่นี้คือ 10 ซึ่งมี 2 ค่า ลากเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดคู่นั้น ๆ ดังรูป



3. พิจารณาค่าน้ำหนักที่เหลือที่น้อยที่สุด ในที่นี้คือ 20 ซึ่งมี 3 ค่า ลากเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอด (แต่ต้องระวังไม่ให้เกิดวัฏจักร) ซึ่งจะได้แบบต่าง ๆ กัน ดังรูป



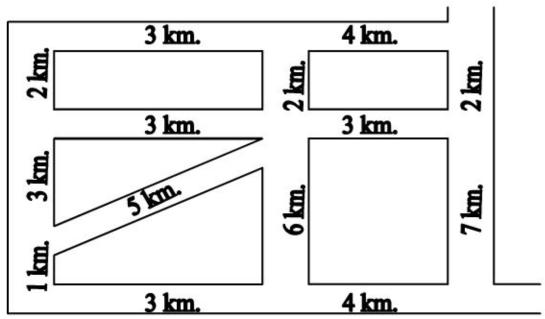
4. พิจารณาจากจุดยอด A ว่ามีเส้นเชื่อมกับจุดยอดใดที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุด และไม่ทำให้เกิดวัฏจักร ในที่นี้คือค่าน้ำหนัก 30 จะได้ต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุด ดังรูป



ผู้สอนควรยกตัวอย่างเกี่ยวกับการแก้ปัญหาโดยใช้ความรู้เกี่ยวกับต้นไม้หลาย ๆ ตัวอย่าง เช่น

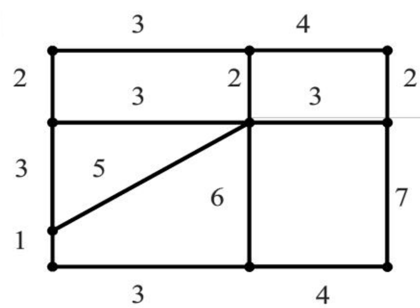
ตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 5 กำหนดแผนผังแสดงถนนที่ยังไม่ลาดยางของหมู่บ้านหนึ่ง ดังรูป อยากทราบว่าเจ้าหน้าที่ที่รับผิดชอบในการสร้างถนนจะลาดยางช่วงถนนใดจึงจะทำให้เสียค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด เมื่อให้ค่าใช้จ่ายในการลาดยางขึ้นอยู่กับความยาวของถนน

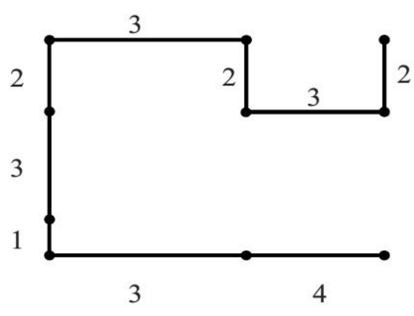


วิธีทำ แปลงปัญหาข้างต้นเป็นกราฟถ่วงน้ำหนัก

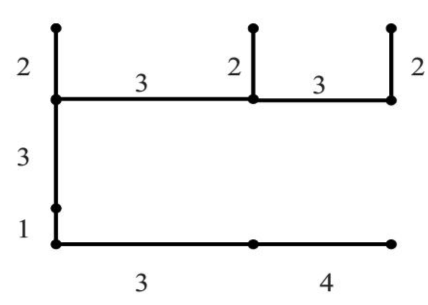
โดยให้ จุดยอดแทนแยกของถนน เส้นเชื่อมแทนถนน ค่าน้ำหนักของเส้นเชื่อม คือ ระยะทางระหว่างแยกของถนน ดังรูป



จากโจทย์ ต้องหาต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดของกราฟจากขั้นตอนวิธีในตัวอย่างที่ 4 จะได้ต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุด ดังรูป



หรือ



เจ้าหน้าที่ที่รับผิดชอบในการสร้างถนนควรลาดยางช่วงถนน ดังรูปต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดข้างต้น และต้องลาดยางถนนเป็นระยะทาง $1 + 2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3 + 3 + 4 = 23$ กิโลเมตร จึงจะทำให้ประชาชนในหมู่บ้านได้ใช้ถนนไปมาระหว่างทุกๆ ทางแยกโดยเสียค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด

ตัวอย่างที่ 6 จังหวัดหนึ่งมีอำเภออยู่ 15 อำเภอ แต่ละอำเภอมีถนนเชื่อมกับอำเภออื่น ๆ 6 สาย อยากทราบว่าสามารถปิดซ่อมถนนได้พร้อมกันมากที่สุดกี่สาย โดยที่ประชาชนในจังหวัดนี้ยังสามารถขับรถจากอำเภอใด ๆ ไปยังอีกอำเภอหนึ่งได้เสมอ

วิธีทำ แปลงปัญหาข้างต้นเป็นกราฟ

โดยให้ จุดยอดแทนอำเภอ เส้นเชื่อมแทนถนน

ให้กราฟมีเส้นเชื่อม n เส้น

จาก ทฤษฎีบท 1 จะได้ว่า

$$15 \times 6 = 2n$$
$$90 = 2n$$
$$n = 45$$

ดังนั้นจังหวัดนี้มีถนนเชื่อมระหว่างอำเภอทั้งหมด 45 สาย การปิดถนนพร้อมกันมากที่สุด โดยที่ยังมีถนนเชื่อมระหว่างอำเภอสองอำเภอใด ๆ

ถนนที่สามารถเปิดให้ใช้ได้ คือ ต้นไม้แผ่ทั่วของกราฟ แสดงว่าจำนวนถนนที่เปิดใช้แล้วทำให้ประชาชนยังสามารถขับรถจากอำเภอใด ๆ ไปยังอีกอำเภอหนึ่งได้ คือ จำนวนเส้นเชื่อมของต้นไม้แผ่ทั่วของกราฟ เท่ากับ $15 - 1 = 14$ เส้น

จะได้ว่า กราฟดังกล่าวสามารถลบเส้นเชื่อมออกจากกราฟได้มากที่สุด $45 - 14 = 31$ เส้น

ดังนั้น สามารถปิดซ่อมถนนได้พร้อมกันมากที่สุด 31 สาย

การสอนเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔–๖ เล่ม ๔ ของ สสวท. นั้น ผู้สอนอาจพบว่าการอธิบายเรื่องกราฟให้ผู้เรียนเข้าใจนั้นเป็นเรื่องค่อนข้างยาก กิจกรรมต่อไปนี้จะช่วยให้ผู้สอนจัดการเรียนการสอนเรื่องนี้ได้ง่ายขึ้น แต่เนื่องจากสื่อเหล่านี้สร้างจากโปรแกรม The Geometer's Sketchpad ดังนั้นผู้สอนหรือผู้เรียนจะใช้งานสื่อเหล่านี้ได้เมื่อมีเครื่องคอมพิวเตอร์ที่ติดตั้งโปรแกรม The Geometer's Sketchpad แล้วทั้งนี้ผู้ที่จะใช้สื่อนี้ต้องมีความรู้เกี่ยวกับการใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad บ้างพอสมควร

แฟ้มที่ใช้ประกอบการจัดกิจกรรมนี้ บรรจุอยู่ในซีดีรอมซึ่งแนบมากับหนังสือคู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔ – ๖ เล่ม ๔ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ ในโฟลเดอร์ชื่อ บทที่ 2 ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

ดีกรีของจุดยอดและจำนวนเส้นเชื่อมของกราฟ

ผู้สอนอาจชี้แจงนิยามของดีกรีของจุดยอดก่อนดังนี้

บทนิยาม ดีกรีของจุดยอด v ในกราฟ คือ จำนวนครั้งทั้งหมดที่เส้นเชื่อมเกิดกับจุดยอด v

วัตถุประสงค์

เพื่อสำรวจว่าผลรวมของดีกรีของจุดยอดทุกจุดในกราฟเท่ากับสองเท่าของจำนวนเส้นเชื่อมในกราฟ

แนวทางการดำเนินกิจกรรม

1. เปิดแบบร่างหน้า **ดีกรีของจุดยอด 1** แฟ้มชื่อ **ทฤษฎีกราฟเบื้องตน** จากโฟลเดอร์ **บทที่ 2 ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น** ในแบบร่างหน้านี้จะเป็นหน้าว่าง

2. ลงจุดอิสระ A และ B แล้วสร้างส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุด A และจุด B

คำถาม 1) ขณะนี้กราฟมีเส้นเชื่อมกี่เส้น จุดยอด A และจุดยอด B มีดีกรีเป็นเท่าไร

3. ลงจุดอิสระ C หนึ่งจุด แล้วสร้างส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุด C กับจุด B และจุด A

คำถาม 2) สร้างเส้นเชื่อมได้อย่างน้อยที่สุดกี่เส้น ถ้าต้องการให้จุดยอดแต่ละจุดมีเส้นเชื่อมถึงกัน

3) จุดยอดแต่ละจุดมีดีกรีเป็นเท่าไร

4) ผลรวมของดีกรีของจุดยอดทุกจุดเป็นเท่าไร

4. ลงจุดอิสระ D อีกหนึ่งจุดแล้วสร้างส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุด D กับจุด A จุด B และจุด C

คำถาม 5) ตอบคำถามข้อ 2) – 4) อีกครั้ง

6) ให้ผู้เรียนเขียนข้อความคาดการณ์เกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนเส้นเชื่อมและผลรวมของดีกรีของจุดยอด

5. ให้ผู้เรียนเปิดแบบร่างหน้า **ดีกรีของจุดยอด 2** ในแบบร่างหน้านี้จะมีพารามิเตอร์จำนวนจุดยอด ซึ่งค่าปัจจุบันคือ 2 และมีกราฟที่ประกอบด้วยจุดยอด 2 จุด และเส้นเชื่อม 1 เส้น

6. คลิกเลือกพารามิเตอร์ จำนวนจุดยอด แล้วกดแป้นพิมพ์เครื่องหมาย + เพื่อเพิ่มจำนวนจุดยอดเป็น 3, 4, 5, ... แล้วสังเกตการเปลี่ยนแปลงของกราฟ เมื่อต้องการลดจำนวนจุดยอดให้กดแป้นพิมพ์เครื่องหมาย –

คำถาม 7) ให้ผู้เรียนนับจำนวนจุดยอด จำนวนเส้นเชื่อมและดีกรีของจุดยอดแต่ละจุด แล้วเติมตัวเลขลงในตารางให้สมบูรณ์

จำนวนจุดยอด	จำนวนเส้นเชื่อม	ดีกรีของจุดยอดแต่ละจุด	ผลรวมของดีกรีของทุกจุดยอด
2			
3			
4			
5			
6			
7			
. . .			
k			

8) จากตารางให้ผู้เรียนเขียนความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนเส้นเชื่อมและจำนวนผลรวมของดีกรีของจุดยอด

ตัวอย่างคำตอบ

1) ขณะนี้กราฟมีเส้นเชื่อม 1 เส้น จุดยอด A มีดีกรี 1 และจุดยอด B มีดีกรี 1
2) สร้างเส้นเชื่อมได้อย่างน้อย 3 เส้น
3) แต่ละจุดยอดมีดีกรีเป็น 2
4) ผลรวมของดีกรีของทุกจุดยอดเป็น 6
5) เส้นเชื่อมมีอย่างน้อย 6 เส้น ดีกรีของแต่ละจุดยอดเป็น 3 และผลรวมของทุกจุดยอดเป็น 12
6) ข้อคาดการณ์คือ จำนวนเส้นเชื่อมของกราฟที่เชื่อมกันทุกจุดยอดจะเป็นครึ่งหนึ่งของผลรวมของดีกรีของจุดยอดทุกจุด
7)

จำนวนจุดยอด	จำนวนเส้นเชื่อม	ดีกรีของจุดยอดแต่ละจุด	ผลรวมของดีกรีของทุกจุดยอด
2	1	1	2
3	3	2	6
4	6	3	12
5	10	4	20
6	15	5	30
7	21	6	42
. . .	. . .	. . .	. . .
k	$\frac{k!}{(k-2)!2!}$	k–1	$2(\frac{k!}{(k-2)!2!})$

8) ถ้า n เป็นจำนวนเส้นเชื่อม ดีกรีของจุดยอดรวมกันทุกจุดจะมีค่าเท่ากับ 2n

กิจกรรมต่อไปนี้เป็นการประยุกต์ความรู้เรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้นไปช่วยแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นในชีวิตประจำวัน โดยใช้โปแกรม sketchpad ซึ่งผู้สอนอาจใช้กิจกรรมเหล่านี้เพื่อนำเข้าสู่บทเรียนหรือสรุปการเรียนการสอนเรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้นก็ได้

การจัดสรรแรงงาน

ผู้จัดการโรงงานแห่งหนึ่งรับสมัครพนักงานเข้ามาทำงาน 5 คนได้แก่ ติ๊ก เคน อั้ม แอน และ นุ่น ทั้ง 5 คนนี้จะได้ทำงานใน 5 ตำแหน่งที่ผู้จัดการจัดสรร แต่โรงงานแห่งนี้มีนโยบายว่าพนักงานทุกคนจะต้องช่วยเหลือกันหากว่ามีใครคนใดคนหนึ่งลาพักร้อน นายดำเป็นผู้จัดการฝ่ายบุคคลจะต้องวางแผนการจัดสรรพนักงาน 5 คนนี้ให้ทำงานทดแทนกันได้ ถ้าผู้เรียนเป็นนายดำผู้เรียนจะวางแผนงานอย่างไร ถ้าพนักงานแต่ละคนมีความสามารถในการทำงานดังนี้

นายติ๊ก สามารถทำงานได้ทุกตำแหน่ง

นายเคน สามารถทำงานได้ทุกตำแหน่ง ยกเว้นตำแหน่งที่ 3

นางสาวอั้ม สามารถทำงานได้ในตำแหน่งที่ 1 และตำแหน่งที่ 4

นางสาวแอน สามารถทำงานได้ในตำแหน่งที่ 2, 4 และตำแหน่งที่ 5

นางสาวนุ่น สามารถทำงานได้ทุกตำแหน่ง

วัตถุประสงค์

ปัญหานี้อาจแก้ได้หลายวิธีผู้สอนอาจชี้แจงให้ผู้เรียนทราบว่าเป้าหมายที่ยกปัญหานี้มาให้ผู้เรียนใช้ความรู้เรื่องกราฟในการแก้ปัญหา เนื่องจากการใช้กราฟจะทำให้เห็นภาพชัดเจนและสามารถนำเสนอให้คนอื่นเข้าใจง่าย

แนวทางการดำเนินกิจกรรม

1. เปิดแบบร่างหน้า **การจัดสรรแรงงาน** ในแบบร่างหน้านี้จะแสดงตำแหน่งงานทั้ง 5 ตำแหน่งและพนักงานที่รับเข้ามาทำงานทั้ง 5 คน และปุ่มแสดงการเริ่มต้น

2. คลิกที่ปุ่มชื่อพนักงานแต่ละคนเพื่อแสดงให้เห็นเส้นเชื่อมของกราฟซึ่งจะบอกว่าใครทำงานในตำแหน่งใดได้บ้าง

3. คลิกที่ปุ่มชื่อพนักงานจนครบทุกคนผู้เรียนจะเห็นกราฟที่มีจุดยอดเป็นชื่อพนักงานและตำแหน่งงาน และเส้นเชื่อมที่แสดงว่าพนักงานแต่ละคนทำงานในตำแหน่งใดได้บ้าง

คำถาม 1) งานในตำแหน่งใดที่พนักงานสามารถทำได้ทุกคน 2) พนักงานคนใดที่จะลาพักร้อนพร้อมกันไม่ได้ 3) ผู้จัดการฝ่ายบุคคลจะสรุปการจัดสรรงานในโรงงานนี้อย่างไร

ตัวอย่างคำตอบ

1) งานในตำแหน่งที่ 4

2) นายติ๊กกับนางสาวนุ่นลาพักผ่อนพร้อมกันไม่ได้เนื่องจากงานในตำแหน่งที่ 3 มีสองคนนี้เท่านั้นที่ทำได้

3) คำตอบมีได้หลากหลาย จากกราฟเห็นได้ชัดว่า งานตำแหน่ง 3 มี นายติ๊กและนางสาวนุ่นทำได้ งานตำแหน่ง 2 มีผู้ทำได้ 4 คน งานตำแหน่ง 1 ก็มีผู้ทำได้ 4 คน ส่วนงานตำแหน่ง 4 ทำได้ทุกคน งานตำแหน่ง 5 ทำได้ 4 คน

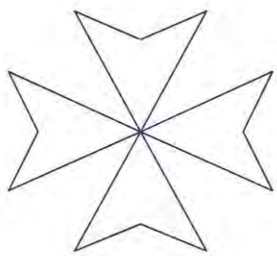
ตัวอย่างกิจกรรมเพิ่มเติม

หลังจากผู้สอนได้สอนเนื้อหาในหนังสือเรียนแล้ว ผู้สอนควรให้ผู้เรียนทำกิจกรรมเพิ่มเติม เป็นกลุ่มหรือทำเดี่ยว ดังตัวอย่างใบงานต่อไปนี้

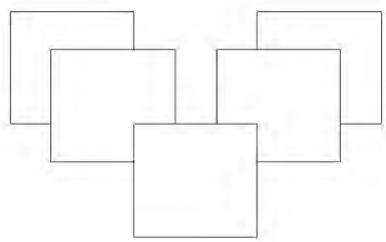
ใบงานที่ 1

1. ในวันแห่งความรัก เบิร์ดเตรียมแผนการว่าเขาจะมอบดอกกุหลาบให้กับคนที่เขาชอบซึ่งมีทั้งหมด 4 คน คือ ก้อย ฟาง แพร และดาวดังนั้นเขาจึงซื้อดอกกุหลาบ 4 ดอก สำหรับคนทั้งสี่ ซึ่งมีสี่สี คือสีแดง ขาว ชมพู และส้ม ถ้าก้อยชอบดอกกุหลาบสีแดงและส้ม ฟางชอบดอกกุหลาบสีชมพูและส้ม แพรชอบดอกกุหลาบสีแดงและขาว ส่วนดาวชอบดอกกุหลาบสีขาวและชมพู เบิร์ดสามารถมอบดอกกุหลาบให้กับคนที่เขาชอบได้ตรงตามความชอบหรือไม่

2. พิจารณารูปต่อไปนี้ว่าสามารถเขียนโดยไม่ต้องยกดินสอและไม่ลากซ้ำเส้นเดิมได้หรือไม่ ถ้าได้ให้เขียนลูกศรกำกับเส้นเชื่อมแต่ละเส้นเพื่อแสดงแนวทางการลากดินสอ

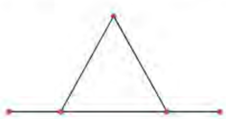


รูปที่ 1



รูปที่ 2

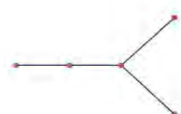
3. มีเชือก 4 แบบ ดังนี้



แบบที่ 1

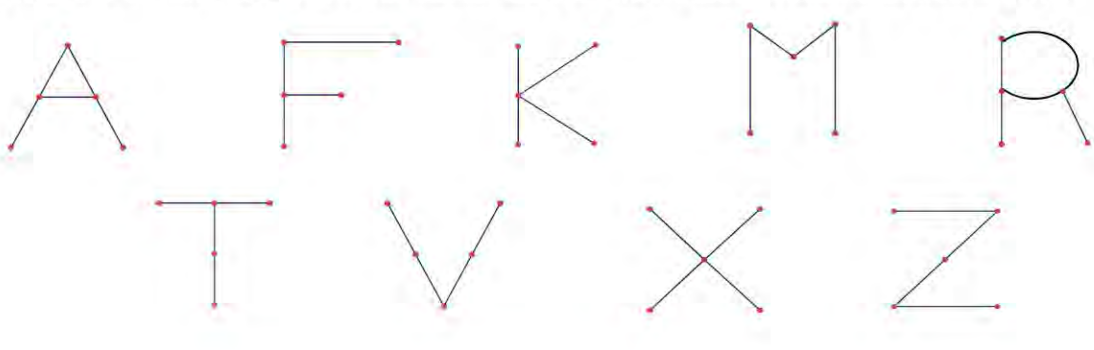
แบบที่ 2

แบบที่ 3



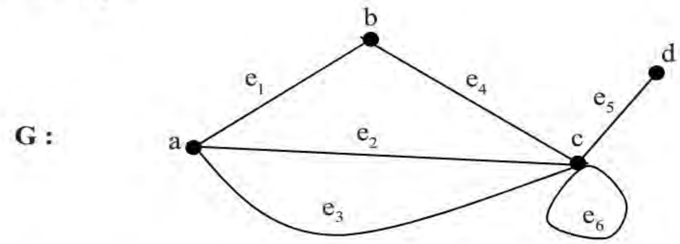
แบบที่ 4

พิจารณาว่าเชือกแต่ละแบบสามารถสร้างตัวอักษรตัวใดได้บ้าง เมื่อกำหนดลักษณะตัวอักษรดังนี้



ใบงานที่ 2

1. กำหนดกราฟ G ดังรูป

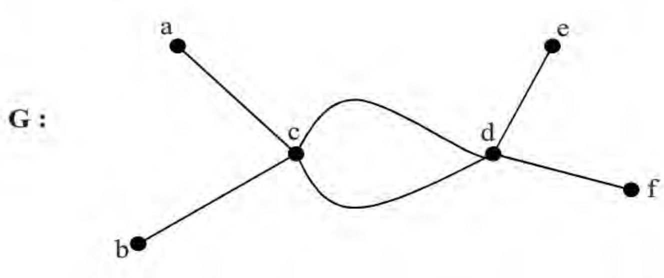


จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้ถูกหรือผิด ถ้าถูกให้เขียน ✓ ถ้าผิดให้เขียน ✗ ลงในช่องเครื่องหมาย ถ้าข้อความใดผิดขอให้แก้ไขข้อความนั้นให้ถูกต้อง

ข้อความ	เครื่องหมาย	ข้อความใหม่ที่ถูกต้อง
1.1 e_6 เป็นเส้นเชื่อมขนาน	✗	e_6 เป็นวงวน
1.2 เส้นเชื่อมทั้งหมดที่เกิดกับจุดยอด a คือ e_1, e_2		
1.3 จุดยอด b และจุดยอด d ไม่เป็นจุดยอดประชิด		
1.4 e_1, e_2 และ e_3 เป็นเส้นเชื่อมขนาน		

2. จากกราฟที่กำหนดให้ จงเติมดีกรีของจุดยอดทุกจุด ผลรวมของดีกรีทั้งหมด และจำนวนเส้นเชื่อม

2.1



deg a = __________ deg b = __________ deg c = __________

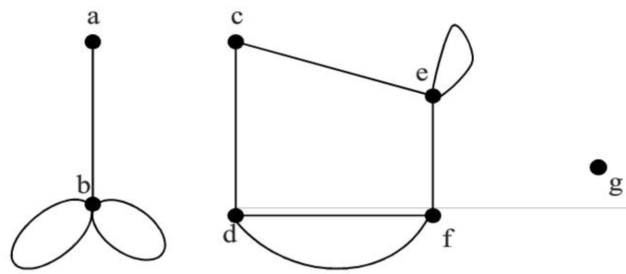
deg d = __________ deg e = __________ deg f = __________

ผลรวมของดีกรีทั้งหมดคือ________________________________

กราฟมีเส้นเชื่อมทั้งหมด ________________________________

2.2

G :



deg a = _________ deg b = _________ deg c = _________ deg d = _________

deg e = _________ deg f = _________ deg g = _________

ผลรวมของดีกรีทั้งหมดคือ_______________________________

กราฟมีเส้นเชื่อมทั้งหมด _______________________________

ข้อสังเกตที่ได้จากคำตอบในข้อ 2.1 และ 2.2 คือ___________________________________ ____ ____

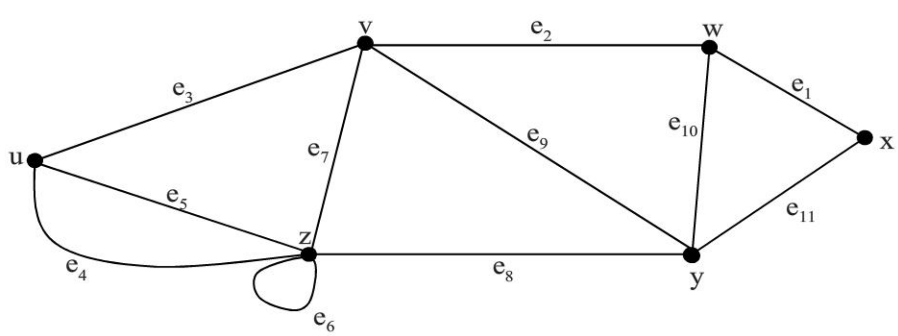
3. จงหาจำนวนจุดยอดของกราฟที่มีเส้นเชื่อม 21 เส้น โดยที่มีเงื่อนไขต่อไปนี้

   7 จุดยอด ซึ่งมีดีกรีเป็น 1 3 จุดยอด ซึ่งมีดีกรีเป็น 2

   7 จุดยอด ซึ่งมีดีกรีเป็น 3 และจุดยอดที่เหลือมีดีกรีเป็น 4

4. กำหนดกราฟ G ดังรูป จงพิจารณาว่าแนวเดินที่กำหนดเป็น วิถี วงจร หรือ วัฏจักร

G :



4.1 แนวเดิน w, e_1, x, e_{11}, y, e_{10}, w เป็น ____________________________________

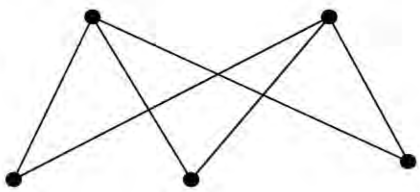
4.2 แนวเดิน v, e_3, u, e_5, z, e_8, y, e_{10}, w เป็น _________________________________

4.3 แนวเดิน u, e_3, v, e_2, w, e_1, x, e_{11}, y, e_8, z, e_4, u เป็น ________________________

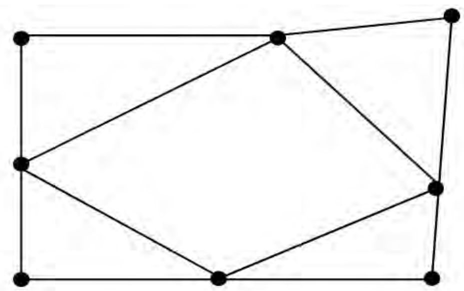
ใบงานที่ 3

1. จงพิจารณาว่ากราฟต่อไปนี้ กราฟใดเป็นกราฟออยเลอร์และ กราฟใดไม่เป็นกราฟออยเลอร์

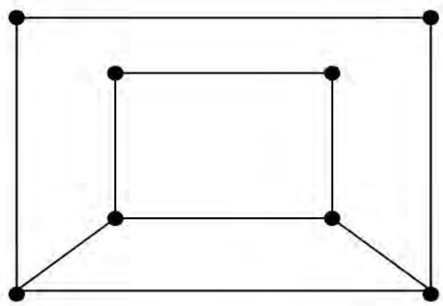
G_1 :



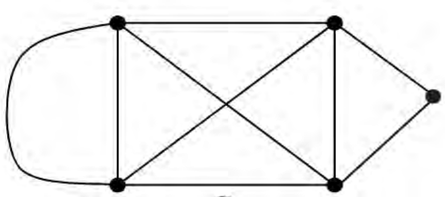
G_2 :



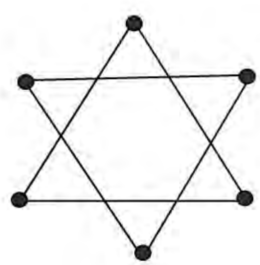
G_3 :



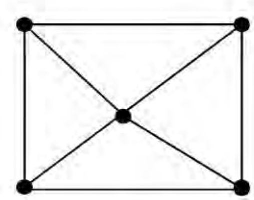
2. จงพิจารณาว่า กราฟรูปใดต่อไปนี้ สามารถลากไปตามจุดยอด และเส้นเชื่อมของกราฟได้โดยตลอด อย่างต่อเนื่องและไม่ซ้ำกับเส้นเชื่อมเดิม



G_1

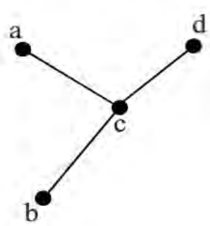


G_2

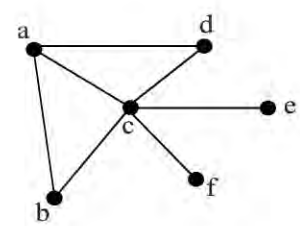


G_3

3. กำหนดให้ กราฟ H และกราฟ G ดังรูป จงแสดงว่ากราฟ H เป็นกราฟย่อยของกราฟ G



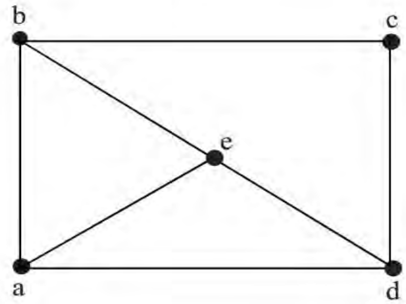
H



G

4. จงยกตัวอย่างต้นไม้แผ่ทั่วของกราฟ G มา 5 ตัวอย่าง

G :



5. จงหาเส้นทางการบินจากเมือง A ไปยังเมือง J ที่ใช้เวลาในการบินน้อยที่สุด เมื่อกำหนดเวลาที่ใช้ในการบิน(ชั่วโมง) จากเมืองหนึ่งไปยังอีกเมืองหนึ่ง ดังแสดงในตารางต่อไปนี้

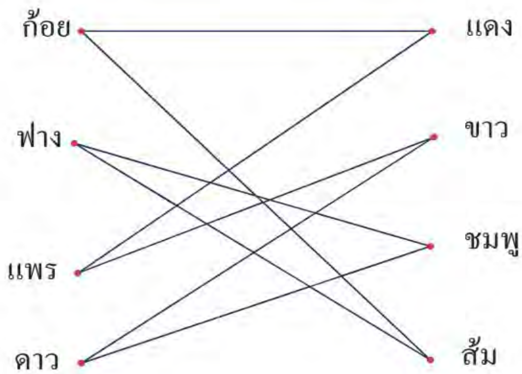
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A	0	7	0	0	0	0	8	5	0	0
B	7	0	8	0	0	0	0	4	3	0
C	0	8	0	8	0	0	0	0	5	0
D	0	0	8	0	3	0	0	0	0	4
E	0	0	0	3	0	1	0	0	7	0
F	0	0	0	0	1	0	7	0	0	6
G	8	0	0	0	0	7	0	5	2	0
H	5	4	0	0	0	0	5	0	0	0
I	0	3	5	0	7	0	2	0	0	0
J	0	0	0	4	0	6	0	0	0	0

เฉลยใบงานที่ 1

1. แปลงปัญหานี้เป็นกราฟ

โดยให้ จุดยอด แทน ก้อย ฟาง แพร ดาว แดง ขาว ชมพู ส้ม

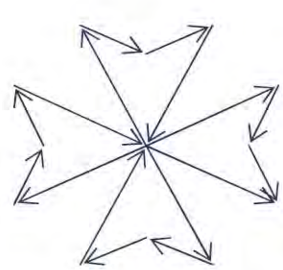
เส้นเชื่อม แทน ความชอบสีของดอกกุหลาบของคน



เบิร์ดสามารถมอบดอกกุหลาบกับคนที่เขาชอบได้ตรงตามความชอบได้ และเบิร์ดมีวิธีมอบดอกกุหลาบให้กับคนทั้ง 4 คน ดังนี้

ชื่อ	แบบที่ 1	แบบที่ 2
ก้อย	แดง	ส้ม
ฟาง	ส้ม	ชมพู
แพร	ขาว	แดง
ดาว	ชมพู	ขาว

2. รูปที่ 1 สามารถเขียนรูปตามเงื่อนไขได้ ดังตัวอย่าง



3. วิธีการหนึ่งที่ใช้ในการหาคำตอบนี้ก็คือพิจารณาจากดีกรีของจุดยอด ซึ่งจากโจทย์จะพบว่า
   เชือกแบบที่ 1 สามารถสร้างตัวอักษร A และ R
   เชือกแบบที่ 2 สามารถสร้างตัวอักษร M, V และ Z
   เชือกแบบที่ 3 สามารถสร้างตัวอักษร K และ X
   เชือกแบบที่ 4 สามารถสร้างตัวอักษร F และ T

เฉลยใบงานที่ 2

1.

ข้อความ	เครื่องหมาย	ข้อความใหม่ที่ถูกต้อง
1.1 e_6 เป็นเส้นเชื่อมขนาน	✗	e_6 เป็นวงวน
1.2 เส้นเชื่อมทั้งหมดที่เกิดกับจุดยอด a คือ e_1, e_2	✗	เส้นเชื่อมทั้งหมดที่เกิดกับจุดยอด a คือ e_1, e_2 และ e_3
1.3 จุดยอด b และจุดยอด d ไม่เป็นจุดยอดประชิด	✓	
1.4 e_1, e_2 และ e_3 เป็นเส้นเชื่อมขนาน	✗	e_2 และ e_3 เป็นเส้นเชื่อมขนาน

2. 2.1 deg a = 1   deg b = 1   deg c = 4
   deg d = 4   deg e = 1   deg f = 1
   ผลรวมของดีกรีทั้งหมดคือ 12
   กราฟมีเส้นเชื่อมทั้งหมด 6 เส้น

   2.2 deg a = 1   deg b = 5   deg c = 2
   deg d = 3   deg e = 4   deg f = 3   deg g = 0
   ผลรวมของดีกรีทั้งหมดคือ 18
   กราฟมีเส้นเชื่อมทั้งหมด 9 เส้น

ข้อสังเกตที่ได้จากคำตอบในข้อ 2.1 และ 2.2 คือ **ผลรวมของดีกรีทั้งหมดเท่ากับสองเท่าของจำนวนเส้นเชื่อมของกราฟ**

3. ให้ y เป็นจำนวนจุดยอดที่มีดีกรี 4

ผลรวมของดีกรีของจุดยอดทุกจุดในกราฟคือ $(7)(1) + (3)(2) + (7)(3) + 4y$

จากทฤษฎีบท 1 ผลรวมของดีกรีของจุดยอดทุกจุดในกราฟเท่ากับสองเท่าของจำนวนเส้นเชื่อมในกราฟ จะได้ว่า $(7)(1) + (3)(2) + (7)(3) + 4y = 2(21)$

$$34 + 4y = 42$$
$$y = 2$$

ดังนั้น จุดยอดของกราฟมีทั้งหมด $7 + 3 + 7 + 2 = 19$ จุด

4. 4.1 แนวเดิน $w, e_1, x, e_{11}, y, e_{10}, w$ เป็น **วัฏจักร วงจร**

4.2 แนวเดิน $v, e_3, u, e_5, z, e_8, y, e_{10}, w$ เป็น **วิถี**

4.3 แนวเดิน $u, e_3, v, e_2, w, e_1, x, e_{11}, y, e_8, z, e_4, u$ เป็น **วงจร วัฏจักร**

เฉลยใบงานที่ 3

1. กราฟ G_1 ไม่เป็นกราฟออยเลอร์

กราฟ G_2 เป็นกราฟออยเลอร์

กราฟ G_3 ไม่เป็นกราฟออยเลอร์

2. กราฟ G_1 สามารถลากไปตามจุดยอด และเส้นเชื่อมของกราฟได้โดยตลอดอย่างต่อเนื่องและไม่ซ้ำเส้นเชื่อมเดิม

3. $V(H) = \{a, b, c, d\}$ $\qquad$ $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$

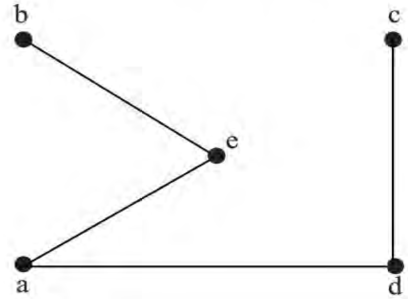
$E(H) = \{ac, bc, cd\}$ $\qquad$ $E(G) = \{ab, ac, ad, bc, cd, ce, cf\}$

จาก $V(H), V(G), E(H)$ และ $E(G)$ จะพบว่า $V(H) \subset V(G)$ และ $E(H) \subset E(G)$

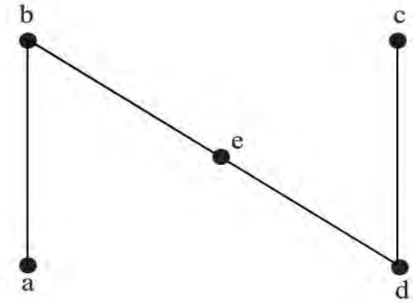
ดังนั้น กราฟ H เป็นกราฟย่อยของกราฟ G

4. ตัวอย่างต้นไม้แผ่ทั่วของกราฟ G ได้แก่ กราฟดังต่อไปนี้

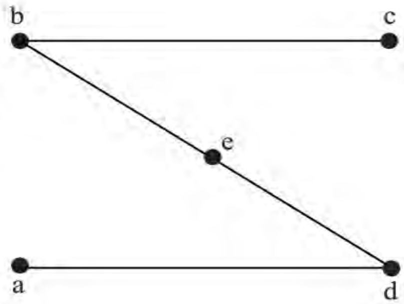
H_1 :



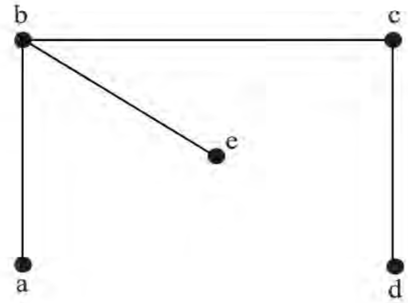
H_2 :



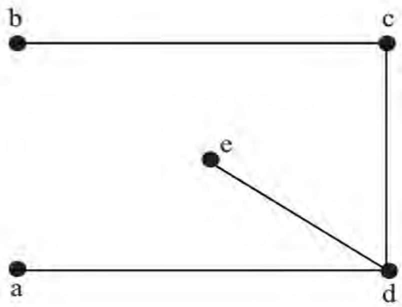
H_3 :



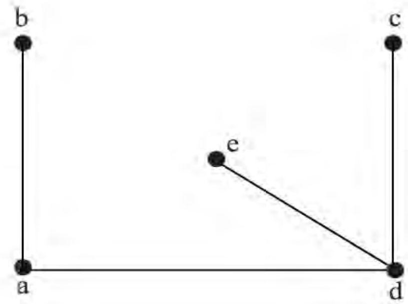
H_4 :



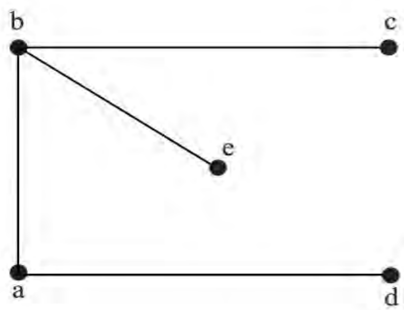
H_5 :



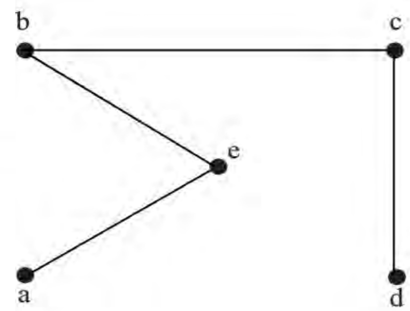
H_6 :



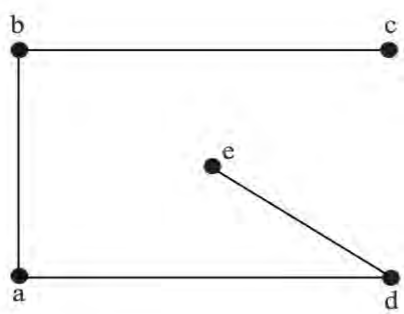
H_7 :



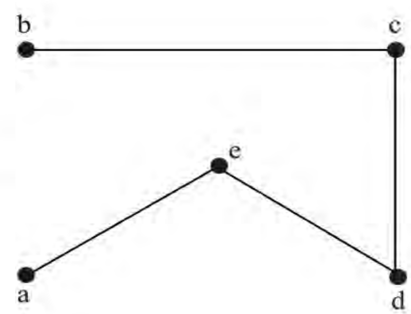
H_8 :



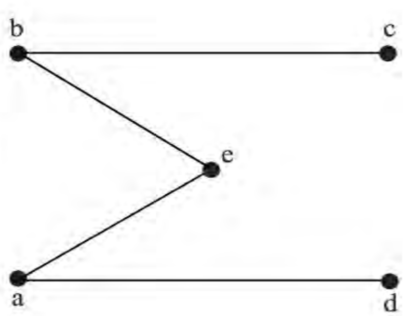
H_9 :



H_{10} :



H_{11} :

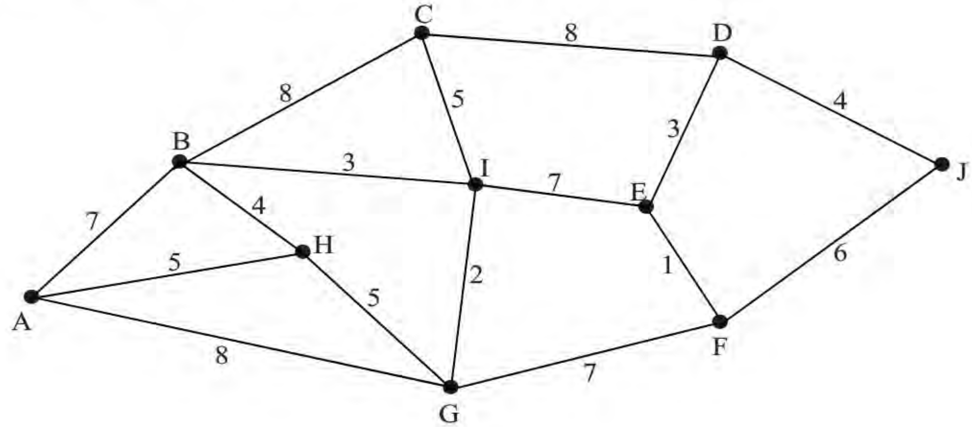


5. ให้ จุดยอดแทนเมือง

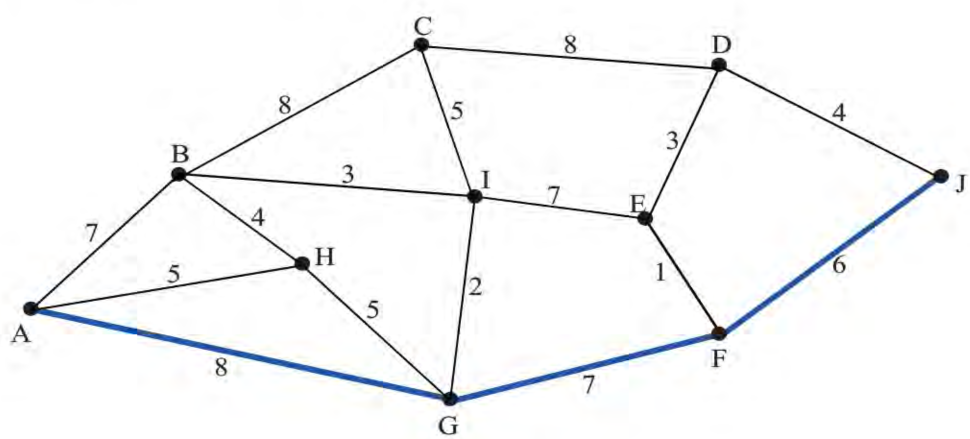
เส้นเชื่อมแทนเส้นทางการบินจากเมืองหนึ่งไปยังอีกเมืองหนึ่ง ตัวเลขที่เขียนกำกับบนเส้นเชื่อม คือ เวลาที่ใช้ในการบิน(ชั่วโมง)

เวลาที่ใช้ในการบิน(ชั่วโมง) จากเมืองหนึ่งไปยังอีกเมืองหนึ่ง ดังตารางที่โจทย์กำหนด

สามารถสร้างกราฟเป็นแบบจำลองแทนสถานการณ์ได้ดังนี้



เส้นทาง A, G, F, J เป็นระยะเวลาจากเมือง A ไปยังเมือง J ที่มีผลรวมของเวลาที่ใช้ในการบิน น้อยที่สุด คือ 21 ชั่วโมง แสดงได้ดังกราฟ



การวัดและการประเมินผลระหว่างเรียน

การประเมินผลระหว่างเรียนเป็นการวัดผลการเรียนรู้เพื่อปรับปรุงและพัฒนาการเรียนการสอน และตรวจสอบว่าผู้เรียนแต่ละคนมีความรู้ความเข้าใจในเรื่องที่ผู้สอนสอนมากน้อยเพียงใด ซึ่งในที่นี้จะกล่าวถึงตัวอย่างการประเมินผลด้านความรู้โดยผู้สอนอาจใช้วิธีการประเมินดังนี้

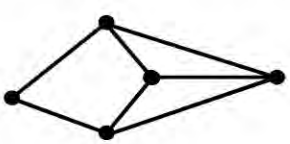
1. สังเกตจากการตอบคำถามและการเข้าร่วมกิจกรรม
2. การทำแบบฝึกหัด
3. การทดสอบ

จากผลการประเมินหากพบว่ามีผู้เรียนไม่ผ่านเกณฑ์ที่ผู้สอนกำหนดไว้ ผู้สอนอาจสอนเสริม หรือให้ผู้เรียนศึกษาจากหนังสือเรียนหรืออาจให้ผู้เรียนที่มีผลการเรียนรู้ผ่านเกณฑ์แล้วช่วยสอน หลังจากนั้นจึงให้ทำข้อที่ทำผิดอีกครั้งจนกว่าจะผ่านเกณฑ์

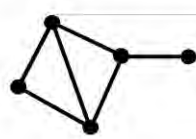
ตัวอย่างแบบทดสอบ

1. จงหาผลรวมของดีกรีของทุกจุดยอดของกราฟต่อไปนี้

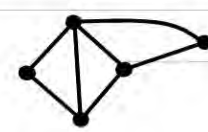
G_1 :



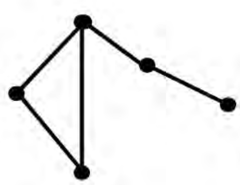
G_2 :



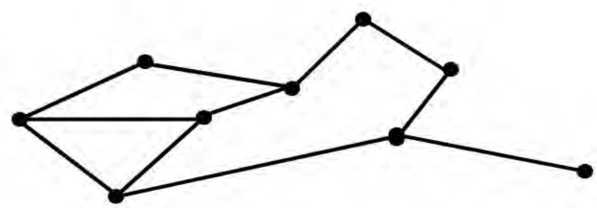
G_3 :



G_4 :

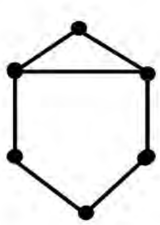


G_5 :

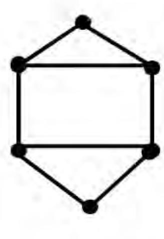


2. จงพิจารณาว่ากราฟใดมีวงจรออยเลอร์ และกราฟใดไม่มีวงจรออยเลอร์

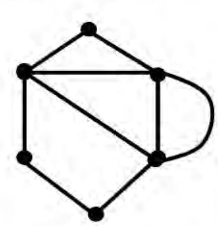
G_1 :



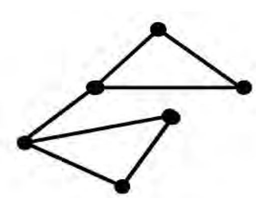
G_2 :



G_3 :

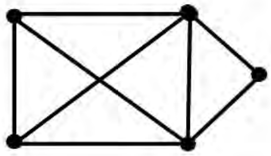


G_4 :

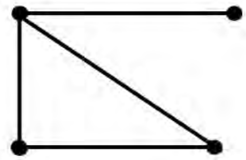


3. จงพิจารณาว่ากราฟใดเป็นกราฟออยเลอร์ และกราฟใดไม่เป็นกราฟออยเลอร์

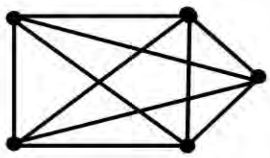
G_1 :



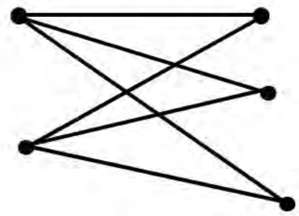
G_3 :



G_2 :

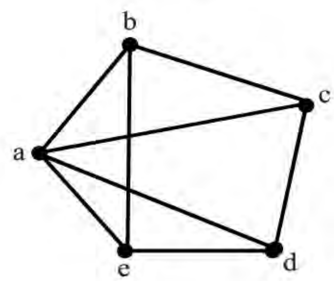


G_4 :

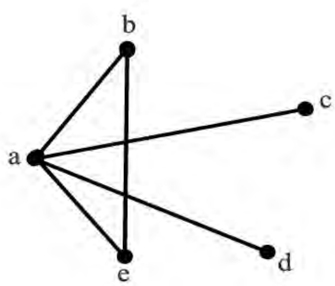


4. จงพิจารณาว่ากราฟใดเป็นต้นไม้แผ่ทั่วของกราฟ G

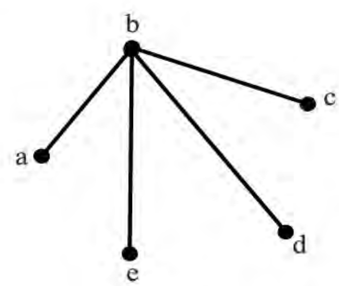
G :



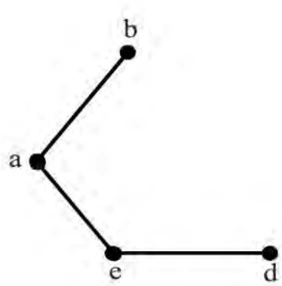
H_1 :



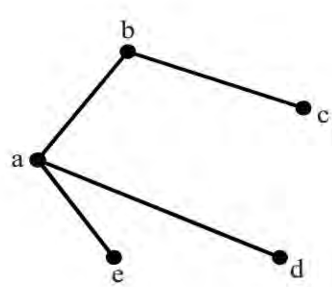
H_2 :



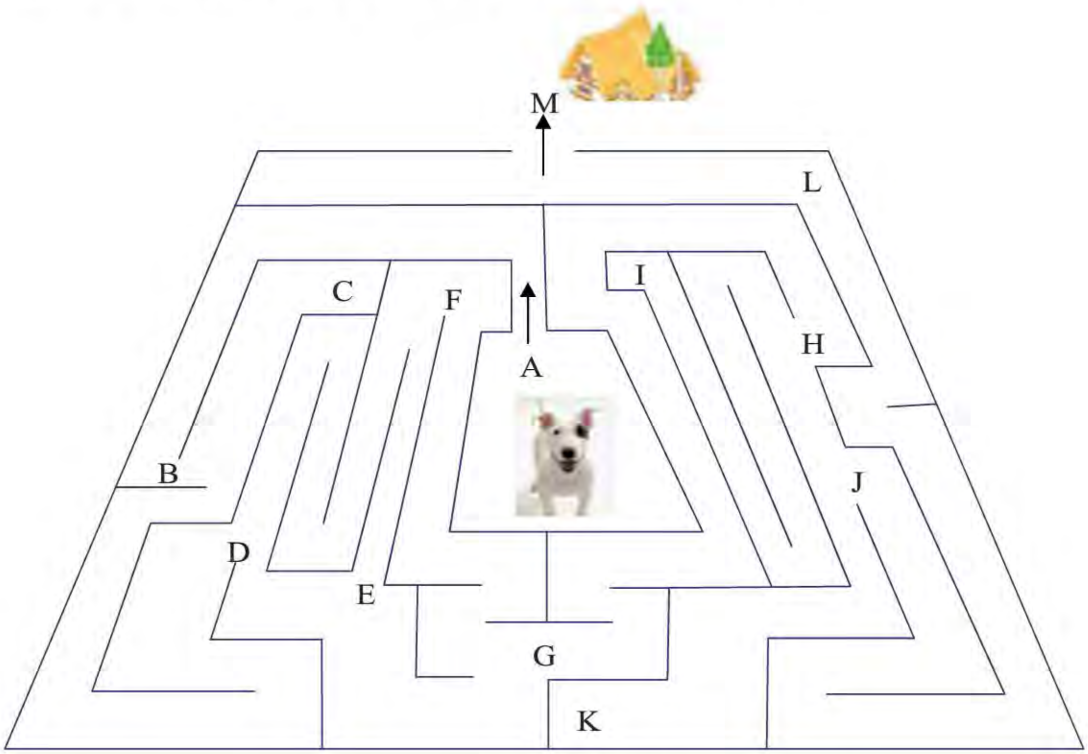
H_3 :



H_4 :



5. จากรูปที่กำหนดให้ลูกสุนัขจะสามารถเดินกลับบ้าน ได้ทั้งหมดกี่เส้นทาง



6. ตาต้าจัดงานเลี้ยงสังสรรค์ที่บ้าน โดยเชิญเพื่อนมาร่วมงานอีก 5 คน คือ นภา สดใส ยิ้มแย้ม สะอาด และ รักชาติ

ตาต้ากล่าวว่า "นภาเป็นเพื่อนกับคนในกลุ่มนี้ 4 คน
สดใสเป็นเพื่อนกับคนในกลุ่มนี้ 2 คน
ยิ้มแย้มเป็นเพื่อนกับคนในกลุ่มนี้ 3 คน
สะอาดเป็นเพื่อนกับคนในกลุ่มนี้ 3 คน
และรักชาติเป็นเพื่อนกับคนในกลุ่มนี้ 4 คน"

ท่านคิดว่าคำกล่าวของตาต้าเป็นจริง หรือเท็จ อย่างไร พร้อมให้เหตุผลประกอบ

เฉลยตัวอย่างแบบทดสอบ

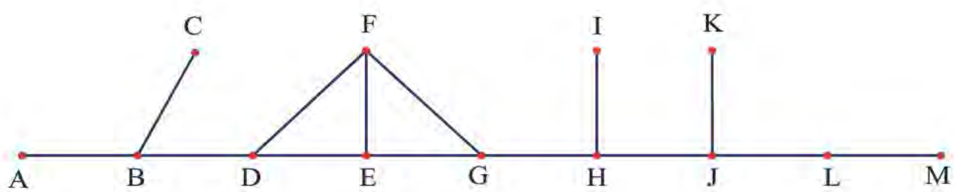
1. กราฟ G_1 มีผลรวมของดีกรีของทุกจุดยอด 14
   กราฟ G_2 มีผลรวมของดีกรีของทุกจุดยอด 12
   กราฟ G_3 มีผลรวมของดีกรีของทุกจุดยอด 14
   กราฟ G_4 มีผลรวมของดีกรีของทุกจุดยอด 10
   กราฟ G_5 มีผลรวมของดีกรีของทุกจุดยอด 22

2. กราฟ G_1 ไม่มีวงจรออยเลอร์
   กราฟ G_2 ไม่มีวงจรออยเลอร์
   กราฟ G_3 มีวงจรออยเลอร์
   กราฟ G_4 ไม่มีวงจรออยเลอร์

3. กราฟ G_1 ไม่เป็นกราฟออยเลอร์
   กราฟ G_2 เป็นกราฟออยเลอร์
   กราฟ G_3 ไม่เป็นกราฟออยเลอร์
   กราฟ G_4 ไม่เป็นกราฟออยเลอร์

4. กราฟ H_4

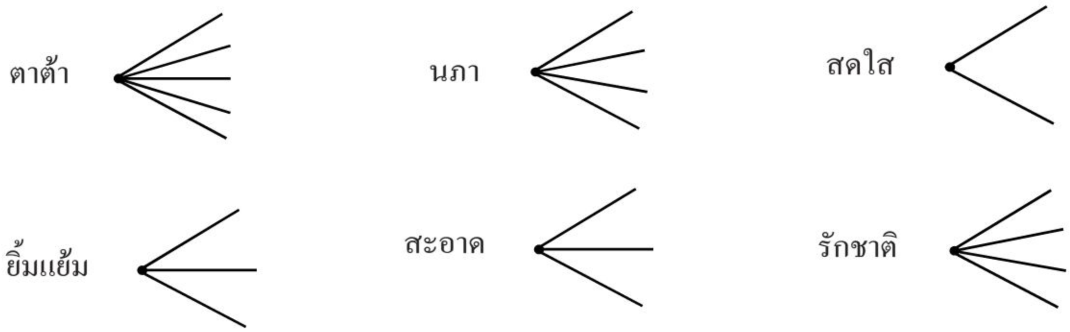
5. แปลงปัญหานี้เป็นกราฟโดยกำหนดให้จุดยอดแทนสถานที่ A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L และ M เส้นเชื่อมแทนทางเดินระหว่างสถานที่สองสถานที่ จะได้กราฟดังรูป



ดังนั้น เส้นทางที่ลูกสุนัขกลับบ้านมี 4 เส้นทาง ดังนี้

1) A, B, D, E, G, H, J, L, M	2) A, B, D, F, G, H, J, L, M
3) A, B, D, E, F, G, H, J, L, M	4) A, B, D, F, E, G, H, J, L, M

6. คำกล่าวของตาต้าเป็น**เท็จ** เพราะถ้าแปลงโจทย์ปัญหาเป็นกราฟ
   โดยให้ จุดยอดแทนคน
   เส้นเชื่อมแทนความเป็นเพื่อนกันระหว่างคนสองคน
   จะได้ว่า กราฟนี้จะเป็นกราฟที่มีจุดยอด 6 จุด ดังนี้



จะพบว่า กราฟนี้มีจุดคี่ 3 จุด ซึ่งเป็นไปไม่ได้

(หรือผลบวกของดีกรีของทุกจุด คือ 21 ซึ่งไม่ใช่จำนวนคู่ จึงเป็นไปไม่ได้)

เฉลยแบบฝึกหัด

แบบฝึกหัด 2.1

1. 1) V(G) = $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$
   E(G) = $\{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_2v_6, v_3v_7, v_5v_6, v_6v_7, v_7v_8\}$

   2) V(G) = $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$
   E(G) = $\{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_1v_5, v_1v_6, v_2v_3, v_2v_6, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6\}$

   3) V(G) = $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$
   E(G) = $\{v_1v_5, v_1v_6, v_2v_5, v_2v_6, v_3v_5, v_3v_6, v_4v_5, v_4v_6\}$

   4) V(G) = $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$
   E(G) = $\{v_1v_2, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_7, v_4v_8, v_4v_5, v_5v_6\}$

   5) V(G) = $\{A, B, C, D, E, F\}$
   E(G) = $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$

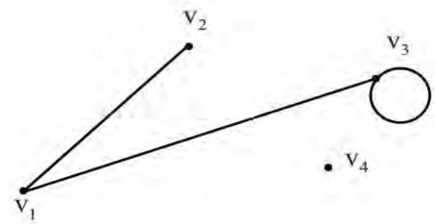
   6) V(G) = $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$
   E(G) = $\{v_1v_4, v_1v_5, v_1v_6, v_2v_4, v_2v_5, v_2v_6, v_3v_4, v_3v_5, v_3v_6\}$

   7) V(G) = $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$
   E(G) = $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$

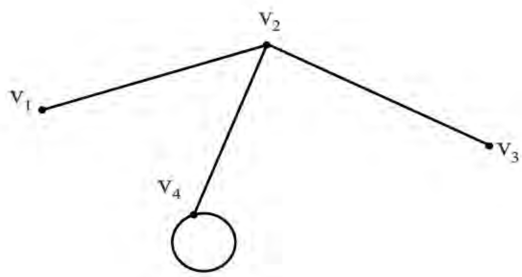
   8) V(G) = $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$
   E(G) = $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

2. **หมายเหตุ** กราฟ G ในข้อนี้สามารถเขียนได้หลายรูปแบบ เช่น

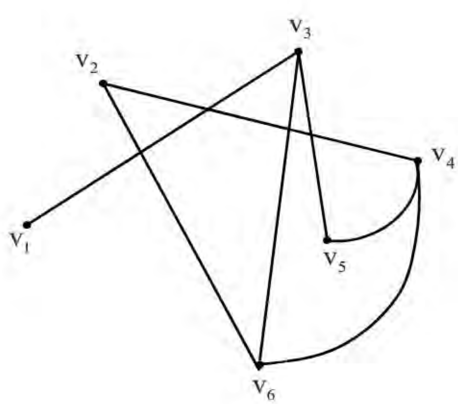
1)



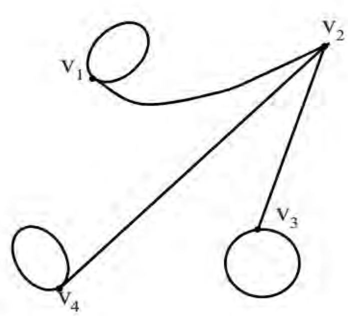
2)



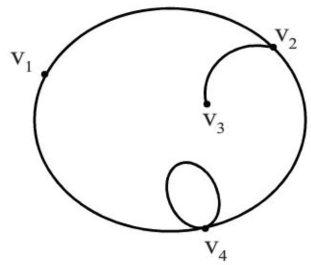
3)



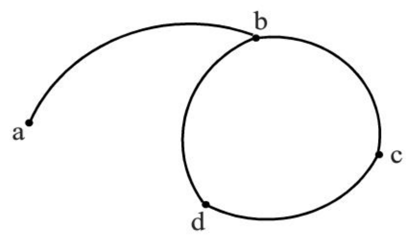
4)



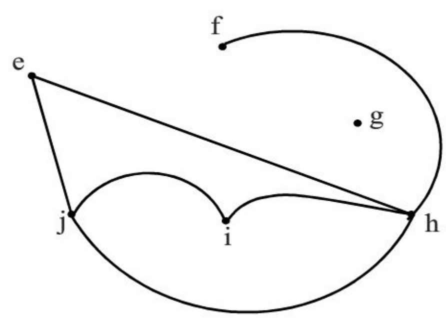
5)



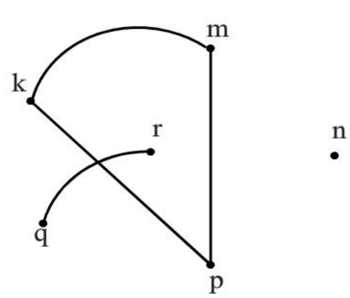
6)



7)



8)



3. 1) ถูก 2) ผิด

3) ถูก 4) ผิด

5) ถูก

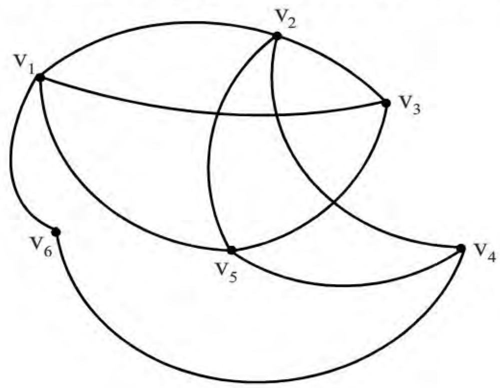
4. 1) จำลองปัญหาด้วยกราฟ G ดังนี้

ให้จุดยอด $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ แทนรถคันที่ 1 ถึงคันที่ 6 ตามลำดับ

เส้นเชื่อมแทนช่วงเวลาที่รถสองคันจอดซ้อนกัน

จะได้ $V(G) = \{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 \}$

และ $E(G) = \{ v_1v_2, v_1v_3, v_1v_5, v_1v_6, v_2v_3, v_2v_4, v_2v_5, v_3v_5, v_4v_5, v_4v_6\}$

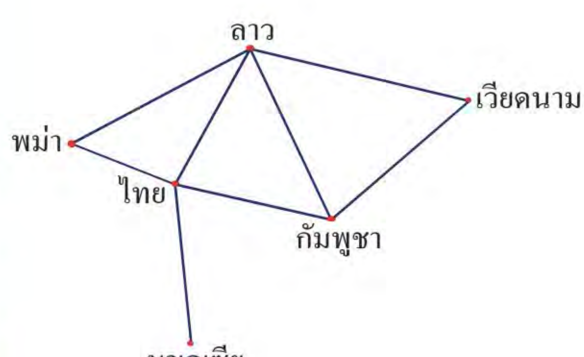


2) จากกราฟ จะต้องเตรียมพื้นที่จอดรถไว้อย่างน้อยที่สุดสำหรับรถ 4 คัน

5. 1) ให้จุดยอดแทนประเทศ จะได้ V(G) = {ไทย, ลาว, กัมพูชา, พม่า, มาเลเซีย, เวียดนาม}

เส้นเชื่อมแทนประเทศสองประเทศที่มีอาณาเขตติดกัน

เขียนกราฟตามเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดเขียนได้ดังนี้



2) จะต้องใช้สีอย่างน้อยที่สุด 3 สี

แบบฝึกหัด 2.2

1. 1) deg a = 3 deg b = 3

deg c = 3 deg d = 3

deg e = 2

2) deg a = 2 deg b = 3

deg c = 2 deg d = 5

3) deg a = 2 deg b = 4

deg c = 3 deg d = 3

deg e = 2

4) deg a = 3 deg b = 2

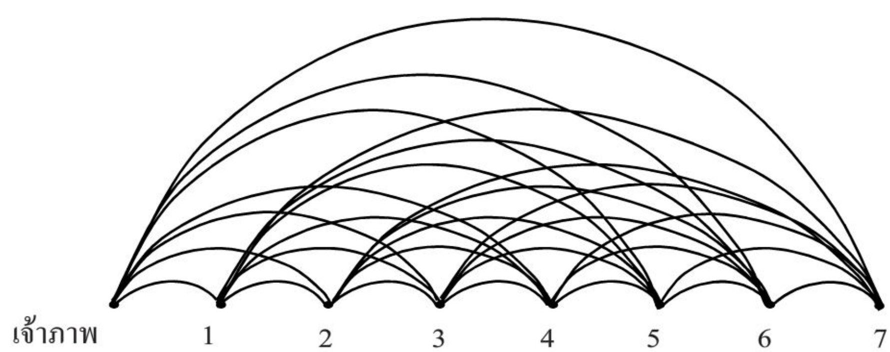
deg c = 2 deg d = 3

2. 1) ผลรวมของดีกรีของจุดยอดทุกจุดคือ $3 + 4 + 1 + 2 + 4 = 14$
เส้นเชื่อมของกราฟมีทั้งหมด 7 เส้น

2) ผลรวมของดีกรีของจุดยอดทุกจุดคือ $5 + 3 + 4 + 4 + 4 + 4 = 24$
เส้นเชื่อมของกราฟมีทั้งหมด 12 เส้น

3) ผลรวมของดีกรีของจุดยอดทุกจุดคือ $5 + 2 + 3 + 2 + 3 + 2 + 5 + 2 = 24$
เส้นเชื่อมของกราฟมีทั้งหมด 12 เส้น

3. 1) ให้ จุดยอดแทนผู้มาร่วมงาน
เส้นเชื่อมแทนการจับมือทักทายกันระหว่างคนสองคน
ดังนั้น กราฟนี้มีจุดยอด 8 จุด และแต่ละจุดยอดมีดีกรี 7

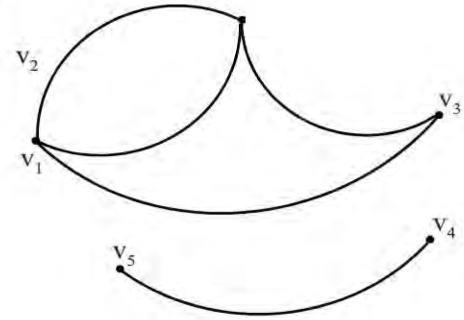


2) ผลรวมของดีกรีของจุดยอดทุกจุดคือ $8 \times 7 = 56$
เส้นเชื่อมของกราฟมีทั้งหมด 28 เส้น
ดังนั้น มีการจับมือทักทายกันทั้งหมด 28 ครั้ง

4. ผลรวมของดีกรีของจุดยอดทุกจุดเท่ากับ $1+1+4+4+6 = 16$
ดังนั้น มีเส้นเชื่อมของกราฟทั้งหมด 8 เส้น

5. สมมติว่ามีกราฟที่มีจุดยอด 7 จุด และมีดีกรี 5, 4, 2, 2, 2, 1 และ 1
ผลรวมของดีกรีของจุดยอดทุกจุดคือ $5+4+2+2+2+1+1 = 17$
ซึ่งเป็นจำนวนคี่ ขัดแย้งกับทฤษฎีบท 1
ดังนั้น จึงเป็นไปไม่ได้ที่จะมีกราฟดังกล่าว

6. สามารถเขียนกราฟได้หลายรูปแบบ เช่น



7. เส้นเชื่อมของกราฟมี 35 เส้น
ดังนั้น ผลรวมของดีกรีของจุดยอดทุกจุดคือ $2(35) = 70$
ทุกจุดยอดมีดีกรีอย่างน้อย 3
ดังนั้น จำนวนจุดยอดของกราฟที่มากสุดที่เป็นไปได้คือ 23 จุด

8. เส้นเชื่อมของกราฟมี 31 เส้น จะได้ว่าผลรวมของดีกรีของจุดยอดทุกจุดคือ $2(31) = 62$
จุดยอด 3 จุดมีดีกรี 1 และจุดยอด 7 จุดมีดีกรี 4 ดังนั้นผลรวมของดีกรีของจุดยอด 10 จุดนี้คือ $3+28 = 31$
ดังนั้นจะได้ว่า จุดยอดอีก 3 จุดที่เหลือมีผลรวมของดีกรีเป็น 31 ซึ่งมีทางเป็นไปได้ 2 กรณี คือ

กรณีที่ 1 เป็นจุดยอดคี่ทั้ง 3 จุด

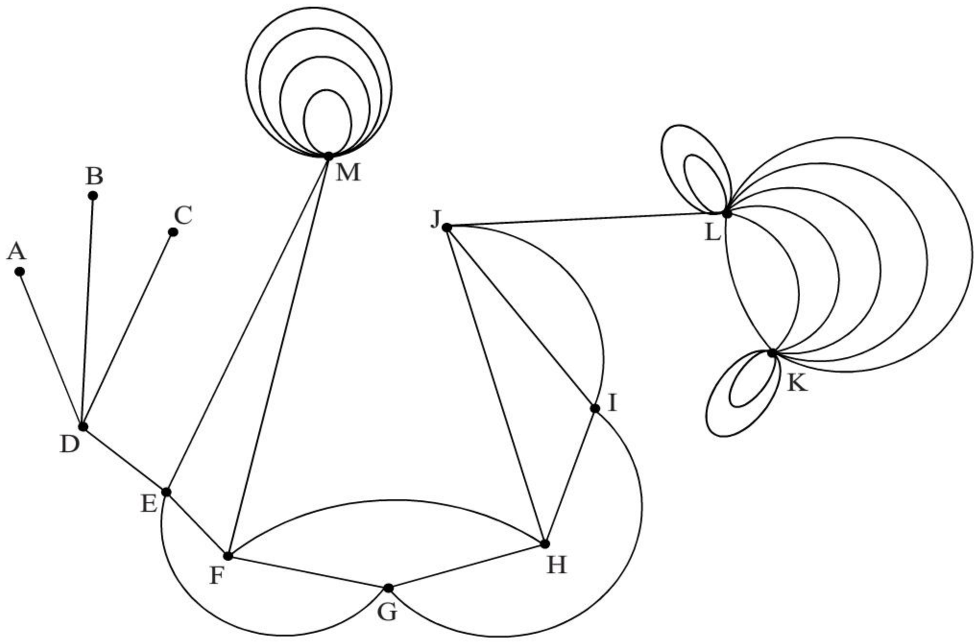
กรณีที่ 2 เป็นจุดยอดคี่ 1 จุด และเป็นจุดยอดคู่ 2 จุด

จากที่กล่าวมาจะมีกราฟที่สอดคล้องตามที่โจทย์กำหนดสองรูปแบบ คือ

แบบที่ 1 กราฟนี้จะมีจุดยอดคี่ 6 จุด และจุดยอดคู่ 7 จุด

แบบที่ 2 กราฟนี้จะมีจุดยอดคี่ 4 จุด และจุดยอดคู่ 9 จุด

ตัวอย่างกราฟที่มีจุดยอดคี่ 4 จุด และจุดยอดคู่ 9 จุด



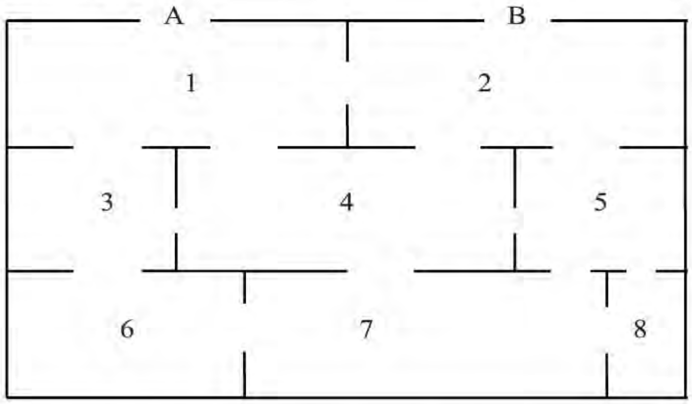
ดังนั้น มีกราฟที่มี 13 จุด และเส้นเชื่อม 31 เส้น โดยที่มี 3 จุด มีดีกรี 1 และ 7 จุดมีดีกรี 4

แบบฝึกหัด 2.4

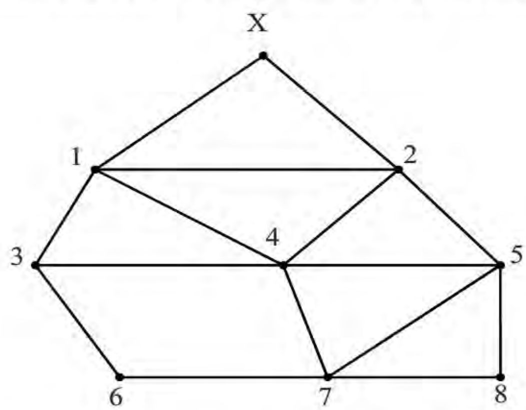
1. 1) ไม่เป็นกราฟออยเลอร์ เพราะกราฟที่กำหนด มีจุดยอดคี่ เช่น จุดยอด U
   2) ไม่เป็นกราฟออยเลอร์ เพราะกราฟที่กำหนด มีจุดยอดคี่ เช่น จุดยอด A
   3) ไม่เป็นกราฟออยเลอร์ เพราะกราฟที่กำหนด มีจุดยอดคี่ เช่น จุดยอด H
   4) เป็นกราฟออยเลอร์ มีวงจรออยเลอร์ที่แทนด้วยลำดับของจุดยอด R, T, U, R, V, S, R, W, S, U, R
   5) ไม่เป็นกราฟออยเลอร์ เพราะกราฟที่กำหนดมีจุดยอดคี่ เช่น จุดยอด K
   6) เป็นกราฟออยเลอร์ มีวงจรออยเลอร์ที่แทนด้วยลำดับของจุดยอด R, D, M, S, D, C, B, A, J, K, L, B, K, C, R, L, M, R
   7) เป็นกราฟออยเลอร์ มีวงจรออยเลอร์ที่แทนด้วยลำดับของจุดยอด F, C, G, D, C, A, D, B, E, D, H, E, I, H, G, F
   8) ไม่เป็นกราฟออยเลอร์ เพราะกราฟที่กำหนดมีจุดยอดคี่ เช่น จุดยอด B

2. แปลงปัญหาเป็นกราฟโดยกำหนดให้

จุดยอด 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 และ 8 แทนห้องต่าง ๆ ตามแผนผัง และ X แทนบริเวณด้านนอกจะเข้าประตู A และออกประตู B



เส้นเชื่อมแต่ละเส้นแทนทางเดินระหว่างห้อง หรือทางเดินระหว่างห้องกับด้านนอกจะได้ กราฟ G ดังรูป

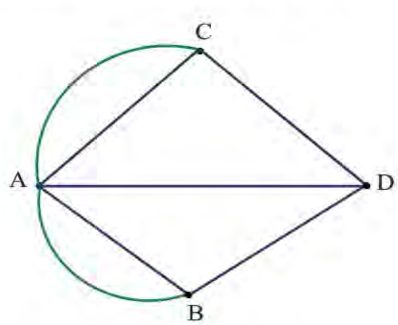


จะเห็นว่า กราฟ G มีจุดยอดคี่ เช่น จุดยอด 3 มีดีกรี 3 หรือ จุดยอด 4 มีดีกรี 5

ดังนั้น G ไม่มีวงจรออยเลอร์

นั่นคือ ไม่สามารถนำแขกเข้าชมในบ้านโดยเริ่มต้น ณ ประตู A แล้วไปสิ้นสุด ณ ประตู B และผ่านประตูต่าง ๆ แต่ละประตูเพียงครั้งเดียวได้

3. จากปัญหาสะพานเคอนิกส์เบิร์กสามารถแปลงเป็นกราฟได้ดังนี้



เนื่องจากกราฟที่แทนปัญหาสะพานเคอนิกส์เบิร์ก จุดยอดทุกจุดเป็นจุดยอดคี่ ดังนั้น จึงไม่สามารถทำตามเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดได้

แบบฝึกหัด 2.5

1. 1) วิถีที่ 1 คือ a, v_1, v_2, z มีผลรวมค่าน้ำหนัก $1 + 5 + 2 = 8$

   วิถีที่ 2 คือ a, v_1, v_2, v_3, z มีผลรวมค่าน้ำหนัก $1 + 5 + 1 + 4 = 11$

   วิถีที่ 3 คือ a, v_3, z มีผลรวมค่าน้ำหนัก $3 + 4 = 7$

   วิถีที่ 4 คือ a, v_4, z มีผลรวมค่าน้ำหนัก $2 + 5 = 7$

   วิถีที่ 5 คือ a, v_3, v_2, z มีผลรวมค่าน้ำหนัก $3 + 1 + 2 = 6$

   ดังนั้น วิถี a, v_3, v_2, z เป็นวิถีที่สั้นที่สุด

   2) วิถีที่ 1 คือ a, v_1, v_2, z มีผลรวมค่าน้ำหนัก $3 + 4 + 4 = 11$

   วิถีที่ 2 คือ a, v_1, v_2, v_4, z มีผลรวมค่าน้ำหนัก $3 + 4 + 1 + 2 = 10$

   วิถีที่ 3 คือ a, v_1, v_2, v_3, v_4, z มีผลรวมค่าน้ำหนัก $3 + 4 + 7 + 9 + 2 = 25$

   วิถีที่ 4 คือ a, v_3, v_4, z มีผลรวมค่าน้ำหนัก $1 + 9 + 2 = 12$

   วิถีที่ 5 คือ a, v_3, v_2, z มีผลรวมค่าน้ำหนัก $1 + 7 + 4 = 12$

   วิถีที่ 6 คือ a, v_3, v_4, v_2, z มีผลรวมค่าน้ำหนัก $1 + 9 + 1 + 4 = 15$

   วิถีที่ 7 คือ a, v_3, v_2, v_4, z มีผลรวมค่าน้ำหนัก $1 + 7 + 1 + 2 = 11$

   ดังนั้น วิถี a, v_1, v_2, v_4, z เป็นวิถีที่สั้นที่สุด

   3) วิถีที่ 1 คือ a, v_1, v_2, v_7, z มีผลรวมค่าน้ำหนัก $1 + 2 + 3 + 4 = 10$

   วิถีที่ 2 คือ $a, v_1, v_2, v_7, v_5, v_6, z$ มีผลรวมค่าน้ำหนัก $1 + 2 + 3 + 2 + 2 + 2 = 12$

   วิถีที่ 3 คือ $a, v_3, v_5, v_1, v_2, v_7, z$ มีผลรวมค่าน้ำหนัก $2 + 2 + 2 + 2 + 3 + 4 = 15$

   วิถีที่ 4 คือ a, v_3, v_5, v_7, z มีผลรวมค่าน้ำหนัก $2 + 2 + 2 + 4 = 10$

   วิถีที่ 5 คือ a, v_3, v_4, v_6, z มีผลรวมค่าน้ำหนัก $2 + 3 + 3 + 2 = 10$

   วิถีที่ 6 คือ a, v_3, v_5, v_6, z มีผลรวมค่าน้ำหนัก $2 + 2 + 2 + 2 = 8$

   วิถีที่ 7 คือ $a, v_3, v_4, v_6, v_5, v_7, z$ มีผลรวมค่าน้ำหนัก $2 + 3 + 3 + 2 + 2 + 4 = 16$

   วิถีที่ 8 คือ a, v_1, v_5, v_6, z มีผลรวมค่าน้ำหนัก $1 + 2 + 2 + 2 = 7$

   วิถีที่ 9 คือ a, v_1, v_5, v_7, z มีผลรวมค่าน้ำหนัก $1 + 2 + 2 + 4 = 9$

   วิถีที่ 10 คือ $a, v_1, v_2, v_7, v_5, v_3, v_4, v_6, z$ มีผลรวมค่าน้ำหนัก $1 + 2 + 3 + 2 + 2 + 3 + 3 + 2 = 18$

   วิถีที่ 11 คือ $a, v_1, v_5, v_3, v_4, v_6, z$ มีผลรวมค่าน้ำหนัก $1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 2 = 13$

   ดังนั้น วิถี a, v_1, v_5, v_6, z เป็นวิถีที่สั้นที่สุด

4) วิถีที่ 1 คือ a, v_1, v_2, z มีผลรวมค่าน้ำหนัก $1 + 3 + 5 = 9$

วิถีที่ 2 คือ a, v_1, v_3, z มีผลรวมค่าน้ำหนัก $1 + 2 + 6 = 9$

วิถีที่ 3 คือ a, v_1, v_3, v_2, z มีผลรวมค่าน้ำหนัก $1 + 2 + 2 + 5 = 10$

วิถีที่ 4 คือ a, v_1, v_2, v_3, z มีผลรวมค่าน้ำหนัก $1 + 3 + 2 + 6 = 12$

วิถีที่ 5 คือ a, v_1, v_2, v_3, v_4, z มีผลรวมค่าน้ำหนัก $1 + 3 + 2 + 1 + 4 = 11$

วิถีที่ 6 คือ a, v_1, v_3, v_4, z มีผลรวมค่าน้ำหนัก $1 + 2 + 1 + 4 = 8$

วิถีที่ 7 คือ a, v_4, z มีผลรวมค่าน้ำหนัก $3 + 4 = 7$

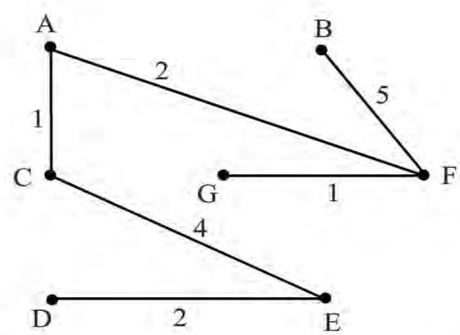
วิถีที่ 8 คือ a, v_4, v_3, z มีผลรวมค่าน้ำหนัก $3 + 1 + 6 = 10$

วิถีที่ 9 คือ a, v_4, v_3, v_1, v_2, z มีผลรวมค่าน้ำหนัก $3 + 1 + 2 + 3 + 5 = 14$

วิถีที่ 10 คือ a, v_4, v_3, v_2, z มีผลรวมค่าน้ำหนัก $3 + 1 + 2 + 5 = 11$

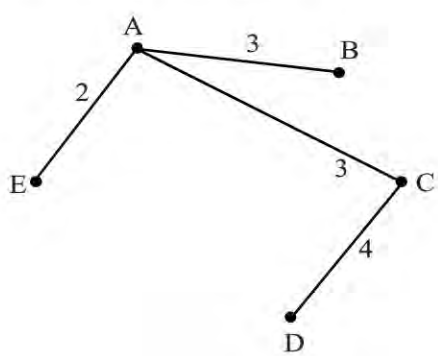
ดังนั้น วิถี a, v_4, z เป็นวิถีที่สั้นที่สุด

2. 1) ต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุด

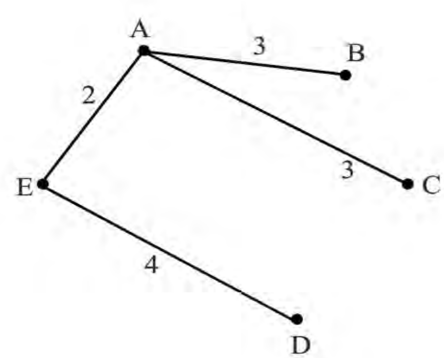


ผลรวมค่าน้ำหนักของเส้นเชื่อมทั้งหมด คือ $1 + 2 + 5 + 1 + 4 + 2 = 15$

2) ต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดคือ



หรือ



ผลรวมค่าน้ำหนักของเส้นเชื่อมทั้งหมด คือ $2 + 3 + 3 + 4 = 12$

บทที่ 3

ความน่าจะเป็น

(40 ชั่วโมง)

ตามประวัติศาสตร์ การหาความน่าจะเป็นเริ่มมาจากปัญหาการได้เปรียบเสียเปรียบในการพนัน การศึกษาเรื่องนี้จะช่วยให้ผู้เรียนสามารถคาดเหตุการณ์ล่วงหน้าได้อย่างมีหลักเกณฑ์ซึ่งจะช่วยในการตัดสินใจได้อย่างมาก ซึ่งบทนี้จะกล่าวถึงกฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ วิธีเรียงสับเปลี่ยน วิธีจัดหมู่ ทฤษฎีบททวินาม ความน่าจะเป็น และกฎที่สำคัญบางประการของความน่าจะเป็น

สาระสำคัญ ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการสอน ตัวอย่างกิจกรรมการเรียนการสอน และการวัดและการประเมินผลที่นำเสนอ มีไว้เพื่อเป็นตัวอย่างในการจัดการเรียนการสอน การนำเข้าสู่บทเรียน การสอนหรือการฝึกทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ให้ผู้เรียนมีคุณธรรม จริยธรรม และค่านิยมที่ดีงามต่อคณิตศาสตร์ ซึ่งผู้สอนสามารถเลือกหรือปรับใช้ได้ตามความเหมาะสม ในบทเรียนนี้มุ่งให้ผู้เรียนบรรลุผลการเรียนรู้ดังนี้

ผลการเรียนรู้

1. แก้โจทย์ปัญหาโดยใช้กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ วิธีเรียงสับเปลี่ยน และวิธีจัดหมู่
2. นำความรู้เรื่องทฤษฎีบททวินามไปใช้ได้
3. หาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่กำหนดให้ได้

สาระสำคัญ

1. กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ

หลักการบวก ถ้าการทำงานหนึ่งต้องมีการทำงานทั้งสิ้น k ขั้นตอนแต่ละขั้นตอนเลือกทำพร้อมกันไม่ได้ คือ ขั้นตอนที่ 1 ถึงขั้นตอนที่ k ตามลำดับโดยที่

การทำงานขั้นตอนที่ 1 มีวิธีทำ n_1 วิธี

การทำงานขั้นตอนที่ 2 มีวิธีทำ n_2 วิธี

$\vdots$ $\qquad$ $\vdots$

การทำงานขั้นตอนที่ k มีวิธีทำ n_k วิธี

จำนวนวิธีทำงานนี้เท่ากับ $n_1 + n_2 + ... + n_k$ วิธี

หลักการคูณ ถ้าการทำงานอย่างหนึ่งประกอบด้วยการทำงาน k ขั้นตอน คือ ขั้นตอนที่ 1 ถึงขั้นตอนที่ k ตามลำดับ โดยที่

การทำงานขั้นตอนที่ 1 มีวิธีทำ n_1 วิธี
ในแต่ละวิธีของขั้นตอนที่ 1 นั้นเลือกทำงานขั้นตอนที่ 2 ได้ n_2 วิธี
ในแต่ละวิธีของขั้นตอนที่ 2 นั้นเลือกทำงานขั้นตอนที่ 3 ได้ n_3 วิธี
⋮ ⋮
ในแต่ละวิธีของขั้นตอนที่ $k-1$ นั้นเลือกทำงานขั้นตอนที่ k ได้ n_k วิธี
และวิธีการทำงานแต่ละวิธีแตกต่างกันแล้วจำนวนวิธีทำงานนี้เท่ากับ $n_1 n_2 n_3 \ldots n_k$ วิธี

2. ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก แฟกทอเรียล (factorial) n คือ ผลคูณของจำนวนเต็มบวกตั้งแต่ 1 ถึง n และเขียนแทนด้วย n!

3. วิธีเรียงสับเปลี่ยน (permutation) เป็นวิธีการจัดเรียงสิ่งของที่กำหนดให้ โดยคำนึงถึงตำแหน่งของสิ่งของที่ต่างกันเป็นวิธีที่ต่างกันหรือบางทีเรียกว่าการจัดลำดับ

4. วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น (linear permutation) เป็นการจัดเรียงสิ่งของในแนวเส้นตรง โดยถือว่าลำดับที่ของสิ่งของแตกต่างกันเป็นวิธีที่ต่างกัน เช่น กำหนดอักษรภาษาไทย 3 ตัว คือ ก, ข และ ค นำมาเรียงสับเปลี่ยนคราวละ 2 ตัว จะสามารถทำได้ 6 วิธี คือ กข, กค, ขค, ขก, คก และ คข

5. จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของ n สิ่งซึ่งแตกต่างกันทั้งหมด โดยจัดเรียงคราวละ r สิ่ง ($1 \le r \le n$) เท่ากับ $P_{n,r}$ วิธี เมื่อ $P_{n,r} = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

6. ถ้ามีสิ่งของอยู่ n สิ่ง ในจำนวนนี้มี n_1 สิ่งที่เหมือนกันเป็นกลุ่มที่หนึ่ง มี n_2 สิ่งที่เหมือนกันเป็นกลุ่มที่สอง... มี n_k สิ่งที่เหมือนกันเป็นกลุ่มที่ k โดยที่ $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$
จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของ n สิ่ง เท่ากับ $\dfrac{n!}{n_1! \times n_2! \times \cdots \times n_k!}$ วิธี

7. วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลม (cirular permutation) เป็นการจัดเรียงสิ่งของเป็นวงกลมซึ่งจะเห็นว่า วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นที่แตกต่างกัน เช่น ABC BCA และ CAB เมื่อนำมาจัดเรียงเป็นวงกลมจะได้วิธีเรียงสับเปลี่ยนเป็นวิธีเดียวกัน ดังนั้นจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมของสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง เท่ากับ $(n-1)!$ วิธี

8. วิธีจัดหมู่ (combination) เป็นการเลือกสิ่งของออกมาเป็นหมู่หรือชุด โดยไม่คำนึงว่าจะได้สิ่งของใดออกมาก่อนหรือหลัง และในการเลือกสิ่งของเหล่านั้นจะถือว่าหมู่หนึ่ง ๆ หรือชุดหนึ่ง ๆ เป็นการจัด 1 วิธี ดังนั้น จำนวนวิธีจัดหมู่ของสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง โดยเลือกคราวละ r สิ่ง ($1 \le r \le n$) เท่ากับ $\dfrac{n!}{(n-r)!r!}$ วิธี เขียนแทนด้วย $C_{n,r}$ หรือ $\binom{n}{r}$

9. ทฤษฎีบททวินาม (Binomial Theorem) ถ้า x, y เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว $(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \ldots + \binom{n}{r}x^{n-r}y^r + \ldots + \binom{n}{n}y^n$

จำนวน $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{r}, \ldots, \binom{n}{n}$ ที่เป็นสัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์ในการกระจาย $(x+y)^n$ เรียกว่า สัมประสิทธิ์ทวินาม (binomial coefficient)

10. การทดลองสุ่ม คือ การทดลองหรือการกระทำใด ๆ ซึ่งทราบว่าผลลัพธ์อาจจะเป็นอะไรได้บ้างแต่ไม่สามารถบอกได้อย่างถูกต้องแน่นอนว่าในแต่ละครั้งที่ทดลองผลที่เกิดขึ้นจะเป็นอะไรในบรรดาผลลัพธ์ที่อาจเป็นไปได้เหล่านี้

11. ปริภูมิตัวอย่าง หรือแซมเปิลสเปซ (sample space) คือ เซตของผลลัพธ์ทั้งหมดที่เป็นไปได้จากการทดลองสุ่ม แต่ละสมาชิกของปริภูมิตัวอย่างหรือผลการทดลองเรียกว่าจุดตัวอย่าง (sample point หรือ outcome)

12. เหตุการณ์ (event) คือ สับเซตของปริภูมิตัวอย่าง

13. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มอย่างหนึ่ง ซึ่งแต่ละจุดตัวอย่างของการทดลองมีโอกาสเกิดขึ้นเท่า ๆ กัน และ E แทนเหตุการณ์ ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E เขียนแทนด้วย P(E) ซึ่ง $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)}$ เมื่อ n(E) คือ จำนวนสมาชิกในเหตุการณ์ E

n(S) คือ จำนวนสมาชิกในปริภูมิตัวอย่าง S

14. กฎที่สำคัญของความน่าจะเป็น ให้ S เป็นปริภูมิตัวอย่าง ซึ่งเป็นเซตจำกัดสมาชิกแต่ละตัวของ S มีโอกาสเกิดขึ้นพร้อม ๆ กัน และ A, B เป็นเหตุการณ์ใด ๆ

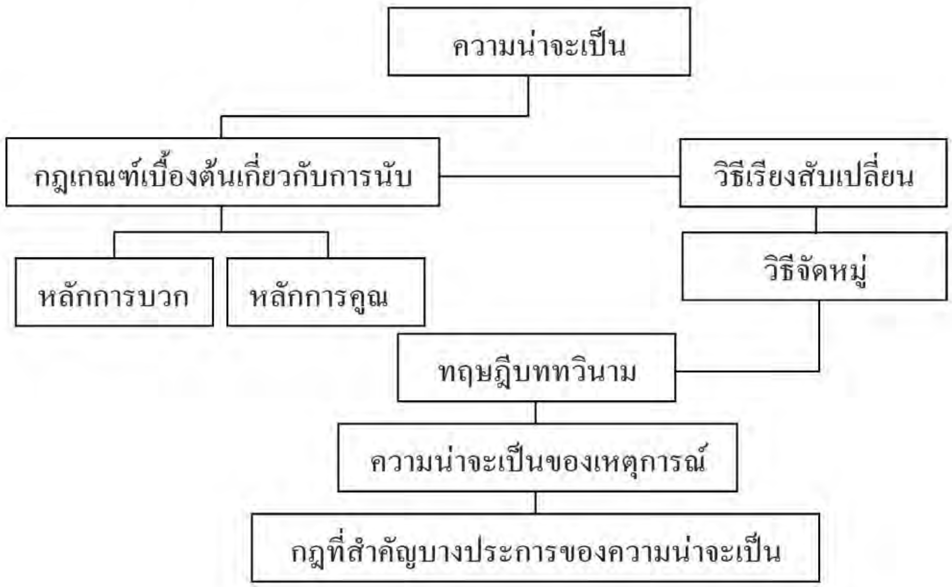
กฎข้อที่ 1 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

กฎข้อที่ 2 ถ้า $A \cap B = \varnothing$ แล้ว $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

กฎข้อที่ 3 $P(A') = 1 - P(A)$

กฎข้อที่ 4 $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

ผู้สอนอาจจัดลำดับเนื้อหาดังแผนผังต่อไปนี้



ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการสอน

กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ

1. เนื่องจากการศึกษาเรื่องความน่าจะเป็นในระดับนี้จะอาศัยนับจำนวนวิธีที่เกิดขึ้นจากการทดลองในเหตุการณ์ที่สนใจ ดังนั้นผู้สอนควรเริ่มต้นสอนกฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับเสียก่อน

2. กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับมีหลักการบวกและหลักการคูณ ผู้สอนควรชี้ให้ผู้เรียนเห็นความแตกต่างของกฎเกณฑ์เหล่านี้ ดังนี้

1) ผู้สอนยกตัวอย่างการทดลองที่ประกอบด้วยขั้นตอน 2 ขั้นก่อน เช่น โยนเหรียญ 1 อัน และลูกเต๋า 1 ลูกพร้อมกัน จะได้จำนวนวิธีที่เกิดขึ้นทั้งหมด $2 \times 6 = 12$ วิธี ผู้สอนอาจใช้คำถามนำ เพื่อให้ผู้เรียนตัดสินว่าเหตุการณ์นี้ใช้หลักการคูณในการหาจำนวนวิธีทั้งหมด

2) จากนั้นผู้สอนยกตัวอย่างเหตุการณ์ที่ใช้หลักการบวกในการหาจำนวนวิธี เช่น หยิบไพ่ 1 ใบ จากไพ่ทั้งสำรับ จำนวนวิธีที่จะหยิบได้ไพ่ แจ๊ค, ควีน, คิง หรือ เอ ดังนี้

จำนวนวิธีที่จะหยิบได้ไพ่แจ๊ค 4 วิธี

จำนวนวิธีที่จะหยิบได้ไพ่ควีน 4 วิธี

จำนวนวิธีที่จะหยิบได้ไพ่คิง 4 วิธี

จำนวนวิธีที่จะหยิบได้ไพ่เอ 4 วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีที่จะหยิบได้ไพ่ แจ๊ค, ควีน, คิง หรือ เอ คือ $4 + 4 + 4 + 4 = 16$ วิธี

ผู้สอนอาจใช้คำถามนำเพื่อให้ผู้เรียนตัดสินว่าเหตุการณ์นี้ใช้หลักการบวกในการหาจำนวนวิธีทั้งหมด

3) ผู้สอนชี้ให้ผู้เรียนเห็นว่าการใช้หลักการคูณในการหาจำนวนวิธีทั้งหมดนั้นขั้นตอนจะต่อเนื่องกัน เช่น ในแต่ละวิธีของขั้นตอนที่ 1 สามารถทำขั้นตอนที่สองได้ 2 วิธี ส่วนการใช้หลักการบวกนั้น ขั้นตอนการกระทำของแต่ละขั้นตอนสิ้นสุดเป็นขั้น ๆ ไป ไม่เกี่ยวข้องกัน เช่น ในตัวอย่างข้อ 2)

3. ผู้สอนยกตัวอย่างปัญหาที่ต้องใช้ทั้งหลักการบวกและหลักการคูณในการหาจำนวนวิธีทั้งหมด เช่น การจัดอาหารเช้าสำรับหนึ่งให้เลือกอาหารเพียงสองอย่าง ถ้ามีซีเรียล 4 ชนิด ขนมปัง 3 ชนิด น้ำผลไม้ 2 ชนิด จำนวนวิธีทั้งหมดที่จะจัดอาหารเช้าได้ทั้งหมดกี่วิธี

ผู้สอนให้ผู้เรียนเขียนชื่ออาหารในแต่ละสำรับก่อน ดังนี้

ชุดที่ 1 ซีเรียลกับขนมปัง

ชุดที่ 2 ขนมปังกับน้ำผลไม้

ชุดที่ 3 ซีเรียลกับน้ำผลไม้

จากนั้นผู้สอนให้ผู้เรียนเขียนจำนวนวิธีในการจัดสำรับของแต่ละชุด ดังนี้

ชุดที่ 1 ซีเรียลกับขนมปัง จัดได้ $4 \times 3 = 12$ วิธี

ชุดที่ 2 ขนมปังกับน้ำผลไม้ จัดได้ $3 \times 2 = 6$ วิธี

ชุดที่ 3 ซีเรียลกับน้ำผลไม้ จัดได้ $4 \times 2 = 8$ วิธี

จากนั้นผู้สอนให้ผู้เรียนหาจำนวนวิธีทั้งหมดที่จะจัดสำรับอาหารเช้าที่มีอาหารสองอย่างได้ $12 + 6 + 8 = 26$ วิธี

หากผู้สอนต้องการปัญหาเพิ่มเติมเกี่ยวกับการสอนในเรื่องนี้ สามารถดูเพิ่มเติมในหัวข้อตัวอย่างกิจกรรมการเรียนการสอนที่เน้นทักษะกระบวนการ

แฟกทอเรียล n

1. ผู้สอนให้ความหมายของสัญลักษณ์ n! ว่า หมายถึง ผลคูณของจำนวนเต็มบวกตั้งแต่ 1 ถึง n จากนั้นผู้สอนให้ผู้เรียนเขียนจำนวนที่กำหนด ให้อยู่ในรูปแฟกทอเรียล เช่น

$$9! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 8 \cdot 9$$

$$(n+1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n(n+1)$$

$$(n-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-2)(n-1)$$

2. ผู้สอนให้ผู้เรียนเขียนจำนวนที่อยู่ในรูปแฟกทอเรียลให้อยู่ในรูปจำนวนที่ไม่มีแฟกทอเรียลปรากฏอยู่ เช่น ให้ผู้เรียนเขียน $\frac{7!3!}{5!}$, $\frac{(n-1)!}{n!}$ ในรูปที่ไม่มีแฟกทอเรียลปรากฏอยู่

3. ผู้สอนให้ผู้เรียนฝึกแก้สมการที่มีรูปแฟกทอเรียลปรากฏอยู่ พร้อมทั้งอาจชี้ให้เห็นด้วยว่าผู้เรียนอาจทำได้โดยใช้อีกวิธีหนึ่งดังนี้

ถ้า $\frac{(n+3)!}{(n+1)!} = 30$ จงหา n

$$\frac{(n+3)(n+2)(n+1)!}{(n+1)!} = 30$$

$$(n+3)(n+2) = 30 \qquad \text{----------} \ (1)$$

เนื่องจากจำนวนทางซ้ายของเครื่องหมายเท่ากับในสมการ (1) เป็นผลคูณของจำนวนเต็มบวก 2 จำนวนที่ต่างกันอยู่ 1 ดังนั้นเราจึงพยายามเขียนจำนวนที่อยู่ทางขวาของเครื่องหมายเท่ากับให้อยู่ในรูปผลคูณของจำนวนเต็มบวก 2 จำนวน ที่ต่างกันอยู่ 1 เหมือนทางซ้าย

นั่นคือ จะเขียนสมการ (1) เป็น $(n+3)(n+2) = 6 \times 5$

จะได้ $n+3 = 6$ และ $n+2 = 5$

ดังนั้น $n = 3$

วิธีเรียงสับเปลี่ยน และวิธีจัดหมู่

การนับจำนวนวิธีในการเรียงสับเปลี่ยน ผู้สอนควรเน้นในเรื่องลำดับในการจัดเรียงสิ่งของว่าถ้าลำดับของสิ่งของต่างกันถือว่าเป็นวิธีต่างกัน ผู้สอนอาจจัดการสอนดังนี้

ผู้สอนยกตัวอย่างปัญหา มีธงสีต่าง ๆ อยู่ 5 สี ธงละหนึ่งสี จงหาจำนวนวิธีที่จะส่งสัญญาณธงโดยอาศัยการสลับที่ธง 3 ธง เรียงตามแนวดิ่ง

1. ผู้สอนอาจเตรียมอุปกรณ์เป็นธงกระดาษสีต่าง ๆ 5 สีเพื่อใช้ประกอบคำอธิบายเกี่ยวกับสัญญาณธง

2. แบ่งกลุ่มผู้เรียนออกเป็น 5 กลุ่ม ตั้งชื่อกลุ่มว่า แดง, เขียว, ฟ้า, เหลือง และ ชมพู ตามลำดับ แล้วให้แต่ละกลุ่มตอบคำถามต่อไปนี้

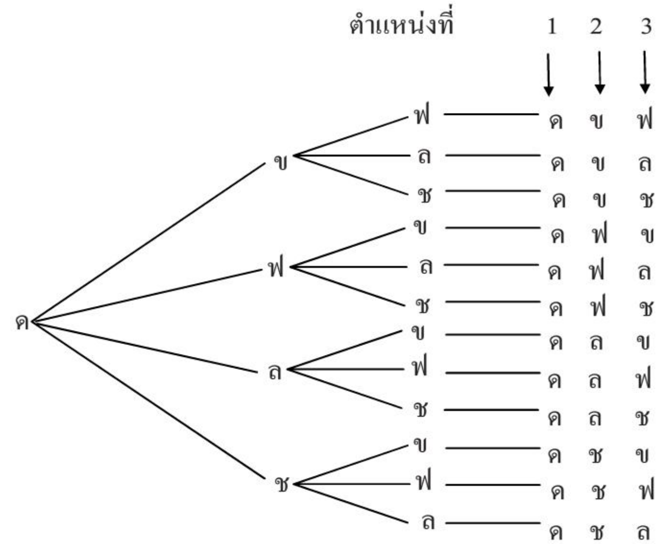
ก. ให้ ด, ข, ฟ, ล และ ช แทน ธงสี แดง, เขียว, ฟ้า, เหลือง และ ชมพู ตามลำดับ จะมีวิธีให้สัญญาณธงกี่วิธี ถ้ากำหนดว่าต้องใช้ธงสีเดียวกับชื่อกลุ่มเป็นธงในตำแหน่งที่หนึ่ง (12 วิธี)

ข. ถ้าต้องการให้แสดงสัญญาณธงที่เป็นไปได้ทั้งหมดซึ่งมี 60 วิธีโดยการตัดกระดาษสี 5 สีข้างต้นเป็นรูปสี่เหลี่ยมเล็ก ๆ ขนาดเท่ากัน ติดลงบนกระดาษขาว จะต้องตัดกระดาษแต่ละสีเป็นจำนวนเท่าไร (36 ชิ้น)

ค. ถ้าจะแบ่งกระดาษสีในข้อ ข ให้แต่ละกลุ่มที่แบ่งไว้เพื่อใช้แสดงสัญญาณธงของแต่ละกลุ่มตามคำถามข้อ ก จะต้องแบ่งกระดาษสีให้แต่ละกลุ่มอย่างไร (สีที่ตรงกับสีของกลุ่ม 12 ชิ้น สีอื่นที่เหลือสีละ 6 ชิ้น)

ง. ถ้าใช้กระดาษสีตามที่แบ่งในข้อ ค ติดลงบนกระดาษขาว เพื่อแสดงสัญญาณธงทั้งหมดที่กลุ่มคำนวณได้ในคำถามข้อ ก วิธีหนึ่งที่ทำได้คือติดกระดาษสีลงไป โดยแผ่นแรกเป็นสีที่ตรงกับสีของกลุ่ม แผ่นที่สองและสามเลือกใช้กระดาษสีไม่ซ้ำกัน เนื่องจากจำนวนกระดาษสีที่แบ่งตามข้อ ค พอดีกับจำนวน

วิธีอยู่แล้วจะสามารถติดกระดาษสีแสดงสัญญาณธงได้ครบพอดี แต่ถ้าจะติดกระดาษสีให้สอดคล้องกับกฎเกณฑ์เบื้องต้นของการนับควรจะทำอย่างไร ผู้เรียนอาจเขียนแผนภาพต้นไม้แสดงสัญญาณธง ดังนี้
ตัวอย่างแผนภาพต้นไม้แสดงสัญญาณธงกลุ่มสีแดง



จากแผนภาพต้นไม้จะได้วิธีติดกระดาษสีให้สอดคล้องกับกฎเกณฑ์เบื้องต้นของการนับโดยเริ่มติดกระดาษสีดังนี้

1. ติดกระดาษสีตรงกับสีของกลุ่มในตำแหน่งที่หนึ่งของสัญญาณทั้ง 12 สัญญาณ
2. ติดกระดาษสีอีกสี่สีที่เหลือในตำแหน่งที่สองของสัญญาณโดยติดสีละ 3 สัญญาณ (ดูแผนภาพต้นไม้ประกอบ)
3. ติดกระดาษสีอีกสามสีที่เหลือในตำแหน่งที่สามของสัญญาณโดยเลือกสีที่ไม่ซ้ำกับสองสีแรก

หลังจากนั้นผู้สอนให้แต่ละกลุ่มรายงานวิธีหาคำตอบข้อ ก ถึง ง เมื่อเห็นว่าคำตอบถูกต้องดีแล้ว ผู้สอนสรุปเพิ่มเติมว่าการเรียงสับเปลี่ยนที่กล่าวถึงข้างต้นเป็นการเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นที่สามารถสรุปโดยทั่วไปว่า ถ้ามีสิ่งของอยู่ n สิ่ง จัดเรียงคราวละ r สิ่ง $(1 \le r \le n)$ จะจัดเรียงได้ $P_{n,r}$ วิธี

เมื่อ $P_{n,r} = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

3. เมื่อผู้เรียนเข้าใจวิธีเรียงสับเปลี่ยนดีแล้ว ผู้สอนใช้กิจกรรมข้างต้นในการอธิบายความหมายของการจัดหมู่เพื่อให้ผู้เรียนเห็นความแตกต่างของการเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่ ดังนี้

ก. ผู้สอนให้ผู้เรียนแบ่งกลุ่มกันติดกระดาษสี เพื่อแสดงสัญญาณธงที่เป็นไปได้ทั้งหมด ซึ่งมีทั้งหมด 60 วิธี โดยให้เริ่มตั้งแต่การตัดกระดาษสีจากแผ่นใหญ่เป็นชิ้นเล็ก ๆ วิธีที่ง่ายที่สุดคือ แจกกระดาษสีแดง, เขียว, ฟ้า, เหลือง และ ชมพู ให้แต่ละกลุ่ม ๆ ละ 3 แผ่นใหญ่ แผ่นละสี กระดาษสีของแต่ละกลุ่มจะเหมือนกันทั้งหมดไม่ได้ ผู้สอนถามผู้เรียนว่าจะจัดกลุ่มได้ทั้งหมดกี่กลุ่ม และแต่ละกลุ่มได้กระดาษสีใดบ้าง (ได้ 10 กลุ่ม ดังนี้ คขฟ, คขล, คขช, คฟล, คฟช, คลช, ขฟล, ขฟช, ฟลช และ ขลช และต้องเตรียมกระดาษ

สีแผ่นใหญ่ไว้สีละ 6 แผ่น)

ข. ถ้าแบ่งกลุ่มตามข้อ ก แต่ละกลุ่มจะติดกระดาษสีแสดงสัญญาณธงได้ กี่สัญญาณ (6 สัญญาณ)

ผู้สอนชี้ให้ผู้เรียนเห็นความแตกต่างของการเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่ว่ามีความแตกต่างกันอย่างไร เช่น จากข้อ 2 .ก วิธีในการจัดสัญญาณธง ดขฟ, ขฟด และ ฟดข เป็นวิธีที่แตกต่างกันแต่ในการจัดหมู่ ข้อ 3.ก การจัดแบบ ดขฟ, ขฟด และ ฟดข ถือว่าเป็นวิธีเดียวกัน

หลังการอภิปรายในข้อ 3 ผู้สอนอาจนำอภิปรายเพื่อสรุปว่าการเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่มีความสัมพันธ์กันอย่างไร โดยบอกว่าในปัญหาข้อ ก นั้น เป็นการจัดหมู่ของ 3 สิ่ง จาก 5 สิ่ง ซึ่งจำนวนวิธีเขียนด้วยสัญลักษณ์เป็น $C_{5,3}$ ส่วนปัญหาในข้อ ข นั้นเป็นการนำสิ่งที่จัดหมู่แล้วมาจัดเรียงลำดับซึ่งแต่ละหมู่จะจัดได้ 3! วิธี ทำให้ได้ว่า $3!\,C_{5,3} = P_{5,3}$

และในกรณีทั่วไปจะได้ว่า $r!\,C_{n,r} = P_{n,r}$

หรือ $C_{n,r} = \dfrac{P_{n,r}}{r!}$

4. ในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับการเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่ ผู้เรียนมักจะไม่สามารถตัดสินว่าปัญหาที่กำหนดให้เป็นเรื่องเกี่ยวกับการเรียงสับเปลี่ยนหรือการจัดหมู่ ซึ่งผู้สอนอาจยกตัวอย่าง ดังนี้

1) มีจุด 4 จุด บนเส้นรอบวงของวงกลมวงหนึ่งจะลากส่วนของเส้นตรงผ่านจุด 2 จุดได้ทั้งหมดกี่เส้น
   จะเห็นว่า ส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดที่ 1 ไปยังจุดที่ 2 และส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดที่2 ไปยังจุดที่1เป็นส่วนของเส้นตรงเดียวกันจึงไม่ต้องคำนึงถึงลำดับใดก่อนหลัง การทำโจทย์ประเภทนี้เป็นวิธีจัดหมู่ ดังนั้น จะมีส่วนของเส้นตรง $\binom{4}{2} = \dfrac{4!}{2!2!} = 6$ เส้น

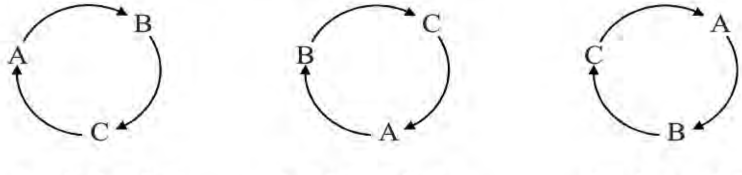
2) จากตัวอักษรในคำว่า MONDAY ถ้าต้องการนำอักษร 3 ตัวจากคำนี้มาเรียงเป็นคำใหม่โดยไม่คำนึงถึงความหมายจะจัดได้ทั้งหมดกี่คำจะเห็นว่า ตำแหน่งที่ต่างกันของอักษรทั้ง 3 ตัวที่จัดนั้นทำให้เกิดคำใหม่ เสมอ จึงถือว่าตำแหน่งที่หรืออันดับที่ทำให้ผลที่เกิดขึ้นต่างกัน โจทย์ข้อนี้จึงเป็นวิธีเรียงสับเปลี่ยน
   ดังนั้น จะจัดคำทั้งหมดได้ $P_{6,3} = 6 \times 5 \times 4 = 120$ คำ
   หรืออาจจะคิดได้อีกวิธีหนึ่งดังนี้
   มีอักษรทั้งหมด 6 ตัว เลือกมาทีละ 3 ตัว แล้วนำ 3 ตัวนี้มาจัดเรียงสับเปลี่ยนอีกครั้งหนึ่ง จำนวนวิธีเลือกทั้งหมดมี $C_{6,3}$ วิธี ในแต่ละวิธีของการเลือกนำมาจัดเรียงสับเปลี่ยนได้ 3! วิธี ดังนั้น จะจัดคำทั้งหมดได้ $C_{6,3} \times 3! = 120$ คำ และในกรณีทั่วไปจะพบว่า $C_{n,r} \times r! = P_{n,r}$

3. ในการพิจารณาปัญหาเกี่ยวกับจำนวนวิธีในการจัดเรียงตัวอักษรหรือเลขโดดมักจะมีปัญหาว่าจะจัดตัวอักษรหรือเลขโดดเหล่านั้นซ้ำกันได้หรือไม่ในกรณีที่โจทย์ปัญหานั้นไม่ระบุไว้อย่างแน่ชัด ปัญหาดังกล่าวเป็นปัญหาที่เกิดจากการตีความหมายซึ่งไม่มีข้อตกลงหรือข้อกำหนดที่แน่นอน ผู้สอนควรหลีกเลี่ยงไม่ให้เกิดปัญหาเหล่านั้นโดยการกำหนดให้ชัดเจน (ดังตัวอย่างในหนังสือเรียน) ว่าจะใช้เลขโดดหรือตัวอักษรซ้ำได้หรือไม่

ตัวอย่างโจทย์ปัญหาที่กำหนดไว้ชัดเจนซึ่งควรจะตีความหมายได้ตรงกัน

1) จะเขียนตัวเลขที่แสดงจำนวนเต็มบวกซึ่งมีสี่หลักได้ทั้งหมดกี่วิธี (ในกรณีนี้เลขโดดในแต่ละหลักใช้ซ้ำกันได้ ดังนั้น คำตอบคือ $9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9000$ วิธี)
2) จะใช้บัตร 4 ใบที่เขียนเลขโดด 1, 2, 3, 4 ไว้ตามลำดับจัดเรียงให้ได้ตัวเลขที่มีสามหลักได้ทั้งหมดกี่วิธี (ในกรณีนี้การจัดเรียงแต่ละแบบใช้บัตรได้บัตรละ 1 ครั้ง ดังนั้น คำตอบคือ 4!)
3) จะใช้เลขโดด 1, 2, 3, 4, 5, 6 เขียนลงบัตรเป็นตัวเลขที่มีหกหลักจะเขียนบัตรได้ทั้งหมดกี่ใบ (ในกรณีนี้การจัดในแต่ละวิธีใช้เลขโดดซ้ำกันได้ เช่น หมายเลข 666333 เป็นต้น ดังนั้น คำตอบคือ 6^6 ใบ)
4) จะมีวิธีจัดเรียงตัวอักษรในคำว่า “HEAD” ได้กี่วิธีถ้าไม่สนใจความหมายของคำที่เกิดขึ้น (ข้อนี้คล้ายกับข้อ 2) สามารถคิดว่าตัวอักษรแต่ละตัวเขียนอยู่ในบัตรแล้วนำบัตรมาจัดเรียงกัน คำตอบคือ 4!)
5) จะมีวิธีจัดเรียงเลขโดดในเซต {0, 1, 2, 3, 4} ได้กี่วิธี (ในกรณีนี้คล้ายกับกรณีในข้อ 4) คำตอบคือ 5!)
6) จะมีวิธีจัดเรียงเลขโดดในตัวเลข “2435” ได้กี่วิธี (คำตอบคือ 4!)
7) จะสร้างตัวเลขที่แสดงจำนวนเต็มบวกที่มีสามหลักจากเลขโดด 1, 4, 6, 9 ได้กี่วิธี (ในกรณีนี้โดยทั่วไปจะหมายถึงว่าใช้เลขโดดซ้ำได้ แต่เพื่อป้องกันมิให้เกิดปัญหา ควรเขียนให้ชัดเจนลงไปว่า ใช้เลขโดดซ้ำกันได้)

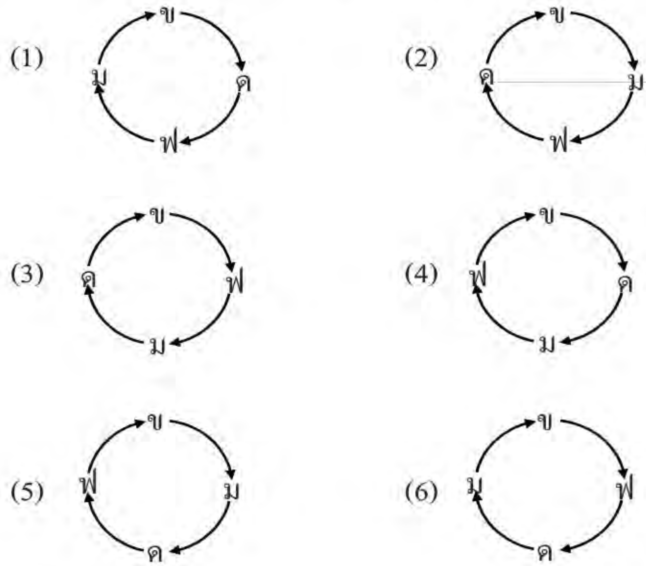
4. การสอนเรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลม ผู้สอนอาจชี้ให้ผู้เรียนเกิดแนวคิดว่าการนำสิ่งของ n สิ่ง มาเรียงเป็นวงกลมนั้นอาจเริ่มโดยการให้สิ่งของสิ่งหนึ่งอยู่คงที่ ณ ตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่ง แล้วจึงจัดเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่เหลืออยู่ $n - 1$ สิ่ง จะได้จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงลมเท่ากับ $(n - 1)!$ เนื่องจาก ลักษณะการเรียง 3 แบบต่อไปนี้เป็นการจัดเรียงเชิงวงกลมเพียง 1 วิธี



$A \rightarrow B \rightarrow C$ $\quad$ $B \rightarrow C \rightarrow A$ $\quad$ $C \rightarrow A \rightarrow B$

หลังจากที่ผู้เรียนเข้าใจเรื่องการเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมแล้ว ผู้สอนอาจยกตัวอย่างปัญหาที่เกี่ยวกับการเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมที่ต่างออกไป เช่น ปัญหาเกี่ยวกับการร้อยลูกปัดเป็นวงกลม หรือการร้อยพวงมาลัยเป็นวงกลม เป็นต้น

การหาจำนวนวิธีร้อยลูกปัด 4 ลูก ซึ่งมีสีขาว สีแดง สีฟ้า และสีม่วง เป็นวงกลมมีได้กี่วิธี ถ้าการจัดเรียงเป็นวงกลมนี้ จะจัดได้ $(4-1)! = 6$ วิธี ดังรูป



ให้ ข แทน ลูกปัดสีขาว
ค แทน ลูกปัดสีแดง
ฟ แทน ลูกปัดสีฟ้า
ม แทน ลูกปัดสีม่วง

จากรูปจะเห็นว่าการร้อยลูกปัดของวิธีที่ (1) และ (2), (3) และ (4), (5) และ (6) เป็นวิธีที่เกิดจากการสลับที่ของลูกปัดลูกที่สองและลูกสุดท้าย เช่น วิธีที่ (1) และ (2) เกิดจากการสลับที่กันของลูกปัดสีม่วงและลูกปัดสีแดง แต่เมื่อพลิกแบบที่ (1) จะได้แบบที่ (2) ดังนั้นจึงร้อยลูกปัดได้เพียง 3 วิธี คือ (1), (3) และ (5) เพราะในการร้อยแบบ (1) ทำให้เกิดแบบ (2) ด้วย นั่นคือ เมื่อพลิกอีกด้านหนึ่งของแบบ (1) ขึ้น ก็จะได้การจัดเรียงแบบ (2) นั่นเอง ทำนองเดียวกัน ถ้าพลิกอีกด้านหนึ่งของ (3) จะได้การจัดเรียงแบบ (4) และพลิกแบบ (5) ก็ได้การจัดเรียงแบบ(6) ดังนั้น ในการร้อยลูกปัด 4 ลูก ร้อยได้เพียง 3 วิธี

โดยทั่วไปจำนวนวิธีจัดเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมในลักษณะที่กล่าวข้างต้น จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนจะเป็นครึ่งหนึ่งของจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมที่กล่าวไว้ในหนังสือเรียน

5. การสอนเกี่ยวกับการจัดเรียงสิ่งของที่เหมือนกัน ผู้สอนอาจชี้แจงดังนี้

ถ้ามีสิ่งของอยู่ n สิ่ง ในจำนวนนี้มี n_1 สิ่งที่เหมือนกันเป็นกลุ่มที่ 1 มี n_2 สิ่งที่เหมือนกันเป็นกลุ่มที่ 2 ... และมี n_k สิ่งที่เหมือนกันเป็นกลุ่มที่ k โดยที่ $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$

จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของทั้ง n สิ่งเท่ากับ $\dfrac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$

กฎนี้บางครั้งเรียกว่า **กฎการแบ่งกลุ่ม** (Partitioning Law) เพราะอาจใช้คำนวณจำนวนวิธีที่จะแบ่งคนหรือสิ่งของ n สิ่ง ออกเป็น k กลุ่ม โดยให้กลุ่มที่ 1 มี n_1 สิ่ง กลุ่มที่ 2 มี n_2 สิ่ง ... กลุ่มที่ k มี n_k

สิ่ง และ $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$ การใช้กฎนี้หาจำนวนวิธีที่จะแบ่งสิ่งของดังกล่าวข้างต้นมีข้อควรระวังคือ **จำนวนสิ่งของในแต่ละกลุ่มจะต้องไม่เท่ากัน และสิ่งของที่นำมาแบ่งต้องแตกต่างกันทั้งหมด**

สมมุติว่ามีของ 4 สิ่ง คือ A, B, C และ D ต้องการแบ่งออกเป็นสองกลุ่ม กลุ่มหนึ่งมี 3 สิ่ง อีกกลุ่มหนึ่งมี 1 สิ่ง จะแบ่งได้ดังนี้

A, B, C กับ D

A, B, D กับ C

A, C, D กับ B

B, C, D กับ A

จะเห็นว่า แบ่งได้ทั้งหมด 4 วิธี

วิธีการแบ่งก็คือเลือกของที่จะให้เป็นกลุ่มแรกออกมาก่อน ของที่เหลือก็จะเป็นอีกกลุ่มหนึ่ง

ดังนั้น จำนวนวิธีที่จะแบ่งของดังกล่าว จะเท่ากับจำนวนวิธีของการเลือกของ 3 สิ่งจากของ 4 สิ่ง ซึ่งเท่ากับ $C_{4,3} = \frac{4!}{3!1!} = 4$ วิธี

หรือจะเท่ากับจำนวนวิธีของการเลือกของ 1 สิ่งจากของ 4 สิ่ง ซึ่งเท่ากับ $C_{4,1} = \frac{4!}{1!3!} = 4$ วิธี

กล่าวโดยทั่วไปได้ว่า ถ้ามีสิ่งของ $p+q$ สิ่ง ซึ่งแตกต่างกันทั้งหมดต้องการแบ่งออกเป็นสองกลุ่ม ๆ ละ p และ q สิ่ง โดยที่ $p \neq q$ จะได้จำนวนวิธีแบ่งเท่ากับ $C_{p+q,p}$ หรือ $C_{p+q,q}$

โดยที่ $$C_{p+q,p} = \frac{(p+q)!}{p!q!}$$

$$C_{p+q,q} = \frac{(p+q)!}{p!q!}$$

ถ้าต้องการแบ่งสิ่งของ $p+q+r$ สิ่ง ซึ่งแตกต่างกันทั้งหมดและแบ่งเป็น3 กลุ่ม ๆ ละ p, q และ r สิ่ง โดยที่ $p \neq q \neq r$ ก็ทำได้โดยการแบ่งของ $p+q+r$ สิ่ง ออกเป็นสองกลุ่มก่อนโดยให้กลุ่มที่หนึ่งมีของ p สิ่ง อีกกลุ่มหนึ่งจะมีของ $q+r$ สิ่ง

จำนวนวิธีแบ่งของ p สิ่ง จาก $p+q+r$ สิ่ง เท่ากับ $C_{p+q+r,p}$

$$C_{p+q+r,p} = \frac{(p+q+r)!}{p!(q+r)!}$$

ในแต่ละวิธีของการแบ่งกลุ่มครั้งนี้จะแบ่งของ $q+r$ สิ่ง ออกเป็นสองกลุ่ม ๆ ละ q และ r สิ่ง

จะได้จำนวนวิธีแบ่งเท่ากับ $C_{q+r,q}$ หรือ $C_{q+r,r}$

ดังนั้น จำนวนวิธีทั้งหมดที่จะแบ่งของ $p+q+r$ สิ่ง ซึ่งแตกต่างกันออกเป็นสามกลุ่ม ๆ ละ p, q และ r สิ่ง โดยที่ $p \neq q \neq r$ จะมีทั้งหมด

$$\binom{p+q+r}{p}\binom{q+r}{q} = \frac{(p+q+r)!}{p!(q+r)!} \times \frac{(q+r)!}{q!r!}$$

$$= \frac{(p+q+r)!}{p!q!r!}$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าต้องการแบ่งของ n สิ่ง ซึ่งแตกต่างกันทั้งหมดออกเป็น k กลุ่ม ๆ ละ $n_1, n_2, ..., n_k$ สิ่ง โดยที่ $n_1 \neq n_2 \neq ... \neq n_k$ และ $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$ จำนวนวิธีแบ่งทั้งหมดเท่ากับ $\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$ ผู้สอนยกตัวอย่างดังนี้

ตัวอย่าง จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดที่จะจัดแบ่งนักเรียน 20 คน ให้ขึ้นรถยนต์ 3 คัน โดยที่รถยนต์แต่ละคันบรรทุกได้ 5, 7 และ 8 คน ตามลำดับ

วิธีคิด การจัดแบ่งนักเรียน 20 คน ให้ขึ้นรถยนต์ 3 คันนี้ก็คือ การแบ่งนักเรียน 20 คน ออกเป็นสามกลุ่ม ๆ ละ 5, 7 และ 8 คน เมื่อแบ่งแล้วให้แต่ละกลุ่มขึ้นรถยนต์ตามขนาดบรรทุกที่กำหนด เช่น กลุ่มที่มีนักเรียน 5 คน ก็ขึ้นรถยนต์คันที่บรรทุกได้ 5 คน จึงไม่ต้องมีการสลับกลุ่มเพื่อขึ้นรถยนต์ และในรถยนต์แต่ละคัน นักเรียนไม่ต้องสลับที่กันนั่ง เพราะจะสลับกันอย่างไรก็อยู่ในรถยนต์คันเดียวกัน นั่นเอง

วิธีทำ จำนวนวิธีทั้งหมดที่จะจัดแบ่งนักเรียนให้ขึ้นรถยนต์ได้ $\frac{20!}{5!7!8!} = 99{,}768{,}240$ วิธี

ความน่าจะเป็น

1. การนำเข้าสู่บทเรียนเรื่องปริภูมิตัวอย่าง ควรให้ผู้เรียนเขียนผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด ซึ่งอาจใช้การเขียนแผนภาพต้นไม้ช่วย แล้วจึงบอกให้ผู้เรียนทราบว่า เซตของผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดคือปริภูมิตัวอย่าง

2. ในการหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E ที่เป็นสับเซตของปริภูมิตัวอย่าง โดยใช้บทนิยาม $P(E) = \frac{n}{N}$ เมื่อ n เป็นจำนวนสมาชิกของเหตุการณ์ และ N เป็นจำนวนสมาชิกของปริภูมิตัวอย่าง S จะใช้ได้ก็ต่อเมื่อ S เป็นเซตจำกัดและแต่ละสมาชิกในปริภูมิตัวอย่าง S มีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่า ๆ กัน เช่น

ก. ในถุงใบหนึ่งมีลูกบอลสีแดง 10 ลูก สีขาว 5 ลูก หยิบลูกบอลมา 1 ลูกสนใจสีของลูกบอลที่หยิบได้ ปริภูมิตัวอย่าง คือ S = {สีแดง, สีขาว}

ถ้าสนใจเหตุการณ์ E ที่จะหยิบได้ลูกบอลสีแดง จะได้ E = {สีแดง}

ถ้าใช้สูตรโดยไม่พิจารณาเงื่อนไขจะได้ $P(E) = \frac{1}{2}$ **ซึ่งผิด** เนื่องจากแต่ละสมาชิกในปริภูมิตัวอย่าง S มีโอกาสเกิดขึ้นได้ไม่เท่ากัน เพราะในถุงมีลูกบอลสีแดงมากกว่าสีขาว ดังนั้น โอกาสที่จะได้ลูกบอลสีแดงจึงมีมากกว่าโอกาสที่หยิบได้ลูกบอลสีขาว แต่ถ้าเขียน S และ E ใหม่ดังนี้

S = {x | x เป็นลูกบอลในถุง} และ E = {x | x เป็นลูกบอลสีแดงในถุง}

จะใช้สูตร $P(E) = \frac{n}{N}$ ได้ เพราะสมาชิกแต่ละตัวใน S มีโอกาสที่จะถูกหยิบได้เท่า ๆ กัน

ดังนั้น จะได้ $P(E) = \frac{10}{15}$

ข. ถ้า E เป็นเหตุการณ์ที่จะได้ผลรวมของแต้มเป็น 3 จากการทอดลูกเต๋า 2 ลูก 1 ครั้ง จะหา P(E) โดยใช้ปริภูมิตัวอย่าง S = {2, 3, 4, ..., 12} ไม่ได้ เนื่องจากแต่ละสมาชิกในปริภูมิตัวอย่าง S มีโอกาสเกิดขึ้นได้ไม่เท่ากัน เช่น การที่จะได้ผลรวมเป็น 2 มีโอกาสเกิดขึ้นได้วิธีเดียวคือ ลูกแรกขึ้น 1 และลูกหลังขึ้น 1 ด้วย แต่การที่จะได้ผลรวมเป็น 3 มีได้ 2 วิธี คือ

ลูกแรกขึ้น 1 และลูกหลังขึ้น 2 ลูกแรกขึ้น 2 และลูกหลังขึ้น 1

จะเห็นว่า การที่จะได้ผลรวมของแต้มเป็น 3 มีโอกาสที่จะเกิดขึ้นได้มากกว่าที่จะได้ผลรวมของแต้มเป็น 2 ดังนั้น ในการหาความน่าจะเป็นโดยใช้สูตร $P(E) = \frac{n}{N}$

ปริภูมิตัวอย่าง S จะต้องประกอบด้วยสมาชิกที่มีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่า ๆ กันคือ

S = {(1, 1), (1, 2), ..., (1, 6), (2, 1), (2, 2),…, (2, 6), (3, 1), (3, 2), …, (3, 6), (4, 1), (4, 2), …, (4, 6), (5, 1), (5, 2), …, (5, 6), (6, 1), (6, 2), …, (6, 6)}

E = {(1, 2), (2, 1)}

3. ผู้สอนควรชี้ให้ผู้เรียนเห็นความสำคัญของการใช้กฎที่สำคัญบางประการของความน่าจะเป็น เพราะบางปัญหาการหาจำนวนของเหตุการณ์ที่สนใจอาจทำได้ยาก เช่น

การทอดลูกเต๋า 3 ลูก 1 ครั้ง ให้หาความน่าจะเป็นที่ผลรวมของแต้มบนหน้าลูกเต๋ามากกว่า 3 ผู้เรียนอาจใช้การแจงกรณีเพื่อหาจำนวนสมาชิกของเหตุการณ์ที่ผลรวมของแต้มบนหน้าลูกเต๋ามากกว่า 3 หรืออาจใช้กฎที่สำคัญบางประการของความน่าจะเป็น ดังนี้

ในที่นี้จะหาจำนวนสมาชิกของเหตุการณ์ที่ผลบวกของแต้มบนหน้าลูกเต๋าเป็น 3 คือ

ให้ E_1 เป็นเหตุการณ์ที่ผลบวกของแต้มบนหน้าลูกเต๋าเป็น 3 ดังนั้น $E_1 = \{(1,1,1)\}$

E_2 เป็นเหตุการณ์ที่ผลบวกของแต้มบนหน้าลูกเต๋ามากกว่า 3

ในการทอดลูกเต๋า 3 ลูก 1 ครั้ง จำนวนวิธีที่จะเกิดผลลัพธ์มีได้ $6 \times 6 \times 6 = 6^3$ วิธี

ดังนั้น $n(S) = 6^3$ วิธี

ความน่าจะเป็นที่ผลบวกของแต้มบนหน้าลูกเต๋าเป็น 3 คือ $P(E_1) = \frac{1}{6^3}$

เนื่องจากสมาชิกของเหตุการณ์ที่ผลบวกของแต้มบนหน้าลูกเต๋าเป็น 3 และสมาชิกของเหตุการณ์ที่ผลบวกของแต้มบนหน้าลูกเต๋ามากกว่า 3 รวมเป็นสมาชิกทั้งหมดของปริภูมิตัวอย่างดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ผลบวกของแต้มบนหน้าลูกเต๋ามากกว่า 3 หาได้จากการหาผลต่างของ 1 กับความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ผลบวกของแต้มบนหน้าลูกเต๋าเป็น 3 นั่นคือ $P(E_2) = 1 - P(E_1)$ ดังนั้น $P(E_2) = 1 - \frac{1}{6^3}$

4. การใช้สูตร $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$

ผู้สอนควรชี้ให้เห็นว่า สูตรนี้ใช้ได้เมื่อ E_1 และ E_2 เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกันเท่านั้น ผู้สอนควรให้ผู้เรียนยกตัวอย่างเหตุการณ์ E_1, E_2 แล้วหาว่า $E_1 \cap E_2$ เป็นเซตว่างหรือไม่

ถ้า $E_1 \cap E_2 = \varnothing$ แสดงว่า เหตุการณ์ E_1 และ E_2 เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน

บางครั้งเป็นการยากที่จะแจกแจงเซต E_1, E_2 ซึ่งทำให้พิจารณาจาก $E_1 \cap E_2$ ไม่ได้

การพิจารณาว่า E_1 และ E_2 เป็นเหตุการณ์ที่เกิดร่วมกันหรือไม่ จึงต้องพิจารณาสมบัติของสมาชิกใน E_1 ว่าเป็นสมาชิกใน E_2 ได้หรือไม่ ถ้าได้แสดงว่า E_1 และ E_2 เป็นเหตุการณ์ที่เกิดร่วมกันจึงต้องใช้สูตร

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

ผู้สอนอาจยกตัวอย่างของการพิจารณาว่าเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน เช่น ดึงไพ่ 2 ใบ จากไพ่สำรับหนึ่งซึ่งมี 52 ใบ จงหาความน่าจะเป็นที่หยิบได้ไพ่ โพดำ 2 ใบ หรือ โพแดงอย่างน้อย 1 ใบ

ให้ E_1 เป็นเหตุการณ์ซึ่งได้โพดำ 2 ใบ

E_2 เป็นเหตุการณ์ซึ่งได้โพแดงอย่างน้อย 1 ใบ

จะหา $P(E_1 \cup E_2)$

เนื่องจากสมาชิกของเหตุการณ์ใน E_1 ไม่มีสมบัติที่จะเป็นสมาชิกในเหตุการณ์ E_2 เพราะในการหยิบไพ่ 2 ใบ เมื่อหยิบได้โพดำ 2 ใบ แล้วจะหยิบไพ่โพแดงอีก 1 ใบ ย่อมเป็นไปไม่ได้

ดังนั้น E_1 และ E_2 จึงเป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน

จะได้ $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$

วิธีที่จะหยิบไพ่ 2 ใบ จากไพ่ 52 ใบ มี $\binom{52}{2}$ วิธี

วิธีที่จะหยิบไพ่ 2 ใบ และเป็นโพดำทั้งคู่มี $\binom{13}{2}$ วิธี

$$\text{ดังนั้น} \quad P(E_1) = \frac{\binom{13}{2}}{\binom{52}{2}}$$

วิธีที่จะหยิบไพ่ 2 ใบ ให้ได้โพแดงอย่างน้อย 1 ใบ เท่ากับ จำนวนวิธีที่จะหยิบไพ่โพแดง 1 ใบ และไพ่อื่น ๆ 1 ใบ รวมกับจำนวนวิธีที่จะหยิบไพ่ 2 ใบ ได้โพแดงทั้ง 2 ใบ

ดังนั้น จำนวนวิธีที่จะได้โพแดงอย่างน้อย 1 ใบ เท่ากับ $\binom{13}{1}\binom{39}{1} + \binom{13}{2}$

$$\text{จะได้} \quad P(E_2) = \frac{\binom{13}{1}\binom{39}{1} + \binom{13}{2}}{\binom{52}{2}}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) = \frac{\binom{13}{2}}{\binom{52}{2}} + \frac{\binom{13}{1}\binom{39}{1} + \binom{13}{2}}{\binom{52}{2}}$$

ตัวอย่างกิจกรรมที่ส่งเสริมทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

เนื่องจากผู้เรียนอาจสับสนเกี่ยวกับปัญหาที่ใช้กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับในการตัดสินว่าควรจะใช้หลักการบวกหรือหลักการคูณนั้น ผู้สอนอาจใช้ปัญหาในกิจกรรมต่อไปนี้ช่วยสร้างความเข้าใจแก่ผู้เรียนให้ดีขึ้น

กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ

ปัญหาเพิ่มเติมเกี่ยวกับกฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับที่ผู้สอนสามารถเลือกใช้ในการสอน ดังนี้

ปัญหาที่มีเงื่อนไขบางอย่าง เช่น ใช้เลขโดด 0, 1, 2, 3, 4 และ 5 เขียนตัวเลขที่มีสามหลักที่แสดงจำนวนคู่ได้ทั้งหมดกี่จำนวน ถ้า

1. เลขโดดในแต่ละหลักซ้ำกันได้
2. เลขโดดในแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน

ก่อนที่ผู้สอนจะให้ผู้เรียนหาจำนวนตัวเลขที่มีสามหลักที่แสดงจำนวนคู่โดยใช้เลขโดด 0, 1, 2, 3, 4 และ 5 และเลขโดดในแต่ละหลักซ้ำกันได้ ผู้สอนอาจใช้คำถามเพื่อช่วยให้ผู้เรียนหาคำตอบได้ง่ายขึ้น ดังนี้

1) ผู้สอนให้ผู้เรียนอธิบายความหมายของตัวเลขที่มีสามหลักซึ่งผู้เรียนอาจอธิบายได้ว่า หมายถึงตัวเลขที่ประกอบด้วยเลขโดด 3 ตัว โดยที่เลขโดดในหลักร้อยต้องไม่เป็น 0
2) ผู้สอนถามผู้เรียนว่าคำว่าเลขโดดในแต่ละหลักซ้ำกันได้ หมายความว่าอย่างไร พร้อมทั้งให้ผู้เรียนยกตัวอย่าง ซึ่งผู้เรียนควรตอบได้ว่าเลขโดดในหลักหน่วยหลักสิบหรือหลักร้อยอาจเหมือนกันได้ เช่น 221, 303, 444 เป็นต้น
3) ผู้สอนถามผู้เรียนว่าจำนวนคู่หมายความว่าอย่างไร พร้อมทั้งให้ยกตัวอย่างตัวเลขที่มีสามหลักที่แสดงจำนวนคู่ ผู้เรียนควรตอบได้ว่า หมายถึงจำนวนที่ 2 หารลงตัว
4) ผู้สอนถามว่า สำหรับปัญหาข้างต้นผู้เรียนคิดว่าเลขโดดในหลักหน่วยควรเป็นเลขโดดอะไรได้บ้าง ซึ่งผู้เรียนควรตอบได้ว่า 0, 2 และ 4 พร้อมทั้งยกตัวอย่างตัวเลขที่มีสามหลักที่แสดงจำนวนคู่ เช่น 344, 430, 552

ผู้สอนถามผู้เรียนต่อไปว่า จากตำแหน่งของเลขโดดในตัวเลขสามหลักนี้ จะเลือกเลขโดดในหลักหน่วยได้กี่วิธี นักเรียนควรตอบได้ว่ามี 3 วิธี (คือ 0, 2 หรือ 4) ผู้สอนถามต่อไปว่าในแต่ละวิธีที่เลือกเลขโดดในหลักหน่วยจะสามารถเลือกเลขโดดในหลักสิบได้กี่วิธี ผู้เรียนควรตอบได้ว่า 6 วิธี (คือเลขโดดทุกตัว) ผู้สอนถามต่อว่า ในทำนองเดียวกันจะเลือกเลขโดดในหลักร้อยได้กี่วิธี ผู้เรียนควรตอบได้ว่า 5 วิธี (คือ 1, 2, 3, 4 หรือ 5)

ผู้สอนให้ผู้เรียนหาจำนวนวิธีเลือกเลขโดดดังกล่าว โดยเริ่มจากวิธีเลือกใช้เลขโดดในหลักร้อยหรือหลักสิบก่อน ซึ่งผู้เรียนจะเห็นว่าได้คำตอบเท่ากัน

ผู้สอนและผู้เรียนช่วยกันสรุปว่า เนื่องจากเลขโดดในแต่ละหลักซ้ำกันได้ ดังนั้น จะเริ่มหาจำนวนวิธีจากหลักใดก่อนก็ได้

การหาจำนวนวิธีที่จะเขียนตัวเลขที่มีสามหลักที่แสดงจำนวนคู่ที่แต่ละหลักซ้ำกันได้ จึงควรเป็นดังนี้

เลือกเลขโดดในหลักหน่วยได้ 3 วิธี (คือ 0, 2, 4) แต่ละวิธีที่เลือกเลขโดดในหลักหน่วยสามารถเลือกเลขโดดในหลักสิบได้ 6 วิธี (คือ 0, 1, 2, 3, 4, 5) แต่ละวิธีที่เลือกเลขโดดในหลักหน่วยและหลักสิบสามารถเลือกเลขโดดในหลักร้อยได้ 5 วิธี (คือ 1, 2, 3, 4, 5)

ดังนั้น การใช้เลขโดด 0, 1, 2, 3, 4 และ 5 เขียนตัวเลขที่มีสามหลักที่แสดงจำนวนคู่และเลขโดดในแต่ละหลักซ้ำกันได้ จึงเขียนได้ทั้งหมด $5 \times 6 \times 3 = 90$ จำนวน

ผู้สอนถามผู้เรียนว่าการหาจำนวนตัวเลขที่จะใช้เลขโดด 0, 1, 2, 3, 4 และ5 เขียนตัวเลขที่มีสามหลักที่แสดงจำนวนคู่ ซึ่งเลขโดดในแต่ละหลักไม่ซ้ำกันควรเริ่มที่หลักใด เพราะเหตุใด

ผู้สอนและผู้เรียนลองทำโจทย์ โดยเริ่มจากหลักหน่วยก่อนซึ่งจะพบปัญหาว่า ถ้าหลักหน่วยเป็น 0 หรือหลักหน่วยเป็น 2 หรือ 4 ทำให้จำนวนวิธีเลือกเลขโดดในหลักร้อยไม่เท่ากัน

การพิจารณาจึงต้องแยกออกเป็น 2 กรณี คือ

กรณีที่ 1 เมื่อหลักหน่วยเป็น 0 แล้วหาจำนวนวิธีเลือกเลขโดดในหลักอื่น ๆ ที่เหลือ โดยจะเลือกหลักใดก่อนก็ได้

กรณีที่ 2 เมื่อหลักหน่วยเป็น 2 หรือ 4 ต้องหาจำนวนวิธีเลือกเลขโดดในหลักร้อยก่อน (เพื่อไม่ให้ 0 อยู่ในหลักนี้) แล้วจึงหาวิธีเลือกเลขโดดในหลักสิบ

ดังนั้น ในการหาจำนวนวิธีเลือกเลขโดดในหลักต่าง ๆ ควรทำดังนี้

กรณีที่ 1 เมื่อหลักหน่วยเป็น 0

เลือกเลขโดดในหลักหน่วยได้ 1 วิธี คือ 0

แต่ละวิธีที่เลือกเลขโดดในหลักหน่วยเป็น 0 สามารถเลือกเลขโดดในหลักสิบได้ 5 วิธี คือ 1, 2, 3, 4, 5

แต่ละวิธีที่เลือกเลขโดดในหลักหน่วยและหลักสิบ สามารถเลือกเลขโดดในหลักร้อยได้ 4 วิธี คือเลขโดดที่เหลือ

ดังนั้น จำนวนตัวเลขที่ใช้เลขโดด 0, 1, 2, 3, 4 และ 5 เขียนตัวเลขที่มีสามหลักที่แสดงจำนวนคู่ ที่เลขโดดในแต่ละหลักไม่ซ้ำกันซึ่งหลักหน่วยเป็น 0 มีทั้งหมด $4 \times 5 \times 1 = 20$ จำนวน

กรณีที่ 2 เมื่อหลักหน่วยเป็น 2 หรือ 4

เลือกเลขโดดในหลักหน่วยได้ 2 วิธี คือ 2 หรือ 4

แต่ละวิธีที่เลือกเลขโดดในหลักหน่วย สามารถเลือกเลขโดดในหลักร้อยได้ 4 วิธี

คือ 1, 2, 3, 5 หรือ 1, 3, 4, 5

แต่ละวิธีที่เลือกเลขโดดในหลักหน่วยและหลักร้อย สามารถเลือกเลขโดดในหลักสิบได้ 4 วิธี คือเลขโดดที่เหลือ

ดังนั้น จำนวนตัวเลขที่ได้จากการใช้เลขโดด 0, 1, 2, 3, 4 และ 5 เขียนตัวเลขที่มีสามหลักที่แสดงจำนวนคู่ซึ่งเลขโดดในแต่ละหลักไม่ซ้ำกันและเลขโดดในหลักหน่วยเป็น 2 หรือ 4

มีทั้งหมด $4 \times 4 \times 2 = 32$ จำนวน

ดังนั้น จำนวนตัวเลขที่ได้จากการใช้เลขโดด 0, 1, 2, 3, 4 และ 5 เขียนตัวเลขที่มีสามหลักที่แสดงจำนวนคู่และเลขโดดในแต่ละหลักไม่ซ้ำกันมีทั้งหมด $20 + 32 = 52$ จำนวน

ผู้สอนอาจใช้ตัวอย่างปัญหาต่อไปนี้ เพื่อช่วยให้ผู้เรียนเข้าใจยิ่งขึ้น

ปัญหาที่ 1 จากเลขโดด 0, 1, 2, 3, 4 และ 5 นำไปเขียนตัวเลขที่มีสามหลักโดยที่เลขโดดในแต่ละหลักไม่ซ้ำกันได้ทั้งสิ้นกี่จำนวน

วิธีคิด จากโจทย์ปัญหาได้กำหนดเงื่อนไข 3 ข้อ คือ

1) ใช้เลขโดด 0, 1, 2, 3, 4 และ 5
2) เป็นตัวเลขที่มีสามหลัก
3) เลขโดดในแต่ละหลักต้องไม่ซ้ำกัน

จากเงื่อนไขทั้งสามข้อนี้ต้องนำมาพิจารณาประกอบการใช้กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ เพื่อหาจำนวนวิธีในการเลือกเลขโดดในการเขียนตัวเลขที่มีสามหลักโดยเลขโดดในแต่ละหลักต้องไม่ซ้ำกัน สำหรับปัญหานี้ต้องพิจารณาจำนวนวิธีเลือกเลขโดดในหลักต่าง ๆ คือ หลักหน่วย หลักสิบ และหลักร้อย เนื่องจากการเขียนตัวเลขที่มีสามหลักนั้น **หลักร้อยต้องไม่ใช้ตัวเลข 0** ส่วนหลักอื่น ๆ นั้นจะใช้เลขโดดใดก็ได้ใน 6 ตัวที่กำหนด การเริ่มแก้ปัญหาจึงควรเริ่มด้วยการหาจำนวนวิธีที่จะเลือกเลขโดดในหลักร้อย เพราะมีข้อจำกัดมากกว่าหลักอื่น ๆ ดังนั้น วิธีหาคำตอบปัญหาจึงอาจเป็นดังนี้

วิธีที่ 1 เลือกเลขโดดในหลักร้อยได้ต่าง ๆ กัน 5 วิธี

แต่ละวิธีที่เลือกเลขโดดในหลักร้อย สามารถเลือกเลขโดดในหลักสิบได้ 5 วิธี

แต่ละวิธีที่เลือกเลขโดดในหลักร้อยและหลักสิบ สามารถเลือกเลขโดดในหลักหน่วยได้ 4 วิธี

ดังนั้น จากกฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ จำนวนตัวเลขสามหลักที่ได้จากการใช้ เลขโดด 0, 1, 2, 3, 4, 5 และเลขโดดในแต่ละหลักไม่ซ้ำกันมีทั้งสิ้น $5 \times 5 \times 4 = 100$ จำนวน

วิธีหาคำตอบข้างต้นเป็นเพียงวิธีหนึ่งเท่านั้น อาจหาคำตอบโดยวิธีอื่น ๆ ก็ได้ เช่น การพิจารณาโดยเริ่มจากการเลือกเลขโดดในหลักหน่วยก่อน แต่เนื่องจากจะมีปัญหาว่าเหลือ 0 อยู่หรือไม่ จึงแยกกรณีพิจารณาดังต่อไปนี้

วิธีที่ 2 ถ้าเริ่มเลือกเลขโดดในหลักหน่วยก่อน แยกกรณีพิจารณาได้ดังนี้

1) หาจำนวนตัวเลขที่มีสามหลักที่ 0 อยู่ในหลักหน่วย เลือกเลขโดดในหลักสิบได้ 5 วิธี

แต่ละวิธีที่เลือกเลขโดดในหลักสิบ สามารถเลือกเลขโดดในหลักร้อยได้ 4 วิธี
ดังนั้น จำนวนตัวเลขที่มีสามหลักที่ 0 อยู่ในหลักหน่วย โดยใช้เลขโดด 0, 1, 2, 3, 4 และ 5 และเลขโดดในแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน มีทั้งหมด $5 \times 4 \times 1 = 20$ จำนวน

2) หาจำนวนตัวเลขที่มีสามหลักที่ 0 อยู่ในหลักสิบในทำนองเดียวกับข้อ 1) จะได้ว่าจำนวนตัวเลขในข้อนี้มีทั้งหมด 20 จำนวน

3) หาจำนวนตัวเลขที่มีสามหลักที่ไม่มี 0 ปรากฏอยู่เลยได้ทั้งหมด $5 \times 4 \times 3 = 60$ จำนวน
จาก 1), 2) และ 3) จำนวนตัวเลขที่มีสามหลักโดยใช้เลขโดด 0, 1, 2, 3, 4 และ 5 และเลขโดดในแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน มีทั้งสิ้น $20 + 20 + 60 = 100$ จำนวน

ปัญหาที่ 2 จากเลขโดด 0, 1, 2, 3, 4 และ 5 นำไปเขียนตัวเลขที่มีสามหลักที่แสดงจำนวนคี่และเลขโดดในแต่ละหลักไม่ซ้ำกันได้กี่จำนวน

วิธีคิด เงื่อนไขของปัญหานี้เหมือนของปัญหาที่ 1 แต่เพิ่มเงื่อนไขอีกหนึ่งข้อ คือ **ตัวเลขที่ต้องการเป็นตัวเลขที่แสดงจำนวนคี่** เงื่อนไขนี้มีผลต่อจำนวนวิธีเลือกเลขโดดในหลักหน่วย ถ้าเริ่มหาคำตอบโดยพิจารณาเลือกเลขโดดในหลักร้อยก่อนเช่นเดียวกับการพิจารณาเลือกเลขโดดในหลักหน่วยจะมีปัญหา เพราะใน 5 วิธีที่เลือกเลขโดดในหลักร้อยนั้นมี 3 วิธี ที่ใช้ 1, 3 และ 5 ไปแล้ว ทำให้มีผลต่อจำนวนวิธีเลือกเลขโดดในหลักหน่วยซึ่งใช้เลขโดดที่กำหนดให้ได้เพียง 3 ตัว คือ 1, 3 และ 5 เท่านั้น ยิ่งถ้าพิจารณาวิธีเลือกเลขโดดในหลักสิบต่อจากการพิจารณาเลือกเลขโดดในหลักร้อยจะทำให้การพิจารณาจำนวนวิธีเลือกเลขโดดในหลักหน่วยมีปัญหามากขึ้น

วิธีหาคำตอบของปัญหานี้จึงควรพิจารณาวิธีเลือกเลขโดดในหลักหน่วยเสียก่อนแล้วพิจารณาเลือกเลขโดดในหลักร้อย จากนั้นจึงไปพิจารณาจำนวนวิธีเลือกเลขโดดในหลักสิบเป็นลำดับสุดท้าย

วิธีทำ เลือกเลขโดดในหลักหน่วยได้ต่าง ๆ กัน 3 วิธี
แต่ละวิธีที่เลือกเลขโดดในหลักหน่วย สามารถเลือกเลขโดดในหลักร้อยได้ 4 วิธี
แต่ละวิธีที่เลือกเลขโดดในหลักหน่วยและหลักร้อย สามารถเลือกเลขโดดในหลักสิบได้ 4 วิธี
ดังนั้น ใช้เลขโดด 0, 1, 2, 3, 4 และ 5 เขียนตัวเลขที่มีสามหลักที่แสดงจำนวนคี่ และเลขโดดในแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน ได้ $4 \times 4 \times 3 = 48$ จำนวน

ปัญหาที่ 3 จากเลขโดด 0, 1, 2, 3, 4 และ 5 นำไปเขียนตัวเลขที่มีสามหลักที่แสดงจำนวนคู่และเลขโดดในแต่ละหลักไม่ซ้ำกันได้กี่จำนวน

วิธีคิด ปัญหาที่ 3 นี้ มีเงื่อนไขเพิ่มจากปัญหาที่ 1 อีกหนึ่งข้อคือ **ตัวเลขที่ต้องการเป็นตัวเลขที่แสดงจำนวนคู่**

ถ้าพิจารณาไม่รอบคอบอาจจะสรุปว่าใช้วิธีการในทำนองเดียวกับที่ใช้ในการหาคำตอบปัญหาที่ 2 คือ พิจารณาเลือกเลขโดดในหลักหน่วย หลักร้อยและหลักสิบ ตามลำดับ แต่วิธีดังกล่าวมีปัญหาเพราะเลขโดดที่อาจใช้ในหลักหน่วยมี 3 ตัว คือ 0, 2 และ 4 การที่ใช้ 0 หรือไม่ใช้ 0 ในหลักหน่วย มีผลต่อการพิจารณาจำนวนวิธีเลือกเลขโดดในหลักร้อย การหาคำตอบจึงอาจทำได โดยการแยกกรณีพิจารณา เมื่อใช้ 0 เป็นหลักหน่วย และเมื่อไม่ได้ใช้ 0 เป็นหลักหน่วย ดังนี้

วิธีทำ แยกกรณีและพิจารณาดังนี้

1. เมื่อใช้ 0 ในหลักหน่วย
   เลือกเลขโดดในหลักร้อยได้ 5 วิธี
   แต่ละวิธีที่เลือกเลขโดดในหลักร้อย สามารถเลือกเลขโดดในหลักสิบได้ 4 วิธี
   ดังนั้น จำนวนตัวเลขที่มีสามหลักที่หลักหน่วยเป็น 0 โดยใช้เลขโดด 0, 1, 2, 3, 4 และ 5 และเลขโดดในแต่ละหลักไม่ซ้ำกันมี $5 \times 4 = 20$ จำนวน
2. เมื่อไม่ใช้ 0 ในหลักหน่วย
   เลือกเลขโดดในหลักหน่วยได้ 2 วิธี คือ 2 หรือ 4
   แต่ละวิธีที่เลือกเลขโดดในหลักหน่วย สามารถเลือกเลขโดดในหลักร้อยได้ 4 วิธี
   แต่ละวิธีที่เลือกเลขโดดในหลักหน่วยและหลักร้อย สามารถเลือกเลขโดดในหลักสิบได้ 4 วิธี
   ดังนั้น จำนวนตัวเลขที่มีสามหลักที่แสดงจำนวนคู่ที่หลักหน่วยไม่เป็น 0 และโดยใช้เลขโดด 0, 1, 2, 3, 4 และ 5 และเลขโดดในแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน มี $4 \times 4 \times 2 = 32$ จำนวน
   ดังนั้น จำนวนตัวเลขที่มีสามหลักที่แสดงจำนวนคู่โดยใช้เลขโดด 0, 1, 2, 3, 4 และ 5 และเลขโดดในแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน มีทั้งหมด $20 + 32 = 52$ จำนวน

หมายเหตุ 1. ถ้าปัญหาที่ 1, 2 และ 3 เป็นปัญหาที่ถามต่อเนื่องกันแล้ว การหาคำตอบปัญหาที่ 3 อาจใช้คำตอบปัญหาที่ 1 และ 2 ช่วย โดยใช้จำนวนวิธีที่ได้จากปัญหาที่ 2 ลบออกจากจำนวนวิธีที่ได้จากปัญหาที่ 1 ก็ได้

2. ในการแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการนับจำนวนวิธี บางกรณีก็ใช้เฉพาะการคูณ บางกรณีก็ใช้เฉพาะการบวก ซึ่งผู้สอนควรอธิบายให้ผู้เรียนเข้าใจถึงลักษณะของโจทย์ที่จะต้องใช้การคูณหรือการบวก การกระทำใด ๆ ที่ยังไม่สิ้นสุด การคำนวณหาจำนวนวิธีสำหรับการกระทำนั้น ๆ เราใช้การคูณ แต่ถ้าการกระทำใด ๆ สามารถแยกได้เป็นหลายกรณีและแต่ละกรณีสิ้นสุดลงแล้ว ในการคำนวณหาจำนวนวิธีสำหรับการกระทำนั้นเราใช้การบวกจำนวนวิธีในแต่ละกรณีเข้าด้วยกัน ดังจะเห็นได้จากตัวอย่างข้างต้นที่ให้หาจำนวนตัวเลขที่มีสามหลักที่แสดงจำนวนคู่ อาจแยกเป็นจำนวนตัวเลขที่มีสามหลักที่ลงท้ายด้วย 0 ซึ่งมี 20 จำนวน ซึ่งการคำนวณหาจำนวนในกรณีนี้สิ้นสุดลงแล้ว และจำนวนตัวเลขที่มีสามหลักที่ไม่ลงท้ายด้วย 0 ซึ่งมี 32 จำนวน การคำนวณหาจำนวนตัวเลขใน

กรณีนี้ก็สิ้นสุดลงแล้วเช่นกัน ดังนั้นเมื่อต้องการทราบว่าจำนวนตัวเลขที่มีสามหลักที่แสดงจำนวนคู่มีกี่จำนวนจึงนำจำนวนตัวเลขที่หาได้ในแต่ละกรณีมาบวกกัน กล่าวคือมี 20 + 32 = 52 จำนวน และจะเห็นว่าในการคำนวณในแต่ละกรณีนั้น แต่ละตอนเป็นการกระทำที่ต่อเนื่องกันจึงใช้วิธีคูณ ดังได้กล่าวแล้วในกฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ หลักการที่กล่าวมานี้สามารถนำไปใช้กับการคำนวณหาจำนวนวิธีทั้งหมดในวิธีเรียงสับเปลี่ยน และวิธีจัดหมู่ได้เช่นเดียวกัน

การสอนเรื่อง ความน่าจะเป็นในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔–๖ เล่ม ๓ ของ สสวท. นั้น ผู้สอนอาจพบว่าการเขียนแสดงสถานการณ์จำลองเพื่อให้ผู้เรียนเข้าใจเกี่ยวกับความน่าจะเป็นนั้นเป็นเรื่องค่อนข้างยาก กิจกรรมต่อไปนี้จะช่วยให้ผู้สอนจัดการเรียนการสอนเรื่องนี้ได้ง่ายขึ้น แต่เนื่องจากสื่อเหล่านี้สร้างจากโปรแกรม The Geometer's Sketchpad ดังนั้นผู้สอนหรือผู้เรียนจะใช้งานสื่อเหล่านี้ได้เมื่อมีเครื่องคอมพิวเตอร์ที่ติดตั้งโปรแกรม The Geometer's Sketchpad แล้ว เท่านั้น

แฟ้มที่ใช้ประกอบการจัดกิจกรรมนี้ บรรจุอยู่ในซีดีรอมซึ่งแนบมากับหนังสือคู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔ – ๖ เล่ม ๓ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ ในโฟลเดอร์ชื่อ บทที่ 3 ความน่าจะเป็น

กิจกรรมที่นำเสนอต่อไปนี้เป็นกิจกรรมที่ใช้ความรู้พื้นฐานในเรื่องความน่าจะเป็นซึ่งหาได้จากจำนวนสมาชิกของเหตุการณ์หารด้วยจำนวนสมาชิกของแซมเปิลสเปซ ($\frac{n(E)}{n(S)}$)

ลูกเต๋า

ผู้สอนใช้ลูกเต๋าที่สร้างโดย Sketchpad จากแบบร่างหน้า ลูกเต๋า ในโฟลเดอร์ **บทที่ 3 ความน่าจะเป็น** ประกอบการสอนเรื่อง การทดลองสุ่มและความน่าจะเป็น ดังนี้

1. ผู้สอนแนะนำเกี่ยวกับนิยามของการทดลองสุ่ม ว่าเป็นผลลัพธ์ที่เกิดจากการทดลองและทราบว่าอาจเป็นอะไรได้บ้าง แต่ไม่สามารถบอกได้อย่างถูกต้อง แน่นอนว่าผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นเป็นอะไรในบรรดาผลลัพธ์ที่อาจเป็นไปได้นั้น

2. ผู้สอนถามผู้เรียนว่าการทอดลูกเต๋า(เที่ยงตรง) ถือว่าเป็นการทดลองสุ่มหรือไม่ ผู้เรียนควรจะตอบได้ว่าการทอดลูกเต๋าถือว่าเป็นการทดลองสุ่ม เพราะสามารถบอกได้ว่าผลลัพธ์จากการทอดลูกเต๋าเป็นอะไรได้บ้าง แต่ไม่สามารถบอกได้ว่าผลลัพธ์เป็นอะไรจนกว่าจะมีการทอดลูกเต๋านั้นจริง ๆ

3. ผู้สอนแนะนำนิยามของปริภูมิตัวอย่างว่า เป็นเซตของผลลัพธ์ทั้งหมดที่เป็นไปได้จากการทดลองสุ่ม

4. ผู้สอนให้ผู้เรียนเขียน ปริภูมิตัวอย่างของการทอดลูกเต๋า 1 ลูก

5. ผู้สอนให้ผู้เรียนคลิกที่ลูกเต๋า 1 ครั้ง แล้วถามผู้เรียนแต่ละคนว่าได้ผลลัพธ์บนหน้าของลูกเต๋าเป็นแต้มเท่าใด

6. ผู้สอนให้ผู้เรียนเขียนเซตของผลลัพธ์ที่ได้จากการทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง

7. ผู้สอนแนะนำผู้เรียนว่า เซตของผลลัพธ์ที่ได้นั้นเรียกว่า เหตุการณ์ และความน่าจะเป็นของเหตุการณ์นี้คือ $\frac{1}{6}$ ผู้สอนให้ผู้เรียนสรุปนิยามของความน่าจะเป็นของเหตุการณ์

8. ผู้สอนให้ผู้เรียนทดลองทอดลูกเต๋าหลาย ๆ ครั้ง เพื่อตรวจสอบความน่าจะเป็นอื่น ๆ เช่น ความน่าจะเป็นในการทอดลูกเต๋า 1 ลูก 2 ครั้ง ความน่าจะเป็นที่จะได้แต้มบนหน้าลูกเต๋าเป็นจำนวนคู่เป็นต้น

ตุ๊กและติ๊กจะพบกันหรือไม่

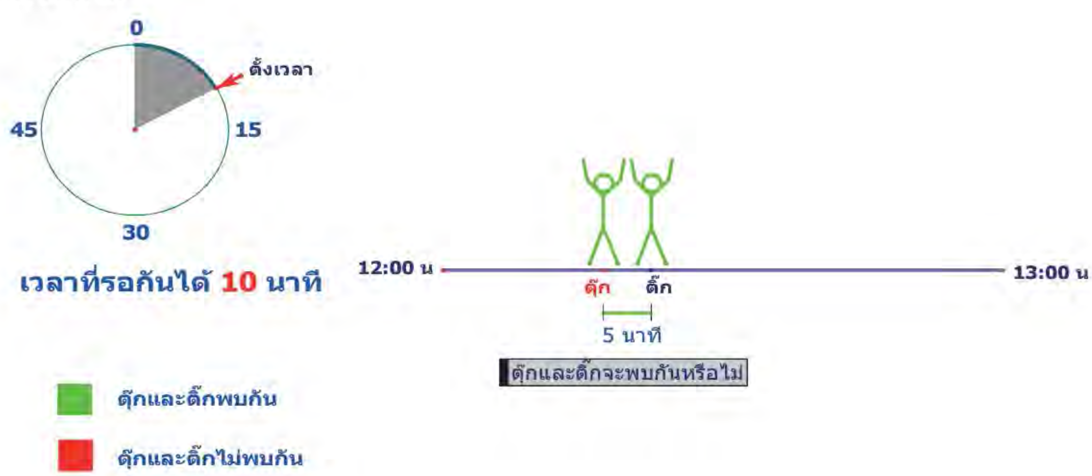
ตุ๊กและติ๊กเป็นเพื่อนกันและนัดพบกันล่วงหน้าหนึ่งสัปดาห์เพื่อมารับประทานอาหารกลางวันในช่วงเวลา 12.00 น. ถึง 13.00 น. แต่เมื่อถึงกำหนดวันนัดไม่มีใครจำเวลานัดที่แน่นอนได้ ทำให้แต่ละคนมาถึงสถานที่นัดพบกันอย่างสุ่มในช่วงเวลา 12.00 น. ถึง 13.00 น. โดยมีเงื่อนไขว่าต่างคนต่างรอกันเพียง 10 นาทีเท่านั้น เมื่อรอผ่านไป 10 นาทีแล้วอีกคนหนึ่งไม่มาก็จะกลับ ความน่าจะเป็นที่ตุ๊กและติ๊กจะพบกันเป็นเท่าใด

วัตถุประสงค์

เพื่อให้ผู้เรียนใช้ความรู้เรื่องความน่าจะเป็นช่วยในการแก้ปัญหาจากสถานการณ์จำลองโดยการสำรวจจาก sketchpad

แนวทางการจัดกิจกรรม

1. เปิดแฟ้ม ชื่อ **นัดพบ.gsp** ในโฟลเดอร์ **บทที่ 3 ความน่าจะเป็น** ในแบบร่างหน้านัดพบ 1 จะมีนาฬิกาสำหรับตั้งเวลาที่รอกันได้ ซึ่งปัจจุบันตั้งไว้ที่ 10 นาที ส่วนของเส้นตรงแสดงช่วงเวลาที่ตุ๊กและติ๊กนัดพบกัน (ระหว่าง 12.00 น. – 13.00 น.) เวลาที่ตุ๊กและติ๊กมาถึงที่นัดพบแทนด้วยจุดที่ปรากฏแบบสุ่มบนส่วนของเส้นตรง ระยะห่างระหว่างจุดที่ตุ๊กอยู่กับจุดที่ติ๊กอยู่ แสดงด้วยส่วนของเส้นตรงซึ่งเรียกว่า เส้นเวลาที่มาถึงต่างกัน เมื่อเปิดแบบร่างครั้งแรกจะพบว่า คนทั้งสองมาถึงที่นัดพบเวลาต่างกัน 5 นาที ซึ่งอยู่ในช่วงเวลาที่รอกันได้



2. คลิกปุ่มแสดงการทำงาน *ตุ๊กและติ๊กจะพบกันหรือไม่* หลาย ๆ ครั้ง เพื่อให้จุดที่ตุ๊กและติ๊กยืนอยู่เคลื่อนไปยังตำแหน่งใหม่ แบบสุ่มบนเส้นแสดงช่วงเวลา สังเกตว่าเส้นเวลามาถึงต่างกันจะเปลี่ยนไปตามเวลาที่ตุ๊กและติ๊กมาถึง

คำถาม 1) ความน่าจะเป็นที่ตุ๊กและติ๊กจะพบกันเป็นเท่าไร หาได้อย่างไร

3. ให้ผู้เรียนทดลองสุ่มโดยคลิกปุ่มตุ๊กและติ๊กจะพบกันหรือไม่คนละ 30 ครั้ง

คำถาม 2) จากการทดลองสุ่ม 30 ครั้ง ความน่าจะเป็นที่ตุ๊กและติ๊กจะพบกันเป็นเท่าไร

3) ความน่าจะเป็นที่ตุ๊กและติ๊กจะพบกันที่ผู้เรียนได้จากการทดลองสุ่มเมื่อเปรียบเทียบกับของเพื่อนแล้วเท่ากันหรือไม่

4) ส่วนใหญ่แล้วความน่าจะเป็นที่ตุ๊กและติ๊กจะพบกันจากการทดลองสุ่ม 30 ครั้ง เป็นเท่าไร

5) ถ้านำผลการทดลองสุ่มของผู้เรียนทุกคนมารวมกันแล้วความน่าจะเป็นที่ตุ๊กและติ๊กจะพบกันเป็นเท่าไร

4. ลากจุดตั้งเวลาเพื่อเปลี่ยนเวลาที่รอกันได้เป็นค่าอื่น เช่น 15 นาที แล้วทำซ้ำข้อ 3 และตอบคำถามข้อ 2) – 5) อีกครั้ง

คำถาม 6) ผู้เรียนจะปรับเวลาที่รอกันได้เป็นอย่างไรเพื่อให้ตุ๊กและติ๊กมีโอกาสพบกันมากขึ้น

ตัวอย่างคำตอบ

1) ความน่าจะเป็นที่ตุ๊กและติ๊กจะพบกันเป็น $\frac{2}{10}$ หาได้จากจำนวนครั้งที่ตุ๊กและติ๊กพบกันหารด้วยจำนวนครั้งในการทดลองสุ่มทั้งหมด

2) จากการทดลองสุ่ม 30 ครั้ง ความน่าจะเป็นที่ตุ๊กพบกับติ๊ก คือ $\frac{8}{30}$

3) คำตอบของคำถามนี้ขึ้นอยู่กับจำนวนผู้เรียนในห้องเรียนซึ่งอาจแตกต่างกันไปผู้สอนควรชี้แจงให้ผู้เรียนทราบด้วย

4) ขึ้นอยู่กับคำตอบของผู้เรียน

5) ขึ้นอยู่กับคำตอบของผู้เรียน

6) ปรับเวลาที่รอกันได้ให้มากขึ้น

ความน่าจะเป็นทางทฤษฎีและความน่าจะเป็นในทางปฏิบัติ

ใช้กิจกรรมนี้ เพื่อให้ผู้เรียนเห็นความแตกต่างของความน่าจะเป็นทางทฤษฎีและความน่าจะเป็นทางปฏิบัติ ผู้สอนอาจจัดกิจกรรมดังนี้

1. ผู้สอนให้ผู้เรียนพิจารณาตัวอย่างที่ 6 หน้า 128 ในหนังสือเรียนดังนี้

ตัวอย่างที่ 6 ในการทอดลูกเต๋าหนึ่งลูก 2 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่ผลรวมของแต้มจากการทอดลูกเต๋า 2 ครั้ง เท่ากับ 6

วิธีทำ ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่าง

และ E แทนเหตุการณ์ที่จะได้ผลรวมของแต้มจากการทอดลูกเต๋า 2 ครั้ง เท่ากับ 6

$$
\begin{aligned}
S = \{&(1, 1), (1, 2), \ldots, (1, 6), \\
&(2, 1), (2, 2), \ldots, (2, 6), \\
&\quad\vdots \\
&(6, 1), (6, 2), \ldots, (6, 6)\}
\end{aligned}
$$

และ $E = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$

ดังนั้น $P(E) = \frac{5}{36}$

2. ผู้สอนให้ผู้เรียนเปิดแบบร่างหน้า ลูกเต๋า แล้วคลิกลูกเต๋าทีละ 2 ครั้ง ไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งได้ผลรวมของแต้มบนหน้าของลูกเต๋าใน 2 ครั้งนั้นเป็น 6
3. ให้ผู้เรียนบันทึกว่าทอดลูกเต๋าไปทั้งหมดกี่ครั้งจึงจะได้ผลรวมของแต้มบนหน้าลูกเต๋าเป็น 6
4. ให้ผู้เรียนหาอัตราส่วนของจำนวนของหนึ่งต่อจำนวนที่บันทึกได้ในข้อ 3
5. ให้ผู้เรียนตรวจสอบผลลัพธ์ที่ได้จากข้อ 4 กับตัวอย่างที่ 6 ว่าเหมือนหรือต่างกันอย่างไร
6. ให้ผู้เรียนเพิ่มจำนวนครั้งในการทอดลูกเต๋ามากขึ้นเรื่อย ๆ และบันทึกผลตามข้อ 2 – 4
7. ผู้สอนให้ผู้เรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับผลที่ได้จากการทำกิจกรรมนี้

การวัดและการประเมินผลระหว่างเรียน

การประเมินผลระหว่างเรียนเป็นการวัดผลการเรียนรู้เพื่อปรับปรุงและพัฒนาการเรียนการสอน และตรวจสอบว่าผู้เรียนแต่ละคนมีความรู้ความเข้าใจในเรื่องที่ผู้สอนสอนมากน้อยเพียงใด ซึ่งในที่นี้จะกล่าวถึงตัวอย่างการประเมินผลด้านความรู้โดยผู้สอนอาจใช้วิธีการประเมินดังนี้

1. สังเกตจากการตอบคำถามและการเข้าร่วมกิจกรรม
2. ทำแบบฝึกหัด
3. ทดสอบ

จากผลการประเมินหากพบว่ามีผู้เรียนไม่ผ่านเกณฑ์ที่ผู้สอนกำหนดไว้ ผู้สอนอาจสอนเสริม หรือให้ผู้เรียนศึกษาจากหนังสือเรียนหรืออาจให้ผู้เรียนที่มีผลการเรียนรู้ผ่านเกณฑ์แล้วช่วยสอน หลังจากนั้นจึงให้ทำข้อที่ทำผิดอีกครั้งจนกว่าจะผ่านเกณฑ์

ตัวอย่างแบบทดสอบ

1. มีนักเรียนหญิง 4 คน นักเรียนชาย 4 คน ยืนล้อมเป็นวงกลมได้กี่วิธีถ้า
   ก. ไม่มีเงื่อนไขใด ๆ
   ข. นักเรียนชายและนักเรียนหญิงยืนสลับกัน
   ค. นักเรียนชายกับนักเรียนหญิงยืนสลับกันทีละ 2 คน
   ง. ให้นักเรียนหญิงทั้ง 4 คนยืนติดกัน

2. ญาดาทอดลูกเต๋าสองลูก 1 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้แต้มบนหน้าลูกเต๋าทั้งสองดังนี้
   1) แต้มบนหน้าลูกเต๋าทั้งสองเท่ากัน
   2) ผลบวกของแต้มบนหน้าลูกเต๋าทั้งสองเป็นจำนวนคู่

3. ภากรสุ่มหยิบไพ่ 1 ใบ จากไพ่สำรับหนึ่ง ซึ่งมี 52 ใบ จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ภากรจะหยิบได้ไพ่หัวใจหรือไพ่คิง

4. บัตรหมายเลข 1 – 50 มีบัตรที่ให้รางวัลอยู่ 6 ใบ ถ้าสุ่มหยิบบัตรขึ้นมา 6 ใบ จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้บัตรที่ได้รับรางวัลทั้งหมด

5. เอกสะสมเหรียญสิบบาทไว้ในกระปุกออมสินดังนี้ เป็นเหรียญสิบบาท พ.ศ. 2539 จำนวน 10 อัน และเหรียญสิบบาท พ.ศ. 2545 จำนวน 20 อัน ถ้าสุ่มหยิบเหรียญสิบบาทขึ้นมา 2 เหรียญ จงหาความน่าจะเป็นที่เอกจะหยิบได้เหรียญสิบบาท พ.ศ. 2539 ทั้งสองเหรียญ

6. ถุงใบหนึ่งบรรจุลูกแก้วสีแดง 8 ลูก ลูกแก้วสีฟ้า 3 ลูก ลูกแก้วสีเขียว 6 ลูก และลูกแก้ว สีเหลือง 3 ลูก ถ้าอภิรดีสุ่มหยิบลูกแก้วครั้งละ 1 ลูก โดยไม่ใส่คืนจำนวนสองครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่อภิรดีจะหยิบได้ลูกแก้วสีแดงทั้งสองลูก

7. สมาคมแห่งหนึ่ง ต้องการจะหาเงินช่วยสถานสงเคราะห์ผู้ป่วยโรคหัวใจ จึงออกสลากการกุศลจำนวน 500ใบ เพื่อขายให้กับสมาชิกของสมาคมโดยขายในราคาใบละ 100 บาท และมีรางวัลพิเศษให้กับสมาชิกที่ซื้อสลาก 1 รางวัล เป็นจักรยาน 1 คัน ถ้านวพลซื้อสลาก การกุศลครั้งนี้ 10 ใบ จงหาความน่าจะเป็นที่นวพลจะได้รับรางวัล

8. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5/2 ของโรงเรียนแห่งหนึ่ง เป็นนักเรียนชาย 19 คน และนักเรียนหญิง 21 คน ถ้าต้องการเลือกตัวแทนนักเรียนของห้องนี้ 2 คน โดยการสุ่มครั้งละ 1 คน จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ตัวแทนนักเรียนชาย 1 คนและนักเรียนหญิง 1 คน

9. ตารางต่อไปนี้แสดงจำนวนนักเรียนที่เดินทางมาโรงเรียนโดยการขี่จักรยานและนั่งรถประจำทางมา และมีบางข้อมูลขาดหายไป

พาหนะ / จำนวนนักเรียน	จักรยาน	รถประจำทาง
นักเรียนชาย	....	32
นักเรียนหญิง	38	46
รวม	122	....

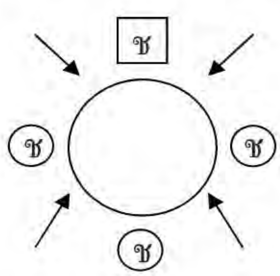
จงหาความน่าจะเป็นที่จะสุ่มนักเรียนมา 1 คน แล้วได้นักเรียนชายหรือนักเรียนที่นั่งรถประจำทางมาโรงเรียน

10. กล่องใบหนึ่งมีลูกปิงปองสีส้ม 4 ลูก และสีขาว 5 ลูก สุ่มหยิบลูกปิงปองออกมาจากกล่อง 3 ลูก จงหาความน่าจะเป็นที่จะไม่ได้ลูกปิงปองสีส้มทั้ง 3 ลูก

เฉลยตัวอย่างแบบทดสอบ

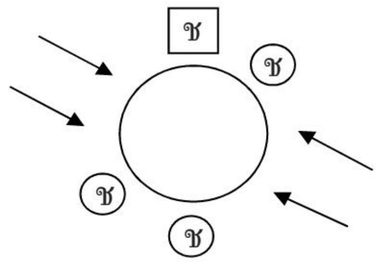
1. ก. จะมีวิธียืนล้อมเป็นวงกลมได้ (8–1)! = 5,040 วิธี

ข. ให้นักเรียนชาย 1 คน (หรือนักเรียนหญิง 1 คน)ยืนเป็นตำแหน่งคงที่ 1 ตำแหน่ง ดังนั้นเหลือนักเรียนชาย 3 คนซึ่งสามารถยืนสลับที่กันได้ 3! วิธี ดังรูป



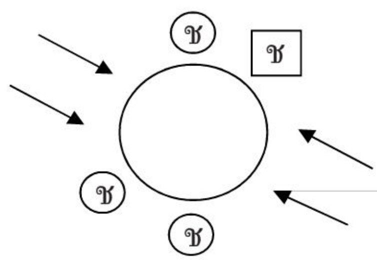
และในแต่ละวิธีของการจัดนักเรียนชาย สามารถจัดนักเรียนหญิง 4 คนให้ยืนสลับที่กันได้อีก 4! วิธี ดังนั้น นักเรียนชายกับนักเรียนหญิงยืนสลับที่กันได้ 3! × 4! = 144 วิธี

ค. ให้นักเรียนชาย 1 คน (หรือนักเรียนหญิง 1 คน)ยืนเป็นตำแหน่งคงที่ 1 ตำแหน่ง
ดังนั้นเหลือนักเรียนชาย 3 คน ซึ่งสามารถยืนสลับที่กันได้ 3! วิธี



รูปที่ 1

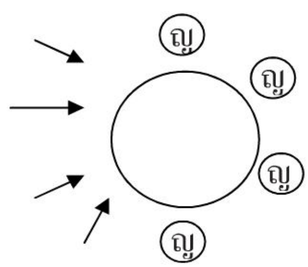
และในแต่ละวิธีของการจัดนักเรียนชาย สามารถจัดนักเรียนหญิง 4 คนให้ยืนสลับที่กันได้อีก 4! วิธี ดังรูปที่ 1



รูปที่ 2

และในแต่ละวิธีของการจัดนักเรียนชายและการจัดนักเรียนหญิงที่ยืนนั้น เนื่องจากนักเรียนชายที่ยืนติดกับนักเรียนชายซึ่งเป็นตำแหน่งคงที่สามารถยืนสลับที่กันได้อีก 2! วิธี ด้วย ดังรูปที่ 2
ดังนั้นนักเรียนชายกับนักเรียนหญิงยืนสลับกันทีละ 2 คนได้ $3! \times 4! \times 2! = 288$ วิธี

ง. นักเรียนหญิงทั้ง 4 คนยืนติดกันซึ่งคิดเป็น 1 ตำแหน่ง
ดังนั้น จะเหลือนักเรียนชาย 4 คน ซึ่งสามารถยืนสลับที่กันได้ 4! วิธี



และในแต่ละวิธีที่จัดนักเรียนชายสามารถจัดนักเรียนหญิงทั้ง 4 คนให้ยืนสลับกันได้อีก 4! วิธี ด้วย
ดังนั้น จำนวนวิธีที่จัดให้นักเรียนหญิง 4 คน ยืนติดกันคือ $4! \times 4! = 576$ วิธี

2. ให้ S เป็นปริภูมิตัวอย่าง

$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),$
$(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6),$
$(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

$n(S) = 36$

ให้ E_1 แทนเหตุการณ์ที่ได้แต้มบนหน้าลูกเต๋าทั้งสองเท่ากัน

E_2 แทนเหตุการณ์ที่ผลบวกของแต้มบนหน้าลูกเต๋าทั้งสองเป็นจำนวนคู่

$E_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

$n(E_1) = 6$

$E_2 = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (4, 6),$
$(5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$

$n(E_2) = 18$

$P(E_1) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ และ $P(E_2) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่จะได้แต้มบนหน้าลูกเต๋าทั้งสองเท่ากัน เท่ากับ $\frac{1}{6}$
และความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ผลบวกของแต้มบนหน้าลูกเต๋าทั้งสองเป็นจำนวนคู่เท่ากับ $\frac{1}{2}$

3. ไพ่สำรับหนึ่ง มีไพ่หัวใจจำนวน 13 ใบ และไพ่คิง 4 ใบ แต่ในไพ่หัวใจจะมีไพ่คิงรวมอยู่ด้วย 1 ใบ ดังนั้น ไพ่หัวใจหรือไพ่คิงมีจำนวน $13 + 4 - 1 = 16$ ใบ

ให้ S เป็นปริภูมิตัวอย่าง

ดังนั้น $n(S) = \binom{52}{1} = 52$

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่ได้ไพ่หัวใจหรือไพ่คิง

$$n(E) = \binom{16}{1} = 16$$

$$P(E) = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ภากรจะหยิบได้ไพ่หัวใจหรือไพ่คิงเท่ากับ $\frac{4}{13}$

4. บัตรหมายเลข 1 – 50 มีจำนวนทั้งหมด 50 ใบ

ให้ S เป็นปริภูมิตัวอย่าง

ดังนั้น $n(S) = \binom{50}{6} = \frac{50!}{6!44!} = 15{,}890{,}700$

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่หยิบได้บัตรที่ได้รับรางวัลทั้งหกใบ

$n(E) = \binom{6}{6} = \frac{6!}{6!0!} = 1$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้บัตรที่ได้รับรางวัลทั้งหมดเท่ากับ $\frac{1}{15{,}890{,}700}$

5. เหรียญสิบบาทมีทั้งหมด $10 + 20 = 30$ อัน

ให้ S เป็นปริภูมิตัวอย่าง

ดังนั้น $n(S) = \binom{30}{2} = 435$

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่เอกหยิบได้เหรียญสิบบาท พ.ศ. 2539 ทั้งสองเหรียญ

$n(E) = \binom{10}{2} = 45$

$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{45}{435} = \frac{9}{87}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่เอกจะหยิบได้เหรียญสิบบาท พ.ศ. 2539 ทั้งสองเหรียญเท่ากับ $\frac{9}{87}$

6. ลูกแก้วทั้งหมดมี $8 + 3 + 6 + 3 = 20$ ลูก

ให้ S เป็นปริภูมิตัวอย่าง

$n(S) = \binom{20}{1}\binom{19}{1} = 380$

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่อภิรดีหยิบได้ลูกแก้วสีแดงทั้งสองลูก

$n(E) = \binom{8}{1}\binom{7}{1} = 56$

$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{56}{380} = \frac{14}{95}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่อภิรดีจะหยิบได้ลูกแก้วสีแดงทั้งสองลูกเท่ากับ $\frac{14}{95}$

7. สลากการกุศลจำนวน 500 ใบ

ให้ S เป็นปริภูมิตัวอย่าง

$$n(S) = 500$$

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่นวพลจะได้รับรางวัลพิเศษ

$$n(E) = \binom{10}{1} = 10$$

$$P(E) = \frac{10}{500} = \frac{1}{50}$$

$$= 0.02$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่นวพลจะได้รับรางวัลพิเศษเป็นรถจักรยานเท่ากับ 0.02

8. จำนวนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5/2 มีทั้งหมด 19 + 21 = 40 คน

ให้ S เป็นปริภูมิตัวอย่าง

$$n(S) = \binom{40}{1}\binom{39}{1} = 1{,}560$$

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่สุ่มได้นักเรียนชาย 1 คน และนักเรียนหญิง 1 คน

$$n(E) = \binom{19}{1}\binom{20}{1} \times 2! = 380 \times 2 = 798$$

$$P(E) = \frac{798}{1{,}560} = \frac{399}{780}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะได้ตัวแทนนักเรียนชาย 1 คน และนักเรียนหญิง 1 คนเท่ากับ $\frac{399}{780}$

9. จากตารางในโจทย์ จำนวนนักเรียนชายมี $122 - 38 = 84$ คน

และจำนวนนักเรียนที่นั่งรถประจำทางมี $32 + 46 = 78$ คน

ดังนั้น จำนวนนักเรียนทั้งหมด $122 + 78 = 200$ คน

ให้ S เป็นปริภูมิตัวอย่าง

$$n(S) = \binom{200}{1} = 200$$

จำนวนนักเรียนชายหรือนักเรียนที่นั่งรถประจำทางมาโรงเรียน 84 + 32 + 46 = 162 คน

ให้ E เป็นเหตุการณ์ที่สุ่มได้นักเรียนชายหรือนักเรียนที่นั่งรถประจำทางมาโรงเรียน

$$n(E) = \binom{162}{1} = 162$$

$$P(E) = \frac{162}{200} = \frac{81}{100} = 0.81$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะสุ่มนักเรียน 1 คน ที่เป็นนักเรียนชายหรือนักเรียนที่นั่งรถประจำทางมาโรงเรียนเท่ากับ 0.81

10. ให้ E เป็นเหตุการณ์ที่สุ่มหยิบได้ลูกปิงปองสีส้มทั้ง 3 ลูก

E' เป็นเหตุการณ์ที่สุ่มหยิบไม่ได้ลูกปิงปองสีส้มทั้ง 3 ลูก

จากลูกปิงปองทั้งหมด 9 ลูก สุ่มหยิบ 3 ลูก ถือเป็นการจัดหมู่

ดังนั้น จำนวนวิธีการจัดหมู่จึงเท่ากับ $C_{9,3}$ วิธี นั่นคือ $n(S) = C_{9,3}$ วิธี

จากลูกปิงปองสีส้ม 4 ลูก สุ่มหยิบ 3 ลูก ดังนั้นจำนวนวิธีการจัดหมู่จึงเท่ากับ $C_{4,3}$ วิธี

นั่นคือ $n(E) = C_{4,3}$ วิธี

ดังนั้น $P(E) = \dfrac{C_{4,3}}{C_{9,3}} = \dfrac{4}{84} = \dfrac{1}{21}$

และเนื่องจาก $P(E') = 1 - P(E)$

ดังนั้น $P(E') = 1 - \dfrac{1}{21} = \dfrac{20}{21}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะหยิบลูกปิงปองไม่ได้สีส้มทั้ง 3 ลูก คือ $\dfrac{20}{21}$

เฉลยแบบฝึกหัด

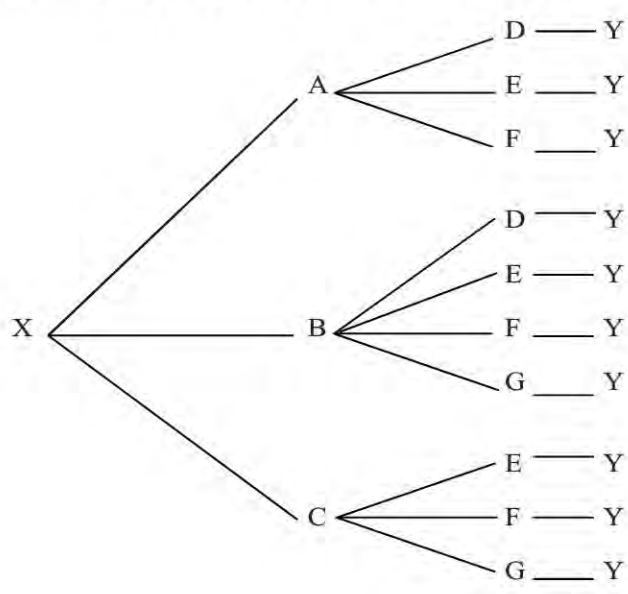
แบบฝึกหัด 3.1

1. เส้นทางจาก X ไปยัง Y โดยผ่าน A มีเส้นทางได้ 3 เส้นทาง

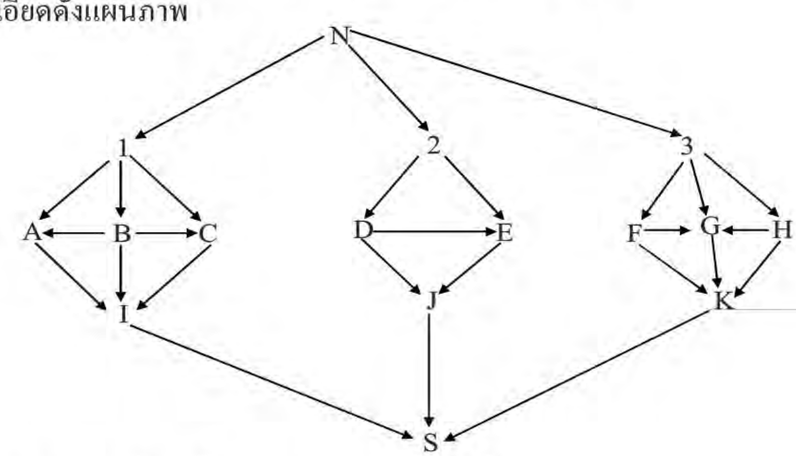
เส้นทางจาก X ไปยัง Y โดยผ่าน B มีเส้นทางได้ 4 เส้นทาง

เส้นทางจาก X ไปยัง Y โดยผ่าน C มีเส้นทางได้ 3 เส้นทาง

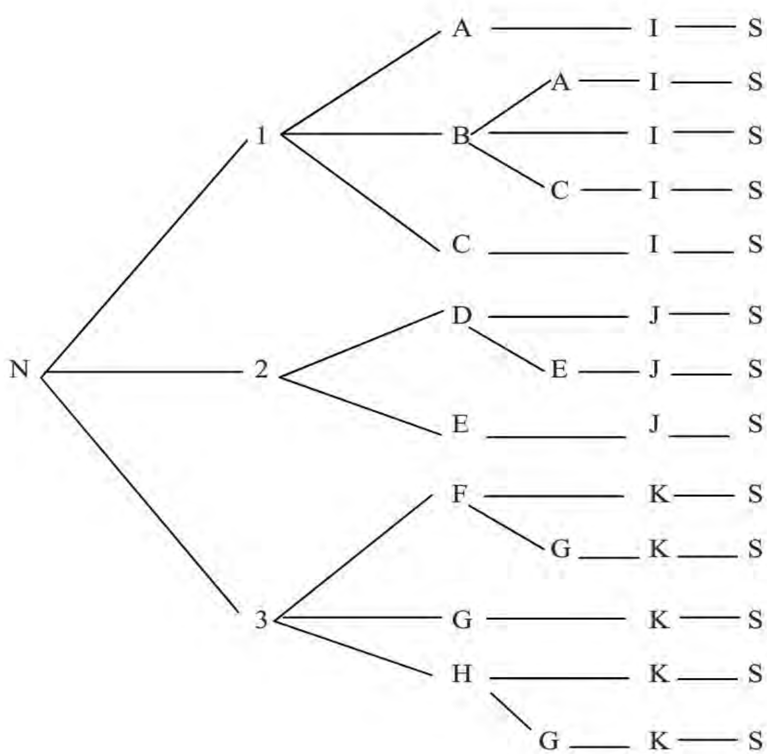
ดังนั้น มีจำนวนเส้นทางจาก X ไปยัง Y ทั้งหมด 10 เส้นทาง



2. จำนวนเส้นทางจาก N ไปยัง S มีทั้งหมด 5 + 3 + 5 = 13 เส้นทาง
โดยมีรายละเอียดดังแผนภาพ

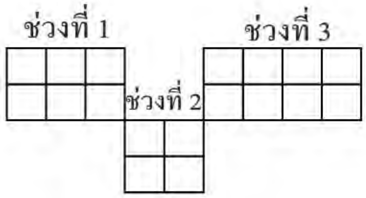


จากแผนภาพข้างต้นสามารถเขียนเป็นแผนภาพต้นไม้ได้ดังนี้



3. 1) จำนวนเส้นทางการเดินทางจาก A ไป B มี 3 เส้นทาง
2) จำนวนเส้นทางการเดินทางจาก B ไป C มี 1 เส้นทาง
3) จำนวนเส้นทางการเดินทางจาก C ไป D มี 5 เส้นทาง
4) จำนวนเส้นทางการเดินทางจาก D ไป E มี 5 เส้นทาง
5) จำนวนเส้นทางการเดินทางจาก A ไป E มี 75 เส้นทาง

4. 1) จุดยอด X อยู่ที่จุด E หรือ F จำนวนรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก $2 \times 3 = 6$ รูป
   จุดยอด Y อยู่ที่จุด E หรือ F จำนวนรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก $2 \times 3 = 6$ รูป
   ดังนั้น จำนวนรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก XCY มี 12 รูป
   2) จำนวนรูปสามเหลี่ยมโดยมีจุดยอด 3 จุด จาก A, B, C, D, E, F มี 15 รูป

5. 

จากรูป ช่วงที่ 1 มีจำนวนวิธีวางได้ต่างกัน 3 วิธี
ช่วงที่ 2 มีจำนวนวิธีวางได้ต่างกัน 2 วิธี
ช่วงที่ 3 มีจำนวนวิธีวางได้ต่างกัน 5 วิธี
ดังนั้น จำนวนวิธีทั้งหมด $3 \times 2 \times 5 = 30$ วิธี

6. มีจุดยอดอยู่บนด้าน 3 ด้าน เกิดรูปสามเหลี่ยมได้ $3 \times 2 \times 3 = 18$ รูป
   มีฐานเป็น 2 จุดใด ๆ บนด้าน AC เกิดรูปสามเหลี่ยมได้ $3 \times 5 = 15$ รูป
   มีฐานเป็น 2 จุดใด ๆ บนด้าน BC เกิดรูปสามเหลี่ยมได้ $1 \times 6 = 6$ รูป
   มีฐานเป็น 2 จุดใด ๆ บนด้าน AB เกิดรูปสามเหลี่ยมได้ $3 \times 5 = 15$ รูป
   ดังนั้น มีรูปสามเหลี่ยมทั้งหมด $18 + 15 + 6 + 15 = 54$ รูป

7. เมื่อไม่มีอักษร 2 ตัวติดกันซ้ำกัน
   อักษรตัวที่หนึ่งเลือกได้ 26 วิธี
   อักษรตัวที่สองเลือกได้ 25 วิธี
   อักษรตัวที่สามเลือกได้ 25 วิธี
   อักษรตัวที่สี่เลือกได้ 25 วิธี
   อักษรตัวที่ห้าเลือกได้ 25 วิธี
   ดังนั้น จะสร้างคำได้ทั้งหมด 26×25^4 คำ

8. จำนวนสับเซตที่มีสมาชิก 2 ตัว {a, b} โดยที่ $a = 1, 2, 3, \ldots 93$ เท่ากับ $93 \times 7 = 651$
   จำนวนสับเซตที่มีสมาชิก 2 ตัว โดยที่ $a = 94, 95, 96, \ldots, 99$ เท่ากับ
   $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$ สับเซต
   ดังนั้น จำนวนสับเซตทั้งหมด $651 + 21 = 672$ สับเซต

9. ในการสร้างจำนวน 3 หลัก ที่มีค่ามากกว่า 300

หลักร้อย เลือกตัวเลขได้ 3 วิธี คือ 3 หรือ 4 หรือ 5

หลักสิบ เลือกตัวเลขได้ 5 วิธี

หลักหน่วย เลือกตัวเลขได้ 4 วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีสร้างจำนวน 3 หลัก ที่มีค่ามากกว่า 300 จากเลขโดด 0, 1, 2, 3, 4 และ 5 มี $3 \times 5 \times 4 = 60$ วิธี

10. ข้อสอบข้อที่ 1 มีวิธีเลือกตอบได้ 2 วิธี

ข้อสอบข้อที่ 2 มีวิธีเลือกตอบได้ 2 วิธี

ข้อสอบข้อที่ 3 มีวิธีเลือกตอบได้ 2 วิธี

$\vdots$

ข้อสอบข้อที่ 10 มีวิธีเลือกตอบได้ 2 วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีตอบข้อสอบทั้ง 10 ข้อ 2^{10} วิธี

11. ตัวเลขที่แสดงตอนที่นั่งมี 20 วิธี

อักษรที่แสดงแถวที่นั่งมี 52 วิธี

ตัวเลขแสดงตำแหน่งที่นั่งมี 30 วิธี

ดังนั้น จำนวนที่นั่งทั้งหมดมี 31,200 ที่นั่ง

12. ตัวอักษรตัวแรกเป็นไปได้ 26 วิธี

ตัวอักษรตัวที่สองเป็นไปได้ 26 วิธี

ตัวเลข 3 ตัว เป็นไปได้ $10 \times 10 \times 10$ วิธี

ตัวอักษรอีก 1 ตัว เป็นไปได้ 26 วิธี

ตัวเลขอีก 2 ตัว เป็นไปได้ 10×10 วิธี

ดังนั้น จำนวนหนังสือทั้งหมดในระบบนี้มี $26^3 \times 10^5$ เล่ม

ถ้าตัวอักษร 2 ตัวแรก แสดงหนังสือที่จัดไว้เป็นตอน

ดังนั้น หนังสือในแต่ละตอนมี $1 \times 10 \times 10 \times 10 \times 26 \times 10 \times 10 = 2{,}600{,}000$ เล่ม

แบบฝึกหัด 3.2 ก

1. 1) 210 2) 1680 3) 380

2. n = 6

3. พิสูจน์ $P_{n,1} + P_{m,1} = P_{n+m,1}$

$$P_{n,1} + P_{m,1} = \frac{n!}{(n-1)!} + \frac{m!}{(m-1)!} = n + m = \frac{(n+m)!}{((n+m)-1)!} = P_{n+m,1}$$

4. สร้างจำนวนที่มี 4 หลัก จากเลขโดด 5 ตัว

ดังนั้น จะสร้างได้ $P_{5,4} = \dfrac{5!}{(5-4)!} = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ จำนวน

5. มีตำแหน่งว่างที่เป็นชาย 3 ตำแหน่ง มีผู้สมัครเป็นชาย 6 คน

ดังนั้น มีจำนวนวิธีจัดชายเท่ากับ $P_{6,3} = \dfrac{6!}{3!} = 6 \times 5 \times 4 = 120$ วิธี

มีตำแหน่งว่างที่เป็นหญิง 2 ตำแหน่ง มีผู้สมัครเป็นหญิง 5 คน

ดังนั้น มีจำนวนวิธีจัดหญิงเท่ากับ $P_{5,2} = \dfrac{5!}{3!} = 5 \times 4 = 20$ วิธี

จะได้ วิธีจัดคนที่มาสมัครเข้าทำงาน $120 \times 20 = 2400$ วิธี

6. จัดชาย 6 คน ยืนเรียงแถวหน้ากระดานได้ $6! = 720$ วิธี

$$\nearrow \underline{\text{ช}_1} \nearrow \underline{\text{ช}_2} \nearrow \underline{\text{ช}_3} \nearrow \underline{\text{ช}_4} \nearrow \underline{\text{ช}_5} \nearrow \underline{\text{ช}_6} \nearrow$$

จัดชาย 6 คน ยืนหน้ากระดานจะมีที่ให้ผู้หญิงแทรกได้ 7 ที่

ผู้หญิง 3 คน จะเลือกที่แทรกได้ $7 \times 6 \times 5 = 210$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีจัดทั้งหมด $720 \times 210 = 151200$ วิธี

7. แยกเป็น 2 กรณี

กรณีที่ 1 หลักร้อย เป็นจำนวนคี่ คือ 3, 5 และ 7

หลักร้อย เลือกเลขโดดได้ 3 วิธี

หลักหน่วย เลือกเลขโดดได้ 4 วิธี หลักหน่วยเป็นจำนวนคี่และเลขโดดในแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน

หลักสิบ เลือกเลขโดดได้ 8 วิธี

ดังนั้น มีวิธีสร้างจำนวนได้ $3 \times 4 \times 8 = 96$ วิธี

กรณีที่ 2 หลักร้อย เป็นจำนวนคู่ คือ 4, 6, 8

หลักร้อย เลือกเลขโดดได้ 3 วิธี

หลักหน่วย เลือกเลขโดดได้ 5 วิธี หลักหน่วยเป็นจำนวนคี่และเลขโดดในแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน

หลักสิบ เลือกเลขโดดได้ 8 วิธี

ดังนั้น มีวิธีสร้างจำนวนได้ $3 \times 5 \times 8 = 120$ วิธี

ดังนั้น จำนวนคี่ที่มีค่ามากกว่า 300 แต่น้อยกว่า 900 โดยที่เลขโดดในแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน มี $96 + 120 = 216$ จำนวน

8. มีหนังสือที่แตกต่างกัน 8 เล่ม เป็นคณิตศาสตร์ 3 เล่ม
ดังนั้น เป็นหนังสืออื่น ๆ จำนวน 5 เล่ม จัดเป็นแถวยาวแถวเดียวได้ $5!$ วิธี
จะได้ที่จะวางหนังสือคณิตศาสตร์แทรกได้ จำนวน 6 ที่
ดังนั้น จัดหนังสือคณิตศาสตร์แทรกได้ $6 \times 5 \times 4 = 120$ วิธี
นั่นคือ จำนวนวิธีจัดหนังสือทั้ง 8 เล่ม เท่ากับ $5! \times 120 = 14400$ วิธี

9. เมื่อถ่ายรูปทีละคน จะได้ 5 วิธี

เมื่อถ่ายรูปทีละสองคน	จะได้	$P_{5,2}$	=	$\frac{5!}{3!}$	=	20	วิธี
เมื่อถ่ายรูปทีละสามคน	จะได้	$P_{5,3}$	=	$\frac{5!}{2!}$	=	60	วิธี
เมื่อถ่ายรูปทีละสี่คน	จะได้	$P_{5,4}$	=	$\frac{5!}{1!}$	=	120	วิธี
เมื่อถ่ายรูปทีละห้าคน	จะได้	$P_{5,5}$	=	$5!$	=	120	วิธี

ดังนั้น จะมีภาพที่แตกต่างกันทั้งหมด $5 + 20 + 60 + 120 + 120 = 325$ ภาพ

10. มีหนังสือทั้งหมด $3 + 2 + 4 = 9$ เล่ม
    1) มีวิธีจัดหนังสือ 9 เล่ม วางบนชั้นหนังสือได้ $9!$ วิธี
    2) มีวิธีจัดหนังสือคณิตศาสตร์ในตำแหน่งหัวแถวและหางแถวได้ 2 วิธี
    หนังสืออีก 7 เล่ม จัดวางสลับกันได้ $7!$ วิธี
    ดังนั้น มีวิธีจัดได้ทั้งหมด $2(7!)$ วิธี
    3) จัดหนังสือแต่ละวิชามัดรวมกัน แล้วนำมาจัดวางสลับกันได้ $3!$ วิธี
    หนังสือเคมี 3 เล่ม ที่มัดไว้ สลับที่กันเองได้อีก $3!$ วิธี
    หนังสือคณิตศาสตร์ 2 เล่ม ที่มัดไว้ สลับที่กันเองได้อีก $2!$ วิธี
    หนังสือภาษาอังกฤษ 4 เล่ม ที่มัดไว้ สลับที่กันเองได้อีก $4!$ วิธี
    ดังนั้น มีวิธีจัดได้ทั้งหมด $3!\,3!\,2!\,4! = 1728$ วิธี

11. **วิธีที่ 1** มีเก้าอี้ว่าง 6 ที่ มีคน 3 คน จัดที่นั่งโดยไม่มีใครนั่งติดกัน มีได้ 4 รูปแบบดังนี้

แบบที่ 1	คนที่ 1	____	คนที่ 2	____	คนที่ 3	____
แบบที่ 2	คนที่ 1	____	คนที่ 2	____	____	คนที่ 3
แบบที่ 3	คนที่ 1	____	____	คนที่ 2	____	คนที่ 3
แบบที่ 4	____	คนที่ 1	____	คนที่ 2	____	คนที่ 3

ในแต่ละแบบ สลับที่คนนั่งได้อีก 3!

ดังนั้น จำนวนวิธีทั้งหมด $4(3!) = 24$ วิธี

วิธีที่ 2 มีเก้าอี้ 6 ที่ ถ้าให้คน 3 คนนั่ง จะมีเก้าอี้ว่าง 3 ที่ และถ้าต้องการให้ทั้ง 3 คนนั่งไม่ติดกัน เก้าอี้ว่าง 3 ที่ นั้น ต้องเป็นตัวกั้นระหว่างคนสามคน จึงใช้เก้าอี้ 3 ตัววางเรียงแถวก่อนแล้วจึงให้คน 3 คน แทรกระหว่างเก้าอี้ โดยที่มีที่ให้เลือกแทรก 4 ที่

↗ เก้าอี้ว่าง ↗ เก้าอี้ว่าง ↗ เก้าอี้ว่าง ↗

ดังนั้น จำนวนวิธีทั้งหมด คือ $P_{4,3} = 4 \times 3 \times 2 = 24$ วิธี

แบบฝึกหัด 3.2 ข

1. วิธีจัดเรียงหนังสือทั้งหมดบนชั้นวางหนังสือคือ $\dfrac{9!}{3!2!4!} = \dfrac{9\times8\times7\times6\times5}{3\times2\times2} = 1260$ วิธี

2. วิธีจัดเรียงหลอดไฟประดับตามรั้วในแนวเส้นตรงคือ $\dfrac{15!}{4!5!6!}$ วิธี

3. คำว่า ENTRANCE มี

E มี 2 ตัว	N มี 2 ตัว
T มี 1 ตัว	R มี 1 ตัว
A มี 1 ตัว	C มี 1 ตัว

จัดโดยไม่มีเงื่อนไข มีวิธีจัดได้ $\dfrac{8!}{2!2!} = 10080$ วิธี

ถ้าจัดให้ E อยู่ติดกันเสมอ มีวิธีจัดได้ $\dfrac{7!}{2!} = 2520$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีจัดเรียงโดยที่ E ไม่อยู่ติดเท่ากับ 7560 วิธี

4. นำเลขโดด 0, 2, 2, 3, 3, 3, 4 มาจัดเรียงอย่างไม่มีเงื่อนไข จะได้ $\dfrac{7!}{2!3!} = 420$ วิธี

ถ้าเลขโดด 0 อยู่หลักล้าน เลขโดดที่เหลือนำมาจัดได้ $\dfrac{6!}{2!3!} = 60$ วิธี

ดังนั้น จำนวนที่มีค่ามากกว่าหนึ่งล้านมี $420 - 60 = 360$ จำนวน

5. เลือกลูกบอล 4 ลูก แยกกรณีได้ดังนี้

กรณีที่ 1 สีแดง 1 ลูก สีขาว 1 ลูก สีเหลือง 1 ลูก สีดำ 1 ลูก

จัดเรียงเป็นแถวตรงได้ $4! = 24$ วิธี

กรณีที่ 2 สีดำ 2 ลูก สีอื่นอีก 2 ลูก

จัดเรียงเป็นแถวตรงได้ $(3)\dfrac{4!}{2!} = 36$ วิธี

กรณีที่ 3 สีดำ 3 ลูก สีอื่นอีก 1 ลูก

จัดเรียงเป็นแถวตรงได้ $(3)\dfrac{4!}{3!} = 12$ วิธี

ดังนั้น มีวิธีจัดทั้งหมด $24 + 36 + 12 = 72$ วิธี

6. 1) จำนวนที่สร้างมีค่าอยู่ระหว่าง 400,000 ถึง 500,000

ดังนั้น หลักแสนจะต้องเป็นตัวเลข 4

จะสร้างจำนวนทั้งหมดได้ $\dfrac{5!}{3!} = 20$ จำนวน

2) จำนวนที่สร้างมีค่ามากกว่า 500,000

ดังนั้น หลักแสนจะต้องเป็นตัวเลข 5

จะสร้างจำนวนทั้งหมดได้ $\dfrac{5!}{2!2!} = 30$ จำนวน

3) จำนวนที่สร้างมีค่ามากกว่า 400,000 และเป็นจำนวนคู่

ดังนั้น หลักแสนจะต้องเป็นตัวเลข 4 หรือ 5 หลักหน่วยเป็นตัวเลข 0 หรือ 4

หลักแสนเป็น 4 หลักหน่วยเป็น 0 จะได้ $\dfrac{4!}{3!} = 4$ จำนวน

หลักแสนเป็น 4 หลักหน่วยเป็น 4 จะได้ $\dfrac{4!}{3!} = 4$ จำนวน

หลักแสนเป็น 5 หลักหน่วยเป็น 0 จะได้ $\dfrac{4!}{2!2!} = 6$ จำนวน

หลักแสนเป็น 5 หลักหน่วยเป็น 4 จะได้ $\dfrac{4!}{2!} = 12$ จำนวน

จะสร้างจำนวนทั้งหมดได้ $4 + 4 + 6 + 12 = 26$ จำนวน

7. 1) จำนวนเส้นทางจาก O ไปยัง P มีทั้งหมด $\dfrac{15!}{7!8!} = 6435$ เส้นทาง

2) จำนวนเส้นทางจาก O ไปยัง P ที่ผ่าน A มี $\left(\dfrac{8!}{4!4!}\right)\left(\dfrac{7!}{3!4!}\right) = 2450$ เส้นทาง

3) จำนวนเส้นทางจาก O ไปยัง P โดยไม่ผ่าน A มี $6435 - 2450 = 3985$ เส้นทาง

แบบฝึกหัด 3.2 ค

1. นักเรียนชาย 3 คน ติดกัน นักเรียนหญิง 3 คน ติดกัน นั่งรอบโต๊ะกลมจัดได้ 1 วิธี
   แต่นักเรียนชาย 3 คน ติดกัน สลับที่กันได้ $3!$ วิธี
   นักเรียนหญิง 3 คน ติดกัน สลับที่กันได้ $3!$ วิธี
   จะได้วิธีจัดทั้งหมด $3!3! = 36$ วิธี

2. 1) จัดคน 6 คน นั่งโต๊ะกลมได้ $5! = 120$ วิธี

   2) ถ้าพ่อและแม่นั่งติดกัน คิดพ่อแม่รวมกันเป็น 1 กลุ่ม
      จัด 4 คน กับอีก 1 กลุ่ม นั่งโต๊ะกลมได้ $4!$ วิธี
      แต่พ่อแม่สลับที่กันได้ 2 วิธี
      วิธีทั้งหมดจัดได้ $2(4!) = 48$ วิธี

   3) พ่อและแม่นั่งตรงข้ามกันเสมอ
      ให้พ่อหรือแม่นั่งตำแหน่งคงที่ ลูก 4 คน สลับที่กันได้ $4!$ วิธี
      วิธีทั้งหมดจัดได้ $4! = 24$ วิธี

   4) จัดลูก 4 คน นั่งโต๊ะกลมก่อน จัดได้ $3!$ วิธี
      มีที่ให้พ่อและแม่นั่งแทรกได้ 4 ที่
      ดังนั้น จัดให้พ่อแม่ต้องแยกกันได้ $4 \times 3 = 12$ วิธี
      วิธีทั้งหมดจัดได้ $(3!)(12) = 72$ วิธี

3. จัดเด็กชาย 4 คน นั่งโต๊ะกลมก่อน จะจัดได้ $3!$ วิธี
   มีที่ให้เด็กหญิง 3 คน แทรกได้ 4 ที่
   ดังนั้น จัดเด็กหญิงนั่งแยกกันได้ $4 \times 3 \times 2 = 24$ วิธี
   วิธีทั้งหมดที่จัดได้ $(3!)(24) = 144$ วิธี

4. จัดธงของชาติต่าง ๆ 5 ผืน ประดับรอบวงเวียนก่อน จะจัดได้ $4!$ วิธี
   มีที่ให้ธงไทยผืนแรกแทรกได้ 5 วิธี
   มีที่ให้ธงไทยผืนที่สองแทรกได้ 4 วิธี
   ดังนั้น จัดธงไทย 2 ผืน แยกกันได้ $5 \times 4 = 20$ วิธี
   วิธีทั้งหมดที่จัดได้ $(4!)(20) = 480$ วิธี

แบบฝึกหัด 3.3

1. จำนวนวิธีที่เลือกนักเรียนชาย 2 คน จาก 20 คน เท่ากับ $\binom{20}{2}$ วิธี

   จำนวนวิธีที่เลือกนักเรียนหญิง 2 คน จาก 25 คน เท่ากับ $\binom{25}{2}$ วิธี

   จำนวนวิธีที่เลือกครู 1 คน จากครู 7 คน เท่ากับ $\binom{7}{1}$ วิธี

   ดังนั้น จำนวนวิธีทั้งหมด $\binom{20}{2}\binom{25}{2}\binom{7}{1} = 399000$ วิธี

2. 1) สมชายได้รับเลือกเป็นกรรมการ

      ดังนั้น จะเลือกกรรมการได้อีก 2 คน จากสมาชิก 19 คนที่เหลือเท่ากับ $\binom{19}{2} = 171$ วิธี

   2) ถ้าสามีเป็นกรรมการจะเลือกกรรมการอีก 2 คน จากสมาชิก 18 คน ได้เท่ากับ $\binom{18}{2}$ วิธี

      ถ้าภรรยาเป็นกรรมการจะเลือกกรรมการอีก 2 คน จากสมาชิก 18 คน ได้เท่ากับ $\binom{18}{2}$ วิธี

      ถ้าภรรยาและสามีไม่ได้เป็นกรรมการทั้งคู่ จะเลือก 3 คน จาก 18 คน ได้เท่ากับ $\binom{18}{3}$ วิธี

      ดังนั้น เลือกกรรมการได้ทั้งหมด $2\binom{18}{2}+\binom{18}{3} = 1122$ วิธี

3. เลือกจุด 2 จุด เพื่อลากส่วนของเส้นตรงจากจุดทั้งหมด 10 จุด ได้เท่ากับ $\binom{10}{2} = 45$ เส้น

4. 1) หยิบสีแดง 1 ลูก จากสีแดง 5 ลูก ได้ $\binom{5}{1}$ วิธี

      หยิบสีขาว 1 ลูก จากสีขาว 3 ลูก ได้ $\binom{3}{1}$ วิธี

      หยิบสีน้ำเงิน 1 ลูก จากสีน้ำเงิน 3 ลูก ได้ $\binom{3}{1}$ วิธี

      วิธีหยิบได้ครบทุกสี $\binom{5}{1}\binom{3}{1}\binom{3}{1} = 45$ วิธี

   2) หยิบสีแดง 1 ลูก สีอื่น 2 ลูก ได้ $\binom{5}{1}\binom{6}{2} = 75$ วิธี

      หยิบสีแดง 2 ลูก จากสีอื่น 1 ลูก ได้ $\binom{5}{2}\binom{6}{1} = 60$ วิธี

หยิบสีแดง 3 ลูก ได้ $\binom{5}{3} = 10$ วิธี

วิธีหยิบได้สีแดงอย่างน้อย 1 ลูก $75 + 60 + 10 = 145$ วิธี

3) หยิบสีน้ำเงิน 1 ลูก สีอื่นที่ไม่ใช่สีขาวอีก 2 ลูก ได้ $\binom{3}{1}\binom{5}{2} = 30$ วิธี

หยิบสีน้ำเงิน 2 ลูก สีอื่นที่ไม่ใช่สีขาวอีก 1 ลูก ได้ $\binom{3}{2}\binom{5}{1} = 15$ วิธี

หยิบสีน้ำเงิน 3 ลูก ได้ $\binom{3}{3} = 1$ วิธี

วิธีหยิบได้สีน้ำเงินอย่างน้อย 1 ลูก แต่ไม่ได้สีขาว $30 + 15 + 1 = 46$ วิธี

5. เลือกชาย 1 คน เลือกหญิง 2 คน ได้ $\binom{4}{1}\binom{5}{2} = 40$ วิธี

เลือกชาย 2 คน เลือกหญิง 1 คน ได้ $\binom{4}{2}\binom{5}{1} = 30$ วิธี

เลือกชาย 3 คน ได้ $\binom{4}{3} = 4$ วิธี

วิธีเลือกผู้แทนโดยมีชายอย่างน้อย 1 คน มี $40 + 30 + 4 = 74$ วิธี

6. ผู้สมัคร 2 คน อุดมพร และเกศราภรณ์ ไม่ถูกเลือกทั้งคู่

ดังนั้น เลือกกรรมการ 5 คน จาก 9 คนได้ $\binom{9}{5} = 126$ วิธี

ผู้สมัคร 2 คน อุดมพร และเกศราภรณ์ จะไม่ถูกเลือกพร้อมกัน

เลือกกรรมการ 4 คน จาก 9 คน ได้ $\binom{9}{4} = 126$ วิธี

และเลือกกรรมการอีก 1 คน จาก 2 คน ที่กำหนดได้ $\binom{2}{1} = 2$ วิธี

ดังนั้น เลือกกรรมการ 5 คน ได้ $2(126) = 252$ วิธี

จะได้ จำนวนวิธีเลือกกรรมการทั้งหมด $126 + 252 = 378$ วิธี

7. กรณีที่ 1 เลือกมังคุดกับละมุด

ดังนั้น ผลไม้อีก 1 ชนิด จะเลือกจากผลไม้ 4 ชนิดที่เหลือ จะได้ $\binom{4}{1} = 4$ วิธี

กรณีที่ 2 ไม่เลือกมังคุดกับละมุด

ดังนั้น เลือกผลไม้ 3 ชนิด จากผลไม้ 4 ชนิดที่เหลือ จะได้ $\binom{4}{3} = 4$ วิธี

จำนวนวิธีเลือกทั้งหมด $4 + 4 = 8$ วิธี

8. กรณีที่ 1 สร้างรูปสามเหลี่ยม

จะเลือกจุด 3 จุด จากจุด 6 จุด ได้ $\binom{6}{3} = 20$ วิธี

กรณีที่ 2 สร้างรูปสี่เหลี่ยม

จะเลือกจุด 4 จุด จากจุด 6 จุด ได้ $\binom{6}{4} = 15$ วิธี

กรณีที่ 3 สร้างรูปห้าเหลี่ยม

จะเลือกจุด 5 จุด จากจุด 6 จุด ได้ $\binom{6}{5} = 6$ วิธี

กรณีที่ 4 สร้างรูปหกเหลี่ยม

จะเลือกจุด 6 จุด จากจุด 6 จุด ได้ $\binom{6}{6} = 1$ วิธี

ดังนั้น จะสร้างรูปเหลี่ยมได้ทั้งหมด $20 + 15 + 6 + 1 = 42$ วิธี

แบบฝึกหัด 3.4

1\. 1) $(2x^2 - y)^5$

$$= (2x^2 + (-y))^5$$

$$= \binom{5}{0}(2x^2)^5 + \binom{5}{1}(2x^2)^4(-y) + \binom{5}{2}(2x^2)^3(-y)^2 + \binom{5}{3}(2x^2)^2(-y)^3 + \binom{5}{4}(2x^2)(-y)^4 + \binom{5}{5}(-y)^5$$

$$= 32x^{10} - 80x^8y + 80x^6y^2 - 40x^4y^3 + 10x^2y^4 - y^5$$

2) $(3x - \frac{2}{y})^7$

$$= (3x + (-\frac{2}{y}))^7$$

$$= \binom{7}{0}(3x)^7 + \binom{7}{1}(3x)^6(-\frac{2}{y}) + \binom{7}{2}(3x)^5(-\frac{2}{y})^2 + \binom{7}{3}(3x)^4(-\frac{2}{y})^3 + \binom{7}{4}(3x)^3(-\frac{2}{y})^4 + \binom{7}{5}(3x)^2(-\frac{2}{y})^5$$

$$+ \binom{7}{6}(3x)(-\frac{2}{y})^6 + \binom{7}{7}(-\frac{2}{y})^7$$

$$= 2187x^7 - 10206\frac{x^6}{y} + 20412\frac{x^5}{y^2} - 22680\frac{x^4}{y^3} + 15120\frac{x^3}{y^4} - 6048\frac{x^2}{y^5} + 1344\frac{x}{y^6} - \frac{128}{y^7}$$

3) $(2x + 3y)^5$

$$= \binom{5}{0}(2x)^5 + \binom{5}{1}(2x)^4(3y) + \binom{5}{2}(2x)^3(3y)^2 + \binom{5}{3}(2x)^2(3y)^3 + \binom{5}{4}(2x)(3y)^4 + \binom{5}{5}(3y)^5$$

$$= 32x^5 + 240x^4y + 720x^3y^2 + 1080x^2y^3 + 810xy^4 + 243y^5$$

4) $\left(\frac{x}{2}+\frac{3}{y}\right)^4$

$$= \binom{4}{0}(\frac{x}{2})^4 + \binom{4}{1}(\frac{x}{2})^3(\frac{3}{y}) + \binom{4}{2}(\frac{x}{2})^2(\frac{3}{y})^2 + \binom{4}{3}(\frac{x}{2})(\frac{3}{y})^3 + \binom{4}{4}(\frac{3}{y})^4$$

$$= \frac{x^4}{16} + \frac{3x^3}{2y} + \frac{27x^2}{2y^2} + \frac{54x}{y^3} + \frac{81}{y^4}$$

2. อาศัยทฤษฎีบททวินาม พจน์ที่มี x^6y^4 ของการกระจาย $(2x + 3y)^{10}$

คือ $\binom{10}{4}(2x)^6(3y)^4 = 210(64x^6)(81y^4) = 1088640x^6y^4$

ดังนั้น สัมประสิทธิ์ของ x^6y^4 คือ 1088640

3. อาศัยทฤษฎีบททวินาม พจน์ที่ x^5y^{16} ของการกระจาย $(x + 2y^2)^{13}$

คือ $\binom{13}{8}(x)^5(2y^2)^8 = 1287\,x^5\,(256y^{16}) = 329472x^5y^{16}$

ดังนั้น สัมประสิทธิ์ของ x^5y^{16} คือ 329472

4. อาศัยทฤษฎีบททวินาม พจน์ที่มี x^9y^{14} ของการกระจาย $(x^3 - 3y^2)^{10}$

คือ $\binom{10}{7}(x^3)^3(-3y^2)^7 = 120x^9\,(-2187y^{14}) = -26\,2440\,x^9y^{14}$

ดังนั้น สัมประสิทธิ์ของ x^9y^{14} คือ -262440

5. อาศัยทฤษฎีบททวินาม พจน์ที่มี x^7 ของการกระจาย $(2x - 3)^{10}$

คือ $\binom{10}{3}(2x)^7(-3)^3 = 120(128x^7)(-27) = -414720x^7$

ดังนั้น สัมประสิทธิ์ของ x^7 คือ -414720

6. อาศัยทฤษฎีบททวินาม พจน์ที่ไม่มี x ของการกระจาย $(\frac{x^2}{4} - \frac{3}{x})^6$

คือ $\binom{6}{4}(\frac{x^2}{4})^2(-\frac{3}{x})^4 = 15(\frac{x^4}{16})(\frac{81}{x^4}) = \frac{1215}{16}$

แบบฝึกหัด 3.5 ก

1. 1) ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่าง

ลูกบอลสีแดงลูกที่หนึ่งแทนด้วย $ด_1$

ลูกบอลสีแดงลูกที่สองแทนด้วย $ด_2$

ลูกบอลสีขาวลูกที่หนึ่งแทนด้วย $ข_1$

ลูกบอลสีขาวลูกที่สองแทนด้วย $ข_2$

$S = \{(ด_1,ด_1), (ด_1,ด_2), (ด_1,ข_1), (ด_1,ข_2), (ด_2,ด_1), (ด_2,ด_2), (ด_2,ข_1), (ด_2,ข_2), (ข_1,ด_1), (ข_1,ด_2), (ข_1,ข_1),$
$(ข_1,ข_2), (ข_2,ด_1), (ข_2,ด_2), (ข_2,ข_1), (ข_2,ข_2)\}$

2) ให้ E แทนเหตุการณ์ที่ได้ลูกบอลทั้งสองลูกเป็นสีขาว

$E = \{(ข_1,ข_1), (ข_1,ข_2), (ข_2,ข_1), (ข_2,ข_2)\}$

2. 1) ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างที่สนใจการขึ้นหน้าของเหรียญ

$S = \{(H,H,H), (H,H,T), (H,T,H), (H,T,T), (T,H,H), (T,H,T), (T,T,H), (T,T,T)\}$

2) ให้ E_1 แทนเหตุการณ์ที่ออกหัวอย่างน้อยหนึ่งครั้ง

$E_1 = \{(H,H,H), (H,H,T), (H,T,H), (H,T,T), (T,H,H), (T,H,T), (T,T,H)\}$

3) ให้ E_2 แทนเหตุการณ์ที่ออกหัวเพียงหนึ่งครั้ง

$E_2 = \{(H,T,T), (T,H,T), (T,T,H)\}$

4) ให้ E_3 แทนเหตุการณ์ที่ออกหัวสามครั้ง

$E_3 = \{(H,H,H)\}$

5) ให้ E_4 แทนเหตุการณ์ที่ไม่ออกหัวเลย

$E_4 = \{(T,T,T)\}$

3. 1) ให้ E_1 แทนเหตุการณ์ที่เหรียญออกก้อยและลูกเต๋าขึ้นแต้มเป็นจำนวนคี่

$E_1 = \{(T, 1), (T, 3), (T, 5)\}$

2) ให้ E_2 แทนเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าขึ้นแต้มเป็นจำนวนที่หารด้วย 3 ลงตัว

$E_2 = \{(H, 3), (H, 6), (T, 3), (T, 6)\}$

3) ให้ E_3 แทนเหตุการณ์ที่เหรียญออกหัว และลูกเต๋าขึ้นแต้มเป็นจำนวนคู่

$E_3 = \{(H, 2), (H, 4), (H, 6)\}$

4. 1) ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่าง

$S = \{(H,H,H), (H,H,T), (H,T,H), (H,T,T), (T,H,H), (T,H,T), (T,T,H), (T,T,T)\}$

2) $E_1 = \{(H,H,H), (T,T,T)\}$

3) $E_2 = \{(H,H,H), (H,H,T), (H,T,H), (T,H,H)\}$

4) $E_3 = \{(H,T,T), (T,H,T), (T,T,H), (T,T,T)\}$

5) $E_1 \cup E_2 = \{(H,H,H), (H,H,T), (H,T,H), (T,H,H), (T,T,T)\}$

6) $E_1 \cup E_3 = \{(H,H,H), (H,T,T), (T,H,T), (T,T,H), (T,T,T)\}$

7) $E_2 \cup E_3 = \{(H,H,H), (H,H,T), (H,T,H), (T,H,H), (H,T,T), (T,H,T), (T,T,H),(T,T,T)\}$

8) $E_1 \cap E_2 = \{(H,H,H)\}$

9) $E_1 \cap E_3 = \{(T,T,T)\}$

10) $E_2 \cap E_3 = \varnothing$

11) $E'_1 = \{(H,H,T), (H,T,H), (H,T,T), (T,H,H), (T,H,T), (T,T,H)\}$

12) $E'_2 = \{(H,T,T), (T,H,T), (T,T,H), (T,T,T)\}$

13) $E'_3 = \{(H,H,H), (H,H,T), (H,T,H), (T,H,H)\}$

แบบฝึกหัด 3.5 ข

1. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่าง

E แทนเหตุการณ์ได้ลูกบอลสีแดง 2 ลูก สีเหลือง 1 ลูก ตามลำดับ

$$n(S) = \binom{30}{1}\binom{29}{1}\binom{28}{1}$$

$$n(E) = \binom{10}{1}\binom{9}{1}\binom{10}{1}$$

ดังนั้น $P(E) = \dfrac{10 \times 9 \times 10}{30 \times 29 \times 28} = \dfrac{15}{406}$

2. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่าง

E แทนเหตุการณ์ที่ปารมี และภูผา นั่งติดกัน

$n(S) = 9!$

$n(E) = 2 \cdot 8!$

ดังนั้น $P(E) = \dfrac{2 \cdot 8!}{9!} = \dfrac{2}{9}$

3. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่าง

E แทนเหตุการณ์ที่ผลรวมของแต้มบนบัตรมากกว่า 10

$n(S) = \binom{5}{3} = 10$

$E = \{245, 345\}$

$n(E) = 2$

ดังนั้น $P(E) = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$

4. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่าง

E แทนเหตุการณ์ที่นักเรียนชายและนักเรียนหญิงยืนสลับกันคนต่อคน

$n(S) = 8!$

$n(E) = 2 \cdot 4! \cdot 4!$

ดังนั้น $P(E) = \dfrac{2 \cdot 4! \cdot 4!}{8!} = \dfrac{1}{35}$

5. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่าง

E แทนเหตุการณ์ที่ได้ลูกแก้วสีต่างกันทั้ง 3 ลูก

$n(S) = \binom{13}{3} = 2 \times 11 \times 13$

$n(E) = \binom{6}{1}\binom{4}{1}\binom{3}{1} = 6 \times 4 \times 3$

ดังนั้น $P(E) = \dfrac{6 \times 4 \times 3}{13 \times 22} = \dfrac{36}{143}$

6. 1) ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่าง

E_1 แทนเหตุการณ์ที่สุ่มหยิบได้หนังสือคณิตศาสตร์

$n(S) = \binom{6}{1}+\binom{6}{2}+\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{6}{5}+\binom{6}{6}$ หรือ $2^6 - 1$

$= 63$

$n(E_1) = \binom{3}{1}+\binom{3}{2}+\binom{3}{3}$

$= 7$

ดังนั้น $P(E_1) = \frac{7}{63} = \frac{1}{9}$

2) E_2 แทนเหตุการณ์ที่สุ่มหยิบได้หนังสือเคมี

$n(E_2) = \binom{2}{1}+\binom{2}{2}$

$= 3$

ดังนั้น $P(E_2) = \frac{3}{63} = \frac{1}{21}$

3) E_3 แทนเหตุการณ์ที่สุ่มหยิบได้หนังสือฟิสิกส์

$n(E_3) = 1$

ดังนั้น $P(E_2) = \frac{1}{63}$

4) E_4 แทนเหตุการณ์ที่สุ่มหยิบได้หนังสือครบทุกวิชา

ถ้าหยิบ 3 เล่ม ได้ครบทุกวิชา จะได้ $\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = 6$ วิธี

ถ้าหยิบ 4 เล่ม ได้ครบทุกวิชา จะได้ $\binom{3}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1}+\binom{3}{1}\binom{2}{2}\binom{1}{1} = 9$ วิธี

ถ้าหยิบ 5 เล่ม ได้ครบทุกวิชา จะได้ $\binom{3}{3}\binom{2}{1}\binom{1}{1}+\binom{3}{2}\binom{2}{2}\binom{1}{1} = 5$ วิธี

ถ้าหยิบ 6 เล่ม ได้ครบทุกวิชา จะได้ $\binom{3}{3}\binom{2}{2}\binom{1}{1} = 1$ วิธี

$n(E_4) = 6+9+5+1 = 21$ วิธี

ดังนั้น $P(E_4) = \frac{21}{63} = \frac{1}{3}$

7. ให้ S เป็นปริภูมิตัวอย่าง

E แทนเหตุการณ์ที่สวมเสื้อและกางเกงสีต่างกัน

$n(S) \;=\; 5 \times 4 \;=\; 20$

ถ้าสวมเสื้อสีขาวต้องเลือกกางเกงสีเทา จะเลือกได้ $\binom{3}{1}\binom{3}{1} = 9$

ถ้าสวมเสื้อสีฟ้า เลือกกางเกงสีขาวหรือสีเทาก็ได้ จะเลือกได้ $\binom{2}{1}\binom{4}{1} = 8$

จะได้ $\quad n(E) \;=\; 9+8 \;=\; 17$

ดังนั้น $\quad P(E) \;=\; \frac{17}{20}$

8. มีจำนวนส้มเป็น 2 เท่าของจำนวนมังคุด และมีมะม่วง 1 ลูก

จะได้จำนวนส้มมี 6 ลูก จำนวนมังคุดมี 3 ลูก มะม่วงมี 1 ลูก

S เป็นปริภูมิตัวอย่าง จะได้ $n(S) = \binom{10}{3} = 120$

E แทนเหตุการณ์ที่ได้ผลไม้ชนิดละ 1 ลูก

$$n(E) \;=\; \binom{6}{1}\binom{3}{1}\binom{1}{1} \;=\; 18$$

ดังนั้น $\quad P(E) \;=\; \frac{18}{120} \;=\; \frac{3}{20}$

9. P(A) เป็นความน่าจะเป็นที่นายธงชัยสอบผ่านวิชาคณิตศาสตร์ เท่ากับ 0.6

P(B) เป็นความน่าจะเป็นที่นายธงชัยสอบผ่านวิชาภาษาอังกฤษ เท่ากับ 0.5

$P(A \cup B)$ เป็นความน่าจะเป็นที่ผ่านอย่างน้อย 1 วิชา เท่ากับ 0.8

$P(A \cap B)$ เป็นความน่าจะเป็นที่ผ่านทั้งสองวิชา

จาก $\quad P(A \cup B) \;=\; P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

ดังนั้น $\quad P(A \cap B) \;=\; 0.6 + 0.5 - 0.8 \;=\; 0.3$

10. P(A) เป็นความน่าจะเป็นที่นักเรียนชอบวิชาคณิตศาสตร์ เท่ากับ $\frac{60}{120} = \frac{1}{2}$

P(B) เป็นความน่าจะเป็นที่นักเรียนชอบวิชาภาษาอังกฤษ เท่ากับ $\frac{50}{120} = \frac{5}{12}$

$P(A \cap B)$ เป็นความน่าจะเป็นที่นักเรียนชอบทั้งสองวิชา เท่ากับ $\frac{20}{120} = \frac{1}{6}$

1) $P(A \cup B)$ เป็นความน่าจะเป็นที่ชอบเรียนอย่างน้อย 1 วิชา

จาก
$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{5}{12} - \frac{1}{6} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

2) $P(A \cup B)'$ เป็นความน่าจะเป็นที่ไม่ชอบทั้งสองวิชา

จาก $P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B)$

$= 1 - \frac{3}{4}$

$= \frac{1}{4}$

3) $P(A - B)$ เป็นความน่าจะเป็นที่ชอบคณิตศาสตร์แต่ไม่ชอบภาษาอังกฤษ

จาก $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{6}$

$= \frac{1}{3}$

4) $P(A \cap B)'$ เป็นความน่าจะเป็นที่ชอบอย่างมาก 1 วิชา

จาก $P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B)$

$= 1 - \frac{1}{6}$

$= \frac{5}{6}$

11. $P(A)$ แทนความน่าจะเป็นที่มีอาชีพทนายความ เท่ากับ $\frac{160}{300} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$

$P(B)$ แทนความน่าจะเป็นที่มีอาชีพขายประกัน เท่ากับ $\frac{90}{300} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$

$P(A \cap B)$ แทนความน่าจะเป็นที่มีอาชีพทนายความและขายประกัน เท่ากับ $\frac{40}{300} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$

$P(A \cup B)'$ แทนความน่าจะเป็นที่ไม่เป็นทนายความและไม่ขายประกัน

จาก $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \frac{16}{30} + \frac{9}{30} - \frac{4}{30}$

$= \frac{7}{10}$

ดังนั้น $P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B)$

$= 1 - \frac{7}{10}$

$= \frac{3}{10}$

คณะกรรมการดำเนินการจัดทำคู่มือครู รายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔ – ๖ เล่ม ๔ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑

นายประสาท สอ้านวงศ์	ข้าราชการบำนาญ
นางสาวสิริพร ทิพย์คง	มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
นางสาวจำเริญ เจียวหวาน	โรงเรียนมหิดลวิทยานุสรณ์
นางสาวราตรี คำเทียนทอง	ข้าราชการบำนาญ
นางสาวจินตนา อารยะรังสฤษฏิ์	ข้าราชการบำนาญ
นางวัลลภา บุญวิเศษ	โรงเรียนเบ็ญจะมะมหาราช
นายดนัย ยังคง	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นายสมนึก บุญพาไสว	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางชมัยพร ตั้งตน	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวอลงกรณ์ ตั้งสงวนธรรม	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวนวลจันทร์ ผมอุดทา	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวศศิวรรณ เมลืองนนท์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นายอนุชิต อารมณ์สาวะ	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวปฐมาภรณ์ อวชัย	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

คณะบรรณาธิการ

นายประสาท สอ้านวงศ์	นางสาวจำเริญ เจียวหวาน
นางสาวสิริพร ทิพย์คง	นางสาวราตรี คำเทียนทอง

ผู้จัดพิมพ์ต้นฉบับ

นางสาวปิยาภรณ์ ทองมาก	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

ศึกษาภัณฑ์พาณิชย์
พิมพ์ที่โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว
นายสันติภาพ อินทรพัฒน์ ผู้พิมพ์โฆษณา
๕๘๐๐๐๘๐
www.suksapan.or.th